Aplicaciones lineales. Diagonalización

1.- En los siguientes casos estudiar si f es una *aplicación lineal* y en caso afirmativo hallar una *matriz* A tal que $f(\vec{x}) = A\vec{x}$, así como los *subespacios vectoriales N(f)* e *Im(f)*

a) f(x,y) = (2x,-y)
b) f(x,y) = (x^2,y)
c) f(x,y,z) = (2x+y, x-y-z,0)
d) f(x,y) = (x^2 + y^2, $\sqrt[3]{xy}$)

Solución

2.- Se considera la aplicación f: $\Re^4 \to \Re^4$ definida por:

$$f(x, y, z, t) = (x + y + a z, -2x + y + t, a x + 2y - 2t, a z + t)$$

a) Escribir su ecuación matricial de f y probar que f es *lineal* para $\forall$ a real.
b) Hallar los valores de a para los que f es *biyectiva*.
c) Para a = 0, hallar los subespacios *Núcleo* e *Imagen* de f y dar una *base* de cada uno de ellos
d) Estudiar si f es una aplicación *inyectiva* para a = 0.
e) ¿(1,1,1,0) $\in$ *N(f)*? ¿(2,-1,2,0) $\in$ *Im(f)*?
f) Dado el subespacio S = {(x,y,z,t) $\in \Re^4$ tales que x + y – z = y + z – t = 0}, hallar una base, la *dimensión* y unas *ecuaciones implícitas* de f(S) para a = 0.

Solución

3.- a) Hallar, respecto de la *base canónica*, la ecuación de la *transformación lineal f (endomorfismo)* de $\Re^3$ que verifica que f(2, 1, 0) = (7, 0, 0), f(-1, 3, 1) = (0, 7, 0), f(0, 5, 7) = (5, 10, 0).

b) ¿Es f *biyectiva*?
c) Hallar *N(f)* e *Im(f)*.
d) ¿Qué condición debe satisfacer la matriz A asociada a un endomorfismo para que las imágenes de vectores *linealmente independientes* sean linealmente independientes?

Solución

4.- Sean B $=\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ y B₁ $=\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ dos *bases* de $\Re^3$ y f un *endomorfismo* que respecto de la base B tiene por ecuación f(x, y, z) = (x +y, y + z, x + z). Se pide hallar la ecuación de f respecto de la base B' siendo $\vec{u}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{u}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{u}_3 = \vec{e}_1$.

Solución

5.- Sea f la *transformación lineal* de $\Re^3$ tal que:

N(f) = $\langle (5,1,0),(-3,0,1) \rangle$ y f(1,0,0)=(2,-1,1). Se pide:

a) La matriz A asociada a f respecto de la *base canónica*.
b) Sin hacer cálculos razona porqué 0 es un *valor propio* de A y cuál es su mínimo orden de multiplicidad.
c) Hallar todos los *valores propios* de A y los *subespacios de vectores propios* asociados.
d) Razonar si A es *diagonalizable*. En caso afirmativo, escribir una *matriz diagonal* D *semejante* a A y la matriz de paso correspondiente.
e) Hallar A^n.

Solución

6.- Sea f un *endomorfismo* de $\mathfrak{R}^3$ cuya matriz asociada A, respecto de la *base canónica*, verifica que tiene 2 *valores propios* distintos, $\lambda=2$ doble y $\lambda=0$ simple, y que los *subespacios de vectores propios* asociados respectivamente son $V_2 = \langle(1, 0, 1), (0,1,2)\rangle$ y $V_0 = \langle(1,1,1)\rangle$.

a) Razonar porqué A es *diagonalizable*.
b) Escribir una *matriz D diagonal* semejante a A, así como la matriz de paso que permite dicha diagonalización.
c) Hallar A.
d) Dar sendas *bases* de *N(f)* e *Im(f)*.
e) ¿Qué debe verificar A para que haya *vectores* no nulos de R^3 *invariantes* por f? Sin hacer cálculos, argumenta si existen vectores no nulos de R^3 invariantes por f.

Solución

7.- Sea f la *transformación lineal* de $\mathfrak{R}^3$ cuya matriz en la *base canónica* es:

$$A=\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Estudiar para qué valores de a y b es A *diagonalizable*.
b) ¿Cuál es el *subespacio de vectores* invariantes por f para a = 1?
c) Justificar para qué valores de a f no es *biyectiva*.

Solución

8.- a) Comprobar que la matriz $A=\begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ no es *diagonalizable*.

b) Comprobar, sin efectuar ningún cálculo que la matriz $B=\begin{pmatrix} 0 & a & 1 & b \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ es *diagonalizable* para cualquier valor que tomen *a* y *b*.

Solución

9.- Se considera la *transformación lineal* de R^3 definida por la *matriz simétrica* $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Hallar una *base* de *vectores propios* que sean *ortogonales* entre sí.

b) Hallar una matriz de paso *ortogonal* y la *matriz diagonal semejante* a A.

Solución

10.- Demostrar que si Q es una *matriz ortogonal* que permite la *diagonalización* de A entonces A es *simétrica*:

Solución

11.- Se considera la aplicación f: $R^4 \to R^4$ definida por:

f(x, y, z, t) = (x + y + t, x – y + z + t, 2y – z, 3t)

a) Escribir su ecuación matricial y probar que f es *lineal*.
b) Hallar los subespacios *núcleo* e *imagen* de f y dar una *base* y la *dimensión* de cada uno de ellos.
c) Dado el subespacio S = {(x, y, z, t) $\in R^4$ tales que x + y – z = y + z – t = 0}, hallar una *base*, la *dimensión* y unas *ecuaciones implícitas* de f(S).
d) Estudiar si los vectores (2, 0, 2, 3) y (4, 0, 3, 0) pertenecen a *Im(f)*.
e) Clasificar.

Solución

12.- Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ la matriz asociada a cierto *endomorfismo* f de R^3 respecto de la *base canónica* y sean los vectores $\vec{u}_1 = (1,1,0)$, $\vec{u}_2 = (0,1,1)$, $\vec{u}_3 = (-1,2,1)$ de R^3.

a) Comprobar que $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es un *sistema libre* pero ,$\{f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), f(\vec{u}_3)\}$ es *ligado*.
b) ¿Qué condición debe satisfacer la matriz A asociada a un *endomorfismo* para que las imágenes de vectores *l.i.* sean *l.i.*?

Solución

13.- Probar que cualquier *matriz simétrica* real de orden 2 es *diagonalizable*.

Solución

14.- Halla una matriz de paso *ortogonal* para *diagonalizar* $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Solución

15.- Calcular A^n siendo $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Solución

16.- Sean $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una *base* del *espacio vectorial* R^3 y la *transformación lineal* f tal que: $\begin{cases} f(\vec{u}_1) = 3\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 \\ f(\vec{u}_2) = -5\vec{u}_1 + \vec{u}_2 \\ f(\vec{u}_3) = 4\vec{u}_2 \end{cases}$. Se pide:

a) Matriz asociada a f respecto de la base B.
b) Escribir su ecuación matricial.
c) Hallar la expresión analítica de f respecto de la base B.
d) Obtener el subespacio *núcleo* f. Dar una base.
e) Obtener el subespacio *imagen* f. Dar una base.
f) ¿Son el *N(f)* e *Im(f) suplementarios*?
g) ¿*Rango* de f?
h) ¿Es f un *epimorfismo*?
i) ¿Es f un *monomorfismo*?
j) ¿Es f un *isomorfismo*?
k) ¿Es f un *automorfismo*?

Solución

17.- En el espacio vectorial $R^3(R)$ se define la *aplicación lineal*:
$f: R^3 \to R^3$, $f(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$. Se pide:

1. Matriz de f respecto de la *base canónica*. (llamarla A)
2. Clasificar f.
3. *Valores propios* de f.
4. Estudiar la *diagonalización* de f.
5. *Base* de *vectores propios* (si procede)
6. Matriz de f respecto de esta base de *vectores propios*. (llamarla D)
7. Relación entre la matriz A y D.
8. Hallar las *ecuaciones paramétricas* de todos los *subespacios invariantes*.
9. Hallar A^{25}.

Solución

18.- Sea $f: \mathfrak{R}^4 \to \mathfrak{R}^4$ definida por $f(x,y,z,t)=(7x,7y,7z+7t,0)$. Se pide:

a) Escribir la matriz A de la aplicación y la ecuación matricial en la *base canónica*
b) Hallar las *ecuaciones implícitas* de la imagen del *subespacio.*
$S=\{(x,y,z,t)\in\Re^4/x=y=z\}$
Calcular una *base* y las ecuaciones del *núcleo* y de la *imagen* de f
Hallar el *polinomio característico* y los *subespacios de vectores propios* de f
Obtener la matriz P de *cambio de base* que *diagonaliza* A y la matriz D *diagonal* y *semejante* a A.

Solución

19.- Sea f una *transformación lineal* de R^4 tal que su matriz asociada respecto de la *base canónica* es:

$$A=\begin{pmatrix} -4 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -6 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Hallar sendas *bases* de *N(f)* e *Im(f)*.
b) Hallar el *polinomio característico* y los *vectores propios* de f, así como los s.v. de vectores propios asociados ¿Coincide *N(f)* con alguno de éstos últimos?
c) Escribir el enunciado de un teorema de diagonalización que pruebe que A es *diagonalizable* y dar una base de vectores de R^4 respecto de la cual la matriz asociada a f sea una *matriz D diagonal*.
d) Dar D y la matriz P de *cambio de base* que diagonaliza A.
e) Escribir la definición de *matrices semejantes* ¿Son A y D semejantes? En caso afirmativo hallar A^7 utilizando que A y D son *semejantes*.

Solución

20.- Analizar si la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ es *diagonalizable* según los valores del *parámetro* k.

Solución

21.- Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calcular los *autovalores* de A y sus respectivas multiplicidades algebraicas.

b) Hallar las *ecuaciones paramétricas* y *cartesianas* de los *subespacios propios* de A.

c) Obtener una *base unitaria* de R^4 formada por *vectores propios* unitarios de A.

d) Calcular una *matriz diagonal semejante* a la matriz A.

e) Calcular el producto matricial $A^n \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solución

22.- Dada la *transformación lineal* de R^3 definida por:

$$f(x, y, z) = (4x + y - 4z, 3z - 3x, 3x + y - 3z)$$

Se pide:

a) La matriz A asociada a f respecto de la *base canónica*.
b) Sendas *bases* de *N(f)* e *Im(f)*.
c) Una base del subespacio *ortogonal* de *N(f)*.
d) Estudiar si A es *diagonalizable* y , en su caso, dar la *matriz diagonal*.
e) Hallar la matriz asociada a f respecto de la base
   B' = { (1, 0, 1), (1, -1, 0), (0, 0, 1)}

Solución

23.- Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & a & 2-a \\ 0 & a & -a \end{pmatrix}$ asociada a cierta *transformación lineal*

$f : V_3 \longrightarrow V_3$. Se pide:

a) Estudiar los valores de a para los cuales M es *diagonalizable*.

b) Para a=0, hallar *N(f)*, *Im(f)* y el subespacio de *vectores invariantes*.

Solución

24.- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores de α y β es A *diagonalizable*? Y ¿para qué valores de α y β se obtiene para A un *valor propio* triple?

b) Para α=0 y β=-1, hallar:

   i) una *matriz diagonal semejante* a A.
   ii) una matriz P que permita la diagonalización.
   iii) una matriz P* *ortogonal* que permita la diagonalización.

Solución

25.- Sea la *aplicación lineal* $f:R^4 \rightarrow R^4$ definida por f(x,y,z,t)=(x, 3x+3y, 5y+5z+7t, 0). Se pide:

a) Escribir la matriz A de la aplicación y la ecuación matricial en la *base canónica*.
b) Hallar las *ecuaciones implícitas* de la *imagen* por f del subespacio $S=\{(x,y,z,t)\in R^4 / x=y\ ,\ x+y+z=0\}$
c) Calcular una *base* y las *ecuaciones implícitas* del *núcleo* y de la *imagen* de f.
d) Hallar el *polinomio característico* y los subespacios de *vectores propios* de f.
e) Obtener la matriz P de *cambio de base* que diagonaliza A y la matriz D *diagonal* y *semejante* a A.

Solución

26.- Sea f la *transformación lineal* de $\Re^3$ tal que:
$f(\vec{i})=(4,\ 2,\ 1)$, $f(\vec{j})=(1,\ 5,\ 1)$, $f(\vec{k})=(-1,\ -2,\ 2)$ donde $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ es la *base canónica*. Se pide:

a) La matriz A asociada a f respecto de la *base canónica*.
b) Hallar los *valores propios* de A y los *subespacios* de *vectores propios* asociados.
c) Razonar si A es *diagonalizable*. En caso afirmativo, escribir una *matriz diagonal D semejante* a A y la matriz de paso correspondiente.
d) Hallar *N(f)*, *Im(f)* e indicar si f es *biyectiva*.
e) Hallar A^n.

Solución

27.- Sea la *transformación lineal* f de R^3 tal que:
$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,+2x_2,2x_1+x_2,-x_3)$ Se pide:
a) Hallar la matriz M asociada a f respecto de la *base canónica*.
b) Obtener el subespacio *núcleo* f. Dar una *base*.
c) Obtener el subespacio *imagen* f. Dar una *base*.
d) ¿Es f una *transformación ortogonal*?
e) *Diagonalizar*, si es posible, la matriz M.
f) Obtener una *base ortonormal* de R^3 formada por *vectores propios* de M.

Solución

28.- Sea f la *transformación lineal* cuya matriz asociada respecto de la *base canónica* es: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Se pide:

a) Dar una *base* de *Im(f)*
b) ¿Es f un *isomorfismo*?
c) ¿Es f *diagonalizable*?
d) En el caso de que sea diagonalizable, encontrar una matriz P que permita la diagonalización.

Solución

29.- Sea C el subconjunto de vectores del espacio vectorial R^3 dado por:

$$C = \{(x,y,z) /\ \ x + y + z = 0\}$$

y sea f la *transformación lineal* $f : R^3 \to R^3$ tal que:

$$f(x,y,z) = (x + 2y + z, 2x + 2z, y) \qquad \text{Se pide:}$$

a) Demostrar que C es un *subespacio vectorial* de R^3.
b) Obtener una *base* y unas *ecuaciones paramétricas* de C.
c) Obtener la ecuación matricial de f.
d) Dar unas *ecuaciones paramétricas* y unas *ecuaciones implícitas* del *Núcleo* y de la *Imagen* de f.
e) Comprobar si f es *diagonalizable* y, en su caso, obtener una base de R^3 respecto de la cuál la matriz asociada a f sea una *matriz diagonal*.
f) Hallar la *dimensión* de f(C).

Solución

30.- Sea f una *transformación lineal* de R^3 cuyos *valores propios* son 2 y 3, con *subespacios propios* respectivos:

$$V_{\lambda=2} = \{(x,y,z) \in R^3 /\ \ x = 0\} \qquad V_{\lambda=3} = \{(x,y,z) \in R^3 /\ \ x = y = z\}$$

Se pide:

a) Una *base* de cada *subespacio propio*.
b) El *subespacio vectorial* $V_{\lambda=2} \cap V_{\lambda=3}$.
c) ¿Son *suplementarios* los dos subespacios propios? y ¿*ortogonales*?
d) Una *base* de R^3 formada exclusivamente por *vectores propios*.
e) Una *matriz diagonal* que defina f.
f) La matriz asociada a f respecto de la *base canónica*.

Solución

31.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) Comprobar que es *diagonalizable*.
b) Calcular una *matriz D semejante* a la matriz A.
c) Hallar una *base* de *vectores propios* del *endomorfismo* definido por A.
d) Hallar la matriz P, tal que, $D = P^{-1}AP$.

Solución

32.- Sean $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una *base* del espacio vectorial R^3 y la *transformación lineal* f tal que:

$$\begin{cases} f(\vec{u}_1) = \vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3 \\ f(\vec{u}_2) = 2\vec{u}_2 + 2\vec{u}_3 \\ f(\vec{u}_3) = \vec{u}_3 \end{cases}$$. Se pide:

a) Escribir su ecuación matricial.
b) Obtener el subespacio *núcleo* f. Dar una *base*.
c) Obtener el subespacio *imagen* f. Dar una *base*.
d) ¿Es f *biyectiva*?
e) ¿Es f una *transformación ortogonal*?
f) *Diagonalizar*, si es posible, la *transformación lineal* f.

Solución

33.- Sea la *aplicación lineal* f: $\Re^3 \to \Re^3$ definida por:
f (x , y , z) = (- x + 2y , - x + 2y , - x + y + z) y sea S el *subespacio vectorial* de $\Re^3$ generado por los vectores:
S = < (1 , 1 , 0) , (2 , 2 , 1) , (1 , 1 , 1) , (0 , 0 , 1) > .
Se pide:

a) Obtener las *ecuaciones implícitas* del *núcleo* y la *imagen* de f.
b) Demostrar que f es *diagonalizable.*
c) Obtener una *base* B de $\Re^3$ en la cual la matriz asociada a f sea *diagonal*.
d) Obtener unas *ecuaciones implícitas* de S en la *base canónica* y otras *ecuaciones implícitas* de S en la base B.

Solución

34.- a) Hallar el *rango* de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

b) Sea F el *subespacio vectorial* de R^3 engendrado por los vectores fila de la matriz A. Hallar una *base* de F.
c) Hallar unas *ecuaciones paramétricas* de F.
d) Hallar unas *ecuaciones implícitas* de F.
e) Sea C el *subespacio vectorial* de R^3 engendrado por los vectores columna de la matriz A. Hallar una *base* de C.
f) Encontrar una relación de dependencia lineal existente entre los vectores columna de la matriz A.
g) Hallar unas *ecuaciones paramétricas* de C.
h) Hallar unas *ecuaciones implícitas* de C.
i) ¿F y C son *hiperplanos* distintos?
j) Calcular una *base* y unas *ecuaciones paramétricas* de $F \cap C$.
k) ¿Es A *diagonalizable*? En caso afirmativo, hallar una *matriz diagonal semejante* a A.

Solución

35.- Dado el *endomorfismo* de R^3 definido por f(x,y,z)=(x+2y-z,2y+z,2y+3z)

1°) Hallar la matriz A que define el *endomorfismo* f.

2°) Hallar los *subespacios propios* y una *base* de cada uno de ellos.

3°) Hallar algún subespacio *invariante* y el subespacio de *vectores invariantes*.

4°) ¿Es *inyectivo*? ¿Es *sobreyectivo*?

5°) ¿La matriz A es *diagonalizable*?

6°) ¿La suma de los *subespacios propios* es *suma directa*? ¿Son *suplementarios* los subespacios propios hallados en el apartado 2?

Solución

36.- Sea f una *aplicación lineal* tal que:

$$f(1,1,0) = (5,-1,3);\quad f(1,-2,0) = (5,2,3);\quad f(0,0,1) = (0,a,b)$$

Se pide:

a) Hallar la matriz A asociada a f respecto de la *base canónica* y el valor de $|A|$.

b) Hallar los valores de a y b para los que f es *biyectiva*.

c) Para b = 0 hallar sendas *bases* de *N(f)* e *Imf*.

Solución

37.- Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & b \end{pmatrix}$, se pide:

a) Su *polinomio característico* y los *valores propios* asociados.

b) Estudiar la *diagonalización* de M en función de los valores de b.

c) Hallar una *matriz D diagonal semejante* a M para b=0 y la matriz P que permite la diagonalización.

Solución

38.- Sea f una *aplicación lineal* tal que:

$$f(0,1,1) = (0,a,2);\quad f(0,1,0) = (-5,0,-3);\quad f(1\text{-}1,0) = (8,-2,6)$$

Se pide:

a) Hallar la matriz A asociada a f y el valor de $|A|$.

b) Hallar las *dimensiones* de los *subespacios N(f)* e *Imf*, en función de los valores de a.

Solución

39.-Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 5 \\ -2 & 0 & a \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Su *polinomio característico*

b) El valor de *a* para que $\lambda = 2$ sea una *valor propio* de M.

c) Estudiar si la matriz M es *diagonalizable* para *a* = 2 y hallar una *matriz D diagonal semejante* a M y la matriz P correspondiente que permite la diagonalización.

d) Escribir la igualdad matricial que relaciona D y M.

Solución

40.- Dada la *transformación lineal* $f(\vec{x}) = A\vec{x}$, donde $A = \begin{pmatrix} -5 & -15 & -12 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Hallar la *dimensión* y una *base* de los subespacios *N(f)* e *Imf*, respectivamente.

b) Estudiar si f es *diagonalizable* y, en su caso, calcular una *matriz D diagonal semejante* a la matriz A y la matriz P que permite la diagonalización.

Sea g una *transformación lineal* de R^3 tal que $g(\vec{u}) = 6\vec{u}$, $g(\vec{v}) = 3\vec{v}$, $g(\vec{w}) = 6\vec{w}$, para los vectores $\vec{u} = (-1,-1,0)$, $\vec{v} = (-1,\ 1,-1)$ $\vec{w} = (-1,\ 0,-1)$.

c) ¿Cómo se denominan los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$? ¿Cómo se denominan los escalares 3 y 6?

d) Hallar la *matriz* M asociada a *g* respecto de la *base canónica*.

Solución

41.- Dada la *aplicación lineal* $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ donde $A = \begin{pmatrix} k-1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & k+1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Hallar el valor de k para el cual f no es *biyectiva*.

b) Para el valor de k obtenido en a) halla las *dimensiones* de los subespacios *N(f)* e *Im(f)*.

c) Justificar por qué f es *diagonalizable* para cualquier valor real de k.

Solución

42.- Sea la aplicación $f: P_2(x) \to P_2(x)$, tal que:

$$f(a + bx + cx^2) = (a + bx + cx^2) + (c + bx + ax^2).$$

a) Demostrar que f es una *aplicación lineal*. b) Hallar la matriz de la aplicación lineal al tomar $B = \{1,\ x,\ x^2\}$ como *base* de P2(x). c) Determinar el *núcleo* de esta aplicación. (P2(x) es el *espacio vectorial* de *polinomios* de grado ≤2).

Solución

43.- En caso de existir, encontrar la *diagonalización ortogonal* de la siguiente matriz: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Solución

44.- Encontrar una matriz real y *simétrica* que cumpla siguientes condiciones:

1.- Sus *vectores propios* son $\{(1,0,1),(1,2,-1),(-1,1,1)\}$

2.- Es *semejante* a la siguiente matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Solución

45.- Sea f la *transformación lineal* cuya matriz asociada respecto de la *base canónica* es $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$. Se pide:

a) ¿Para qué valores de α es f un *isomorfismo* (*biyectiva*)?
b) Para $\alpha = 0$, una *base* de *Im(f)*
c) Valores de α para los cuales A es *diagonalizable*.
d) Para $\alpha = 0$, una *base* de R^3 formada por *vectores propios* de la matriz A.
e) Para $\alpha = 0$, hallar A^{25} utilizando, si es posible, la diagonalización de A.

Solución

46.- Sea f la *transformación lineal* cuya matriz asociada respecto de la *base canónica* es $A=\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) ¿Para qué valores de α es f un *isomorfismo* (*biyectiva*)?
b) Para $\alpha = 0$, una *base* de *Im(f)*
c) Valores de α para los cuales A es *diagonalizable*.

d) Para $\alpha = 0$, una *base* de R^3 formada por *vectores propios* de la matriz A.
e) Para $\alpha = 0$, hallar A^{25} utilizando, si es posible, la diagonalización de A.

Solución

47.- Sean $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una *base* del espacio vectorial R^3 y f la *transformación lineal* del mismo tal que $\begin{cases} f(\vec{u}_1) = \vec{u}_1 + \vec{u}_3 \\ f(\vec{u}_2) = -\vec{u}_1 - \vec{u}_2 - \vec{u}_3 \\ f(\vec{u}_3) = \vec{u}_2 \end{cases}$. Se pide:

a) Matriz A asociada a f respecto de la *base* B.
b) Ecuación matricial de f.
c) Obtener el subespacio *Núcleo* de f y dar una base de dicho subespacio.
d) Obtener el subespacio *Imagen* de f y dar una base de dicho subespacio.
e) ¿Son los dos subespacios anteriores *N(f)* e *Im(f) suplementarios*?
f) Hallar los *valores propios* de A y los *subespacios de vectores* propios asociados.
g) Razonar si A es *diagonalizable*. En caso afirmativo, escribir una *matriz diagonal D semejante* a A y la matriz de paso correspondiente.
h) Hallar A^n, para cualquier *número natural* n.

Solución

48.- Se considera la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Probar que es *diagonalizable* y determinar una matriz P que permita la *diagonalización*.

b) Hallar las *ecuaciones paramétricas* y *cartesianas* de los *subespacios propios* de A.

c) Hallar A^2 utilizando A y la matriz *diagonal* D.

Solución

49.- Sea V_3 un *espacio vectorial* tridimensional sobre R, y f una *transformación lineal* de V_3 cuya expresión matricial respecto de la *base canónica* es:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

¿Es f *diagonalizable*? En caso afirmativo encontrar una *base* $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$, tal que respecto a B la *matriz* que define f sea $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Solución

50.- Dado el *endomorfismo* f de R^3 definido por la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1° Hallar el *polinomio característico* y los *valores propios* de A.

2° Hallar las *ecuaciones paramétricas* de los *subespacios* de *vectores propios* de A.

3° Hallar una *base* de cada uno de los *subespacios* de *vectores propios* de f.

4° ¿El *endomorfismo* f es *diagonalizable*? ¿Por qué?

En caso afirmativo

5° Hallar una matriz *D* diagonal *semejante* a la matriz A.

6° Hallar la *base* respecto de la cual la matriz de f es *D*.

7° Escribir la ecuación de semejanza $D = P^{-1} A P$.

8° Hallar el subespacio de los *vectores invariantes* por f.

9° Hallar los *valores propios* de A^n.

10° Hallar el subespacio de *N(f)*.

11 Hallar el subespacio *Im(f)*.

12° Clasificar el *endomorfismo* f.

Solución

51.- Se considera el *endomorfismo o transformación lineal* f de R^3 definido por la *matriz* $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 \\ -2 & -2 & -6 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Hallar:

a) El *polinomio característico*.
b) Los *valores propios* indicando su multiplicidad algebraica.
c) ¿Se puede calcular una *base* de R^3 formada por *vectores propios* de A?
d) La *matriz* A ¿es *diagonalizable*? ¿por qué?
e) Hallar las *ecuaciones paramétricas* de los *subespacios invariantes* por el *endomorfismo*.
f) Hallar los subespacios *núcleo e imagen* de f.
g) ¿Es f *biyectiva*? ¿por qué?

Solución

52.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ calcular:

a) Los *valores propios* indicando su multiplicidad algebraica.
b) Calcular una *base* de cada uno de los *subespacios propios* existentes.
c) ¿Es *diagonalizable* la matriz A? ¿Por qué?
d) ¿Existe algún vector $\vec{u} \neq \vec{0}$ que sea *invariante*?

Solución

53.- Dado el *endomorfismo* f definido por la *matriz*:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Calcular sus *valores propios* y una *base* de cada uno de los *subespacios* de *vectores propios*.

b) Determinar una *base* B de V_3 respecto de la cual la *matriz* asociada a f sea *diagonal*. Respecto de la *base* B ¿cuál es la *matriz diagonal* D?

c) Hallar unas ecuaciones paramétricas del subespacio de los *vectores invariantes*.

Solución

54.- Sea f(x, y, z) = (x -2y + z, -x + z, -x - 2y + 3z) una *transformación lineal* de R^3. Sea B = $\{\vec{u}_1 = (1,0,1),\ \vec{u}_2 = (0,1,2),\ \vec{u}_3 = (1,1,1)\}$ un sistema de vectores de R^3. Se pide:

a) Si $F = <\vec{u}_1, \vec{u}_2>$, hallar una *base* del *subespacio ortogonal* $F^{\perp}$. ¿Qué representan geométricamente F y $F^{\perp}$?

b) Demostrar que B es *base* de R^3, pero, que f (B) = $\{f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), f(\vec{u}_3)\}$ no lo es.

c) Hallar la *matriz* A asociada a f respecto de la *base canónica* y la *matriz* A' asociada a f respecto de la *base* B.

d) Escribir la expresión matricial que relaciona A y A'.

e) ¿Es f *diagonalizable*? En caso afirmativo, dar una *base* de R^3 formada por *vectores propios* de f.

f) Hallar el *subespacio* de los *vectores invariantes* por f.

g) Hallar la ecuación y una *base* de los *subespacios Im (f)* y *N(f)*.

Solución

55.- Sea f la *transformación lineal* de R^3 que tiene por *matriz* asociada:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$ Se pide:

a) Hallar los *valores propios* de A y una *base* de cada uno de los *subespacios propios* asociados.
b) ¿Es A *diagonalizable*?
c) En caso afirmativo,
 hallar una *matriz diagonal* D semejante a A
 dar una matriz P que permita la diagonalización de A
 escribir la relación que existe entre A y D.
d) Dar una base B'= $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ de R^3 formada por *vectores propios* de A tal que D = M(f, B').
e) Expresar los vectores $f(\vec{v}_1)$, $f(\vec{v}_2)$, $f(\vec{v}_3)$ como *combinación lineal* de los vectores de la base B'.
f) ¿Es f *biyectiva*?
g) Hallar *N (f)*.
h) Hallar el *subespacio de vectores invariantes* por f.

Solución

56.- Dada la *matriz* $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & k & 4 \\ 0 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ asociada a una *transformación lineal* f respecto de la *base canónica*, se pide:

1.- Estudiar para qué valores de k es f *biyectiva*.
2.- Para k = -9
 a) Hallar, si existe, una matriz *diagonal* D *semejante* a A.
 b) Hallar una *base* B tal que la *matriz* asociada a f respecto de la *base* B sea D.
 c) Escribir la relación matricial entre D y A.
 d) Hallar el *Núcleo* y la *Imagen* de f
 e) Hallar los vectores *invariantes* por f.
 g) La imagen por f de un *plano* vectorial ¿qué *dimensión* tiene?

Solución

57.- Dados el punto A=(3,2,0), los vectores $\vec{u}_1 = (1,1,0)$, $\vec{u}_2 = (0,0,1)$ y $\vec{u}_3 = (1,0,3)$ y la *transformación lineal* f de $\Re^3$ tal que: N(f) = $\langle (1,1,0), (0,0,1) \rangle$ y f(1,0,3)=(1,0,3). Se pide:

a) Escribir las *ecuaciones cartesianas o implícitas* del *subespacio vectorial* generado por los vectores $\vec{u}_1 = (1,1,0)$ y $\vec{u}_2 = (0,0,1)$.

b) Escribir las ecuaciones del *cambio de la base* $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ a la *base canónica* B_c.

c) Demostrar que $R = \{A; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es un *sistema de referencia afín* del espacio tridimensional.

d) Si P =(1,1,1), hallar sus *coordenadas* en $R = \{A; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$.

e) Hallar todos los *valores propios* de f.

f) Razonar si f es *diagonalizable*. En caso afirmativo, escribir una *matriz diagonal* D que defina f respecto de una *base* de $\mathfrak{R}^3$ y dar dicha *base*.

Solución

58.- a) Hallar el *rango* de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 11 \end{pmatrix}$

b) Sea F el *subespacio vectorial* de R^3 engendrado por los vectores fila de la matriz A. Hallar la *dimensión* y una *base* de F.

c) Hallar unas *ecuaciones paramétricas* de F.

d) Hallar unas *ecuaciones implícitas* de F.

e) ¿Es A *diagonalizable*? En caso afirmativo, hallar una *matriz diagonal semejante* a A.

f) ¿Existen dos *bases* de R^3 tales que A sea la matriz de *cambio de base* de una a la otra?

g) Sea $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ la matriz de cambio de base de $B = \left\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\right\}$ a la *base canónica* $C = \left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right\}$ de R^3. Escribir el vector $\vec{e}_2$ como *combinación lineal* de los vectores de la base B.

Solución

59.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & a & 3 \\ 3 & a+1 & -3 \\ 1 & a & -1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Estudiar para qué valores de *a* es *diagonalizable*.

b) Para *a*=1, hallar los *valores y vectores propios* de A

c) Calcular, si existe, una *base de vectores propios, la matriz diagonal semejante* a A y la matriz de paso.

d) Hallar *N(f)*. e *Im(f)*.

Solución

60.- Dado el *endomorfismo* f de R^3 definido por

$f(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) =$

$$= (-2x_1 + 4x_2 + 2x_3)\vec{e}_1 + (x_1 - 2x_2 + \alpha\, x_3)\vec{e}_2 + (-x_1 + 2x_2 + x_3)\vec{e}_3$$

siendo $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ una *base* de R^3.

a) Hallar la *dimensión* del *subespacio* imagen en función de α.

b) Hallar el *núcleo* y la *imagen* en función de α.

c) ¿Bajo qué condiciones es *diagonalizable* la matriz de f respecto de esa base? En los casos en que sea diagonalizable, indicar la matriz diagonal.

Solución

61.- Sean $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ y $B' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ dos *bases* de $\Re^3$ y f un *endomorfismo* que respecto de la base B tiene por ecuación $Y = \begin{pmatrix} 2 & -10 & 6 \\ -1 & 5 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix} X$. Se pide hallar la ecuación de f respecto de la base B' siendo $\vec{u}_1 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{u}_2 = -3\vec{e}_1 + \vec{e}_3$, $\vec{u}_3 = 5\vec{e}_1 + \vec{e}_2$.

Solución

62.- Dada la *transformación lineal* f de R^2 definida por las imágenes de los vectores de la *base canónica*: $f(\vec{e}_1) = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2$; $f(\vec{e}_2) = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2$.

a) Calcular los *valores propios* de f.

b) Calcular los *vectores propios* de f.

c) ¿Es f *diagonalizable*?

Solución

1.- En los siguientes casos estudiar si f es una *aplicación lineal* y en caso afirmativo hallar una matriz A tal que $f(\vec{x}) = A\vec{x}$, así como los *subespacios vectoriales N(f)* e *Im(f)*.

a) f(x,y) = (2x,-y)
b) f(x,y) = (x^2,y)
c) f(x,y,z) = (2x+y, x-y-z,0)
d) f(x,y) = $(x^2 + y^2, \sqrt[3]{xy})$

Solución:

a) f(x,y) = (2x,-y)

f(x+x',y+y') = (2(x+x'),-(y+y')) = (2x+2x',- y-y') = (2x,-y)+ (2x',- y') = f(x, y) + f(x', y')

f(λ(x,y))= f(λx, λy)= (2λx, -λy)= λ(2x,-y) = λf(x, y).

Luego f es una aplicación lineal: $\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$

N(f) es la solución de $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \Rightarrow$ **N(f)={(0,0}**

Im(f) = <(2,0),(0,-1) > = R^2.

b) f(x,y) = (x^2,y)

f(x+x',y+y') = $((x+x')^2,y+y') = (x^2+2xx'+(x')^2, y+y') \neq (x^2, y)+ ((x')^2, y') =$ f(x,y) + f(x',y')

Luego f **no es una aplicación lineal**

c) f(x,y,z) = (2x+y,x-y-z,0)

f(x+x',y+y',z+z') = (2(x+x')+y+y', x+x'-(y+y')-(z+z'),0)= (2x+y,x-y-z,0) + (2x'+y',x'-y'-z',0)= f(x,y,z) + f(x',y',z')

f(λ(x,y,z))= f(λx, λy, λz) = (2λx+λy, λx-λy-λz,0) =λ (2x+y,x-y-z) =λf(x,y,z).

Luego f es una aplicación lineal: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

N(f) es la solución de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2x \\ z = x - y = 3x \end{cases} \Rightarrow$

N(f)={(λ, -2λ, 3λ), λ∈R}
Im(f) = <(2,1,0),(0,-1,0) >

d) f(x,y) = $(x^2+y^2, \sqrt[3]{xy})$

f(x+x',y+y')=$((x+x')^2+(y+y')^2, \sqrt[3]{(x+x')(y+y')}) = (x^2+2xx'+(x')^2, y^2+2yy'+(y')^2, \sqrt[3]{xy+x'y'})$

$\neq (x^2+y^2, \sqrt[3]{xy}) + ((x')^2+(y')^2, \sqrt[3]{x'y'}) =$ f(x,y) + f(x',y')

Luego f **no es una aplicación lineal**.

2.- Se considera la aplicación f: $\Re^4 \rightarrow \Re^4$ definida por:
f(x, y, z, t) = (x + y + a z, -2x + y + t, a x +2y -2t, a z + t)
a) Escribir su ecuación matricial de f y probar que f es *lineal* para $\forall$a real.
b) Hallar los valores de a para los que f es *biyectiva*.
c) Para a = 0, hallar los subespacios *Núcleo* e *Imagen* de f y dar una *base* de cada uno de ellos.
d) Estudiar si f es una aplicación *inyectiva* para a = 0.
e) ¿(1,1,1,0) $\in$ N(f)? ¿(2,-1,2,0) $\in$ Im(f)?
f) Dado el subespacio S = {(x, y, z, t) $\in \Re^4$ tales que x + y – z = y + z – t = 0}, hallar una *base*, la *dimensión* y unas *ecuaciones implícitas* de f(S) para a = 0.

Solución:
f(x,y,z,t) = (x+y+az,-2x+y+t, ax+2y-2t,az+t)

a) $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ a & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \Leftrightarrow f(\vec{x}) = X' = AX$$

$f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = A(X_1+X_2) = AX_1+AX_2 = f(\vec{x}_1)+f(\vec{x}_2)$

$f(\lambda \vec{x}) = A\lambda X = \lambda AX = \lambda\, f(\vec{x})$
Luego f **es lineal $\forall$a$\in$R**.

b) f es biyectiva si $|A| \neq 0$.
$|A| = 4a - 2a^2 = 0 \Rightarrow a = 0, 2$, luego f **es biyectiva $\forall$a $\neq$ 0,2**.

c) Para a = 0 $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$
N(f) es la solución de AX=O$\Rightarrow$ **N(f) = {(0, 0, λ, 0)}** y dim N(f) = 1.
Im(f) = <(1,-2,0,0), (1,1,2,0), (0,1, -2, 1)} y dimIm(f) = 3 con **4x+2y-3z-8t=0**.

d) f **no es inyectiva** para a= 0 pues N(f) $\neq \{\vec{0}\}$.

e) ¿(1,1,1,0) $\in$ N(f)? **No**, puesto que no es de la forma (0,0, λ,0)
¿(2,-1,2,0) $\in$ Im(f)? **Sí**, ya que cumple la ecuación 4.2+2(-1)-3 2-8 0=0.
O bien, $$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ t = 0 \end{cases}$$ el sistema es compatible y el vector es imagen de todos los vectores de la forma (1,1,z,0), es decir, f(1,1,z,0)=(2,-1,2,0).
Obsérvese que $f^{-1}(2,-1,2.0) = (1,1,z,0)$.

f) Resolviendo el sistema de ecuaciones que define S, se obtiene que
S={(λ, μ, λ + μ, λ + 2μ), λ, μ∈**R**} y una base es B_s={(1,0,1,1), (0,1,1,2)}
Un sistema generador de f(S) es el formado por las imágenes de los vectores de B_s

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \\ -2 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

f(S) = **< (1,-1,-2,1), (1,3,-2,2) >** y **dimf(S) = 2** $\Rightarrow \text{rg}\begin{pmatrix} x & y & z & t \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$

$$\text{DET}\begin{bmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} = 8\cdot x + 4\cdot z = 0\cdot y\cdot \text{DET}\begin{bmatrix} x & y & t \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = -5\cdot x - y + 4\cdot t = 0$$

luego f(S) $\equiv \boxed{\begin{cases} 8x + 4x = 0 \\ -5x - y + 4t = 0 \end{cases}}$

3.- a) Hallar, respecto de la *base canónica*, la ecuación de la *transformación lineal f (endomorfismo)* de $\Re^3$ que verifica que f(2, 1, 0) = (7, 0, 0), f(-1, 3, 1) = (0, 7, 0), f(0, 5, 7) = (5, 10, 0).

b) ¿Es f *biyectiva*?

c) Hallar *N(f) e Im(f)*.

d) ¿Qué condición debe satisfacer la matriz A asociada a un *endomorfismo* para que las imágenes de vectores *linealmente independientes* sean *linealmente independientes*?

Solución:

Sea A la matriz A tal que $f(\vec{x}) = A\vec{x} = \vec{y} \Leftrightarrow$ AX=Y, entonces

a) $A\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\0\\0\end{pmatrix}$; $A\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\7\\0\end{pmatrix}$; $A\begin{pmatrix}0\\5\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\10\\0\end{pmatrix} \Rightarrow A\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&3&5\\0&1&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&0&5\\0&7&10\\0&0&0\end{pmatrix}$ y como

$$\begin{vmatrix}2&-1&0\\1&3&5\\0&1&7\end{vmatrix} = 39 \neq 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix}7&0&5\\0&7&10\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&3&5\\0&1&7\end{pmatrix}^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix}3&1&0\\-1&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}}$$

b) f es biyectiva si $|A| \neq 0$ pero $|A| = 0$ (tiene una fila nula) luego **f no es biyectiva**.

c) N(f) es la solución de AX=O

$$\begin{pmatrix}3&1&0\\-1&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$$

Luego **N(f) = < (0,0,1) >** $\Rightarrow$ dimN(f) = 1, en consecuencia dimIm(f)=2

Im(f) = <(3,-1,0), (1,2,0) >

d) Es necesario y suficiente que f sea biyectiva, es decir que $\mathbf{|A| \neq 0}$.

4.- Sean $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ y $B' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ dos *bases* de $\Re^3$ y f un *endomorfismo* que respecto de la base B tiene por ecuación f(x, y, z) = (x +y, y + z, x + z). Se pide hallar la ecuación de f respecto de la base B' siendo $\vec{u}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{u}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{u}_3 = \vec{e}_1$.

Solución:

Buscamos las imágenes de los vectores de la base canónica: f(1,0,0)=(1,0,1); f(0,1,0)=(1,1,0); f(0,0,1)=(0,1,1) y escribimos la matriz que define f respecto de la base canónica: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Por otra parte, la matriz del cambio de base de B' a la base B es: $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Si designamos f($\vec{x}$)= Y' = A' X' la ecuación de f respecto de la base B' las matrices A y A' son semejantes y se verifica que A' = P^{-1} A P, luego:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces la matriz que define f respecto de la base B_1 se obtiene mediante el producto

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, resultando la ecuación matricial $\boxed{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{pmatrix}}$

5.- Sea f la *transformación lineal* de $\Re^3$ tal que:

N(f) = $\langle(5,1,0),(-3,0,1)\rangle$ y f(1,0,0)=(2,-1,1). Se pide:

a) La matriz A asociada a *f* respecto de la *base canónica*.

b) Sin hacer cálculos razona porqué 0 es un *valor propio* de A y cuál es su mínimo orden de multiplicidad.

c) Hallar todos los *valores propios* de A y los *subespacios de vectores* propios asociados.

d) Razonar si A es *diagonalizable*. En caso afirmativo, escribir una *matriz diagonal* D *semejante* a A y la matriz de paso correspondiente.

e) Hallar A^n.

***Solución*:**

a) Nos dan las coordenadas de las imágenes de 3 vectores que constituyen base pues:

$$\mathrm{DET}\begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

Si designamos por A a la matriz asociada a f respecto de la base canónica, se verifica que:

$$A\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\quad A\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\quad \text{y}\quad A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A\begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En consecuencia, y al ser $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, podemos obtener A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & -10 & 6 \\ -1 & 5 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}}$$

b) Para cualquier vector $\vec{u}$ del núcleo f($\vec{u}$)= A$\vec{u}$ =0 = 0$\vec{u}$, luego 0 es un valor propio de A, y $\vec{u}$ es un vector propio asociado al valor propio 0. Como en este caso la dimensión de N(f) es 2, éste es el orden de multiplicidad mínimo del valor propio 0.

c) El polinomio característico de A es

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -10 & 6 \\ -1 & 5-\lambda & -3 \\ 1 & -5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(10-\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\lambda = 0} \\ \boxed{\lambda = 10} \end{cases}$$

Luego A tiene dos valores propios que son **λ_1 = 0 doble y λ_2=10 simple**.

Estudiemos la dimensión del subespacio propio asociado al valor propio $\lambda = 0$:

$$(A-\lambda I)\vec{v} = \begin{pmatrix} 2-0 & -10 & 6 \\ -1 & 5-0 & -3 \\ 1 & -5 & 3-0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x-5y+3z=0$$

$\dim V_{\lambda=0} = 2 \Rightarrow$ A es diagonalizable. Por tanto, $V_{\lambda=0} = N(f)$

Para $\lambda = 0$: $(A-\lambda I)\vec{v} = \begin{pmatrix} 2-10 & -10 & 6 \\ -1 & 5-10 & -3 \\ 1 & -5 & 3-10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x-2z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$. $V_{\lambda=10} = \langle(2,-1,1)\rangle$

d) A es diagonalizable porque dim V_0 = 2 = orden de multiplicidad de λ_1 = 0 y dim V_{10} = 1= orden de multiplicidad de λ_2 = 10. Es decir, que la dimensión de cada subespacio propio es igual al orden de multiplicidad del correspondiente valor propio.

Una matriz diagonal semejante a A es D = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ y la matriz que permite esta diagonalización

es P = $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, que es la matriz del cambio de una base formada por vectores propios y se verifica que D = $(P_{B\to Bc})^{-1}$ A $P_{B\to Bc}$.

e) Despejando en la expresión anterior A = $P_{B\to Bc}$ D $P_{B\to Bc}{}^{-1} \Rightarrow A^n = P_{B\to Bc} D^n P_{B\to Bc}{}^{-1}$

$$A^n := \begin{bmatrix} -5 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2^n \cdot 5^{n-1} & -10^n & 3\cdot 2^n \cdot 5^{n-1} \\ -10^{n-1} & 2^{n-1} \cdot 5^n & -3\cdot 10^{n-1} \\ 10^{n-1} & -2^{n-1}\cdot 5^n & 3\cdot 10^{n-1} \end{bmatrix}$$

6.- Sea f un *endomorfismo* de $\Re^3$ cuya matriz asociada A, respecto de la *base canónica*, verifica que tiene 2 *valores propios* distintos, $\lambda=2$ doble y $\lambda=0$ simple, y que los *subespacios de vectores* propios asociados respectivamente son $V_2 = \langle(1, 0, 1), (0,1,2)\rangle$ y $V_0 = \langle(1,1,1)\rangle$.

a) Razonar porqué A es *diagonalizable*.
b) Escribir una *matriz D diagonal* semejante a A, así como la matriz de paso que permite dicha diagonalización.
c) Hallar A.
d) Dar sendas *bases* de *N(f) e Im(f)*.
e) ¿Qué debe verificar A para que haya vectores no nulos de R^3 *invariantes* por f? Sin hacer cálculos, argumenta si existen vectores no nulos de R^3 *invariantes* por f.

Solución:

a) Los valores propios de A son $\lambda = 0$ simple y $\lambda = 2$ doble y los s.v. de vectores propios asociados son $V_0 = <(1, 1, 1)>$ y $V_2 = <(1, 0, 1),(0, 1, 2)>$.
A es diagonalizable porque dim $V_0 = 1$ y dim $V_2 = 2$, es decir coinciden la multiplicidad algebraica de los valores propios con la multiplicidad geométrica de los vectores propios asociados. tenemos **una base de R^3 formada por vectores propios {(1, 0, 1), (0,1,2)〉, (1,1,1)}** de f.

b) Por ser A diagonalizable $D = P^{-1}AP \Rightarrow A = PDP^{-1}$:

$$D = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}} \text{ y } \boxed{P_{B\to Bc} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$$, donde B es una base de vectores propios.

c) A y D son semejantes y $D = P_{B\to Bc}^{-1}\, A\, P_{B\to Bc} \Rightarrow A = P_{B\to Bc}\, D\, P_{B\to Bc}^{-1}$ luego:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

O bien, sabemos que si $\vec{v}$ es un vector propio de f se cumple: $f(\vec{v}) = A\vec{v} = \lambda\vec{v}$

En nuestro caso tenemos que: para el valor propio 2 los vectores propios (1, 0, 1) y (0,1,2)〉; para el valor propio 0 el vector propio (1,1,1).

Luego: $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$; $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Y en un sistema matricial, resulta:

$$A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}}$$

d) Núcleo de f: es el subespacio propio correspondiente al valor propio nulo, por tanto, una base puede ser {(1,1,1)}.

N(f) = V_0 = < (1, 1, 1) > $\Rightarrow$ dimN(f) = 1, en consecuencia dimIm(f)=2

Imagen de f: de las ecuaciones paramétricas

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \{(1,-1,-1),(-2,0,-2)\};$$ **Im(f) = <(1,-1, -1), (-2, 0,-2) >**

e) Un vector no nulo $\vec{x}$ es invariante si f($\vec{x}$) = $\vec{x}$, luego todo vector invariante no nulo está asociado al valor propio λ = 1, por tanto para que haya vectores invariantes no nulos **λ = 1 ha de ser un valor propio de A**.

En consecuencia, la matriz A del ejercicio solo deja invariante al vector $\vec{0}$, luego el subespacio de vectores invariantes por f es $\{\vec{0}\}$.

V_2 es un subespacio invariante por f pues para cualquier $\vec{x} \in V_2$ es f($\vec{x}$) = 2$\vec{x} \in V_2$.

Un s.v. F es invariante por f si para cualquier $\vec{x} \in$ F es f($\vec{x}$)$\in$ F.

Si hubiera algún vector $\vec{v} \neq \vec{0}$ tal que: $f(\vec{v}) = \vec{v}$ entonces sería un vector propio asociado al valor propio $\lambda = 1$ y como $\lambda = 1$ no es valor propio de A no puede existir vectores invariantes por f, salvo el vector nulo.

7.- Sea f la *transformación lineal* de $\Re^3$ cuya matriz en la *base canónica* es:

$$A=\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Estudiar para qué valores de a y b es A *diagonalizable*.
b) ¿Cuál es el *subespacio de vectores invariantes* por f para a = 1?
c) Justificar para qué valores de a f no es *biyectiva*.

Solución:

a) Cálculo de los valores propios:

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} a-\lambda & b & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(-1-\lambda)(1-\lambda) = 0 \Rightarrow \left\{ \boxed{\begin{array}{l} \lambda = a \\ \lambda = -1 \\ \lambda = 1 \end{array}} \right.$$

Podemos considerar tres casos:

1º caso: Si $\boxed{a \neq -1, a \neq 1}$, A tiene tres valores propios reales y distintos entre sí, por tanto es **diagonalizable**.

2º caso: Si **a=-1**, $\Rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \text{ doble} \\ \lambda = 1 \text{ simple} \end{cases}$. Estudiemos la dimensión del subespacio propio asociado al valor propio $\lambda = -1$:

$$(A-(-1)I)\vec{v} = \begin{pmatrix} -1-(-1) & b & 0 \\ 0 & -1-(-1) & 0 \\ 0 & 0 & 1-(-1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} by = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

si $\boxed{\begin{cases} b = 0 \Rightarrow \dim V_{\lambda=-1} = 2 \Rightarrow \text{ A es diagonalizable} \\ b \neq 0 \Rightarrow \dim V_{\lambda=-1} = 1 \Rightarrow \text{A no es diagonalizable} \end{cases}}$. Puesto que la dimensión de cada subespacio propio debe coincidir con el orden de multiplicidad del correspondiente valor propio.

3º caso: Si **a=1**, $\Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \text{ doble} \\ \lambda = -1 \text{ simple} \end{cases}$. Estudiemos la dimensión del subespacio propio asociado al valor propio $\lambda = 1$:

$$(A-\lambda I)\vec{v} = \begin{pmatrix} 1-1 & b & 0 \\ 0 & -1-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = 0$$

$\dim V_{\lambda=1} = 2 \Rightarrow$ $\boxed{\text{A es diagonalizable}}$. Puesto que la dimensión de cada subespacio propio es igual al orden de multiplicidad del correspondiente valor propio.

EN RESUMEN: **A es diagonalizable si b=0 o bien a distinto de -1**.

Con DERIVE

Si b= 0, entonces A es diagonal directamente y si $b \neq 0$, entonces

$$\mathrm{CHARPOLY}\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (w + 1)\cdot(1 - w)\cdot(w - a)$$

Luego los valores propios de A son λ = -1, λ = 1, λ = a. Tenemos que considerar tres subcasos:

i) Si a ≠ 1, -1, A tiene 3 valores propios reales y distintos, luego A es diagonalizable.

ii) Si a = -1, entonces A tiene como valores propios λ = -1 doble, λ = 1 simple

$$\mathrm{EXACT\_EIGENVECTOR}\left(\begin{bmatrix} -1 & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, -1\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Luego V_{-1} = < (-1, 0, 0) > y dim V_{-1} = 1 < 2 = orden de multiplicidad de λ = -1, luego A **no** es diagonalizable.

$$\begin{cases} b = 0 \Rightarrow \dim V_{\lambda=-1} = 2 \Rightarrow \text{ A es diagonalizable} \\ b \neq 0 \Rightarrow \dim V_{\lambda=-1} = 1 \Rightarrow \text{A no es diagonalizable} \end{cases}$$

iii) Si a 1, entonces A tiene como valores propios λ = -1 simple, λ = 1 doble y

$$\mathrm{EXACT\_EIGENVECTOR}\left(\begin{bmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, 1\right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Luego V_1 = < (-1, 0, 0), (0,0,-1) > y dim V_1 = 2 = orden de multiplicidad de λ = 1, luego A **si** es diagonalizable.

Resumiendo A es diagonal si b = 0 y si b ≠ 0 es diagonalizable ∀ a ≠ -1

b) El subespacio de vectores invariantes por f es el correspondiente al valor propio $\lambda = 1$:

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \begin{pmatrix} 1-1 & b & 0 \\ 0 & -1-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = 0$$

El subespacio de vectores invariantes por f es **V_1 = < (-1, 0, 0), (0,0,-1) >**.

c) f no es biyectiva si y sólo si $|A| = 0 \Leftrightarrow -a = 0 \Leftrightarrow a = 0$

8.- a) Comprobar que la matriz $A=\begin{pmatrix}7&1&0&0\\0&7&1&0\\0&0&7&1\\0&0&0&7\end{pmatrix}$ **no es** ***diagonalizable***.

b) Comprobar, sin efectuar ningún cálculo que la matriz $B=\begin{pmatrix}0&a&1&b\\0&1&0&1\\0&0&-1&a^2\\0&0&0&3\end{pmatrix}$ **es** ***diagonalizable*** **para cualquier valor que tomen *a* y *b*.**

Solución:

a) Por ser A una matriz triangular superior $|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}7-\lambda&1&0&0\\0&7-\lambda&1&0\\0&0&7-\lambda&1\\0&0&0&7-\lambda\end{vmatrix}=(7-\lambda)^4$, luego A solo tiene un valor propio $\lambda = 7$ (el escalar repetido en la diagonal principal) cuyo orden de multiplicidad es 4.

$$(A-\lambda I)\vec{v}=\begin{pmatrix}7-7&1&0&0\\0&7-7&1&0\\0&0&7-7&1\\0&0&0&7-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow y=z=t=0$$

luego $V_7 = \langle (1,0,0,0) \rangle \Rightarrow \dim V_7 = 1 < 4$ =orden de multiplicidad del valor propio 7

(Se puede comprobar con Derive que esto sucede sustituyendo 7 por cualquier nº real)

b) Como en el apartado a) por ser B una matriz triangular superior sus valores propios coinciden con los elementos de la diagonal principal y por ser éstos distintos entre sí, la matriz es diagonalizable con independencia de los valores que tomen a y b.

9.- Se considera la *transformación lineal* de R^3 definida por la *matriz simétrica*

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$ **Se pide:**

a) Hallar una *base* de *vectores propios* que sean *ortogonales* entre sí.

b) Hallar una matriz de paso *ortogonal* y la *matriz diagonal semejante* a A.

Solución:

a) Por ser simétrica la matriz es diagonalizable

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 10-\lambda & -2 \\ 1 & -2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (12-\lambda)(\lambda-6)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\lambda = 12} \\ \boxed{\lambda = 6} \\ \boxed{\lambda = 6} \end{cases}$$ Los valores propios son λ = 12 simple y, λ = 6 doble.

Los vectores propios asociados a estos valores propios son:

$$(A-\lambda I)\vec{v} = \begin{pmatrix} 7-12 & -2 & 1 \\ -2 & 10-12 & -2 \\ 1 & -2 & 7-12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x-z=0 \\ y+2z=0 \end{cases}$$

$$(A-\lambda I)\vec{v} = \begin{pmatrix} 7-6 & -2 & 1 \\ -2 & 10-6 & -2 \\ 1 & -2 & 7-6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{x-2y+z=0$$

V_{12} = < (-1, 2, -1) > y V_6 = < (-2, -1, 0),(1, 0, -1) >.

Como nos piden una base de vectores propios que sean ortogonales entre sí tomamos de V_{12} el vector (-1,2,-1) y de V_6 los vectores (1, 0, -1) y (-1,-1,-1);
(-1, 2, -1) (1, 0, -1) = 0; (-1, 2, -1) (-1,-1,-1) = 0 ; (1, 0, -1) . (-1,-1,-1) = 0, luego
B = {(-1, 2, -1), (1, 0, -1), (-1,-1,-1)} es una base de vectores propios ortogonales entre sí.

b) Si consideramos los vectores unitarios correspondientes a los vectores de B, obtenemos una base ortonormal B^* también de vectores propios y la matriz

$$P_{B^* \to B} = \boxed{\begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & -/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}}$$ es ortogonal y la matriz diagonal semejante a A es:

$$D = \boxed{\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}}$$

10.- Demostrar que si Q es una *matriz ortogonal* que permite la *diagonalización* de A entonces A es *simétrica*:

Solución:

Si la matriz de paso Q es ortogonal $Q^{-1} = Q^t$ y $A = Q\,D\,Q^{-1} = Q\,D\,Q^t$, en consecuencia:

$$\boldsymbol{A^t = (Q\,D\,Q^t)^t = Q\,D^t\,Q^t = Q\,D\,Q^t = A}.$$

11.- Se considera la aplicación f: $R^4 \rightarrow R^4$ definida por:
f(x, y, z, t) = (x + y + t, x – y + z + t, 2y – z, 3t)
a) Escribir su ecuación matricial y probar que f es *lineal*.
b) Hallar los subespacios *núcleo* e *imagen* de f y dar una *base* y la *dimensión* de cada uno de ellos.
c) Dado el subespacio S = {(x, y, z, t) ∈ R^4 tales que x + y – z = y + z – t = 0}, hallar una *base*, la *dimensión* y unas *ecuaciones implícitas* de f(S).
d) Estudiar si los vectores (2, 0, 2, 3) y (4, 0, 3, 0) pertenecen a *Im(f)*.
e) Clasificar.

Solución:

a) Buscamos las imágenes de los vectores de la base canónica:
f(1,0,0,0)=(1,1,0,0); f(0,1,0,0)=(1,-1,2,0); f(0,0,1,0)=(0,1,-1,0); f(0,0,0,1)=(1,1,0,3), luego

$A=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&-1&1&1\\0&2&-1&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}$ por tanto, la ecuación matricial es: $\boxed{\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&-1&1&1\\0&2&-1&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}} \Leftrightarrow Y=AX$

Caracterización de las aplicaciones lineales: $\forall\lambda,\mu\in R, \forall x,y\in R^4$ f(λx+μy)=λf(x)+μf(y)

En efecto: $\boxed{f(\lambda x+\mu y)=A(\lambda x+\mu y)=\lambda Ax+\mu Ay=\lambda f(x)+\mu f(y)}$.

b) Ecuaciones paramétricas del subespacio Im(f): $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&-1&1&1\\0&2&-1&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$, siendo los vectores columna de la matriz A un sistema generador de Im(f). Calculamos **dimIm(f)=r(A)=3**, luego sobra un parámetro; una base vendrá indicada por el menor que caracteriza el rango de A: **$B_{Im(f)}$={(1,-1,2,0); (0,1,-1,0), (1,1,0,3)}**;

y la ecuación cartesiana $\begin{vmatrix}x&1&0&1\\y&-1&1&1\\z&2&-1&0\\t&0&0&3\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \boxed{-x+y+z=0}$.

Ecuaciones cartesianas del subespacio N(f): $\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&-1&1&1\\0&2&-1&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\left.\begin{matrix}x=-y\\z=2y\\t=0\end{matrix}\right\}}$

$N(f)=\{(-\alpha,\alpha,2\alpha,0)/\alpha\in R\}$, dimN(f)=1 y una base del núcleo: $B_{N(f)}$={(-1,1,2,0)}.

c) $S=\{(x,y,z,t)\in\Re^4 / x+y-z=y+z-t=0\}$ resolviendo el sistema obtenemos un vector genérico de S: $S=\{(-\alpha+\beta,\alpha+\beta,\alpha,\beta)\in\Re^4/\alpha,\beta\in R\}$

y aplicando f:

$$f(S)=AS=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&-1&1&1\\0&2&-1&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\alpha+\beta\\ \alpha\\ \beta\\ \alpha+\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha+2\beta\\-\alpha+3\beta\\2\alpha-\beta\\3\alpha+3\beta\end{pmatrix}$$

$B_{f(S)}$={(1,-1,2,3); (2,3,-1,3)}; **dimf(S)=2**

Unas ecuaciones implícitas se obtienen de las paramétricas

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\\t'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha+2\beta\\-\alpha+3\beta\\2\alpha-\beta\\3\alpha+3\beta\end{pmatrix}\Rightarrow r\begin{pmatrix}x'&1&2\\y'&-1&3\\z'&2&-1\\t'&3&3\end{pmatrix}=2\Rightarrow\begin{cases}\begin{vmatrix}x'&1&2\\y'&-1&3\\z'&2&-1\end{vmatrix}=0\Rightarrow\boxed{-x'+y'+z'=0}\\ \begin{vmatrix}x'&1&2\\y'&-1&3\\t'&3&3\end{vmatrix}=0\Rightarrow\boxed{-12\cdot x'+3\cdot y'+5\cdot t'=0}\end{cases}$$

d) (2,0,2,3) pertenece al subespacio Im(f) si y sólo si cumple la ecuación cartesiana

$$-x+y+z=0\Leftrightarrow -2+0+2=0\Leftrightarrow \boxed{(2,0,2,3)\in \mathrm{Im}(f)}.$$

(4,2,3,0) pertenece al subespacio Im(f) si y sólo si cumple la ecuación cartesiana

$$-x+y+z=0\Leftrightarrow -4+2+3\neq 0\Leftrightarrow \boxed{(4,2,3,0)\notin \mathrm{Im}(f)}.$$

e) **No es biyectiva**, puesto que $|A|=0$.

12.- Sea $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 2\\ 1 & -3 & 4\end{pmatrix}$ **la matriz asociada a cierto** ***endomorfismo*** **f de** R^3 **respecto de la** ***base canónica*** **y sean los vectores** $\vec{u}_1=(1,1,0)$, $\vec{u}_2=(0,1,1)$, $\vec{u}_3=(-1,2,1)$ **de** R^3.

a) Comprobar que $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ **es un** ***sistema libre*** **pero ,** $\{f(\vec{u}_1),f(\vec{u}_2),f(\vec{u}_3)\}$ **es** ***ligado***.

b) ¿Qué condición debe satisfacer la matriz A asociada a un ***endomorfismo*** **para que las imágenes de vectores l.i. sean l.i.?**

Solución:

a) Los tres vectores forman $\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=-2\neq 0$ luego son linealmente independientes. Sin embargo, sus imágenes $f(\vec{u})=A\vec{u}$ no lo son; y para cada vector tenemos: $f(\vec{u}_1)=A\vec{u}_1=\begin{pmatrix}2\\ -2\\ -2\end{pmatrix}$, $f(\vec{u}_2)=A\vec{u}_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$, $f(\vec{u}_3)=A\vec{u}_3=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 3\end{pmatrix}$, siendo $\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ -2 & 0 & -2\\ -2 & 1 & -3\end{vmatrix}=0$, por consiguiente, vectores linealmente dependientes.

b) La condición necesaria y suficiente es que A sea una matriz regular. Puesto que si consideramos la matriz H formada por los tres vectores columna, la matriz formada por las imágenes es el producto de A por H cuyo determinante es el producto de los determinantes siendo nulo cuando uno de ellos sea nulo: $\boxed{\mathbf{f(H)=AH} \Rightarrow |f(H)|=|A||H|\neq 0 \Rightarrow |A|\neq 0 \text{ y } |H|\neq 0}$.

13.- Probar que cualquier *matriz simétrica* real de orden 2 es *diagonalizable*.

Solución:

Sea una matriz cuadrada de orden 2 y simétrica: $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ y calculemos sus valores propios

$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-(a+c)\lambda+ac-b^2=0$. El número de soluciones reales depende del signo del discriminante de la ecuación de segundo grado anterior:
$\Delta=(a+c)^2-4(ac-b^2)=(a-c)^2+4b^2$.

1º caso: $\Delta=(a-c)^2+4b^2>0\Rightarrow$ valores propios reales y distintos, A es diagonalizable.

2º caso: $\Delta=(a-c)^2+4b^2=0\Rightarrow\begin{cases} a=c \\ b=0 \end{cases}\Rightarrow A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ es diagonal.

3º caso: $\Delta=(a-c)^2+4b^2<0\Rightarrow$ ¡IMPOSIBLE! Ambos sumandos son no negativos.

14.- Halla una matriz de paso *ortogonal* para *diagonalizar* $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Solución:

Seguimos el método general:

Cálculo de los valores propios:

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 11\lambda^2 - 36\lambda + 36 = (\lambda-2)(\lambda-3)(6-\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 6 \\ \lambda = 3 \\ \lambda = 2 \end{cases} \text{tres}$$

valores propios reales y distintos, la matriz es diagonalizable (ya que es simétrica).

Cálculo de los vectores propios: $(A-\lambda I)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Para $\lambda = 6$: $\begin{pmatrix} 3-6 & -1 & 1 \\ -1 & 5-6 & -1 \\ 1 & -1 & 3-6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -2z \end{cases}$, podemos escoger $\vec{v}_1 = (1,-2,1)$ y un vector propio unitario $\vec{u}_1 = \frac{\vec{v}_1}{|\vec{v}_1|} = \left(1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}\right)$.

Para $\lambda = 3$: $\begin{pmatrix} 3-3 & -1 & 1 \\ -1 & 5-3 & -1 \\ 1 & -1 & 3-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = y = z$, podemos escoger $\vec{v}_2 = (1,1,1)$ y un vector propio unitario $\vec{u}_2 = \frac{\vec{v}_2}{|\vec{v}_2|} = \left(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\right)$.

Para $\lambda = 2$: $\begin{pmatrix} 3-2 & -1 & 1 \\ -1 & 5-2 & -1 \\ 1 & -1 & 3-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, podemos escoger $\vec{v}_3 = (1,0,-1)$ y un vector propio unitario $\vec{u}_3 = \frac{\vec{v}_3}{|\vec{v}_3|} = \left(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}\right)$.

Obteniendo una matriz de paso ortogonal $\boxed{P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}$ ya que $P^t = P^{-1}$.

15.- Calcular A^n siendo $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

Solución:

Si la matriz A es diagonalizable significa que es semejante a una matriz diagonal $D=P^{-1}AP$ y en cuyo caso $A=PDP^{-1}$.
Siendo

$$A^n = \left(PDP^{-1}\right)^n = PDP^{-1}\overset{n)}{\ldots\ldots}PDP^{-1} = PD\underbrace{P^{-1}P}_{I}D\underbrace{P^{-1}\ldots\ldots P}_{I}D\underbrace{P^{-1}P}_{I}DP^{-1} = PD\overset{n)}{\ldots\ldots}DP^{-1} = PD^nP^{-1}$$

Cálculo de los valores propios: $|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 3 \\ \lambda = 1 \end{cases}$ son distintos y A es diagonalizable.

Cálculo de los vectores propios: $(A-\lambda I)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5-\lambda & 4 \\ -2 & -1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Para $\lambda = 3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 5-3 & 4 \\ -2 & -1-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = -2y \Rightarrow \vec{v} = (-2,1)$

Para $\lambda = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 5-1 & 4 \\ -2 & -1-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = -y \Rightarrow \vec{v} = (-1,1)$

Sustituyendo la matriz $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz $P = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en la expresión: $A=PD^n P^{-1}$ queda:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2.3^n - 1 & 2.3^n - 2 \\ 1-3^n & 2-3^n \end{pmatrix}}$$

16.- Sean $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una *base* del *espacio vectorial* R^3 y la *transformación lineal* f tal que: $\begin{cases} f(\vec{u}_1) = 3\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 \\ f(\vec{u}_2) = -5\vec{u}_1 + \vec{u}_2 \\ f(\vec{u}_3) = 4\vec{u}_2 \end{cases}$. Se pide:

a) Matriz asociada a f respecto de la base B.
b) Escribir su ecuación matricial.
c) Hallar la *expresión analítica* de f respecto de la base B.
d) Obtener el subespacio *núcleo* f. Dar una base.
e) Obtener el subespacio *imagen* f. Dar una base.
f) ¿Son el *N(f) e Im(f) suplementarios*?
g) ¿*Rango* de f?
h) ¿Es f un *epimorfismo*?
i) ¿Es f un *monomorfismo*?
j) ¿Es f un *isomorfismo*?
k) ¿Es f un *automorfismo*?

Solución:

a) La matriz asociada o que define f se obtiene mediante las imágenes de los vectores de la base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$:

$$\begin{cases} f(\vec{u}_1) = 3\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 = (3,2,0)_B \\ f(\vec{u}_2) = -5\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = (-5,1,0)_B \\ f(\vec{u}_3) = 4\vec{u}_2 = (0,4,0)_B \end{cases} \Rightarrow A = M(f,B) = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ \underbrace{0}_{f(\vec{u}_1)} & \underbrace{0}_{f(\vec{u}_2)} & \underbrace{0}_{f(\vec{u}_3)} \end{pmatrix}}$$

b) La ecuación matricial o ecuaciones de la transformación lineal es:

$$Y{=}AX \Leftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}$$

c) La expresión analítica de f resulta de escribir la ecuación de f en forma vectorial:

$$\boxed{f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - 5x_2, 2x_1 + x_2 + 4x_3, 0)}$$

d) El núcleo es: $N(f) = \{\vec{x} \in R^3 / f(\vec{x}) = 0\}$, luego:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - 5x_2, 2x_1 + x_2 + 4x_3, 0) = (0,0,0)$$

y las ecuaciones cartesianas son: $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x_1 = -\dfrac{20}{13}x_3 \\ x_2 = -\dfrac{12}{13}x_3 \end{cases}}$ siendo la dimensión del núcleo de 1 y una base $\boxed{B_{N(f)} = \{(-20,-12,13)\}}$.

e) La imagen es: $\mathrm{Im}(f)=\{\vec{y}\in R^3 / \exists\vec{x}\in R^3 \text{ con } f(\vec{x})=\vec{y}\}$, luego

$$\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -5 & 0\\ 2 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\\ 2\\ 0\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix} -5\\ 1\\ 0\end{pmatrix}x_2+\begin{pmatrix} 0\\ 4\\ 0\end{pmatrix}x_3=\boxed{\begin{pmatrix} -5\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\alpha+\begin{pmatrix} 0\\ 4\\ 0\end{pmatrix}\beta=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}}$$

que son las ecuaciones paramétricas del subespacio imagen, siendo dim(Im(f))=r(A)=2 y una base $\boxed{B_{\mathrm{Im}(f)}=\{(-5,1,0),(0,4,0)\}}$

f) **Sí**, por ser $N(f)\oplus \mathrm{Im}(f)=R^3$, ya que $r\left(B_{\mathrm{Im}(f)}\cup B_{N(f)}\right)=r\begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix}-5 & 0\end{matrix}}^{\mathrm{Im}(f)} & \overbrace{-20}^{N(f)}\\ 1 \quad\; 4 & -12\\ 0 \quad\; 0 & 13\end{pmatrix}=3=\dim\left(R^3\right)$.

g) ¿Rango de f? Es la dimensión de la Im(f), en nuestro caso, **2**.

h) ¿Es f un epimorfismo? **No**, por no ser Im(f)=R^3.

i) ¿Es f un monomorfismo? **No**, por no ser dimN(f)=0.

j) ¿Es f un isomorfismo? **No**, por no ser epimorfismo ni monomorfismo.

k) ¿Es f un automorfismo? **No**, por no ser isomorfismo.

17.- En el espacio vectorial $R^3(R)$se define la *aplicación lineal*:
f: $R^3 \to R^3$, f(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y). Se pide:
1. **Matriz de f respecto de la *base canónica*. (llamarla A)**
2. **Clasificar f.**
3. ***Valores propios* de f.**
4. **Estudiar la *diagonalización* de f.**
5. ***Base* de *vectores propios* (si procede)**
6. **Matriz de f respecto de esta base de *vectores propios*. (llamarla D)**
7. **Relación entre la matriz A y D.**
8. **Hallar las *ecuaciones paramétricas* de todos los subespacios *invariantes*.**
9. **Hallar A^{25}.**

Solución:

1. Las imágenes de los vectores de la base canónica forman la matriz A.

f(1,0,0)=(0,1,1); f(0,1,0)=(1,0,1); f(0,0,1)=(1,1,0); $\Rightarrow A = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$

2. $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow$ f es $\boxed{\textbf{biyectiva}}$.

3. $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 0-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = (\lambda+1)^2(2-\lambda) \Rightarrow \left\{ \boxed{\begin{array}{l} \lambda = 2 \text{ simple} \\ \lambda = -1 \text{ doble} \end{array}} \right.$.

4. **Es diagonalizable en R por ser A simétrica**.

5. Vectores propios: $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 0-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 0-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Para $\lambda = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0-2 & 1 & 1 \\ 1 & 0-2 & 1 \\ 1 & 1 & 0-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\vec{v}_1 = (1,1,1)}$

Para $\lambda = -1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0+1 & 1 & 1 \\ 1 & 0+1 & 1 \\ 1 & 1 & 0+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = -\alpha - \beta \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\vec{v}_2 = (1,0,-1); \vec{v}_3 = (0,1,-1)}$

Base de vectores propios $\boxed{B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}}$.

6. $D = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$.

7. $D=P^{-1}AP$, siendo $\boxed{P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}}$.

8. Subespacios invariantes:

- $\{\vec{0}\}.\boxed{\begin{cases}x=0\\ y=0\\ z=0\end{cases}}$
- $\boxed{R^3:\begin{cases}x=\alpha\\ y=\beta\\ z=\gamma\end{cases}}.$
- $\boxed{V_{\lambda=2}:\begin{cases}x=\alpha\\ y=\alpha\\ z=\alpha\end{cases}}$
- $\boxed{V_{\lambda=-1}:\begin{cases}x=\alpha\\ y=\beta\\ z=-\alpha-\beta\end{cases}}$

9. $A^n=\left(PDP^{-1}\right)^n=PDP^{-1}\overset{n)}{\ldots\ldots}PDP^{-1}=PD\underbrace{P^{-1}P}_{I}D\underbrace{P^{-1}\ldots..P}_{I}D\underbrace{P^{-1}P}_{I}DP^{-1}=PD\overset{n)}{\ldots\ldots}DP^{-1}=PD^nP^{-1}$

$$A^{25}=PD^{25}P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^{25} & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}11184810 & 11184811 & 11184811\\ 11184811 & 11184810 & 11184811\\ 11184811 & 11184811 & 11184810\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{25}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2^{25}-2 & 2^{25}+1 & 2^{25}+1\\ 2^{25}+1 & 2^{25}-2 & 2^{25}+1\\ 2^{25}+1 & 2^{25}+1 & 2^{25}-2\end{pmatrix}}$$

18.- Sea f: $\Re^4 \rightarrow \Re^4$ definida por f(x,y,z,t)=(7x,7y,7z+7t,0). Se pide:
a) Escribir la matriz A de la aplicación y la ecuación matricial en la *base canónica*
b) Hallar las *ecuaciones implícitas* de la imagen del subespacio S={(x,y,z,t)$\in\Re^4$/x=y=z}
c) Calcular una *base* y las ecuaciones del *núcleo* y de la *imagen* de f
d) Hallar el *polinomio característico* y los *subespacios de vectores propios* de f
e) Obtener la matriz P de *cambio de base* que *diagonaliza* A y la *matriz D diagonal* y *semejante* a A

Solución:

a)

$$\left.\begin{array}{l} f(1,0,0,0)=(7,0,0,0) \\ f(0,1,0,0)=(0,7,0,0) \\ f(0,0,1,0)=(0,0,7,0) \\ f(0,0,0,1)=(0,0,7,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{A=\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} ; \text{ y la ecuación } \boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}$$

b)

Ecuaciones paramétricas de S: $\begin{cases} x=\alpha \\ y=\alpha \\ z=\alpha \\ t=\beta \end{cases}$ y una base de S es B_S={(1,1,1,0),(0,0,0,1)}

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Im(S)=<(7,7,7,0),(0,0,0,7)>; $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=7\alpha \\ y=7\alpha \\ z=7\alpha+7\beta \\ t=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=y \\ t=0 \end{cases}}$

c)

Ecuaciones del núcleo de f; AX=0

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z+t=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{N(f)=\left\{(x,y,z,t)\in\Re^4 / x=y=0, z+t=0\right\}}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=\alpha \\ t=-\alpha \end{cases} \Rightarrow \boxed{B_{N(f)}=\{(0,0,1,-1)\}}$$

Ecuaciones de la imagen de f

Tomando los transformados de los vectores de la base canónica (por filas), con Derive

$$row\_reduce\begin{pmatrix}7&0&0&0\\0&7&0&0\\0&0&7&0\\0&0&7&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow \boxed{B_{\mathrm{Im}(f)}=\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0)\}}$$

Las ecuaciones paramétricas son, por tanto; $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=\alpha\\y=\beta\\z=\gamma\\t=0\end{cases}$

y la ecuación implícita **t = 0**

d)

Polinomio característico |A-λI|=0

$$\mathrm{DET}\begin{pmatrix}7-\lambda&0&0&0\\0&7-\lambda&0&0\\0&0&7-\lambda&7\\0&0&0&-\lambda\end{pmatrix}=\boxed{\lambda(\lambda-7)^3}$$ Los valores propios son $\lambda=0$ y λ=7

El subespacio de vectores propios asociados a $\lambda=0$ es **N(f)** cuya dimensión es dimN(f)=1

El subespacio de vectores propios asociados a $\lambda=7$ viene dado por la ecuación

AX=7X $\Rightarrow$ (A-7I) X = 0

$$\begin{pmatrix}7-7&0&0&0\\0&7-7&0&0\\0&0&7-7&7\\0&0&0&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&7\\0&0&0&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{t=0}$$

Éste es precisamente la imagen de f cuya dimensión es dimIm(f) = 3 y una base se había calculado anteriormente:

$$\boxed{B_{\mathrm{Im}(f)}=\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0)\}}$$

e)

La matriz P de cambio de base que diagonaliza A es la matriz de cambio de base de una base de vectores propios a la base canónica.

$$P=\boxed{\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\\-1&0&0&0\end{pmatrix}}$$

D=P^{-1}AP

$$D=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\\-1&0&0&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}7&0&0&0\\0&7&0&0\\0&0&7&7\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\\-1&0&0&0\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&7&0&0\\0&0&7&0\\0&0&0&7\end{pmatrix}}$$

19.- Sea f una *transformación lineal* de R^4 tal que su matriz asociada respecto de la *base canónica* es:

$$A=\begin{pmatrix} -4 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -6 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Hallar sendas *bases* de *N(f) e Im(f)*.
b) Hallar el *polinomio característico* y los *vectores propios* de f, así como los s.v. de vectores propios asociados ¿Coincide N(f) con alguno de éstos últimos?
c) Escribir el enunciado de un teorema de diagonalización que pruebe que A es diagonalizable y dar una base de vectores de R^4 respecto de la cual la matriz asociada a f sea una *matriz D diagonal*.
d) Dar D y la matriz P de *cambio de base* que diagonaliza A.
e) Escribir la definición de *matrices semejantes* ¿Son A y D *semejantes*? En caso afirmativo hallar A^7 utilizando que A y D son semejantes.

Solución:

a) Ecuaciones del núcleo de f; AX=0

$$\begin{pmatrix} -4 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -6 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} x=0 \\ y+z=0 \\ t=0 \end{cases}$$

Una base del N(F)={(0,1,-1,0)}
Una base de Im(f)={(-4,0,0,-6), (3,0,2,3), (3,0,0,5)}

Obsérvese que dimN(f)+dim(Im(f))=dimR^4=4

b) Polinomio característico

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} -4-\lambda & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2-\lambda & 0 \\ -6 & 3 & 3 & 5-\lambda \end{vmatrix}=\lambda(2-\lambda)^2(\lambda+1)=0\Rightarrow\begin{cases} \boxed{\begin{array}{l}\lambda=2 \\ \lambda=-1 \\ \lambda=0\end{array}} \end{cases}$$

Valores propios
Subespacio propio asociado al valor propio 2 doble:

$$(A-\lambda I)\vec{v}=\begin{pmatrix} -4-2 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0-2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2-2 & 0 \\ -6 & 3 & 3 & 5-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} 2x-z-t=0 \\ y=0 \end{cases}$$

V_2=<{(1/2,0,1,0), (1/2,0,0,1)}>

Subespacio propio asociado al valor propio -1 simple:

$$(A-\lambda I)\vec{v}=\begin{pmatrix}-4+1 & 3 & 3 & 3\\ 0 & 0+1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 2+1 & 0\\ -6 & 3 & 3 & 5+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x-t=0\\ y=0\\ z=0\end{cases}$$

V_{-1}=<{(1,0,0,1)}>

Subespacio propio asociado al valor propio 0 simple:

V_0=<{(0,1,-1,0)}> es precisamente el núcleo de f.

c) A es diagonalizable si todos los valores propios son números reales y cada valor propio cumple que su orden de multiplicidad coincide con la dimensión del correspondiente subespacio propio. La base formada por los vectores propios es:

{(1/2,0,1,0), (1/2,0,0,1), (1,0,0,1), (0,1,-1,0)}

d)

$$D=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

La matriz del cambio de base:

$$P=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

En efecto: $PDP^{-1}=A$

e) A y D son semejantes si y sólo si $A = P^{-1}\, D\, P$ siendo P una matriz regular.
$A = P^{-1}\, D\, P$, luego $D = P\, A\, P^{-1}$

$$A^7=PD^7P^{-1}=\begin{pmatrix}-130 & 129 & 129 & 129\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 128 & 128 & 0\\ -258 & 129 & 129 & 257\end{pmatrix}$$

20.- Analizar si la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ es *diagonalizable* según los valores del *parámetro* k.

Solución:

Primeramente calculamos los valores propios:

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & k & 2 \\ 1 & 0-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(\lambda^2-\lambda-k)=0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 6 \\ \lambda_2 = \dfrac{1+\sqrt{1+4k}}{2} \\ \lambda_3 = \dfrac{1-\sqrt{1+4k}}{2} \end{cases}$$

. Consideramos los siguientes casos:

- Si 1+4k<0, es decir, **k<1/4**, entonces hay raíces complejas y por tanto **A no es diagonalizable**.

- Si **k=1/4**, entonces $\lambda_2=\lambda_3=1/2$ raíz doble. Es necesario calcular la dimensión del subespacio propio asociado a dicho valor propio.

$$(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda & k=1/4 & 2 \\ 1 & 0-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

. Para $\lambda=1/2$, se obtiene:

$$\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2} & k=1/4 & 2 \\ 1 & 0-\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 6-\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ z = 0 \end{cases}$$

. Cuya dimensión es 1 y no coincide con el grado de multiplicidad del valor propio $\lambda=1/2$ que es doble. Luego **A no es diagonalizable**.

- Si 1+4k>0, es decir, **k>1/4**, entonces hay dos raíces reales y distintas; pero puede ser $\lambda_1 = \lambda_2 = 6 = \dfrac{1+\sqrt{1+4k}}{2} \Rightarrow k = 30 > 1/4$ y como $\lambda=6$ es doble calculamos la dimensión del subespacio propio asociado $\begin{pmatrix} 1-6 & k=30 & 2 \\ 1 & 0-6 & 3 \\ 0 & 0 & 6-6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x+30y+2z=0 \\ x-6y+3z=0 \end{cases}$. Cuya dimensión es 1 y no coincide con el grado de multiplicidad del valor propio 6 que es dos y por tanto **A no es diagonalizable**.

- Por último, **Si k>1/4 y k no es 6** resultan tres valores propios reales y distintos entre sí, luego $\boxed{\textbf{A es DIAGONALIZABLE}}$.

21.- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calcular los *autovalores* de A y sus respectivas multiplicidades algebraicas.

b) Hallar las *ecuaciones paramétricas* y *cartesianas* de los *subespacios propios* de A.

c) Obtener una *base* unitaria de R^4 formada por *vectores propios* unitarios de A.

d) Calcular una *matriz diagonal semejante* a la matriz A.

e) Calcular el producto matricial $A^n \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solución:

a) $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}| = (\lambda-1)^2(\lambda-2)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \lambda = 1 \text{ doble} \\ \lambda = 2 \text{ doble} \end{cases}}$

b) $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\vec{\mathbf{v}} = \vec{0}$

Para **λ=1** resulta **y=t=0** unas ecuaciones cartesianas; **x=α,z=β** unas ecuaciones paramétricas.

Para **λ=2** resulta $\boxed{\begin{cases} -\mathbf{x}+2\mathbf{y}-2\mathbf{t}=0 \\ 2\mathbf{y}-\mathbf{z}-2\mathbf{t}=0 \end{cases}}$ unas ecuaciones cartesianas; $\boxed{\begin{cases} \mathbf{x} = \alpha \\ \mathbf{y} = \frac{1}{2}\alpha + \beta \\ \mathbf{z} = \alpha \\ \mathbf{t} = \beta \end{cases}}$ unas ecuaciones paramétricas.

c) De cada subespacio propio, por ser de dimensión dos, se obtienen dos vectores linealmente independientes:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$ los dos primeros unitarios y los dos siguientes de módulo 3/2 y 2

respectivamente, luego $\boxed{\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\right\}}$ es una base unitaria del espacio R^4.

d) $\boxed{D=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}}$

e) Por ser A diagonalizable $D=P^{-1}AP$ y despejando $A=PDP^{-1}$, de donde,

$$\mathbf{A^n}=\mathbf{PD^nP^{-1}}=\begin{pmatrix}1&0&\frac{2}{3}&0\\0&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&\frac{2}{3}&0\\0&0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}^{\mathbf{n}}\begin{pmatrix}1&0&\frac{2}{3}&0\\0&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&\frac{2}{3}&0\\0&0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}^{-1}=$$

$$=\boxed{\begin{pmatrix}1&2^{\mathbf{n}+1}-2&0&2-2^{\mathbf{n}+1}\\0&2^{\mathbf{n}}&0&0\\0&2^{\mathbf{n}+1}-2&1&2-2^{\mathbf{n}+1}\\0&0&0&2^{\mathbf{n}}\end{pmatrix}}$$. Lo que nos permite calcular $\mathbf{A^n}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}1-2^{\mathbf{n}+1}\\0\\3-2^{\mathbf{n}+1}\\2^{\mathbf{n}}\end{pmatrix}}$

22.- Dada la transformación lineal de R^3 definida por:

$f(x, y, z) = (4x + y - 4z, 3z - 3x, 3x + y - 3z)$

Se pide:

a) La matriz A asociada a f respecto de la *base canónica*.

b) Sendas *bases* de N(f) e Im(f).

c) Una base del subespacio *ortogonal* de N(f).

d) Estudiar si A es *diagonalizable* y, en su caso, dar la matriz diagonal.

e) Hallar la matriz asociada a f respecto de la base

B' = { (1, 0, 1), (1, -1, 0), (0, 0, 1)}

***Solución*:**

a) $\boxed{A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 \\ -3 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}}$

b) N(f) es la solución de A X = O

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 \\ -3 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x + y - 4z = 0 \\ -3x + 3z = 0 \\ 3x + y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\boxed{N(f) = \{(\lambda,,0,\lambda),\ \lambda \in R\} \Rightarrow B_{N(f)} = \{(1,0,1)\}}$

$$\text{rg}\begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 \\ -3 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \boxed{B_{Im(f)} = \{(1,0,1),(0,-3,-1)\}}$$

c) $N(f)^{\perp}$ es el plano vectorial ortogonal a la recta $\langle(1,0,1)\rangle$, luego, la ecuación implícita es:

$x + z = 0$, y una base es $\boxed{B_{N(f)^{\perp}} = \{(1,0,-1),(0,1,0)\}}$.

d) Valores propios de A:

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} 0 \text{ doble} \\ 1 \text{ simple} \end{cases}$$

Vectores propios asociados a $\lambda = 0$: $V_0 = N(f) = \{(1,0,1)\}$

Luego, dim $V_0 = 1 \neq 2 =$ orden de multiplicidad del valor propio 0.

Por tanto, **A no es diagonalizable**.

$$\textbf{e)}\ A_{B'} = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 \\ -3 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}}$$

siendo P la matriz de paso de B' a B.

23.- Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & a & 2-a \\ 0 & a & -a \end{pmatrix}$ **asociada a cierta** ***transformación lineal*** $f: V_3 \longrightarrow V_3$**. Se pide:**

a) Estudiar los valores de a para los cuales M es ***diagonalizable*****.**

b) Para a=0, hallar ***N(f), Im(f)*** **y el subespacio de** ***vectores invariantes*****.**

Solución:

a) Valores propios de M:

$$|M - \lambda I| = (\lambda - 1)(2a - \lambda^2) = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} \pm\sqrt{2a} \\ 1 \end{cases}$$

λ = - √2·√a y λ = √2·√a y λ = 1

Necesariamente **a>0** para que los valores propios sean reales

1er caso: a>0

Tres valores propios distintos entre sí en un espacio vectorial de dimensión 3, por tanto **M es diagonalizable**.

2º caso: a=1/2

λ=1 doble y λ=-1 simple

Vectores propios para a=1/2 y λ=1:

$$(M - \lambda I)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-1 & -2 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2}-1 & 2-\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Dimensión del subespacio propio asociado al valor propio λ=1 es 1 y no coincide con el orden de multiplicidad del valor propio que es 2 (doble), luego M no es diagonalizable.

3er caso: a=0

λ=0 doble y λ=-1 simple

Vectores propios para a=0 y λ=0:

$$(M - \lambda I)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-0 & -2 & 3 \\ 0 & 0-0 & 2-0 \\ 0 & 0 & -0-0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Dimensión del subespacio propio asociado al valor propio λ=0 es 1 y no coincide con el orden de multiplicidad del valor propio que es 2 (doble), luego M no es diagonalizable.

b) Para a=0, tenemos las ecuaciones cartesianas del Núcleo de f:

$$V_{\lambda=0} = N(f) \equiv \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \dim N(f) = 1$$

Ecuaciones paramétricas de Im(f): $\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\alpha + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\beta}$

ya que $\dim \mathrm{Im}(f) = r\begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & \boxed{3} \\ \boxed{0} & 0 & \boxed{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$

El subespacio de vectores invariantes se obtiene para λ=1:

$$\left(M - \lambda I\right)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-1 & -2 & 3 \\ 0 & 0-1 & 2-0 \\ 0 & 0 & 0-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\boxed{V_{\lambda=1} = \left\{(\alpha, 0, 0) \in R^3 / \alpha \in R\right\} \Rightarrow \dim V_{\lambda=1} = 1}$$

24.- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores de α y β es A *diagonalizable*? Y ¿para qué valores de α y β se obtiene para A un *valor propio* triple?

b) Para α=0 y β=-1, hallar:

i) una matriz *diagonal semejante* a A.

ii) una matriz P que permita la diagonalización.

iii) una matriz P* *ortogonal* que permita la diagonalización.

Solución:

a) A es diagonalizable para cualesquiera valores **α, β∈R** por ser A una matriz simétrica.

Los autovalores de A son:

$$|A-\lambda I| = (\alpha-\lambda)\left(\lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2 - 2\beta^2\right) = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} \alpha \pm \sqrt{2}\beta \\ \alpha \end{cases}$$

A tendrá un valor propio triple cuando:

$$\boxed{\alpha - \sqrt{2}\beta = \alpha + \sqrt{2}\beta = \alpha \quad \Rightarrow \quad \beta = 0}$$

y el valor propio triple es $\alpha \in \mathbf{R}$, es decir, $|A-\lambda I| = (\alpha-\lambda)^3$.

b) Para α = 0 y β = -1, designamos $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

i) Por ser B simétrica es diagonalizable y sus valores propios son:

$$|B-\lambda I| = \lambda\left(2-\lambda^2\right) = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} \pm\sqrt{2} \\ 0 \end{cases}$$

Es decir, sus valores propios son 0, -$\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ simples, luego una matriz diagonal semejante a B es $\boxed{D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}}$

ii) La matriz P que permite la diagonalización es la matriz de cambio de una base B de vectores propios a la canónica B_C. Calculamos primero vectores propios asociados a cada uno de los valores propios para tener la base de vectores propios.

Vectores propios para λ=0:

$$(B-\lambda I)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow V_{\lambda=0} = <(1,0,-1)>$$

Vectores propios para λ=-√2:

$$\left(B+\sqrt{2}I\right)\vec{v}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\sqrt{2} & -1 & 0\\ -1 & \sqrt{2} & -1\\ 0 & -1 & \sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x-z=0\\ y-\sqrt{2}z=0\end{cases}\Rightarrow V_{\lambda=-\sqrt{2}}=<(1,\sqrt{2},1)>$$

Vectores propios para $\lambda=\sqrt{2}$:

$$\left(B-\sqrt{2}I\right)\vec{v}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-\sqrt{2} & -1 & 0\\ -1 & -\sqrt{2} & -1\\ 0 & -1 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x-z=0\\ y+\sqrt{2}z=0\end{cases}\Rightarrow V_{\lambda=\sqrt{2}}=<(1,-\sqrt{2},1)>$$

Una base de vectores propios es B = {(1, 0, -1), (1, $\sqrt{2}$, 1), (1, -$\sqrt{2}$, 1)} y la matriz P de cambio de B a la base canónica B_C es:

$$P=\boxed{\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2}\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}}$$

iii) Por ser B simétrica podemos encontrar una base ortonormal de vectores propios y, en consecuencia una matriz P^* ortogonal que permite la diagonalización. Como los valores propios son distintos entre sí los subespacios de vectores propios asociados son ortogonales entre sí:

$$(1,0,-1)\cdot\left(1,\sqrt{2},1\right)=0;(1,0,-1)\cdot\left(1,-\sqrt{2},1\right)=0;\left(1,-\sqrt{2},1\right)\cdot\left(1,\sqrt{2},1\right)=0;$$

luego tomando los vectores unitarios en sus direcciones obtenemos la base ortonormal:

$B^* = \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{2}\right)\right\}$ y la matriz de cambio de base correspondiente es la matriz ortogonal

$$P^*=\boxed{\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}}$$

25.- Sea la *aplicación lineal* f:$R^4 \rightarrow R^4$ definida por f(x,y,z,t)=(x, 3x+3y, 5y+5z+7t, 0). Se pide:

a) Escribir la matriz A de la aplicación y la ecuación matricial en la *base canónica*.

b) Hallar las e*cuaciones implícitas* de la *imagen* por f del subespacio S={(x,y,z,t)∈R^4/x=y, x+y+z=0}

c) Calcular una *base* y las *ecuaciones implícitas del núcleo y de la imagen de f*.

d) Hallar el *polinomio característico* y los subespacios de *vectores propios* de f.

e) Obtener la matriz P de *cambio de base* que diagonaliza A y la *matriz D diagonal y semejante* a A.

Solución:

a) Primeramente buscamos las imágenes de la base canónica de R^4 mediante la aplicación lineal f

f(1,0,0,0)=(1,3,0,0)

f(0,1,0,0)=(0,3,5,0)

f(0,0,1,0)=(0,0,5,0)

f(0,0,0,1)=(0,0,7,0)

Así, la matriz que define f respecto de la base canónica es:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\3&3&0&0\\0&5&5&7\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Ecuación matricial: AX=X'

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\3&3&0&0\\0&5&5&7\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\\t'\end{pmatrix}$$

b) Del subespacio vectorial S obtenemos una base

$$\left.\begin{matrix}x=y\\x+y+z=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\0\end{pmatrix}\alpha+\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\beta$$

Y aplicando f a los vectores de la base S, se tiene un sistema generador del subespacio imagen.

$$f\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\3&3&0&0\\0&5&5&7\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\6\\-5\\0\end{pmatrix};\ f\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\3&3&0&0\\0&5&5&7\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\7\\0\end{pmatrix}$$

$$\text{Unas ecuaciones paramétricas: }\left.\begin{matrix}x=\lambda\\y=6\lambda\\z=-5\lambda+7\mu\\t=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\text{Unas cartesianas: }\boxed{\left.\begin{matrix}y=6x\\t=0\end{matrix}\right\}}$$

c)

Ecuaciones del núcleo de f: AX=O

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ 5z + 7t = 0 \end{array}\right\}}$$

Una base del N(f)= **{(0,0,1,-5/7)}**

Ecuaciones de la imagen de f:

$$r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

Una base del subespacio **Im(f): {(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0)}**

Y la ecuación implícita es **t=0**.

d)

Polinomio característico y valores propios:

$$|A - \lambda I| = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda - 5) = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} 5 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{cases}$$

Vectores propios:

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-5 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3-5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5-5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0-5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

El subespacio propio asociado al **valor propio 5** es el generador por el vector propio **(0,0,1,0)**.

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3-3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5-3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y + \frac{2}{5}z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

El subespacio propio asociado al **valor propio 3** es el generador por el vector propio **(0,2,-5,0)**.

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3-1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5-1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{8}{15}z = 0 \\ y + \frac{4}{5}z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

El subespacio propio asociado al **valor propio 1** es el generador por el vector propio **(8,-12,15,0)**.

$$(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1-0 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 3-0 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 5-0 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 0-0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=0\\ z+\frac{7}{5}t=0\end{cases}$$

El subespacio propio asociado al **valor propio 0** es el generador por el vector propio **(0,0,7,-5)**.

e)

Una base de R^4 formada por vectores propios puede ser:

{(0,0,1,0), (0,2,-5,0), (8,-12,15,0), (0,0,7,-5)}.

La matriz P cambio de base: $\begin{pmatrix}0 & 0 & 8 & 0\\ 0 & 2 & -12 & 0\\ 1 & -5 & 15 & 7\\ 0 & 0 & 0 & -5\end{pmatrix}$

La matriz D diagonal semejante a A es: $\begin{pmatrix}5 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

26.- Sea f la *transformación lineal* de $\Re^3$ tal que:
$f(\vec{i}) = (4, 2, 1)$, $f(\vec{j}) = (1, 5, 1)$, $f(\vec{k}) = (-1, -2, 2)$ donde $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ es la base canónica. Se pide:
a) La matriz A asociada a f respecto de la *base canónica*.
b) Hallar los *valores propios* de A y los subespacios de *vectores propios* asociados.
c) Razonar si A es *diagonalizable*. En caso afirmativo, escribir una *matriz diagonal D semejante* a A y la matriz de paso correspondiente.
d) Hallar *N(f), Im(f)* e indicar si f es *biyectiva*.
e) Hallar A^n.

Solución:

a) Como nos dan las coordenadas de las imágenes de los vectores de la base canónica B_C la matriz A asociada respecto de B_C tiene por columnas dichas coordenadas

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$$

b) Cálculo de los valores propios:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 5-\lambda & -2 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2(5-\lambda) = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \lambda = 5 \text{ simple} \\ \lambda = 3 \text{ doble} \end{cases}}$$

Cálculo de los vectores propios:

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 5-\lambda & -2 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Para } \lambda = 5: \begin{pmatrix} 4-5 & 1 & -1 \\ 2 & 5-5 & -2 \\ 1 & 1 & 2-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha, \alpha \in R; \\ z = \alpha \end{cases} \boxed{V_5 = <(1,2,1)>}$$

$$\text{Para } \lambda = 3: \begin{pmatrix} 4-3 & 1 & -1 \\ 2 & 5-3 & -2 \\ 1 & 1 & 2-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \quad , \alpha, \beta \in R; \\ z = \alpha + \beta \end{cases} \boxed{V_3 = <(1,0,1),(0,1,1)>}$$

Con DERIVE: El polinomio característico de A es

$$\text{CHARPOLY} \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = (5 - w)\cdot(w - 3)^2$$

Luego los valores propios de A son λ = 5 simple y λ = 3 doble.
Los s.v. de vectores propios asociados son:

$$\mathrm{EXACT\_EIGENVECTOR}\left(\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, 5\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot y \cdot \mathrm{EXACT\_EIGENVECTOR}\left(\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, 3\right) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Es decir, $V_5 = <(-1,-2,-1)>$ y $V_3 = <(1,-1,0),(-1,0,-1)>$.

c) A es diagonalizable porque dim $V_5 = 1$ y dim $V_3 = 2$, es decir coinciden la multiplicidad algebraica de los valores propios con la multiplicidad geométrica de los vectores propios asociados. Las matrices D y $P_{B\to Bc}$ son

$$D = \boxed{\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}} \text{ y } \boxed{P_{B\to Bc} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

d) Como $|A| \neq 0$ la transformación lineal **es biyectiva** y por tanto la **Im(f)=$\mathbf{R^3}$** y el $\boxed{N(f) = \{\vec{0}\}}$.

e) A y D son matrices semejantes verificándose que $D = P_{B\to Bc}^{-1}\, A\, P_{B\to Bc}$, luego:

$A = P_{B\to Bc}\, D\, P_{B\to Bc}^{\ -1} \Rightarrow A^n = P_{B\to Bc}\, D^n\, P_{B\to Bc}^{\ -1}$

$$A^n := \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^n \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5^n}{2} + \frac{3^n}{2} & \frac{5^n}{2} - \frac{3^n}{2} & \frac{3^n}{2} - \frac{5^n}{2} \\ 5^n - 3^n & 5^n & 3^n - 5^n \\ \frac{5^n}{2} - \frac{3^n}{2} & \frac{5^n}{2} - \frac{3^n}{2} & \frac{3^{n+1}}{2} - \frac{5^n}{2} \end{bmatrix}$$

27.- Sea la *transformación lineal* f de R^3 tal que:
$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,+2x_2,2x_1+x_2,-x_3)$ Se pide:
a) Hallar la matriz M asociada a f respecto de la *base canónica*.
b) Obtener el subespacio *núcleo* f. Dar una *base*.
c) Obtener el subespacio *imagen* f. Dar una base.
d) ¿Es f una *transformación ortogonal*?
e) *Diagonalizar*, si es posible, la matriz M.
f) Obtener una *base ortonormal* de R^3 formada por *vectores propios* de M.

***Solución*: a)** $M = M(f, B_c) = \boxed{\begin{pmatrix} \overbrace{1}^{f(\vec{i})} & \overbrace{2}^{f(\vec{j})} & \overbrace{0}^{f(\vec{k})} \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$

b) El núcleo es: $N(f) = \left\{\vec{x} \in R^3 / f(\vec{x}) = 0\right\}$, luego: $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,+2x_2,2x_1+x_2,-x_3)=(0,0,0)$ resultando **N(f)={(0,0,0)}** y **no tiene base**.

c) La imagen es: $Im(f) = \left\{\vec{y} \in R^3 / \exists\vec{x} \text{ con } f(\vec{x}) = \vec{y}\right\}$, luego $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ que son las ecuaciones paramétricas del subespacio imagen, siendo dim(Im(f))=r(M)=3, es decir, el propio espacio vectorial $\mathbf{R^3}$ y una base $\mathbf{B_{Im(f)}}$ **={(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)}**

d) No es una transformación ortogonal, aunque es biyectiva, pues M no es ortogonal, $MM^t \neq I$.

e) Es diagonalizable, pues es simétrica y la matriz diagonal semejante a M se obtiene con los valores propios de M.

$$|M - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(\lambda+1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} -1 \text{ doble} \\ 3 \text{ simple} \end{cases} \text{ resultando } \boxed{D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

f) La base ortogonal, se obtiene con los vectores propios asociados a los valores propios

$$(M - \lambda I)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para -1 se tiene: $(M + 1\,I)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1+1 & 2 & 0 \\ 2 & 1+1 & 0 \\ 0 & 0 & -1+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = -\alpha \\ x_3 = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_1 = (1,-1,0) \\ \vec{u}_2 = (0,0,1) \end{cases}$

Para 3 se tiene: $(M\text{-}3\,I)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1\text{-}3 & 2 & 0 \\ 2 & 1\text{-}3 & 0 \\ 0 & 0 & -1\text{-}3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left\{\vec{u}_3 = (1,1,0)\right.$

Y dividiendo cada vector por su módulo, obtenemos la base ortonormal:

$$\boxed{B = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), (0,0,1)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\right\}}$$

28.- Sea f la *transformación lineal* cuya matriz asociada respecto de la base canónica es: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Se pide:

a) Dar una *base* de Im(f)

b) ¿Es f un *isomorfismo*?

c) ¿Es f *diagonalizable*?

d) En el caso de que sea diagonalizable, encontrar una matriz P que permita la diagonalización.

Solución:

a) La imagen es: $\mathrm{Im}(f)=\left\{\vec{y}\in R^3 / \exists\vec{x} \text{ con } f(\vec{x})=\vec{y}\right\}$, luego

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} x_3$$

que son las ecuaciones paramétricas del subespacio imagen, siendo dim(Im(f))=r(M)=3, es decir, el propio espacio vectorial R^3 y una base **$B_{Im(f)}$ ={(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)}**

b) f es una transformación lineal que además es biyectiva pues Im(f)=R_3, luego **es un isomorfismo**.

c) Primeramente calculamos los valores propios:

$$|M-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} 1 \text{ doble} \\ 2 \text{ simple} \end{cases}$$

A continuación, se obtiene con los vectores propios asociados a los valores propios

Para 1 se tiene:

$$(M-1\,I)\vec{v}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1-1 & -2 \\ 0 & 0 & 2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\alpha \\ x_2=\beta \\ x_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_1=(1,0,0) \\ \vec{v}_2=(0,1,0) \end{cases} \Rightarrow \dim V_{\lambda=1}=2$$

dim $V_{\lambda=1}$=2 coincide con el orden de multiplicidad, pues es doble.

Para 2 se tiene:

$$(M-2\,I)\vec{v}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-2 & 0 & 1 \\ 0 & 1-2 & -2 \\ 0 & 0 & 2-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\alpha \\ x_2=-2\alpha \\ x_3=\alpha \end{cases} \Rightarrow \left\{\vec{v}_3=(1,-2,1)\right\} \Rightarrow \dim V_{\lambda=2}=1$$

La dimensión de cada subespacio propio asociado a cada valor propio de f coincide con el orden de multiplicidad como raíz del polinomio característico, luego **es diagonalizable**, siendo la matriz diagonal $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

d) La matriz P que permite la diagonalización, es la matriz del cambio de base y está formada por vectores propios asociados a los valores propios $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

29.- Sea C el subconjunto de vectores del espacio vectorial R^3 dado por: $C=\{(x,y,z)/\ x+y+z=0\}$ y sea f la *transformación lineal* $f:R^3\to R^3$ tal que: $f(x,y,z)=(x+2y+z,2x+2z,y)$ Se pide:

a) Demostrar que C es un *subespacio vectorial* de R^3.

b) Obtener una *base* y unas *ecuaciones paramétricas* de C.

c) Obtener la ecuación matricial de f.

d) Dar unas *ecuaciones paramétricas y unas ecuaciones implícitas del Núcleo y de la Imagen* de f.

e) Comprobar si f es *diagonalizable* y, en su caso, obtener una base de R^3 respecto de la cuál la matriz asociada a f sea una *matriz diagonal*.

f) Hallar la *dimensión* de $f(C)$.

Solución:

a) C es subespacio pues dadas las ternas (x_1,y_1,z_1) y (x_2,y_2,z_2) y los escalares α y β, el vector $\alpha(x_1,y_1,x_1)+\beta(x_2,y_2,x_2)=(\alpha x_1+\beta x_2,\ \alpha y_1+\beta y_2,\ \alpha z_1+\beta z_2)$ verifica:
$\alpha x_1+\beta x_2+\alpha y_1+\beta y_2+.\alpha z_1+\beta z_2=\alpha(x_1+y_1+z_1)+\beta(x_2+y_2+z_2)=\alpha 0+\beta 0=0$.

b) Obtenemos primero unas ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \\ z=-\alpha-\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\alpha + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\beta$$

Base **B={(1,0,-1),(0,1,-1)}**

c) Obtener la ecuación matricial de f: AX=X'

Buscamos las imágenes de la base canónica de R^4 mediante la aplicación lineal f

$$f(\vec{i})=f(1,0,0)=(1,3,0,0)$$

$$f(\vec{j})=f(0,1,0)=(0,3,5,0)$$

$$f(\vec{k})=f(0,0,1)=(0,0,5,0)$$

$$M(f,B_c)=\begin{array}{c} \begin{matrix} f(\vec{i}) & f(\vec{j}) & f(\vec{k}) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}$$

d) Núcleo de f: AX=O

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\mathbf{x+z=0 \wedge y=0}}$$ Ecuaciones implícitas de N(f)

Ecuación paramétrica de N(f)

$$\boxed{\begin{cases} x=\alpha \\ y=0 \\ z=-\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\alpha}$$

Para obtener las ecuaciones de la imagen sabemos que los transformados de la base canónica forman un sistema generador de la imagen. Eliminando la última columna, tenemos una base de la imagen.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\alpha + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\beta \text{ ecuaciones paramétricas de la imagen de f}$$

$$\begin{vmatrix} x' & 2 & 1 \\ y' & 0 & 2 \\ z' & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{-2x' - y' + 4z' = 0} \text{ ecuación implícita de Im(f)}$$

e) Diagonalización

Primeramente calculamos los valores propios:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 0-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + 6\lambda = -\lambda(\lambda+2)(\lambda-3) = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} 0 \\ -2 \\ 3 \end{cases}$$

por tener tres valores propios reales y distintos, la matriz es diagonalizable.

A continuación, se obtiene con los vectores propios asociados a los valores propios

Para λ=0 se tiene:

$$(A - \lambda\ I)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-0 & 2 & 1 \\ 2 & 0-0 & 2 \\ 0 & 1 & 0-0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \{\vec{v}_1 = (1,0,-1) \Rightarrow \dim V_{\lambda=0} = 1$$

Para λ=-2 se tiene:

$$(A - \lambda\ I)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1+2 & 2 & 1 \\ 2 & 0+2 & 2 \\ 0 & 1 & 0+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \{\vec{v}_2 = (1,-2,1) \Rightarrow \dim V_{\lambda=-2} = 1$$

Para λ=3 se tiene:

$$(A - \lambda\ I)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-3 & 2 & 1 \\ 2 & 0-3 & 2 \\ 0 & 1 & 0-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{7}{2}z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \{\vec{v}_3 = (7,6,2) \Rightarrow \dim V_{\lambda=3} = 1$$

base en la cual la matriz A es diagonal **B={(1,0,-1), (1,-2,1), (7,6,2)}**

f) Hallar la dimensión de f(C)

Buscaremos las imágenes de una base de C

$$f(1,0,-1) = (1 + 2\cdot 0 - 1, 2\cdot 1 + 2(-1), 0) = (0,0,0)$$

$$f(0,1,-1) = (0 + 2\cdot 1 - 1, 2\cdot 0 + 2(-1), 1) = (1,-2,1)$$

La dimensión de f(C) es igual a uno. Puesto que el vector nulo no puede formar parte de la base de f(C).

30.- Sea f una *transformación lineal* de R^3 cuyos *valores propios* son 2 y 3, con *subespacios propios* respectivos:

$$V_{\lambda=2} = \{(x,y,z) \in R^3 / \quad x = 0\} \qquad V_{\lambda=3} = \{(x,y,z) \in R^3 / \quad x = y = z\}$$

Se pide:

a) Una *base* de cada subespacio propio.

b) El *subespacio vectorial* $V_{\lambda=2} \cap V_{\lambda=3}$.

c) ¿Son *suplementarios* los dos subespacios propios? y ¿*ortogonales*?

d) Una *base* de R^3 formada exclusivamente por *vectores propios*.

e) Una *matriz diagonal* que defina f.

f) La matriz asociada a f respecto de la *base canónica*.

Solución:

a) Dado que cada subespacio propio viene definido por las ecuaciones cartesianas o implícitas podemos decir que la dimensión del $V_{\lambda=2} = \{(x,y,z) \in R^3 / x = 0\}$ es dos y en forma paramétrica $\begin{cases} x = 0 \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$ con una posible base $\boxed{B_2 = \{(0,1,0),(0,0,1)\}}$ y para

$V_{\lambda=3} = \{(x,y,z) \in R^3 / x = y = z\}$ la dimensión es uno y en forma paramétrica $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$ con una posible base $\boxed{B_3 = \{(1,1,1)\}}$.

b) Resolviendo el sistema {x=0,x=y=z} resulta a $\boxed{V_{\lambda=2} \cap V_{\lambda=3} = \mathbf{(0,0,0)}}$.

c) Por otra parte, $V_{\lambda=2} \oplus V_{\lambda=3} = R^3$, ya que $B_2 \cup B_3$ es un sistema libre de tres vectores luego genera todo el espacio vectorial; es decir, **son suplementarios**.

Sin embargo, **no son ortogonales** puesto que el vector (0,1,0) no es ortogonal al (1,1,1).

d) $\boxed{B = B_2 \cup B_3 = \mathbf{\{(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\}}}$ es una base de R^3

e) Por existir una base del espacio vectorial formada por vectores propios, existe una matriz diagonal que defina f y lógicamente el valor propio doble es el 2, por tanto: $\boxed{D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$.

f) Llamando P a la matriz de paso o matriz del cambio de base de la base B a la base canónica,

se tiene que: $A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$

31.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) Comprobar que es *diagonalizable*.
b) Calcular una *matriz D semejante* a la matriz A.
c) Hallar una *base* de *vectores propios* del *endomorfismo* definido por A.
d) Hallar la matriz P, tal que, D = P^{-1}AP.

Solución:

a) La ecuación característica de A es: $|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-2)^2$, de

donde obtenemos que los valores propios de A son $\lambda = 2$ doble y $\lambda = 1$ doble, por tanto, A es diagonalizable si la dimensión de cada uno de los subespacios propios asociados es dos.

$$(A-2I)\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = 0,\ \ z = 0\text{; base de } V_{\lambda=2} \text{ es } \{(1,0,0,0);(0,0,0,1)\}$$

$$(A-I)\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = z,\ \ t = y\text{, base de } V_{\lambda=1} \text{ es } \{(1,0,1,0),(0,1,0,1)\}.$$

b) Una matriz diagonal semejante a la matriz A está formada por los valores propios

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

c) Una base formada por vectores propios es: $\boxed{C = \{(1,0,0,0),(0,0,0,1),(1,0,1,0),(0,1,0,1)\}}$.

d) La matriz P de cambio de base de B a C, es decir, la matriz cuyas coordenadas son las coordenadas respecto de la base canónica los vectores de C, o sea:

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

32.- Sean $B=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ una *base* del espacio vectorial R^3 y la *transformación lineal f* tal que:

$$\begin{cases} f(\vec{u}_1) = \vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3 \\ f(\vec{u}_2) = 2\vec{u}_2 + 2\vec{u}_3 \\ f(\vec{u}_3) = \vec{u}_3 \end{cases}$$

. Se pide:

a) Escribir su ecuación matricial.

b) Obtener el subespacio *núcleo* f. Dar una *base*.

c) Obtener el subespacio *imagen* f. Dar una base.

d) ¿Es f *biyectiva*?

e) ¿Es f una *transformación ortogonal*?

f) *Diagonalizar*, si es posible, la *transformación lineal* f.

Solución:

a) La matriz asociada o que define f se obtiene mediante las imágenes de los vectores de la base $B=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$:

$$\begin{cases} f(\vec{u}_1)=\vec{u}_1+2\vec{u}_2+\vec{u}_3=(1,2,1)_B \\ f(\vec{u}_2)=\quad 2\vec{u}_2+2\vec{u}_3=(0,2,2)_B \\ f(\vec{u}_3)=\qquad\qquad \vec{u}_3=(0,0,1)_B \end{cases} \Rightarrow A=M(f,B)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ \underbrace{1}_{f(\vec{u}_1)} & \underbrace{2}_{f(\vec{u}_2)} & \underbrace{1}_{f(\vec{u}_3)} \end{pmatrix}$$

La ecuación matricial o ecuaciones de la transformación lineal es:

$$Y=AX \Leftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}$$

La expresión analítica de f resulta de escribir la ecuación de f en forma vectorial:

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,2x_1+2x_2,x_1+2x_2+x_3)$$

b) El núcleo es: $N(f)=\{\vec{x}\in R^3 / f(\vec{x})=0\}$, luego:

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,2x_1+2x_2,x_1+2x_2+x_3)=(0,0,0)\Rightarrow x_1=x_2=x_3=0$$

siendo la dimensión del núcleo de 0 y no tiene base.

c) La imagen es: $Im(f)=\{\vec{y}\in R^3 / \exists\vec{x} \text{ con } f(\vec{x})=\vec{y}\}$,luego

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}x_2+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}x_3$$

que son las ecuaciones paramétricas del subespacio imagen, siendo dim(Im(f))=r(A)=3 y una base **$B_{Im(f)}$={(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)}**

d) ¿Es f biyectiva? **Sí**, por **Im(f)=R^3 y dimN(f)=0**.

e) **No es una transformación ortogonal**, aunque es biyectiva, pues A no es ortogonal, ya que $AA^t \neq I$

f) Los valores propios de A.

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} 1 \text{ doble} \\ 2 \text{ simple} \end{cases}$$

A continuación, se obtiene los vectores propios asociados a los valores propios:

Para $\lambda=1$ se tiene:

$$(A-1\,I)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ 2 & 2-1 & 0 \\ 1 & 2 & 1-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \alpha \end{cases} \Rightarrow \{\vec{u}_1 = (0,0,1)\} \Rightarrow \dim V_{\lambda=1} = 1$$

dim $V_{\lambda=1}=1$ no coincide con el orden de multiplicidad, pues es doble.

Para $\lambda=2$ se tiene:

$$(A-2I)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-2 & 0 & 0 \\ 2 & 2-2 & 0 \\ 1 & 2 & 1-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = 2\alpha \end{cases} \Rightarrow \{\vec{u}_2 = (0,1,2)\} \Rightarrow \dim V_{\lambda=2} = 1$$

dim $V_{\lambda=1}=1$ coincide con el orden de multiplicidad, pues simple.
Resultando que **no es diagonalizable** puesto que el valor propio 1 es doble y la dimensión del subespacio propio asociado al valor propio es 1, por tanto no coinciden y no se cumple el teorema de diagonalización.

33.- Sea la *aplicación lineal* f: $\Re^3 \rightarrow \Re^3$ definida por:
f (x , y , z) = (- x + 2y , - x + 2y , - x + y + z) y sea S el subespacio vectorial de $\Re^3$ generado por los vectores:
S = < (1 , 1 , 0) , (2 , 2 , 1) , (1 , 1 , 1) , (0 , 0 , 1) > .
Se pide:

a) Obtener las *ecuaciones implícitas del núcleo y la imagen* de f.

b) Demostrar que f es *diagonalizable*

c) Obtener una *base* B de $\Re^3$ en la cual la matriz asociada a f sea *diagonal*.

d) Obtener unas *ecuaciones implícitas* de S en la *base canónica* y otras *ecuaciones implícitas* de S en la base B.

Solución:

Se comienza obteniendo la ecuación matricial de f, para lo cual se calculan los transformados por f de los vectores de la base canónica de $\Re^3$

f(1,0,0) = (-1,-1,-1)
f(0,1,0) = (2,2,1)
f(0,0,1) = (0,0,1) (véase que este vector es invariante)

la ecuación matricial de f en la base canónica será, por tanto $Y = AX \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) Cálculo de N(f). Son todos aquellos vectores que se transforman en el vector nulo

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}}$$

Cálculo de Im(f). La generan los transformados de los vectores de la base canónica. Se calcula el rango de la matriz A: rango(A) = 2 $\Rightarrow$ dim (Im(f))=2, y una base puede ser (tomando dos vectores - columna independientes de entre estos transformados), base(Im(f))={(2,2,1), (0,0,1)} de donde se pueden obtener unas ecuaciones paramétricas:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \text{la ecuación implícita es } \boxed{x = y}$$

b) Demostrar que es diagonalizable.

Cálculo del polinomio característico (con DERIVE: charpoly(a)): $p(\lambda) = -\lambda\,(\lambda-1)^2$

Los valores propios son, por tanto, (con DERIVE eigenvalues (a)): 0 y 1

Y los vectores propios asociados a cada uno de ellos son (con DERIVE exact_eigenvector (a,0) y exact_eigenvector(a,1))

Para $\lambda = 1$ S_1=<(-1,-1,0), (0,0,-1)>, soluciones de AX = 1.X = X

Para $\lambda = 0$ S_0=<(-2,-1,-1)>, soluciones de AX = 0.X= 0 que, naturalmente, coincide con el núcleo de f

Como la matriz tiene valores propios reales y la dimensión de cada subespacio coincide con el orden de multiplicidad de cada uno de los valores propios, queda demostrado que la matriz **es diagonalizable**.

c) La matriz de la aplicación f será diagonal en cualquier base de $\Re^3$ formada por vectores propios. Por tanto se puede elegir, por ejemplo,

B = {(-1,-1,0), (0,0,-1), (-2,-1,-1)}

d) S está generado por los vectores dados. A partir de este sistema generador se puede elegir una base. Se ponen los vectores en filas y se calcula el rango de la matriz resultante.

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Como el rango es 2, una base de S estará formada por 2 vectores linealmente independientes de S, por ejemplo, **{(1,1,0), (0,0,1)}** (con DERIVE se obtiene directamente aplicando la función ROW_REDUCE a la matriz de 4x3 anterior)

A partir de la base de S se obtienen las ecuaciones implícitas

$$x \in S / \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{x = y}$$

(el subespacio S resulta ser la imagen de la aplicación f)

Ahora se plantean las ecuaciones del cambio de base de la base B a la canónica

$X_c = P\,X_B$ siendo P la matriz del cambio de base, la cual tiene en columnas los vectores de la base B en coordenadas de la canónica, es decir,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_c = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B \Leftrightarrow \begin{cases} x_c = -x_B - 2z_B \\ y_c = -x_B - z_B \\ z_c = -y_B - z_B \end{cases}$$ y sustituyendo en la ecuación de S: $x_c = y_c$

queda $-x_B - 2z_B = -x_B - z_B \Rightarrow \boxed{z_B = 0}$

34.- a) Hallar el *rango* de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

b) Sea F el *subespacio vectorial* de R^3 engendrado por los vectores fila de la matriz A. Hallar una *base* de F.
c) Hallar unas *ecuaciones paramétricas* de F.
d) Hallar unas *ecuaciones implícitas* de F.
e) Sea C el *subespacio vectorial* de R^3 engendrado por los vectores columna de la matriz A. Hallar una *base* de C.
f) Encontrar una relación de dependencia lineal existente entre los vectores columna de la matriz A.
g) Hallar unas *ecuaciones paramétricas* de C.
h) Hallar unas *ecuaciones implícitas* de C.
i) ¿F y C son *hiperplanos* distintos?
j) Calcular una *base* y unas *ecuaciones paramétricas* de F∩C.
k) ¿Es A *diagonalizable*? En caso afirmativo, hallar una *matriz diagonal semejante* a A.

Solución:
a)
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r(A) = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} = 2$$

Rango(A)=2

b) Base de F: **{(1,1,0),(0,-2,2)}** ya que $r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = 2$

c) **(x,y,z)=(1,1,0)t+(0,-2,2)s** son unas ecuaciones paramétricas de F.
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x - 2y - 2z = 0$$

d) Ecuaciones cartesianas o implícitas de F: **x-y-z=0**

e) Base de C: **{(1,0,1),(1,-2,-3)}**

f) **Primera columna menos segunda columna es igual a la tercera columna**

g) **(x, y, z) = (1, 0, 1)·t + (1, -2, -3)·s**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & -2 & y \\ 1 & -3 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 4y - 2z = 0$$

h) Ecuaciones cartesianas o implícitas de C: **x+2y-z=0**

i) **Sí**, las ecuaciones implícitas no son proporcionales

$$\left.\begin{matrix} x - y - z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = z \\ y = 0 \end{matrix}\right\}$$

j) Base de F∩C: **{(1,0,1)}**

(x, y, z) = (1, 0, 1)·t

k)

Los valores propios de A.

$$\left|A - \lambda I\right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & 2 \\ 1 & -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(3-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} 0 \text{ doble} \\ 3 \text{ simple} \end{cases}$$

A continuación, se obtiene los vectores propios asociados a los valores propios:

Para λ=0 se tiene:

$$(A - 0\,I)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-0 & 1 & 0 \\ 0 & -2-0 & 2 \\ 1 & -3 & 4-0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases} \Rightarrow \{\vec{u}_1 = (-1,1,1) \Rightarrow \dim V_{\lambda=0} = 1$$

dim $V_{\lambda=0}$=1 no coincide con el orden de multiplicidad, pues es doble.

No es diagonalizable, puesto que el subespacio propio asociado al valor propio nulo es de dimensión uno y no coincide con el orden de multiplicidad.

35.- Dado el *endomorfismo* de R^3 definido por f(x,y,z)=(x+2y-z,2y+z,2y+3z)

1°) Hallar la matriz A que define el *endomorfismo* f.

2°) Hallar los *subespacios propios* y una *base* de cada uno de ellos.

3°) Hallar algún subespacio *invariante* y el subespacio de *vectores invariantes*.

4°) ¿Es *inyectivo*? ¿Es *sobreyectivo*?

5°) ¿La matriz A es *diagonalizable*?

6°) ¿La suma de los *subespacios propios* es *suma directa*? ¿Son *suplementarios* los subespacios propios hallados en el apartado 2?

Solución:

1º) La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

2º) La ecuación característica de A es

$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 (4 - \lambda)$, de donde obtenemos que los valores propios de A son $\lambda = 1$ doble y $\lambda = 4$ simple.

$$(A - I)\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{y = 0, \quad z = 0}.$$

una base de $V_{\lambda=1}$ es $\{(1,0,0)\}$

$$(A - 4I)\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{x = 0, \ 2y - z = 0},$$

una base de $V_{\lambda=4}$ es $\{(0,1,2)\}$.

3º) Todo subespacio propio es un subespacio invariante. En particular,

$V_{\lambda=4} = \{(0, \alpha, 2\alpha) / \alpha \in R\}$

y el subespacio de vectores invariantes

$\boxed{V_{\lambda=1} = \{(x, 0, 0) / x \in R\}}$

4º) dimf=rango(A)=3, el endomorfismo es biyectivo, es decir, **inyectivo y sobreyectivo**.

5º) A es diagonalizable si la dimensión de cada uno de los subespacios propios asociados es igual al orden de multiplicidad de cada valor propio como raíz del polinomio característico. En nuestro caso no se cumple, puesto que $\lambda = 1$ es doble y dim $V_{\lambda=1}$=1. Por tanto **A no es diagonalizable**.

6º) La suma de los subespacios propios es **directa**, pues ningún vector, salvo el nulo, pertenece a ambos $V_{\lambda=1} \oplus V_{\lambda=4}$ y **no son suplementarios**, ya que la suma no es igual al espacio vectorial R^3.

$V_{\lambda=1} \oplus V_{\lambda=4} \subset R^3$

36.- Sea f una *aplicación lineal* tal que:

f(1,1,0) = (5,-1,3); f(1,-2,0) = (5,2,3); f(0,0,1) = (0,*a*,*b*)

Se pide:

a) Hallar la matriz A asociada a f respecto de la *base canónica* y el valor de $|A|$

b) Hallar los valores de a y b para los que f es *biyectiva*.

c) Para b = 0 hallar sendas *bases* de *N(f) e Imf*.

***Solución*:**

a) En el enunciado nos dan las imágenes de tres vectores linealmente independientes, pues:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

Como la ecuación de la aplicación lineal es de la forma Y=AX

$$A\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & a \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

y podemos despejar A, que es la matriz asociada respecto de la base canónica

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & a \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a \\ 3 & 0 & b \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{|A| = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a \\ 3 & 0 & b \end{vmatrix} = -5b}$$

b)

f es biyectiva para los valores de a y b tales que det(A)≠0, luego para todo **b≠0**

c)

Para b=0, rango(A)=dim(Imf)=2, por tanto una **base de Imf es {(5,0,3)(0,-1,0)}**, entonces dim(N(f))=1 y para obtener una base resolvemos:

$$AX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a \\ 3 & 0 & b=0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -y + az = 0 \end{cases}$$

Luego una base es **{(0,a,1)}**, obtenida haciendo z=1

37.- Dada la matriz $M=\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 3\\ 3 & 0 & b\end{pmatrix}$**, se pide:**

a) Su *polinomio característico* y los *valores propios* asociados.

b) Estudiar la *diagonalización* de M en función de los valores de b.

c) Hallar una *matriz D diagonal semejante* a M para b=0 y la matriz P que permite la diagonalización.

***Solución*:**

a)

Primeramente calculamos los valores propios como raíces del polinomio característico:

$$P(\lambda)=|M-\lambda I|=\begin{vmatrix}5-\lambda & 0 & 0\\ 0 & -1-\lambda & 3\\ 3 & 0 & b-\lambda\end{vmatrix}=(1+\lambda)(5-\lambda)(\lambda-b)=0\Rightarrow \boxed{\lambda=\begin{cases}-1\text{ simple}\\ 5\text{ simple}\\ b\text{ simple}\end{cases}}$$

$$\boxed{P(\lambda)=(1+\lambda)(5-\lambda)(\lambda-b)}$$

b)

Si **b≠-1 y b≠5**, M tiene 3 valores propios reales y distintos, por lo que **es diagonalizable**.

Si **b= -1**, M tendrá -1como valor propio doble y 5 como valor propio simple y sería diagonalizable si el subespacio de vectores propios V(-1) tiene dimensión 2

Para -1 se tiene:

$$(M+1\,I)\vec{v}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}5+1 & 0 & 0\\ 0 & -1+1 & 3\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ z=0\end{cases}\Rightarrow\{\vec{v}_1=(0,1,0)\Rightarrow \dim V_{\lambda=-1}=1$$

Luego en este caso **M no sería diagonalizable**.

Análogamente, si **b=5**, M tendrá al escalar 5 como valor propio doble y al escalar -1 como valor propio simple pero

$$(M-5\,I)\vec{v}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}5-5 & 0 & 0\\ 0 & -1-5 & 3\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ 6y-3z=0\end{cases}\Rightarrow\{\vec{v}_2=(0,1,2)\Rightarrow \dim V_{\lambda=5}=1$$

por lo que concluimos que **M tampoco sería diagonalizable en este caso**.

c)

En particular para **b=0** se tiene que $M=\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 3\\ 3 & 0 & b=0\end{pmatrix}$

Para λ=-1 se tiene:

$$(M+1\,I)\vec{v}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}5+1 & 0 & 0\\ 0 & -1+1 & 3\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ z=0\end{cases}\Rightarrow\{\vec{v}_1=(0,1,0)\Rightarrow \dim V_{\lambda=-1}=1$$

Para λ=5 se tiene:

$$\left(M-5\,I\right)\vec{v}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}5-5 & 0 & 0\\ 0 & -1-5 & 3\\ 3 & 0 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}3x-5z=0\\ 6y-3z=0\end{cases}\Rightarrow\left\{\vec{v}_2=\left(10,3,6\right)\Rightarrow \dim V_{\lambda=5}=1\right.$$

Para λ=0 se tiene:

$$\left(M-0\,I\right)\vec{v}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}5-0 & 0 & 0\\ 0 & -1-0 & 3\\ 3 & 0 & 0-0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y-3z=0\end{cases}\Rightarrow\left\{\vec{v}_2=\left(0,3,1\right)\Rightarrow \dim V_{\lambda=0}=1\right.$$

Luego, las matrices D y P son respectivamente:

$$\boxed{D=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}}\ \text{y}\ \boxed{P=\begin{pmatrix}0 & 10 & 0\\ 1 & 3 & 3\\ 0 & 6 & 1\end{pmatrix}}$$

38.- Sea f una *aplicación lineal* tal que:

f(0,1,1) = (0,*a*,2); f(0,1,0) = (-5,0,-3); f(1-1,0) = (8,-2,6)

Se pide:

a) Hallar la matriz A asociada a f y el valor de $|A|$

b) Hallar las *dimensiones* de los subespacios *N(f) e Imf*, en función de los valores de a.

***Solución*:**

a)

Nos dan las imágenes de tres vectores l.i. entre sí, pues:

$$r\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Como la ecuación de la aplicación lineal es de la forma Y=AX

$$A\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 8 \\ a & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \text{ y despejando A}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & a \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & -5 & 5 \\ -2 & 0 & a \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 5 \\ -2 & 0 & a \\ 3 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \boxed{-6a-20}$$

b)

dim(Imf)=rango(A), por tanto

dim(Imf)=3 y dim(N(f))=0 si a≠-20/6

y

si a=-20/6, entonces dim(N(f))=2 y dim(N(f))=1

39.-Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 5 \\ -2 & 0 & a \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Su *polinomio característico*

b) El valor de *a* para que λ = 2 sea una *valor propio* de M.

c) Estudiar si la matriz M es *diagonalizable* para *a* = 2 y hallar una *matriz D diagonal semejante* a M y la matriz P correspondiente que permite la diagonalización.

d) Escribir la igualdad matricial que relaciona D y M.

Solución:

a)

$$P(\lambda) = |M - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -5 & 5 \\ -2 & 0-\lambda & a \\ 3 & -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \boxed{-\lambda^3 + 8\lambda^2 + \lambda(10-3a) - 6a - 20}$$

b)

Para que el escalar 2 sea un valor propio de M, 2 debe ser raíz de su polinomio característico por lo que hacemos λ=2 e igualamos a 0; $-2^3 + 8\cdot 2^2 + 2(10-3a) - 6a - 20 = 0$ simplificando queda ·12·(2 - a) = 0 despejando se obtiene **a = 2**

c)

Para a=2, hallamos los valores y vectores propios de M

$$P(\lambda) = |M - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -5 & 5 \\ -2 & 0-\lambda & a=2 \\ 3 & -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)(2-\lambda)(\lambda-8) = 0$$

Luego los valores propios son los escalares -2, 2, y 8 que son reales y distintos entre sí, luego M es diagonalizable.

Para λ=-2 se tiene:

$$(M + 2\,I)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3+2 & -5 & 5 \\ -2 & 0+2 & 2 \\ 3 & -3 & 5+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \{\vec{v}_1 = (1,1,0) \Rightarrow \dim V_{\lambda=-2} = 1$$

Para λ=2 se tiene:

$$(M - 2\,I)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-2 & -5 & 5 \\ -2 & 0-2 & 2 \\ 3 & -3 & 52 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \{\vec{v}_1 = (0,1,1) \Rightarrow \dim V_{\lambda=2} = 1$$

Para λ=8 se tiene:

$$(M - 8\,I)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-8 & -5 & 5 \\ -2 & 0-8 & 2 \\ 3 & -3 & 5-8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \{\vec{v}_1 = (1,0,1) \Rightarrow \dim V_{\lambda=8} = 1$$

Luego una matriz D diagonal semejante a M y la matriz P que permite la diagonalización a D son:

$$D=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&2&0\\0&0&8\end{pmatrix} \text{ y } P=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

d)

$$D=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&2&0\\0&0&8\end{pmatrix}=P^{-1}MP=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-5&5\\-2&0&2\\3&-3&5\end{pmatrix}$$

40.- Dada la *transformación lineal* $f(\vec{x}) = A\vec{x}$, donde $A = \begin{pmatrix} -5 & -15 & -12 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Hallar la *dimensión* y una *base* de los subespacios *N(f) e Imf*, respectivamente.

b) Estudiar si f es *diagonalizable* y, en su caso, calcular una *matriz D diagonal semejante* a la matriz A y la matriz P que permite la diagonalización.

Sea g una *transformación lineal* de R^3 tal que $g(\vec{u}) = 6\vec{u}$, $g(\vec{v}) = 3\vec{v}$, $g(\vec{w}) = 6\vec{w}$, para los vectores $\vec{u} = (-1,-1,0)$, $\vec{v} = (-1,\ 1,-1)$ $\vec{w} = (-1,\ 0,-1)$.

c) ¿Cómo se denominan los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$? ¿Cómo se denominan los escalares 3 y 6?

d) Hallar la matriz M asociada a *g* respecto de la *base canónica*.

Solución:

a) Núcleo de f:

Cálculo del núcleo: resolvemos AX=0

$$\begin{pmatrix} -5 & -15 & -12 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+3y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3\alpha \\ y=\alpha \\ z=0 \end{cases}$$

luego la **dimN(f)=1** y una base es **{(-3,1,0)}**

Imagen de f:

La **dim(Imf)=3-1=2**, y una base está formada por dos columnas de A linealmente independientes, por ejemplo la primera y la tercera **{(-5,1,0),(-12,4,-2)}**

b) Valores propios de A:

Se obtienen a partir del polinomio característico. Luego

$$P(\lambda) = |A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -5-\lambda & -15 & -12 \\ 1 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda+2)^2$$

A tiene un valor propio simple λ_1=0, y un valor propio doble λ_2=-2.

Calculamos los vectores propios asociados.

Para λ_1=0

$$(M-0\,I)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -5 & -15 & -12 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+3y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \{\vec{v}_1 = (3,-1,0) \Rightarrow \dim V_{\lambda=0} = 1$$

Para λ_2=-2

$$(M+2\,I)\vec{v}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-5+2 & -15 & -12\\ 1 & 3+2 & 4\\ 0 & 0 & -2+2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\{x+5y+4z=0\Rightarrow\begin{cases}\vec{v}_2=(5,-1,0)\\ \vec{v}_3=(4,0,-1)\end{cases}$$

$\Rightarrow \dim V_{\lambda=-2}=2$. Luego coinciden con el orden de multiplicidad de los valores propios. Por lo tanto A es diagonalizable y como matrices diagonal y P pedidas proponemos

$$D=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\ \text{y}\ P=\begin{pmatrix}3 & 5 & 4\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Sea g una *transformación lineal* de R^3 tal que $g(\vec{u})=6\vec{u}$, $g(\vec{v})=3\vec{v}$, $g(\vec{w})=6\vec{w}$, para los vectores $\vec{u}=(-1,-1,0)$, $\vec{v}=(-1,\ 1,-1)$ $\vec{w}=(-1,\ 0,-1)$.

c)

Los vectores **$\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ son vectores propios** de la transformación g y los escalares **3 y 6 son los valores propios** asociados a los anteriores vectores propios de la siguiente forma: 3 es el valor propio asociado a $\vec{v}$ y 6 es el valor propio asociado a $\vec{u}$ y $\vec{w}$.

d)

Tenemos que g tiene un valor propio simple, 3, el cual tiene a $\vec{v}$ como vector propio asociado y un valor propio doble, 6, que tiene a $\vec{u},\vec{v}$ como vectores propios asociados, luego la matriz diagonal D que escribiremos a continuación es una matriz semejante a M

$$D=\begin{pmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

Las matrices D y M están relacionadas por la expresión·$D = P^{-1}\cdot M\cdot P$·donde P es la matriz de cambio de la base de vectores propios a la canónica

$$P=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

y despejando·$M = P\cdot D\cdot P^{-1}$

$$M=\begin{pmatrix}3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & -3\\ -3 & 3 & 9\end{pmatrix}$$

41.- Dada la *aplicación lineal* $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ donde $A = \begin{pmatrix} k-1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & k+1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Hallar el valor de k para el cual f no es *biyectiva*.

b) Para el valor de k obtenido en a) halla las *dimensiones* de los subespacios *N(f) e Im(f)*.

c) Justificar por qué f es *diagonalizable* para cualquier valor real de k.

Solución:

a) Una aplicación es biyectiva si y solo si su matriz tiene determinante no nulo

$$|A| = \begin{vmatrix} k-1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & k+1 \end{vmatrix} = 6-2k = 0 \Rightarrow k = 3$$

Luego **f no es biyectiva para k=3**.

b) Para k=3, la matriz es:

La dimensión de Im(f) es igual al rango de A

$$r\begin{pmatrix} 3-1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3+1 \end{pmatrix} = 2$$

La **dim(N(f))=dimR^3-dim(Imf)=3-2=1**

c) f es diagonalizable para cualquier valor de k por ser **A una matriz simétrica**.

42.- Sea la aplicación $f:P_2(x) \to P_2(x)$, tal que:

$$f(a + bx + cx^2) = (a + bx + cx^2) + (c + bx + ax^2).$$

a) Demostrar que f es una *aplicación lineal*. b) Hallar la matriz de la aplicación lineal al tomar $B = \{1,\ x,\ x^2\}$ como *base* de $P_2(x)$. c) Determinar el *núcleo* de esta aplicación. ($P_2(x)$ es el *espacio vectorial* de *polinomios* de grado ≤ 2).

Solución:

a)

$$f(\alpha(a_1 + b_1x + c_1x^2) + \beta(a_2 + b_2x + c_2x^2)) = (\alpha a_1 + \alpha c_1) + 2\alpha b_1 x + (\alpha a_1 + \alpha c_1)x^2 +$$
$$+ (\beta a_2 + \beta c_2) + 2\beta b_2 x + (\beta a_2 + \beta c_2)x^2 = \alpha f(a_1 + b_1x + c_1x^2) + \beta f(a_2 + b_2x + c_2x^2)$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 + x^2 \\ f(x) = 2x \\ f(x^2) = 1 + x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$ es la matriz de la aplicación

c)

$$N(f) = \left\{ a + bx + cx^2 \mid (a + bx + cx^2) + (c + bx + ax^2) = 0 \right\} \Rightarrow b = 0,\ a + c = 0$$

$$\boxed{N(f) = \left\{ a(1 - x^2) / a \in R \right\}}$$

43.- En caso de existir, encontrar la *diagonalización ortogonal* de la siguiente matriz: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Solución:

Cálculo de los valores propios:

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+2)(\lambda+1)\lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = -2 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

Cálculo de los vectores propios:

El subespacio propio asociado al valor propio $\lambda = 0$:

$$\left(A - 0\cdot I\right)\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

. Luego V_0 = < (1, 0, 1) >, un vector propio unitario se obtiene dividiendo por su módulo $\vec{v}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

El subespacio propio asociado al valor propio $\lambda = -1$:

$$\left(A - (-1)I\right)\vec{v} = \begin{pmatrix} -1-(-1) & 0 & 1 \\ 0 & -1-(-1) & 0 \\ 1 & 0 & -1-(-1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Luego V_{-1} = < (0, 1, 0) > $\Rightarrow \vec{v}_2 = \left(0, 1, 0\right)$

El subespacio propio asociado al valor propio $\lambda = -2$:

$$\left(A - (-2)I\right)\vec{v} = \begin{pmatrix} -1-(-2) & 0 & 1 \\ 0 & -1-(-2) & 0 \\ 1 & 0 & -1-(-2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Luego V_{-2} = < (1, 0, -1) > un vector propio unitario se obtiene dividiendo por su módulo $\vec{v}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Si consideramos los vectores unitarios correspondientes, obtenemos una base ortonormal B^* también de vectores propios y la matriz P = $\boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}$ es ortogonal y la matriz diagonal semejante a A es: $\boxed{D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$

44.- Encontrar una matriz real y *simétrica* que cumpla siguientes condiciones:

1.- Sus *vectores propios* son $\{(1,0,1),(1,2,-1),(-1,1,1)\}$

2.- Es *semejante* a la siguiente matriz $B=\begin{pmatrix}1 & 4 & -1\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$

Solución:

Buscamos una matriz A semejante a una matriz diagonal y a su vez semejante a la matriz B dada. Por ser semejantes tienen los mismos valores propios y los de A son $\lambda = 1$ simple y $\lambda = 2$ doble y los s.v. de vectores propios asociados pueden ser $V_1 = <(1, 0, 1)>$ y $V_2 = <(1,2,-1),(-1,1,1)>$.

A diagonalizable, ya que es simétrica $D = P^{-1}AP \Rightarrow A = PDP^{-1}$:

$D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ y $P_{B\to Bc}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$, donde B es una base de vectores propios.

A y D son semejantes y $D = P_{B\to Bc}^{-1}\, A\, P_{B\to Bc} \Rightarrow A = P_{B\to Bc}\, D\, P_{B\to Bc}^{-1}$ luego:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\boxed{\begin{pmatrix}\frac{11}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{6}\\ -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{11}{6}\end{pmatrix}}$$

45.- Sea f la *transformación lineal* cuya matriz asociada respecto de la base canónica es A= $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&\alpha\end{pmatrix}$ **. Se pide:**

a) ¿Para qué valores de α es f un *isomorfismo* (*biyectiva*)?
b) Para $\alpha = 0$, una *base* de Im(f)
c) Valores de α para los cuales A es *diagonalizable*.
d) Para $\alpha = 0$, una base de R^3 formada por *vectores propios* de la matriz A.
e) Para $\alpha = 0$, hallar A^{25} utilizando, si es posible, la diagonalización de A.

Solución:

a) f es un isomorfismo si y sólo si $|A| \neq 0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha \neq 0}$

b) Para $\boldsymbol{\alpha = 0}$, resulta r(A)=dim (Im(f)) = 2 y una posible base es **B={(1,0,1),(0,1,1)}**

c) Cálculo de los valores propios

$$|A-\lambda\cdot I| = \begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 1-\lambda & 0\\ 1 & 1 & \alpha-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(\alpha-\lambda) = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = \begin{cases}\alpha\\ 1\end{cases}}$$

Distinguiremos dos casos:
i) Si $\alpha = 1 \Rightarrow \lambda = 1$ triple
ii) Si $\alpha \neq 1 \Rightarrow \begin{cases}\lambda = 1 \text{ doble}\\ \lambda=\alpha \text{ simple}\end{cases}$

Cálculo de los vectores propios

$$(A-\lambda\cdot I)\vec{v} = \begin{pmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 1-\lambda & 0\\ 1 & 1 & \alpha-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

i) Para $\alpha = \lambda = 1$

$$(A-1\cdot I)\vec{v} = \begin{pmatrix}1-1 & 0 & 0\\ 0 & 1-1 & 0\\ 1 & 1 & 1-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow x+y=0 \Leftrightarrow \dim V_{\lambda=1} = 2$$

No es diagonalizable, ya que no coincide la dimensión del subespacio propio con el orden de multiplicidad que es 3.

ii) Para $\alpha \neq 1;\ \lambda = 1$

$$(A-1\cdot I)\vec{v} = \begin{pmatrix}1-1 & 0 & 0\\ 0 & 1-1 & 0\\ 1 & 1 & \alpha-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow x+y+(\alpha-1)z=0 \Leftrightarrow \dim V_{\lambda=1} = 2$$

Es diagonalizable, ya que coincide la dimensión del subespacio propio con el orden de multiplicidad que es 2.
Por tanto, **A es diagonalizable para todo α distinto de 1**.

d) Cálculo de los vectores propios para $\boldsymbol{\alpha = 0}$

Para $\alpha = \lambda = 0$

$$(A - 0\cdot I)\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow V_{\lambda=0} = \{(x,y,z) \in R^3 / x = y = 0\}$$

Consideramos el vector propio (0,0,1) asociado al valor propio $\lambda = 0$

Para $\alpha = 0;\ \lambda = 1$

$$(A - 1\cdot I)\vec{v} = \begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-1 & 0 \\ 1 & 1 & 0-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x + y - z = 0 \Leftrightarrow$$

$$V_{\lambda=1,\alpha=0} = \{(x,y,z) \in R^3 / x + y - z = 0\} = <\{(1,0,1),(0,1,1)\}>$$

Una base de R^3 formada por vectores propios: $\boxed{B^* = \{(0,0,1)(1,0,1),(0,1,1)\}}$

e) Tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz de paso

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A^{25} = P.D^{25}.P^{-1}$

$$A^{25} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{25}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{A}$$

46.- Sea f la *transformación lineal* cuya matriz asociada respecto de la *base canónica* es A= $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) ¿Para qué valores de α es f un *isomorfismo* (*biyectiva*)?
b) Para $\alpha = 0$, una *base* de Im(f)
c) Valores de α para los cuales A es *diagonalizable*.
d) Para $\alpha = 0$, una base de R^3 formada por *vectores propios* de la matriz A.
e) Para $\alpha = 0$, hallar A^{25} utilizando, si es posible, la diagonalización de A.

Solución:

a) f es un isomorfismo si y sólo si $|A| \neq 0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha \neq 0}$

b) Para $\boldsymbol{\alpha = 0}$, resulta r(A)=dim (Im(f)) = 2 y una posible base es B={(1,-1,0),(1,0,-1)}

c) Cálculo de los valores propios

$$|A - \lambda \cdot I| = \begin{vmatrix} \alpha-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\alpha-\lambda)(-1-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = \begin{cases} \alpha \\ -1 \end{cases}}$$

Distinguiremos dos casos:
i) Si $\alpha = -1 \Rightarrow \lambda = -1$ triple
ii) Si $\alpha \neq -1 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\lambda = -1 \text{ doble}} \\ \boxed{\lambda = \alpha \text{ simple}} \end{cases}$

Cálculo de los vectores propios

$$(A - \lambda \cdot I)\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i) Para $\alpha = \lambda = -1$

$$(A - (-1) \cdot I)\vec{v} = \begin{pmatrix} -1+1 & 1 & 1 \\ 0 & -1+1 & 0 \\ 0 & 0 & -1+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y + z = 0 \Leftrightarrow \dim V_{\lambda=-1} = 2$$

No es diagonalizable, ya que no coincide la dimensión del subespacio propio con el orden de multiplicidad que es 3.

ii) Para $\alpha \neq -1;\ \lambda = -1$

$$(A - (-1) \cdot I)\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha+1 & 1 & 1 \\ 0 & -1+1 & 0 \\ 0 & 0 & -1+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (\alpha+1)x + y + z = 0 \Leftrightarrow \dim V_{\lambda=-1} = 2$$

Es diagonalizable, ya que coincide la dimensión del subespacio propio con el orden de multiplicidad que es 2.
Por tanto, **A es diagonalizable para todo α distinto de -1**.

d) Cálculo de los vectores propios para $\boldsymbol{\alpha = 0}$

Para $\alpha = \lambda = 0$

$$(A - 0 \cdot I)\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow V_{\lambda=0} = \left\{(x, y, z) \in R^3 / y = z = 0\right\}$$

Consideramos el vector propio (1,0,0) asociado al valor propio $\lambda = 0$

Para $\alpha = 0$; $\lambda = -1$

$$(A - (-1) \cdot I)\vec{v} = \begin{pmatrix} 0+1 & 1 & 1 \\ 0 & -1+1 & 0 \\ 0 & 0 & -1+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x + y + z = 0 \Leftrightarrow$$

$$V_{\lambda=-1,\alpha=0} = \left\{(x, y, z) \in R^3 / x + y + z = 0\right\} = <\{(1,-1,0),(1,0,-1)\}>$$

Una base de R^3 formada por vectores propios: $\boxed{B^* = \left\{(1,0,0)(1,-1,0),(1,0,-1)\right\}}$

e) Tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matriz de paso

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$A^{25}=P.D^{25}.P^{-1}$

$$A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{25} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{A}$$

47.- Sean $B=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ una *base* del espacio vectorial R^3 y f la *transformación lineal* del mismo tal que $\begin{cases} f(\vec{u}_1)=\vec{u}_1+\vec{u}_3 \\ f(\vec{u}_2)=-\vec{u}_1-\vec{u}_2-\vec{u}_3 \\ f(\vec{u}_3)=\vec{u}_2 \end{cases}$. Se pide:

a) Matriz A asociada a f respecto de la *base* B.
b) Ecuación matricial de f.
c) Obtener el subespacio *Núcleo* de f y dar una base de dicho subespacio.
d) Obtener el subespacio *Imagen* de f y dar una base de dicho subespacio.
e) ¿Son los dos subespacios anteriores *N(f) e Im(f) suplementarios*?
f) Hallar los *valores propios* de A y los *subespacios de vectores* propios asociados.
g) Razonar si A es *diagonalizable*. En caso afirmativo, escribir una *matriz diagonal D semejante* a A y la matriz de paso correspondiente.
h) Hallar A^n, para cualquier *número natural* n.

Solución:

a) La matriz asociada o que define f se obtiene mediante las imágenes de los vectores de la base $B=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$:

$$\begin{cases} f(\vec{u}_1)=\vec{u}_1+\vec{u}_3=(1,0,1)_B \\ f(\vec{u}_2)=-\vec{u}_1-\vec{u}_2-\vec{u}_3=(-1,-1,-1)_B \\ f(\vec{u}_3)=\vec{u}_2=(0,1,0)_B \end{cases} \Rightarrow \boxed{A=M(f,B)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ \underbrace{1}_{f(\vec{u}_1)} & \underbrace{-1}_{f(\vec{u}_2)} & \underbrace{0}_{f(\vec{u}_3)} \end{pmatrix}}$$

b) La ecuación matricial o ecuaciones de la transformación lineal es:

$$Y=AX \Leftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}$$

c) El núcleo es: $N(f)=\{\vec{x}\in R^3 / f(\vec{x})=0\}$, luego:

$$f(x_1,x_2,x_3)=(0,0,0) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{x_1=x_2=x_3}$$

siendo la dimensión del núcleo de 1 y una base $\boxed{B_{N(f)}=\{(1,1,1)\}}$.

d) La imagen es: $Im(f)=\{\vec{y}\in R^3 / \exists\vec{x}\in R^3 \text{ con } f(\vec{x})=\vec{y}\}$, luego

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}x_2+\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}x_3 \Leftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\alpha+\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\beta}$$

que son las ecuaciones paramétricas del subespacio imagen, siendo dim(Im(f))=r(A)=2 y una base $B_{Im(f)}=\{(1,0,1),(0,1,0)\}$

e) **No son suplementarios**, dado que el vector (1,1,1) del núcleo pertenece al subespacio imagen y por tanto $Im(f)\cap N(f)\neq\{\vec{0}\}$.

f) Valores propios:

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda & -1 & 0\\ 0 & -1-\lambda & 1\\ 1 & -1 & 0-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3\Rightarrow \boxed{\lambda=0\ (\text{triple})}.$$

Vectores propios: $(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1-\lambda & -1 & 0\\ 0 & -1-\lambda & 1\\ 1 & -1 & 0-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$.

Para $\lambda=0\Rightarrow\begin{pmatrix}1-0 & -1 & 0\\ 0 & -1-0 & 1\\ 1 & -1 & 0-0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\alpha\\ y=\alpha\Rightarrow\vec{v}_1=(1,1,1)\\ z=\alpha\end{cases}$

g)

No, es diagonalizable, ya que no es posible encontrar una base del espacio vectorial formada por vectores propios de f. La dimensión del subespacio propio asociada al valor propio es 1 y no coincide con el orden de multiplicidad que es triple.

h)

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}^2=AA=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}^3=AA^2=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Luego $A^n=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

48.- Se considera la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Probar que es *diagonalizable* y determinar una matriz P que permita la *diagonalización*.

b) Hallar las ecuaciones paramétricas y cartesianas de los *subespacios propios* de A.

c) Hallar A^2 utilizando A y la matriz *diagonal* D.

Solución

a) Valores propios

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-2)^3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -2 \\ \lambda = 2 \text{ triple} \end{cases}$$

Vectores propios: $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$.

Para λ=-2

$$(A + 2\,I)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1+2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1+2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + t = 0 \\ y - t = 0 \\ z - t = 0 \end{cases} \Rightarrow \{\vec{v}_1 = (1,-1,-1,-1)$$

$$\Rightarrow \dim V_{\lambda=-2} = 1$$

Para λ=2

$$(A - 2\,I)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{x - y - z - t = 0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_2 = (1,0,0,1) \\ \vec{v}_3 = (0,1,0,-1) \\ \vec{v}_4 = (0,0,1,-1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \dim V_{\lambda=2} = 3$$

Es diagonalizable, ya que coincide la dimensión del subespacio propio con el orden de multiplicidad que es 3.

La matriz P está formada por los vectores propios:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Siendo la matriz diagonal:

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b)

Para λ=-2, unas ecuaciones cartesianas:

$$\begin{cases} x+t=0 \\ y-t=0 \\ z-t=0 \end{cases}$$

Y unas paramétricas: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\alpha$

$\Rightarrow \dim V_{\lambda=-2} = 1$

Para λ=2, unas ecuaciones cartesianas: $x-y-z-t=0$

Y unas paramétricas: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\alpha + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\beta + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\gamma$

c)

$$A^2 = PD^2P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

49.- Sea V_3 un *espacio vectorial* tridimensional sobre R, y f una *transformación lineal* de V_3 cuya expresión matricial respecto de la *base canónica* es:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

¿Es f *diagonalizable*? En caso afirmativo encontrar una *base* $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$, tal que respecto a B la *matriz* que define f sea $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Solución:

La matriz que define la transformación es triangular y por tanto los valores propios son los elementos situados en la diagonal principal, $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$ valores reales y distintos entre sí, por tanto, f es diagonalizable y existe una matriz semejante diagonal.

El subespacio propio asociado al valor propio $\lambda=1$ es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \alpha, y = z = 0 \Rightarrow V_{\lambda=1} = \langle (1,0,0) \rangle$$

El subespacio propio correspondiente al valor propio $\lambda=2$ es:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \alpha, y = \alpha, z = 0 \Rightarrow V_{\lambda=2} = \langle (1,1,0) \rangle$$

El subespacio propio asociado al valor propio $\lambda=3$ es:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \alpha, y = \frac{4}{3}\alpha, z = \frac{2}{3}\alpha \Rightarrow V_{\lambda=3} = \langle (3,4,2) \rangle$$

Por tanto, la base respecto de la cual la matriz de f es diagonal es:

$\boxed{B = \{\vec{u}_1 = (3,4,2), \vec{u}_2 = (1,0,0), \vec{u}_3 = (1,1,0)\}}$ y la matriz de cambio de base es, $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

En efecto:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

50.- Dado el *endomorfismo* f de R^3 definido por la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1° Hallar el *polinomio característico* y los valores propios de A.

2° Hallar las ecuaciones paramétricas de los *subespacios* de *vectores propios* de A.

3° Hallar una *base* de cada uno de los subespacios de *vectores propios* de f.

4° ¿El *endomorfismo* f es *diagonalizable*? ¿Por qué?

En caso afirmativo

5° Hallar una matriz *D* diagonal *semejante* a la matriz A.

6° Hallar la *base* respecto de la cual la matriz de f es *D*.

7° Escribir la ecuación de semejanza $D = P^{-1} A P$.

8° Hallar el subespacio de los *vectores invariantes* por f.

9° Hallar los *valores propios* de A^n.

10° Hallar el subespacio de *N(f)*.

11 Hallar el subespacio *Im(f)*.

12° Clasificar el *endomorfismo* f.

Solución:

1º Hallar el polinomio característico y los valores propios de A.

- El polinomio característico es:

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \boxed{(2-\lambda)(\lambda-1)^2}$$

- Los valores propios son las raíces del polinomio anterior, por tanto

$\lambda=1$ con multiplicidad algebraica 2.

$\lambda=2$ con multiplicidad algebraica 1.

2º Hallar las ecuaciones paramétricas de los subespacios de vectores propios de A.

- $V_{\lambda=2}$ es el subespacio vectorial de las soluciones del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -2y \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = -2\alpha \\ y = \alpha \\ z = 0 \end{cases}}.$$

- $V_{\lambda=1}$ es el subespacio vectorial de las soluciones del sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -y \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = \alpha \\ y = -\alpha \\ z = \beta \end{cases}}.$$

3º Hallar una base de cada uno de los subespacios de vectores propios de f.

- Unas bases son: $\boxed{V_{\lambda=2} = \{(-2,1,0)\}}$ y $\boxed{V_{\lambda=1} = \{(1,-1,0),(0,0,1)\}}$

4º ¿El endomorfismo f es diagonalizable? ¿Por qué?

- Los valores propios son reales y **la multiplicidad algebraica de λ=1 es 2** que coincide con la dimensión de $V_{\lambda=1}$. Por tanto es diagonalizable.

5º Hallar una matriz *D* diagonal semejante a la matriz A.

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

6º Hallar la base respecto de la cual la matriz de f es *D*.

$$\boxed{B = \{(-2,1,0),(1,-1,0),(0,0,1)\}}$$

7º Escribir la ecuación de semejanza $D = P^{-1} A P$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

8º Hallar el subespacio de los vectores invariantes por f.

$\boxed{V_{\lambda=1}}$

9º Hallar los valores propios de A^n.

$\lambda=1^n=\boxed{1}$ y $\lambda=\boxed{2^n}$.

10º Hallar el subespacio de N(f).

$|A| \neq 0 \Rightarrow \boxed{N(f)=\{\vec{0}\}}$

11 Hallar el subespacio Im(f).

$|A| \neq 0 \Rightarrow \boxed{Im(f)=R^3}$.

12º Clasificar el endomorfismo f.

$|A| \neq 0 \Rightarrow$ biyectiva y por tanto un **automorfismo**.

51.- Se considera el *endomorfismo o transformación lineal* f de R^3 definido por la *matriz* $A=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 \\ -2 & -2 & -6 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Hallar:

a) El *polinomio característico*.

b) Los *valores propios* indicando su multiplicidad algebraica.

c) ¿Se puede calcular una *base* de R^3 formada por *vectores propios* de A?

d) La *matriz* A ¿es *diagonalizable*? ¿por qué?

e) Hallar las *ecuaciones paramétricas* de los *subespacios invariantes* por el *endomorfismo*.

f) Hallar los subespacios *núcleo e imagen* de f.

g) ¿Es f *biyectiva*? ¿por qué?

Solución:

a) $P(\lambda)=|A-\lambda I|=\boxed{-\lambda^3+7\lambda^2-16\lambda+12=(3-\lambda)(\lambda-2)^2}$.

b) Son los valores que anulan el polinomio característico, por tanto

$\lambda=3$ **con grado de multiplicidad 1**.

$\lambda=2$ **con grado de multiplicidad 2**.

c) La dimensión geométrica de los subespacios propios asociados a los valores propios de f son:

$\dim(V_3)=\dim(\langle(-2, 2, -1)\rangle)=1$

$\dim(V_2)=\dim(\langle(2, -1, 0), (3, 0, -1)\rangle)=2$

Se observa que coincide la dimensión algebraica de cada valor propio con la dimensión geométrica del subespacio propio asociado.

Por tanto puede encontrarse una base de R^3 formada por vectores propios.

$\boxed{B^*=\{(-2, 2, -1), (2, -1, 0), (3, 0, -1)\}}$

d) **A es diagonalizable** por verificar el apartado anterior.

e) Subespacios invariantes son los subespacios propios, así como el núcleo y la imagen de f:

$$\boxed{V_3\equiv\begin{cases} x=-2t \\ y=2t \\ z=-t \end{cases}} \text{ y } \boxed{V_2\equiv\begin{cases} x=2t+3s \\ y=-t \\ z=-s \end{cases}}.$$

f) $|A|=12\neq 0$ por tanto f es biyectiva y $\boxed{N(f)=\{\vec{0}\}}$ e $\boxed{Im(f)=R^3}$.

g) **Sí es biyectiva**, ya que, $|A|=12\neq 0$.

52.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ calcular:

a) Los *valores propios* indicando su multiplicidad algebraica.
b) Calcular una *base* de cada uno de los *subespacios propios* existentes.
c) ¿Es *diagonalizable* la matriz A? ¿Por qué?
d) ¿Existe algún vector $\vec{u} \neq \vec{O}$ que sea *invariante*?

Solución:

a) $|A - \lambda I_3| = -(\lambda+1)(\lambda-5)^2$, por tanto los valores propios son:

λ=-1 simple y λ=5 doble.

c) Una base de $V_{\lambda=-1}$ está formada por los vectores linealmente independientes solución de la ecuación matricial

$$(A-(-1)I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\{(0,-1,0)\}}.$$

Una base de $V_{\lambda=5}$ está formada por los vectores linealmente independientes solución de la ecuación matricial

$$(A-5I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\left\{\left(0,-\frac{1}{6},-1\right)\right\}}.$$

d) La matriz A **no es diagonalizable** por no poder encontrar una base de R^3 formada por vectores propios.

e) **No existe ningún otro vector invariante** ya que no existe el valor propio λ=1.

53.- Dado el *endomorfismo* f definido por la *matriz*:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Calcular sus *valores propios* y una *base* de cada uno de los *subespacios* de *vectores propios*.

b) Determinar una *base* B de V_3 respecto de la cual la *matriz* asociada a f sea *diagonal*. Respecto de la *base* B ¿cuál es la *matriz diagonal* D?

c) Hallar unas ecuaciones paramétricas del subespacio de los *vectores invariantes*.

***Solución*:**

a) Los valores propios son las raíces del polinomio característico de A.

$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda-5)^2$, así pues, los valores propios de A son $\boxed{\lambda = 1}$ y $\boxed{\lambda = 5}$ doble.

El subespacio de los vectores propios asociados a $\lambda = 1$ es

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = -\alpha \\ z = 0 \end{cases}$$

y una base de $V_{\lambda=1}$ es $\boxed{\{(1,-1,0)\}}$.

Análogamente el subespacio de los vectores propios asociados a $\lambda = 5$ es

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$$

y una base de $V_{\lambda=5}$ es $\boxed{\{(1,1,0),(0.0.1)\}}$.

b) Una base de V_3 respecto de la cual la matriz A es una matriz semejante y diagonal D es:

$\boxed{B = \{(1,1,0),(0.0.1),(1,-1,0)\}}$ y la matriz semejante diagonal de f respecto de la base B es:

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

c) El subespacio de los vectores invariantes es $\boxed{V_{\lambda=1} \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = -\alpha \\ z = 0 \end{cases}}$.

54.- Sea f(x, y, z) = (x -2y + z, -x + z, -x - 2y + 3z) una *transformación lineal* de R^3. Sea B = $\{\vec{u}_1 = (1,0,1),\ \vec{u}_2 = (0,1,2),\ \vec{u}_3 = (1,1,1)\}$ un sistema de vectores de R^3. Se pide:

a) Si F = $<\vec{u}_1, \vec{u}_2>$, hallar una *base* del *subespacio ortogonal* $F^\perp$. ¿Qué representan geométricamente F y $F^\perp$?

b) Demostrar que B es *base* de R^3, pero, que f (B) = $\{f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), f(\vec{u}_3)\}$ no lo es.

c) Hallar la *matriz* A asociada a f respecto de la *base canónica* y la *matriz* A' asociada a f respecto de la *base* B.

d) Escribir la expresión matricial que relaciona A y A'.

e) ¿Es f *diagonalizable*? En caso afirmativo, dar una *base* de R^3 formada por *vectores propios* de f.

f) Hallar el *subespacio* de los *vectores invariantes* por f.

g) Hallar la ecuación y una *base* de los *subespacios Im (f)* y *N(f)*.

Solución:

a) $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = (1, -2, 1) \Rightarrow F^\perp = \langle(1,-2,1)\rangle$, y una base de $F^\perp$ es $\boxed{\{(1,-2,1)\}}$.

F es el **plano vectorial** que contiene a los vectores $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$. $F^\perp$ es la recta vectorial perpendicular a dicho plano.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow$ B es libre con tres vectores, luego B es base de R^3, por ser $\dim R^3 = 3$.

f(B) = $\{f(\vec{u}_1) = (2, 0, 2),\ f(\vec{u}_2) = (0, 2, 4),\ f(\vec{u}_3) = (0, 0, 0)\}$, que no es un sistema libre, pues contiene al vector (0, 0, 0), y, por tanto, f(B) no es base de R^3.

c) Matriz asociada a f respecto de la base canónica:

$f(\vec{e}_1) = (1, -1, -1)$, $f(\vec{e}_2) = (-2, 0, -2)$, $f(\vec{e}_3) = (1, 1, 3)$, luego, $\boxed{\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}}$.

Matriz asociada a f respecto de la base B:

$f(\vec{u}_1) = (2, 0, 2) = 2\,\vec{u}_1 \Rightarrow f(\vec{u}_1)$ tiene de coordenadas en la base B: (2, 0, 0)

$f(\vec{u}_2) = (0, 2, 4) = 2\,\vec{u}_2 \Rightarrow f(\vec{u}_2)$ tiene de coordenadas en la base B: (0, 2, 0)

$f(\vec{u}_3) = (0, 0, 0) = 0\,\vec{u}_3 \Rightarrow f(\vec{u}_3)$ tiene de coordenadas en la base B: (0, 0, 0)

Luego, $\mathbf{A'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

O bien, con el método general:
A' = P^{-1} A P, siendo P la matriz de cambio de base de B a la canónica:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

d) La relación matricial entre ambas matrices es: **A' = $\mathbf{P^{-1}}$ A P**, con la misma notación que en el apartado anterior.

e) Es diagonalizable, pues A' es una matriz diagonal asociada a f. Una base formada por vectores propios es la propia base B, por ejemplo.

f) El único vector invariante es el $\vec{0}$, pues $\lambda = 1$ no es valor propio de A.

g) Como la matriz asociada a f respecto de la base canónica es A = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, que tiene rango 2, el subespacio Im f es el engendrado por 2 vectores columna linealmente independientes de A:

$$\text{Im f} = \langle (1,-1,-1), (-2,0,-2) \rangle .$$

Luego, una base de Im f es $\{(1,-1,-1), (-2,0,-2)\}$.

Unas ecuaciones paramétricas de Im f son: $\begin{cases} x = \lambda - 2\mu \\ y = -\lambda \\ z = -\lambda - 2\mu \end{cases}$.

N(f) = $V_0 = < \vec{u}_3 >$.

Una base de N(f) es, por tanto, $\{\vec{u}_3 = (1,1,1)\}$.

Unas ecuaciones paramétricas de N(f) son: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$.

55.- Sea f la *transformación lineal* de R^3 que tiene por *matriz* asociada:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$ Se pide:

a) Hallar los *valores propios* de A y una *base* de cada uno de los *subespacios propios* asociados.

b) ¿Es A *diagonalizable*?

c) En caso afirmativo,

hallar una *matriz diagonal* D *semejante* a A

dar una matriz P que permita la diagonalización de A

escribir la relación que existe entre A y D.

d) Dar una base $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ de R^3 formada por *vectores propios* de A tal que D = M(f, B').

e) Expresar los vectores $f(\vec{v}_1)$, $f(\vec{v}_2)$, $f(\vec{v}_3)$ como *combinación lineal* de los vectores de la base B'.

f) ¿Es f *biyectiva*?

g) Hallar *N (f)*.

h) Hallar el *subespacio de vectores invariantes* por f.

Solución:

a) Hallar los valores y vectores propios de A

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 & -1 \\ 3 & -2-\lambda & -1 \\ 3 & -3 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2 = 0$$

los valores propios de A son $\boxed{\lambda = 0}$ y $\boxed{\lambda = 1}$ doble

El subespacio de los vectores propios asociados a $\lambda = 1$ es

$$(A - 1\cdot I)\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = 3\alpha - 3\beta \end{cases}$$

y una base de $V_{\lambda=1}$ es $\boxed{\{(1,0,3),(0,1,-3)\}}$.

Análogamente el subespacio de los vectores propios asociados a $\lambda = 0$ es

$$(A - 0\cdot I)\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

y una base de $V_{\lambda=0}$ es $\boxed{\{(1, 1, 1)\}}$.

b) ¿Es A diagonalizable?

A es diagonalizable, pues coincide para cada valor propio, el orden de multiplicidad de dicho valor propio como raíz de su polinomio característico con la dimensión del subespacio propio asociado.

c) En caso afirmativo, hallar una matriz diagonal D semejante a A

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

dar una matriz P que permita la diagonalización de A

$$P=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\3&-3&1\end{pmatrix}$$

escribir la relación que existe entre A y D

$$\mathbf{D = P^{-1}\cdot A\cdot P}$$

d) Dar una base B'= $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ de R^3 formada por vectores propios de A tal que D = M(f, B')

B'= {$\vec{v}_1$ = (1,0,3), $\vec{v}_2$ = (0,1,-3), $\vec{v}_3$ = (1,1,1)}.

e) Expresar los vectores $f(\vec{v}_1)$, $f(\vec{v}_2)$, $f(\vec{v}_3)$ como combinación lineal de los vectores de la base B'.

$$f(\vec{v}_1)=\vec{v}_1=1\,\vec{v}_1+0\,\vec{v}_2+0\,\vec{v}_3$$
$$f(\vec{v}_2)=\vec{v}_2=0\,\vec{v}_1+1\,\vec{v}_2+0\,\vec{v}_3$$
$$f(\vec{v}_3)=\vec{0}=0\,\vec{v}_1+0\,\vec{v}_2+0\,\vec{v}_3$$

f) ¿Es f biyectiva?
No, pues det(A) = 0.

g) Hallar N (f).
Como λ = 0 es valor propio de f, el Núcleo de f coincide con el subespacio propio asociado al valor propio λ = 0:
Es el subespacio engendrado por el vector $\vec{v}_3$ = (1, 1, 1).

h) Hallar el subespacio de vectores invariantes por f.
Como λ = 1 es valor propio de f, el subespacio de vectores invariantes por f coincide con el subespacio propio asociado al valor propio λ = 1:
Es el subespacio engendrado por los vectores $\vec{v}_1$ = (1, 0, 3) y $\vec{v}_2$ = (0, 1, -3).

56.- Dada la *matriz* $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & k & 4 \\ 0 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ asociada a una *transformación lineal* f respecto de la *base canónica*, se pide:

1.- Estudiar para qué valores de k es f *biyectiva*.

2.- Para k = -9

a) Hallar, si existe, una matriz *diagonal* D semejante a A.

b) Hallar una *base* B tal que la *matriz* asociada a f respecto de la *base* B sea D.

c) Escribir la relación matricial entre D y A.

d) Hallar el *Núcleo* y la *Imagen* de f

e) Hallar los vectores *invariantes* por f.

g) La imagen por f de un *plano* vectorial ¿qué *dimensión* tiene?

Solución:

1.-

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & k & 4 \\ 0 & -4 & 8 \end{vmatrix} = 24(k+2) \neq 0 \Rightarrow k \neq 2$$

Por tanto, f **es biyectiva para $k \neq -2$**

2. Para k = -9

Los valores propios son las raíces del polinomio característico: $|A - \lambda I| = 0$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 & 5 \\ 0 & -9-\lambda & 4 \\ 0 & -4 & 8-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+8)(\lambda-7)(\lambda-3) = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} -8 \\ 7 \\ 3 \end{cases}$$

Es diagonalizable, ya que tiene 3 valores propios reales y distintos entre si.

a)

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

b) Los vectores propios asociados a cada valor propio λ, son las soluciones del sistema: $(A - \lambda I)\ \vec{v} = \vec{0}$

Para $\lambda = -8 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3+8 & 4 & 5 \\ 0 & -9+8 & 4 \\ 0 & -4 & 8+8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \dfrac{21}{11} z = 0 \\ y - 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_1 = (21, -44, -11)$

Para $\lambda = 7 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3-7 & 4 & 5 \\ 0 & -9-7 & 4 \\ 0 & -4 & 8-7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \dfrac{3}{2} z = 0 \\ y - \dfrac{1}{4} z = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_2 = (6, 1, 4)$

Para $\lambda = 3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3-3 & 4 & 5 \\ 0 & -9-3 & 4 \\ 0 & -4 & 8-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_3 = (1,0,0)$

Una base de vectores propios:

B={(21,-44,-11),(6,1,4),(1,0,0)}

$$P = \begin{pmatrix} 21 & 6 & 1 \\ -44 & 1 & 0 \\ -11 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

c)

$\mathbf{D = P^{-1} \cdot A \cdot P}$

d) Núcleo de f: **{0}**

Pues es inyectiva, biyectiva,...Y por tanto, también:**Imf=$\mathbf{R^3}$**

e) Vectores invariantes por f: **{0}**

Ya que λ= 1 no es valor pro

pio de f.

f)

La imagen de un plano vectorial será otro plano vectorial por ser f biyectiva; por tanto, tendrá **dimensión 2**.

57.- Dados el punto A=(3,2,0), los vectores $\vec{u}_1=(1,1,0)$, $\vec{u}_2=(0,0,1)$ y $\vec{u}_3=(1,0,3)$ y la *transformación lineal* f de $\Re^3$ tal que: N(f) = $\langle(1,1,0),(0,0,1)\rangle$ y f(1,0,3)=(1,0,3). Se pide:

a) Escribir las *ecuaciones cartesianas o implícitas* del *subespacio vectorial* generado por los vectores $\vec{u}_1=(1,1,0)$ y $\vec{u}_2=(0,0,1)$.

b) Escribir las ecuaciones del *cambio de la base* B = $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ a la *base canónica* B$_c$.

c) Demostrar que R = $\{A;\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ es un *sistema de referencia afín* del espacio tridimensional.

d) Si P =(1,1,1), hallar sus *coordenadas* en R = $\{A;\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$.

e) Hallar todos los *valores propios* de f.

f) Razonar si f es *diagonalizable*. En caso afirmativo, escribir una *matriz diagonal* D que defina f respecto de una *base* de $\Re^3$ y dar dicha *base*.

Solución:

a) N(f) = $\langle\vec{u}_1,\vec{u}_2\rangle=\langle(1,1,0),(0,0,1)\rangle=\{(\alpha,\alpha,\beta)\,/\,\alpha,\beta\in R\}$

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 1 & 0 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \boxed{x-y=0}$$

b) Directamente cambio de la base B a la base canónica $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}}$

c) R es un sistema de referencia afín, puesto que $B=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ es una base, ya que:

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}=1\neq 0$, es decir, son **tres vectores linealmente independientes** y la dimensión de $\Re^3$ es 3.

d) El cambio de sistema de referencia de R a R$_c$ es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} 1 \\ x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}_{R_c}$$

En particular para el punto P(1,1,1):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{R_c} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{R_c}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{R_c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}_R \Rightarrow \boxed{P = (-1, 4, -2)}$$

e)

Para cualquier vector $\vec{u}$ del núcleo f($\vec{u}$)= A$\vec{u}$=0 = 0$\vec{u}$, luego 0 es un valor propio de A, y $\vec{u}$ es un vector propio asociado al valor propio 0. Como en este caso la dimensión de N(f) es 2, éste es el orden de multiplicidad del **valor propio 0**.

Por otra parte, el vector $\vec{u}_3 = (1,0,3)$ es un vector invariante por f, ya que $f(\vec{u}_3) = f(1,0,3) = (1,0,3) = \vec{u}_3$, luego es un vector propio con **valor propio** 1.

f)

f es diagonalizable porque dim V_0 = 2 = orden de multiplicidad de λ_1 = 0 y dim V_1 = 1= orden de multiplicidad de λ_2 = 1.

Una matriz diagonal es D = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ respecto de una base formada por vectores propios

$\boxed{B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}}$.

58.- a) Hallar el *rango* de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 11 \end{pmatrix}$

b) Sea F el *subespacio vectorial* de R^3 engendrado por los vectores fila de la matriz A. Hallar la *dimensión* y una *base* de F.
c) Hallar unas *ecuaciones paramétricas* de F.
d) Hallar unas *ecuaciones implícitas* de F.
e) ¿Es A *diagonalizable*? En caso afirmativo, hallar una *matriz diagonal semejante* a A.
f) ¿Existen dos *bases* de R^3 tales que A sea la matriz de *cambio de base* de una a la otra?
g) Sea $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ la matriz de cambio de base de $B = \left\{ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \right\}$ a la *base canónica* $C = \left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\}$ de R^3. Escribir el vector $\vec{e}_2$ como *combinación lineal* de los vectores de la base B.

Solución:

a) Rango de A:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 11 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 11 \end{pmatrix} = \boxed{2}$$

b) Dimensión y base de F

Dim F = 2; Una base de F es {(1, 0, 1), (2,-1,0)}

c) Ecuaciones paramétricas de F:

$$\begin{cases} x = \lambda + 2\mu \\ y = -\mu \\ z = \lambda \end{cases}$$

d) Ecuaciones implícitas de F:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 0 & -1 & y \\ 1 & 0 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\cdot x + 2\cdot y - z = 0}$$

e) ¿Es A diagonalizable?

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & -1-\lambda & 4 \\ 1 & 0 & 11-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 11\lambda + 4) = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{11 \pm \sqrt{137}}{2} \end{cases}$$

los valores propios de A son $\boxed{\lambda = 0}$, $\boxed{\lambda = \dfrac{11+\sqrt{137}}{2}}$ y $\boxed{\lambda = \dfrac{11-\sqrt{137}}{2}}$

A es diagonalizable pues tiene tres valores propios reales y distintos entre sí.

Matriz diagonal semejante a A:

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{11+\sqrt{137}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{11-\sqrt{137}}{2} \end{pmatrix}}$$

f) A no es una matriz de cambio de base, pues det(A) = 0.

g) Si M es la matriz de paso de B a C, entonces la inversa de M es la matriz de paso de C a B:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_c \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 10 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_c = \begin{pmatrix} -10 & -20 & 11 \\ 4 & 7 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_c$$

Por tanto, se verifica: $\boxed{\vec{e}_2 = -20\,\vec{u}_1 + 7\,\vec{u}_2 + 2\,\vec{u}_3}$

59.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & a & 3 \\ 3 & a+1 & -3 \\ 1 & a & -1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Estudiar para qué valores de *a* es *diagonalizable*.

b) Para *a*=1, hallar los *valores y vectores propios* de A

c) Calcular, si existe, una *base de vectores de vectores propios, la matriz diagonal semejante* a A y la matriz de paso.

d) Hallar N(f) e Imf

Solución:

a)

Hallamos el polinomio característico de A:

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -3-\lambda & a & 3 \\ 3 & a+1-\lambda & -3 \\ 1 & a & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda+4)(\lambda-a-1)=0$$

Los valores propios son 0, -4 y a+1.

Si **a≠-1, a≠--5**, los valores propios son reales y distintos entre sí, luego **A sería diagonalizable**.

Para a=-1, A tiene como valores propios 0 (orden 2 de multiplicidad) y -4 (simple)

Los vectores propios asociados a cada valor propio λ, son las soluciones del sistema:

$(A-\lambda I)\ \vec{v}=\vec{0}$

$$\text{Para } \lambda=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -3-0 & -1 & 3 \\ 3 & 0-0 & -3 \\ 1 & -1 & -1-0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x-z=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_1=(1,0,1)$$

Luego V(λ=0) =<(1, 0, 1)>, su dimensión es 1, luego **no es diagonalizable**.

Para a=-5, A tiene como valores propios -4 (orden 2 de multiplicidad) y 0 (simple)
Calculamos los autovectores del valor propio -4

$$\text{Para } \lambda=-4 \Rightarrow \begin{pmatrix} -3+4 & -5 & 3 \\ 3 & -4+4 & -3 \\ 1 & -5 & -1+4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x-z=0 \\ y-\frac{4}{5}z=0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_1=(5,4,5)$$

Luego V(λ=-4) =<(5, 4, 5)>, su dimensión es 1, luego **no es diagonalizable**.

b) Para a=1, **los autovalores son 0,-4 y 2** y los vectores propios son:

$$\text{Para } \lambda=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -3-0 & 1 & 3 \\ 3 & 2-0 & -3 \\ 1 & 1 & -1-0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x-z=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_1=(1,0,1)$$

$$\text{Para } \lambda=-4 \Rightarrow \begin{pmatrix} -3+4 & 1 & 3 \\ 3 & 2+4 & -3 \\ 1 & 1 & -1+4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+7z=0 \\ y-4z=0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_2=(-7,4,1)$$

Para $\lambda = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} -3-2 & 1 & 3 \\ 3 & 2-2 & -3 \\ 1 & 1 & -1-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_3 = (1,2,1)$

V(λ=0)=<(1,0,1)>, V(λ=-4)=<(-7,4,1)>, V(λ=2)=<(1,2,1)>

c) La base de vectores propios es **B={[1,0,1],[-7,4,1],[1,2,1]}**.

Respecto de B las matrices D y P (de paso de la base B a la canónica) son respectivamente

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } P = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

d)
El subespacio **N(f)=V(λ=0)=<(1,0,1)>**, luego su dimensión es 1 y en consecuencia dim(Imf)=3-1=2.

Imf es el subespacio generado por las columnas de A y como las 2 primeras columnas son linealmente independientes, tenemos que **Imf=<(-3,3,1),(1,2,1)>**

60.- Dado el *endomorfismo* f de R^3 definido por

$$f(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) = (-2x_1 + 4x_2 + 2x_3)\vec{e}_1 + (x_1 - 2x_2 + \alpha\, x_3)\vec{e}_2 + (-x_1 + 2x_2 + x_3)\vec{e}_3$$

siendo $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ **una *base* de R^3.**

a) Hallar la *dimensión* del *subespacio* imagen en función de α.

b) Hallar el *núcleo* y la *imagen* en función de α.

c) ¿Bajo qué condiciones es *diagonalizable* la matriz de f respecto de esa base? En los casos en que sea diagonalizable, indicar la matriz diagonal.

Solución:

a) La matriz asociada o que define f se obtiene mediante las imágenes de los vectores de la base $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$:

$$\begin{array}{l} f(\vec{e}_1) = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \\ f(\vec{e}_2) = 4\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \Rightarrow A = M(f,B) = \\ f(\vec{e}_3) = 2\vec{e}_1 + \alpha\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{array} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & \alpha \\ \underbrace{-1}_{f(\vec{e}_1)} & \underbrace{2}_{f(\vec{e}_2)} & \underbrace{1}_{f(\vec{e}_3)} \end{pmatrix}$$

La ecuación matricial o ecuaciones de la transformación lineal es:

$$Y = AX \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & \alpha \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

La imagen es: $\mathrm{Im}(f) = \{\vec{y} \in R^3 / \exists \vec{x} \in R^3 \text{ con } f(\vec{x}) = \vec{y}\}$, luego

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & \alpha \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix} x_3$$

Para estudiar la dimensión del subespacio imagen calculamos el rango de la matriz A

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & \alpha \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{; luego el rango puede ser 1 ó 2}$$

- Si $\alpha \neq -1$ queda $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \mu$ que son las ecuaciones paramétricas del subespacio imagen, siendo **dim(Im(f))=r(A)=2** y una posible base $B_{\mathrm{Im}(f)} = \{(-2,1,-1),(2,0,1)\}$

- Si $\alpha = -1$ queda $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \lambda$ que son las ecuaciones paramétricas del subespacio imagen, siendo **dim(Im(f))=r(A)=1** y una posible base $B_{\mathrm{Im}(f)} = \{(-2,1,-1)\}$

b) El núcleo es: $N(f)=\{\vec{x}\in R^3 / f(\vec{x})=0\}$, luego:

$$AX=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & \alpha \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1-2x_2+\alpha x_3=0 \\ -x_1+2x_2+x_3=0 \end{cases}$$

- Si $\alpha \neq -1$ queda: $\begin{cases} x_1-2x_2+\alpha x_3=0 \\ -x_1+2x_2+x_3=0 \end{cases}$ y la dimensión den Núcleo de f es 1.
- Si $\alpha=-1$ queda: $\{x_1-2x_2-x_3=0$ y la dimensión den Núcleo de f es 2.

c) Seguimos el método general:
Cálculo de los valores propios:

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} -2-\lambda & 4 & 2 \\ 1 & -2-\lambda & \alpha \\ -1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda^3-3\lambda^2+(2a+2)\lambda=0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda=0 \\ \lambda=\dfrac{\sqrt{8\alpha+17}-3}{2} \\ \lambda=-\dfrac{\sqrt{8\alpha+17}+3}{2} \end{cases}$$

- Si $\alpha \neq -1$ se obtienen tres valores propios reales y distintos, la matriz **es diagonalizable**.

La correspondiente matriz diagonal:

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\sqrt{8\alpha+17}-3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{\sqrt{8\alpha+17}+3}{2} \end{pmatrix}}$$

- Si $\alpha=-1$ se obtienen tres valores propios reales, pero el valor propio 0 es doble y el -3 simple. Para ver si es o no diagonalizable debemos buscar los valores propios asociados al valor propio nulo que se corresponde con el Núcleo de f cuya dimensión para el valor de $\alpha=-1$ es dos luego se cumple el teorema de diagonalización y es posible obtener una base de R^3 formada por vectores propios de f.

  La correspondiente matriz diagonal:

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}}$$

En consecuencia, **es diagonalizable** para cualquier valor de α.

61.- Sean B $=\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ y B' $=\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ dos *bases* de $\Re^3$ y f un *endomorfismo* que respecto de la base B tiene por ecuación $Y = \begin{pmatrix} 2 & -10 & 6 \\ -1 & 5 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix} X$. Se pide hallar la ecuación de f respecto de la base B' siendo $\vec{u}_1 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{u}_2 = -3\vec{e}_1 + \vec{e}_3$, $\vec{u}_3 = 5\vec{e}_1 + \vec{e}_2$.

Solución:

La matriz que define f respecto de la base B:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -10 & 6 \\ -1 & 5 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, la matriz del cambio de base de B' a la base B es:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si designamos f($\vec{x}$)= Y' = A' X' la ecuación de f respecto de la base B' las matrices A y A' son semejantes y se verifica que A' = P^{-1} A P, luego:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

resultando la ecuación matricial $\boxed{\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}}$

62.- Dada la transformación lineal f de R^2 definida por las imágenes de los vectores de la base canónica: $f(\vec{e}_1) = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2$; $f(\vec{e}_2) = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2$.

a) Calcular los valores propios de f.

b) Calcular los vectores propios de f.

c) ¿Es f diagonalizable?

Solución:

a) La matriz asociada o que define f se obtiene mediante las imágenes de los vectores de la base $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$:

$$\begin{cases} f(\vec{e}_1) = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 = (3,1) \\ f(\vec{e}_2) = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 = (-1,1) \end{cases} \Rightarrow A = M(f,B) = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Valores propios:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 \Rightarrow \boxed{\lambda = 2 \ (\text{doble})}.$$

b) Vectores propios:

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Para } \lambda = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3-2 & -1 \\ 1 & 1-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_1 = (1,1)}$$

c)

No, es diagonalizable, ya que no es posible encontrar una base del espacio vectorial formada por vectores propios de f. La dimensión del subespacio propio asociada al valor propio es 1 y no coincide con el orden de multiplicidad que es doble.

Aplicación lineal

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K y sea la aplicación

$$f : V \to W$$

$$\vec{v} \to f(\vec{v}) = \vec{w}$$

La aplicación f es **lineal** si se verifican las dos condiciones siguientes:

1) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V,\ f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$

2) $\forall \lambda \in K,\ \forall \vec{v} \in V,\ f(\lambda\vec{v}) = \lambda f(\vec{v})$

o bien en una única condición: $\forall \lambda, \mu \in K, \forall \vec{u}, \vec{v} \in V,\ f(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$.

A las aplicaciones lineales se les dice también **homomorfismos**

Endomorfismo o **transformación lineal**

Endomorfismo o **transformación lineal** es una aplicación lineal de un espacio vectorial en sí mismo.

Matriz.

Una **matriz** es un conjunto de elementos de un cuerpo K ordenados en filas y columnas.

Si la matriz tiene m filas y n columnas, se escribe así:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$$

Subespacio vectorial

Sea (V,+,.) un **K**-espacio vectorial y F una parte no vacía de V, diremos que F es un ***subespacio vectorial*** de V si y sólo si (F,+,.) en un **K**-espacio vectorial.

Sea F una parte no vacía del K-espacio vectorial V. F es un **subespacio vectorial** de V con las operaciones + y · inducidas por V si y sólo si se verifica:

$$\forall \lambda, \mu \in \mathrm{K}, \forall \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \in \mathrm{F} \Rightarrow \lambda \vec{\mathbf{a}} + \mu \vec{\mathbf{b}} \in \mathbf{F}$$

Núcleo de la aplicación lineal f

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal, **Núcleo** de la aplicación lineal f es:

$N(f) = Ker(f) = \left\{ \vec{v} \in V / f\left(\vec{v}\right) = 0 \right\} = f^{-1}\left(\left\{\vec{0}\right\}\right) \subset V$.

Imagen de la aplicación lineal f

Sea $f: V \rightarrow W$ una aplicación lineal, **Imagen** de la aplicación lineal f es:

$$\operatorname{Im}(f) = f(V) = \left\{ \vec{w} \in W \,/\, \exists \vec{v} \in V, f(\vec{v}) = \vec{w} \right\} \subset W .$$

Aplicación biyectiva

Una aplicación entre dos conjuntos A y B es **biyectiva** si todo elemento de B es imagen de un solo elemento de A o también si es a la vez inyectiva y sobreyectiva

Una aplicación lineal **biyectiva** o **isomorfismo** es una aplicación tal que su inversa es también una aplicación.

Base

Lado o cara horizontal a partir del cual se mide la altura de una figura plana o de un sólido.

Base de un espacio vectorial V es un subconjunto de V que sea sistema generador y libre.

Dimensión

El número de elementos de cualquier base de un espacio vectorial se denomina **dimensión** del espacio vectorial. Escribiremos dim(V).

La **dimensión** de un espacio afín es la dimensión del espacio vectorial asociado.

Se dice que la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ tiene **dimensión** $m \times n$; si m = n, diremos que A es una matriz de **orden n**.

Ecuaciones implícitas o cartesianas

Ecuaciones cuyas incógnitas son coordenadas. Relativo a las ecuaciones de un subespacio vectorial las ecuaciones cartesianas forman el sistema homogéneo que define dicho subespacio.

Aplicación inyectiva

Una aplicación entre dos conjuntos A y B es **inyectiva** si cada elemento de B, que es imagen de uno de A, lo es de uno sólo, es decir, $\forall a, b \in A, \text{si } f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$.

f: V→W es una aplicación lineal **inyectiva** o **monomorfismo** $\Leftrightarrow \text{Núcleo}(f) = \{\vec{0}\}$.

Base canónica

Base canónica, B_c, es la base: $B_c = \{\vec{e}_1 = (1,0,...,0), \vec{e}_2 = (0,1,0,...,0), ..., \vec{e}_n = (0,0,...,0,1)\}$ del espacio vectorial V.

Linealmente independientes

Sean f_1, f_2,…,f_k filas de una matriz cualquiera A. Las filas f_1, f_2,…,f_k son **linealmente independientes**, cuando no sean linealmente dependientes, es decir, cuando si $(0) = \lambda_1 f_1 + ... + \lambda_k f_k$, siendo (0) la fila formada por ceros, se deduce obligatoriamente que $\lambda_i = 0,\ \forall i$.

Sean $\vec{\mathbf{a}}_1, ..., \vec{\mathbf{a}}_n$ vectores de V. Los vectores $\vec{\mathbf{a}}_1, ..., \vec{\mathbf{a}}_n \in \mathbf{V}$ son **linealmente independientes**, cuando no sean linealmente dependientes, es decir, cuando si $\vec{\mathbf{0}} = \lambda_1 \vec{\mathbf{a}}_1 + ... + \lambda_n \vec{\mathbf{a}}_n$ .se deduce obligatoriamente que $\lambda_i = \mathbf{0},\ \forall \mathbf{i}$. También se dice que constituyen un sistema ***libre***.

Los puntos A, B, C y D son **linealmente independientes** si lo son los vectores $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$.

Valor propio

Sea $f : V \to V$ una transformación lineal y una matriz $A \in M_n(K)$ asociada a f respecto de una base B del espacio vectorial V.

Un **valor propio** o **autovalor** de f es $\lambda \in K$ tal que $f(\vec{v}) = A\vec{v} = \lambda\vec{v}$.

Vector propio

Sea $f : V \to V$ una transformación lineal y una matriz $A \in M_n(K)$ asociada a f respecto de una base B del espacio vectorial V.

Un vector $\vec{v} \in V$ con $\vec{v} \neq \vec{0}$ es un **vector propio** o **autovector** de f si existe un valor $\lambda \in K$ tal que $f(\vec{v}) = A\vec{v} = \lambda\vec{v}$.

Diagonalizable

Una matriz $A \in M_n(K)$ es **diagonalizable** si existe una matriz diagonal semejante a ella.

Una transformación lineal de V es **diagonalizable** si su matriz asociada es diagonalizable.

Matriz diagonal

Sea $A \in M_n(K)$. **Matriz diagonal** es aquella que tiene nulos todos sus elementos, salvo, a lo sumo, los de la diagonal principal.

Matrices semejantes.

Dos matrices $A, A' \in M_n(K)$ son **semejantes** si y sólo si existe una matriz $P \in M_n(K)$ invertible tal que $A' = P^{-1} A P$.

Observación: Todas las matrices asociadas a la misma aplicación lineal f respecto de cualquier base de V son semejantes entre sí.

Vector

- Elemento de un espacio vectorial, se identifica por sus coordenadas respecto de una base del espacio vectorial.
- Segmento orientado, se caracteriza por su dirección, sentido y módulo.

Vector Invariante

Sea $f : V \to V$ una transformación lineal.
Un vector $\vec{v} \in V$ es un **vector invariante** por f si $f(\vec{v}) = \vec{v}$.

Matriz simétrica

Una **matriz** cuadrada es **simétrica** cuando $A^t = A$, es decir, $A=(a_{ij})$ tal que $a_{ij} = a_{ji}$, siendo i,j=1, 2, ..., n.

Ortogonales

Se dice que los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ son **ortogonales** si su producto escalar es cero.

Sea V un espacio vectorial euclídeo y F y G dos subconjuntos de V, se dice que F y G son **ortogonales** (escribimos $F \perp G$) si y solo si todo vector de F es ortogonal a cualquier vector de G.
Dado un subconjunto F de V, llamaremos **ortogonal** de F y se escribe $F^{\perp}$, al subconjunto de V formado por todos los vectores ortogonales a F. $F^{\perp}$ es siempre un subespacio vectorial de V aunque F no lo sea.

Linealmente dependientes

Sean f_1, f_2,…,f_k filas de una matriz cualquiera A. Las filas f_1, f_2,…,f_k son **linealmente dependientes**, cuando existan los elementos $\lambda_1,...,\lambda_k \in K$ no todos nulos, tales $(0) = \lambda_1 f_1 + ... + \lambda_k f_k$, siendo (0) la fila formada por ceros.

Sean $\vec{\mathbf{a}}_1,...,\vec{\mathbf{a}}_n$ vectores de V. Los vectores $\vec{\mathbf{a}}_1,...,\vec{\mathbf{a}}_n \in \mathbf{V}$ son **linealmente dependientes,** cuando existan los elementos $\lambda_1,...,\lambda_n \in \mathbf{K}$ no todos nulos, tales que $\vec{\mathbf{0}} = \lambda_1\vec{\mathbf{a}}_1 + ... + \lambda_n\vec{\mathbf{a}}_n$. También se dice que constituyen un sistema ***ligado***.

Los puntos A, B, C y D son **linealmente dependientes** si lo son los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$.

Espacio Vectorial

Sea V un conjunto donde hemos definido una ley u operación interna, que designaremos por “+” $V \xrightarrow{+} V$. Sea **K** un cuerpo (conmutativo) y sea, por último, una operación externa que designaremos por “·” $\mathbf{K} \times V \xrightarrow{\cdot} V$.
Diremos que (V,+, ·) tiene estructura de ***espacio vectorial*** sobre el cuerpo **K**, o simplemente que (V,+, ·) es un **K**-espacio vectorial cuando se verifiquen las condiciones siguientes:

[A1] **Asociativa:** $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ para cualesquiera $\vec{a},\vec{b},\vec{c} \in V$.

[A2] **Existencia de elemento neutro**: Existe un elemento que designaremos $\vec{0} \in V$ que verifica que $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$ para cualquier $\vec{a} \in V$.

[A3] **Existencia de elemento simétrico**: Para cualquier $\vec{a} \in V$ existe un único elemento de V, que designaremos por $-\vec{a}$ tal que $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$.

[A4] **Conmutativa**: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ para cualesquiera $\vec{a},\vec{b} \in V$.

*Observemos que (V,+) debe ser, por tanto, un **grupo conmutativo**.*

[A5] $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$ para cualquier $\lambda \in K$ y cualesquiera $\vec{a},\vec{b} \in V$.

[A6] $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ para cualesquiera $\lambda,\mu \in K$ y cualquier $\vec{a} \in V$.

[A7] $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$ para cualesquiera $\lambda,\mu \in K$ y cualquier $\vec{a} \in V$.

[A8] El elemento unidad del cuerpo K, que designaremos por 1, verifica $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$ para cualquier $\vec{a} \in V$.

Subespacios suplementarios

Sean E_1 y E_2 dos subespacios vectoriales del espacio vectorial V. Si se cumple $E_1 \oplus E_2 = V$, diremos que E_1 y E_2 son ***subespacios suplementarios***, en cuyo caso se verifican las dos condiciones siguientes: $E_1 + E_2 = V$ y $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$.

Rango de un sistema de vectores

Rango de un sistema de vectores es igual al número máximo de vectores linealmente independientes que contiene.

Rango de una aplicación lineal

Rango de la aplicación lineal f es la dimensión del subespacio Imagen de f.

Rango de una matriz

Rango de la matriz A es el orden del menor de mayor orden no nulo de A. Lo denotaremos por r(A) o bien por rg(A).

En Estadística

Rango o recorrido de una variable estadística

Es la diferencia entre el mayor y el menor valor de la variable estadística.

Epimorfismo

Epimorfismo es una aplicación lineal sobreyectiva si y sólo si el subespacio imagen coincide con el espacio vectorial final, es decir, si f: V→W es tal que Im(f)=W.

Monomorfismo

Monomorfismo es una aplicación lineal inyectiva $\Leftrightarrow \text{Núcleo}(f) = \{\vec{0}\}$.

Isomorfismo

Isomorfismo es una aplicación lineal biyectiva.

Automorfismo

Automorfismo es un endomorfismo que además es isomorfismo.

Ecuaciones paramétricas

Ecuaciones en las que intervienen parámetros.

- Ecuaciones paramétricas de una **curva** plana son ecuaciones de la forma x=x(t), y=(t) donde el parámetro t recorre los valores del campo de existencia.
- Ecuaciones paramétricas de un **subespacio vectorial** son las coordenadas de un vector del subespacio vectorial como combinación lineal de los vectores de una base.
- Ecuaciones paramétricas de una **recta**:

En el **plano**: siendo $P(x_0,y_0)$ un punto cualquiera y $\vec{v}=(v_1,v_2)$ un vector director.

Ecuaciones paramétricas de la recta: $\begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \end{cases}$

En el **espacio**: Siendo $P=(p_1,p_2,p_3)$ un punto cualquiera y $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ un vector director de la recta.

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x_1 = p_1 + tv_1 \\ x_2 = p_2 + tv_2 \\ x_3 = p_3 + tv_3 \end{cases}.$

Vector unitario

Vector cuyo módulo es la unidad.

Polinomio característico

Polinomio característico de A es el siguiente polinomio en la variable λ:

$$P(\lambda) = |A - \lambda I|$$

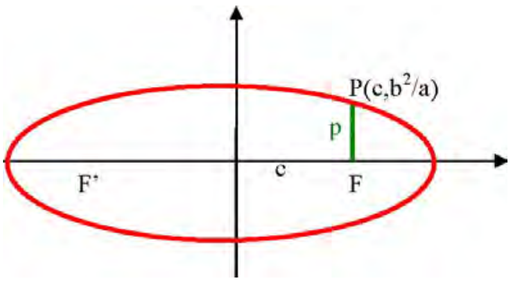
Cambio de base en una transformación lineal

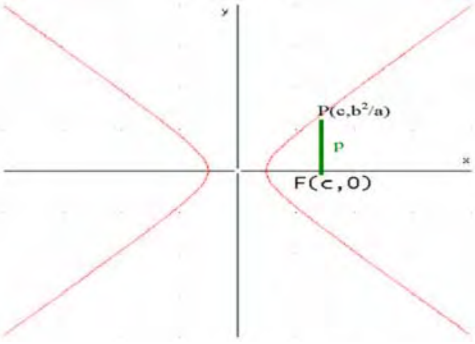
Sea $f: V \to V$ una transformación lineal y sean B=$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ y B'=$\{\vec{u}'_1, \vec{u}'_2, \ldots, \vec{u}'_n\}$ dos bases de V tales que P representa la matriz del cambio de base de B' a B. Si Y=AX es la ecuación matricial de la transformación lineal f con A=M(f,B) entonces la matriz que define f respecto B' es: A'=M(f,B')=P^{-1}AP resultando Y'=A'X'.

Parámetro

- Símbolo que representa una constante en un problema cuyo valor puede variar de unos casos a otros.
- Variable que interviene en las ecuaciones de algunos lugares geométricos.

En las cónicas con centro el **parámetro** focal es la semicuerda que pasa por el foco perpendicular al eje focal, cuyo valor es: $p = b^2/a$





En la parábola es la distancia del foco a la directriz.

Transformación ortogonal

Las aplicaciones $f:V \longrightarrow V$ biyectivas, lineales y que conservan el producto escalar son **transformaciones ortogonales**. La ecuación es de la forma X'=MX, donde es la matriz asociada a f y tiene por columnas las coordenadas de los transformados de los vectores de la base en cuyo caso M es una matriz ortogonal.

Base ortonormal o métrica

La base $B=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,...,\vec{u}_n\}$ es **ortonormal** o **métrica** cuando sus vectores son unitarios ($\|\vec{u}_i\|=1,\ i=1,2,...,n$) y ortogonales entre sí (perpendiculares dos a dos).

Hiperplano

Un subespacio vectorial H del espacio vectorial V es un ***hiperplano*** si y solo si dim(H)=dim(V)-1.

Combinación lineal

Sean $\vec{a}_1,...,\vec{a}_n$ vectores de V. Llamaremos **combinación lineal** *d*e los vectores $\vec{a}_1,...,\vec{a}_n \in V$ a todo vector $\vec{v} \in V$ de la forma $\vec{v} = \lambda_1\vec{a}_1 + ... + \lambda_n\vec{a}_n$, siendo $\lambda_1,...,\lambda_n \in K$.

Aplicación suprayectiva o sobreyectiva o exhaustiva

Una aplicación entre dos conjuntos A y B es **sobreyectiva** si todo elemento de B es imagen de, al menos, uno de A, es decir, $\forall y \in B,\ \exists x \in A$ tal que $f(x)=y$.

f: V→W es una aplicación lineal **sobreyectiva** o **epimorfismo** si y sólo si el subespacio imagen coincide con el espacio vectorial final, es decir, si Im(f)=W.

Suma directa

Sean E_1 y E_2 dos subespacios vectoriales del espacio vectorial V. Llamaremos **suma directa de E_1 y E_2** a la suma cuando $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$ y se escribe $E_1 \oplus E_2$.

Polinomio

Suma de un número finito de términos de la forma $a_{1i_1....ni_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_n^{i_n}$ donde $a_{1i_1....ni_n}$ son los coeficientes y $x_1, x_2, ..., x_n$ son las variables o indeterminadas y los exponentes $i_1, i_2, ..., i_n$ números enteros no negativos cuya suma es el grado de cada sumando y el mayor de los grados el grado del polinomio.

Número natural

Cantidad de elementos que tiene un cierto conjunto. El conjunto de todos ellos se designa por N: N = {1, 2, 3, 4,…, 10, 11, 12,…}

Subespacio ortogonal

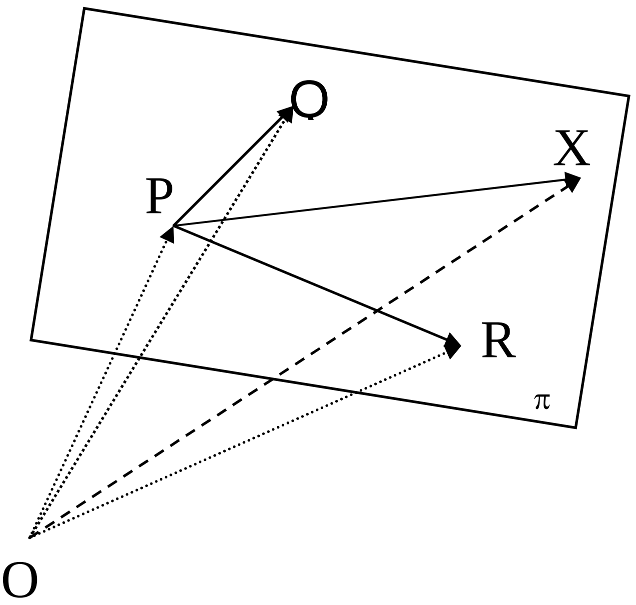
Dado un subconjunto F de V, llamaremos **ortogonal** de F y se escribe $F^{\perp}$, al subconjunto de V formado por todos los vectores ortogonales a F. $F^{\perp}$ es siempre un subespacio vectorial de V aunque F no lo sea.

El Plano en el Espacio

Sea el sistema de referencia $R = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ Un plano queda determinado por tres puntos P, Q y R no alineados, cualquier punto coplanario con ellos verifica $X = P + t\,\overrightarrow{PQ} + s\,\overrightarrow{PR}$.

De la ecuación vectorial, para $P = (p_1, p_2, p_3)$, $Q = (q_1, q_2, q_3)$, $R = (r_1, r_2, r_3)$ y $X = (x_1, x_2, x_3)$ se obtienen las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + t(q_1 - p_1) + s(r_1 - p_1) \\ x_2 = p_2 + t(q_2 - p_2) + s(r_2 - p_2) \\ x_3 = p_3 + t(q_3 - p_3) + s(r_3 - p_3) \end{cases}$$

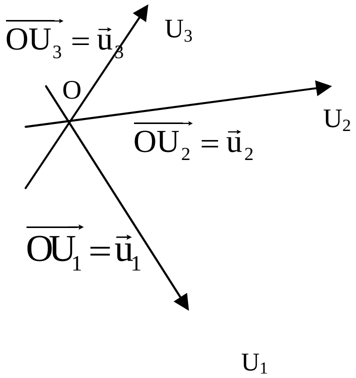


Si consideramos un punto P y dos vectores linealmente independientes $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ el plano queda determinado de forma vectorial por $X = P + t\vec{v} + s\vec{w}$ y por sus ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x_1 = p_1 + tv_1 + sw_1 \\ x_2 = p_2 + tv_2 + sw_2 \\ x_3 = p_3 + tv_3 + sw_3 \end{cases}$ de donde eliminando los parámetros t y s queda: $\begin{vmatrix} x_1 - p_1 & v_1 & w_1 \\ x_2 - p_2 & v_2 & w_2 \\ x_3 - p_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0$, la ecuación general, cartesiana o implícita del plano $ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$

Sistema de referencia

Sea $\boldsymbol{A}^3$ un espacio afín y $\Re = \{O, U_1, U_2, U_3\}$ una cuaterna de puntos, se dice que R constituye un **sistema de referencia** del espacio afín $\boldsymbol{A}^3$ cuando los vectores $\overrightarrow{OU_1}, \overrightarrow{OU_2}, \overrightarrow{OU_3}$ forman una base de V^3(*R*). O es el **origen** del sistema de referencia.

Si $\overrightarrow{OU_1} = \vec{u}_1, \overrightarrow{OU_2} = \vec{u}_2, \overrightarrow{OU_3} = \vec{u}_3$ entonces se tiene $\Re = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ un sistema de referencia.



Coordenadas cartesianas rectangulares

Si $R = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es un sistema de referencia ortonomal y A, B, y C son puntos tales que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}_1, \overrightarrow{OB} = \vec{u}_2, \overrightarrow{OC} = \vec{u}_3$, las rectas OA=i, OB=j, y OC=k se llaman **ejes** de **coordenadas cartesianas rectangulares**.

Se llaman **coordenadas cartesianas rectangulares** de un punto a sus coordenadas cartesianas cuando el sistema de referencia es métrico u ortonormal.