ESPACIO VECTORIAL

ESPACIO VECTORIAL

1. Introducción

En general, el álgebra trata de números, matrices, vectores, aplicaciones y de operaciones entre los elementos de dichos conjuntos.

Las matemáticas según una concepción primitiva, son la ciencia del número y de la cantidad. El punto de vista clásico distinguía las distintas ramas de las matemáticas según la naturaleza de los objetos que estudiaban: la aritmética es la ciencia de los números; la geometría estudiaba los objetos en el espacio; el análisis estudiaba las funciones, etc. Sin embargo, cada vez con mayor frecuencia, técnicas y resultados de una parte de las matemáticas se mostraban útiles en otra rama.

Un conjunto es una colección de entidades; los números forman un conjunto que pertenece a una categoría bien definida el cuerpo de los números reales y en el reino animal un caballo es un elemento del conjunto de animales mamíferos. Ahora bien, un conjunto de ladrillos no constituye una casa; es necesario dotar a estos conjuntos de una estructura definida mediante diferentes reglas o axiomas; así obtenemos las estructuras de grupo, cuerpo, espacio vectorial. Estas categorías se encuentran en todas las ramas de la matemática, en la física y en otras ciencias.

No son decisivos los objetos con los que se opera sino las relaciones entre ellos. Así surgen las primeras estructuras algebraicas (grupos, anillos, cuerpos, etc.), que permiten agrupar a conjuntos de elementos de naturaleza muy distinta, pero que tienen relaciones y propiedades comunes.

Aquí vemos la estructura de espacio vectorial que es la propia de los vectores y es aplicable a las matrices, a los polinomios y a las funciones y que permite identificar matrices como vectores y resolver múltiples problemas geométricos. Constituye una base sólida para el desarrollo de los temas de geometría. Tanto es así que se describe el álgebra como la geometría que se escribe y a la geometría como el álgebra que se dibuja.

2. Espacio Vectorial

Definición:

Sea V un conjunto donde hemos definido una ley u operación interna, que designaremos por "+" $V \xrightarrow{+} V$. Sea **K** un cuerpo (conmutativo) y sea, por último, una operación externa que designaremos por "·" $\mathbf{K} \times V \xrightarrow{\cdot} V$.

Diremos que (V,+, ·) tiene estructura de ***espacio vectorial* sobre el cuerpo K**, o simplemente que (V,+, ·) es un **K**-espacio vectorial cuando se verifiquen las condiciones siguientes:

[A1] **Asociativa**: $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ para cualesquiera $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V$.

[A2] **Existencia de elemento neutro**: Existe un elemento que designaremos $\vec{0}\in V$ que verifica que $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$ para cualquier $\vec{a}\in V$.

[A3] **Existencia de elemento simétrico**: Para cualquier $\vec{a}\in V$ existe un único elemento de V, que designaremos por $-\vec{a}$ tal que $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$.

[A4] **Conmutativa**: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ para cualesquiera $\vec{a},\vec{b}\in V$.

*Observemos que (V,+) debe ser, por tanto, un **grupo conmutativo**.*

[A5] $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$ para cualquier $\lambda\in K$ y cualesquiera $\vec{a},\vec{b}\in V$.

[A6] $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ para cualesquiera $\lambda,\mu\in K$ y cualquier $\vec{a}\in V$.

[A7] $\lambda\left(\mu\vec{a}\right)=(\lambda\mu)\vec{a}$ para cualesquiera $\lambda,\mu\in K$ y cualquier $\vec{a}\in V$.

[A8] El elemento unidad del cuerpo **K**, que designaremos por 1, verifica $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$ para cualquier $\vec{a}\in V$.

Usualmente a los elementos del espacio vectorial V los denominaremos **vectores,** aunque no lo sean en el sentido físico, y a los elementos del cuerpo **K escalares.**

Algunos ejemplos de espacios vectoriales

- En el tema de Sistemas, matrices y determinantes hemos estudiado que $\left(M_{m\times n}(\mathbf{K}),+,\cdot\right)$ es un **K**-espacio vectorial, siendo "+" y "·" la suma y producto por escalares usuales entre matrices.
- $\mathbf{R}^n$, $n\in N$, es un espacio vectorial, siendo "+" y "·" la suma y producto por escalares usuales entre n-uplas. (En particular, el cuerpo **R**, el plano $\mathbf{R}^2$, el espacio $\mathbf{R}^3$ son espacios vectoriales).
- El conjunto de los polinomios de grado menor o igual que n en una variable indeterminada x es un espacio vectorial.
- Es fácil comprobar, y lo proponemos como ejercicio, que si en el conjunto de las funciones reales de variable real que designaremos por F(**R**), definimos las operaciones:

  ☞Suma de funciones: f+g es la función que verifica (f+g)(x)=f(x)+g(x) $\forall x\in\mathbf{R}$.

  ☞Producto por un número real λ: λf es la función que verifica (λf)(x)= λf(x) $\forall x\in\mathbf{R}$.

  Entonces (F(**R**),+,·) es un **R**-espacio vectorial

Propiedades de los espacios vectoriales:

1. $0\vec{a} = \vec{0}$ para cualquier $\vec{a} \in V$.

Demostración

Podemos escribir $0\vec{a} = (0+0)\vec{a} = 0\vec{a} + 0\vec{a} \quad \Rightarrow \boxed{0\vec{a} = \vec{0}}$.

2. $\lambda\vec{0} = \vec{0}$ para cualquier $\lambda \in$ **K.**

Demostración

Podemos escribir $\lambda\vec{0} = \lambda(\vec{0}+\vec{0}) = \lambda\vec{0} + \lambda\vec{0} \quad \Rightarrow \boxed{\lambda\vec{0} = \vec{0}}$.

3. $\lambda\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0,$ o bien, $\vec{a} = \vec{0}$.

Demostración

Supongamos, en primer lugar, que $\lambda \neq 0$, entonces existe su inverso $\frac{1}{\lambda}$, multiplicando la expresión dada por dicho inverso se obtiene $\frac{1}{\lambda}\lambda\,\vec{a} = \frac{1}{\lambda}\vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{0}}$

Supongamos ahora que $\vec{a} \neq \vec{0}$. *Por reducción al absurdo*, si también fuera $\lambda \neq 0$, entonces, igual que antes, existe $\frac{1}{\lambda}$ y multiplicando la expresión dada por dicho inverso se obtiene $\frac{1}{\lambda}\lambda\,\vec{a} = \frac{1}{\lambda}\vec{0} \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$ *¡contra la hipótesis de partida!*

4. $(-\lambda)\vec{a} = -\lambda\vec{a}$ para cualquier $\lambda \in$ **K** y para cualquier $\vec{a} \in V$.

Demostración

$\vec{0} = 0\vec{a} = (\lambda + (-\lambda))\vec{a} = \lambda\vec{a} + (-\lambda)\vec{a} \Rightarrow (-\lambda)\vec{a} = -\lambda\vec{a}$

5. $\lambda(-\vec{a}) = -\lambda\vec{a}$ para cualquier $\lambda \in$ **K** y para cualquier $\vec{a} \in V$.

Demostración

$\vec{0} = \lambda\vec{0} = \lambda(\vec{a} + (-\vec{a})) = \lambda\vec{a} + \lambda(-\vec{a}) \Rightarrow \lambda(-\vec{a}) = -\lambda\vec{a}$

6. $\lambda(\vec{a} - \vec{b}) = \lambda\vec{a} - \lambda\vec{b}$ para cualquier $\lambda \in$ **K** y para cualesquiera $\vec{a}, \vec{b} \in V$.

Demostración

$\lambda(\vec{a} - \vec{b}) = \lambda(\vec{a} + (-\vec{b})) = \lambda\vec{a} + \lambda(-\vec{b}) = \lambda\vec{a} - \lambda\vec{b}$

7. $(\lambda - \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} - \mu\vec{a}$ para cualesquiera $\lambda, \mu \in K$ y para cualquier $\vec{a} \in V$.

Demostración

$(\lambda - \mu)\vec{a} = (\lambda + (-\mu\vec{a})) = \lambda\vec{a} + (-\mu\vec{a}) = \lambda\vec{a} - \mu\vec{a}$

8. Si $\lambda\vec{a} = \mu\vec{a}$, siendo $\vec{a} \neq \vec{0} \Rightarrow \lambda = \mu$.

Demostración

Sea $\lambda\vec{a} = \mu\vec{a}$, sumando el opuesto de $\mu\vec{a}$, que es $-\mu\vec{a}$, a ambos miembros se obtiene $\lambda\vec{a} - \mu\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow (\lambda - \mu)\vec{a} = \vec{0}$, luego aplicando la propiedad 3 podemos afirmar que si $\vec{a} \neq \vec{0}$, entonces ha de ser $(\lambda\text{-}\mu)=0 \Rightarrow \boxed{\lambda = \mu}$

9. Si $\lambda\vec{a} = \lambda\vec{b}$, siendo $\lambda \neq 0 \Rightarrow \vec{a} = \vec{b}$.

Demostración

Sea $\lambda\vec{a} = \lambda\vec{b}$, sumando el opuesto de $\lambda\vec{b}$, que es $-\lambda\vec{b}$, a ambos miembros se obtiene $\lambda\vec{a} - \lambda\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{0}$, luego aplicando la propiedad 3 podemos afirmar que si $\lambda \neq \vec{0}$, entonces ha de ser $(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{b}}$

3. Subespacios vectoriales

Definición:

Sea(V,+,.) un **K**-espacio vectorial y F una parte no vacía de V, diremos que F es un ***subespacio vectorial*** de V si y solo si (F,+,.) en un **K**-espacio vectorial

Teorema: Caracterización de los subespacios vectoriales

Sea F una parte no vacía del **K**-espacio vectorial V. F es un subespacio vectorial de V, con las operaciones + y · inducidas por V, si y solo si se verifican las dos condiciones siguientes:

i) Para cualesquiera $\vec{a}, \vec{b} \in F$ su suma $\vec{a} + \vec{b} \in F$. Es decir, la operación interna en V es una operación interna en F.

ii) Para cualesquiera $\lambda \in K$, $\vec{a} \in F$ el producto $\lambda\vec{a} \in F$. Es decir, la operación externa en V es una operación interna en F.

Demostración

Si (F,+,·) es **K**-espacio vectorial se cumplen por definición de **K**-espacio vectorial las dos condiciones.

Recíprocamente suponiendo que se verifican las dos condiciones hemos de comprobar que se verifican los ocho axiomas de espacio vectorial. Ahora bien la operación interna $+$ en F es:

[A1]: Asociativa por ser $+$ asociativa en V.

[A2]: El elemento neutro $\vec{0} \in F$, basta tomar $\lambda = 0$ en la condición ii).

[A3]: El elemento opuesto de cualquier vector $\vec{x} \in F$ es el vector $-\vec{x} \in F$ pues basta tomar $\lambda = -1$ en la condición ii).

[A4]: Conmutativa por ser $+$ conmutativa en V.

Luego (F,+,·) es un grupo conmutativo. Los otros 4 axiomas se verifican de manera inmediata por ser F una parte de V, y V un **K**-espacio vectorial.

Observación

- Las 2 condiciones anteriores equivalen a la siguiente:

Sea F una parte no vacía del **K**-espacio vectorial V. F es un subespacio vectorial de V con las operaciones + y · inducidas por V si y solo si se verifica:

$\lambda\vec{\mathbf{a}}+\mu\vec{\mathbf{b}}\in\mathbf{F}$ **para cualesquiera escalares** $\lambda,\mu\in$ **K y cualesquiera vectores** $\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}}\in\mathbf{F}$ **.**

☞Los conjuntos $\{\vec{0}\}$ y V cumplen siempre las condiciones de subespacio vectorial del **K**-espacio vectorial V y les denominaremos **subespacios impropios** de V.

Algunos ejemplos de subespacios vectoriales

- El conjunto de n-uplas de $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ que constituye la solución del sistema homogéneo definido por toda ecuación matricial de la forma AX=O , donde $A\in M_{m\times n}$ (**R**), es un subespacio del **R**-espacio vectorial $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$.

  La comprobación es inmediata si consideramos dos soluciones S_1.y S_2 del sistema homogéneo AX=0, es decir, $AS_1=AS_2=0$. Entonces

  $A(\lambda S_1+\mu S_2)=A(\lambda S_1)+A(\mu S_2)=A\lambda S_1+A\mu S_2=\lambda(AS_1)+\mu(AS_2)=\lambda 0+\mu 0=0$

- El subconjunto $\{(x,y,0)\text{siendo } x,y\in\mathbf{R}\}\subset\mathbf{R}^{\mathbf{3}}$ es un subespacio vectorial del **R**-espacio vectorial $\mathbf{R}^{\mathbf{3}}$. La comprobación se propone como ejercicio.

- Sin embargo, $\mathbf{R}^{\mathbf{2}}=\{(x,y)\text{siendo } x,y\in\mathbf{R}\}$ no es un subespacio vectorial del espacio vectorial $\mathbf{R}^{\mathbf{3}}$, puesto que $\mathbf{R}^{\mathbf{2}}$ **no** es un subconjunto de $\mathbf{R}^{\mathbf{3}}$.

- ¿Es H= $\{(x,3)\text{siendo } x\in\mathbf{R}\}$ un subespacio vectorial del espacio vectorial $\mathbf{R}^{\mathbf{2}}$?

No puesto que no contiene al elemento neutro de la suma, vector nulo $\vec{0}=(0,0)\notin H$.

4. Generación de Subespacios vectoriales:

A partir de ahora cuando escribamos V nos estaremos refiriendo al **K**-espacio vectorial V.

Nos planteamos el problema de poder construir subespacios vectoriales de un espacio vectorial dado V a partir de un vector o varios vectores estableciendo las condiciones necesarias y las relaciones existentes entre dichos vectores.

Definición:

Sean $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n$ vectores de V. Llamaremos ***combinación lineal*** *d*e los vectores $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n \in V$ a todo vector $\vec{v} \in V$ de la forma $\vec{v} = \lambda_1\vec{a}_1+\ldots+\lambda_n\vec{a}_n$, siendo $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in K$.

Proposición

Sean $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n$ vectores de V. El conjunto formado por todas las combinaciones lineales posibles de los elementos $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n$ constituye un subespacio vectorial del espacio vectorial V.

En efecto: si observamos la caracterización de los subespacios vectoriales obliga a que cualquier combinación lineal de elementos del subespacio sea del subespacio y en este conjunto los elementos son combinaciones lineales de los vectores $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n$.

A dicho subespacio se le denota:

$$C(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n) = L(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n) =< \vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n >$$
$$= \{\vec{v} \in V / \vec{v} = \lambda_1\vec{a}_1 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n, \quad \lambda_i \in K, \quad i = 1,\ldots,n\}$$

En cuyo caso diremos que $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n$ es un *sistema generador* del subespacio vectorial $< \vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n >$. Es interesante observar como, por ejemplo, los tres colores primarios (rojo, amarillo y azul) permiten, mediante combinación de ellos, obtener los restantes colores.

Ejemplos:

- El vector (2,7,5) $\in \mathbf{R}^3$ verifica (2,7,5)=2(1,2,1)+3(0,1,1).

Luego *es combinación lineal* de los vectores (1,2,1),(0,1,1) $\in \mathbf{R}^3$

- ¿Puede expresarse el vector (1,4,-2)$\in \mathbf{R}^3$ como combinación lineal de los vectores (1,1,1) y (1,0,2) $\in \mathbf{R}^3$?

Se nos pide estudiar si existe solución para la ecuación vectorial:

$$\lambda(1,1,1)+\mu(1,0,2)=(1,4,-2) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda+\mu=1 \\ \lambda=4 \\ \lambda+2\mu=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4+\mu=1 \\ \lambda=4 \\ \lambda+2\mu=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu=-3 \\ \lambda=4 \\ 4+2(-3)=-2 \end{cases}.$$

Vemos que, en este caso, el sistema tiene *solución única* λ=4 y μ=-3, luego podemos expresar: $(1,4,-2) = 4(1,1,1) - 3(1,0,2)$

- ¿Puede expresarse el vector $(5,4)\in\mathbf{R}^2$ como combinación lineal de los vectores (2,1), (1,0) y (1,2) $\in\mathbf{R}^2$?

Se nos pide estudiar si existe solución para la ecuación vectorial:

$$\lambda(2,1)+\mu(1,0)+\gamma(1,2)=(5,4)\Leftrightarrow\begin{cases}2\lambda+\mu+\gamma=5\\ \lambda+2\gamma=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mu=5-2\lambda-\gamma\\ \lambda=4-2\gamma\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mu=5-2(4-2\gamma)-\gamma\\ \lambda=4-2\gamma\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\mu=-3+3\gamma\\ \lambda=4-2\gamma\end{cases}.$$

Vemos que, en esta ocasión, el sistema también tiene solución pero *no es única*. En efecto:

Si tomamos $\gamma=2\Rightarrow\begin{cases}\mu=3\\ \lambda=0\end{cases}$, luego podemos expresar:

$$(5,4)=0(2,1)+3(1,0)+2(1,2)$$

Pero si tomamos $\gamma=3\Rightarrow\begin{cases}\mu=6\\ \lambda=-2\end{cases}$, luego también podemos expresar:

$$(5,4)=-2(2,1)+6(1,0)+3(1,2)$$

Tenemos, por tanto, tantas combinaciones lineales de los vectores dados que proporcionan (5,4) como números reales ($\gamma\in\mathbf{R}$).

- ¿Puede expresarse el vector $(1,0,3)\in\mathbf{R}^3$ como combinación lineal de los vectores (1,1,0) y (1,0,1) $\in\mathbf{R}^3$?

Se nos pide estudiar si existe solución para la ecuación vectorial:

$$\lambda(1,1,0)+\mu(1,0,1)=(1,0,3)\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda+\mu=1\\ \lambda=0\\ \mu=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0+3=1\\ \lambda=0\\ \mu=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\text{¡¡}\mathbf{3=1}\text{!!}\\ \lambda=0\\ \mu=3\end{cases}.$$

Vemos que, en este caso, el sistema *no tiene solución*, luego el vector (1,0,3) ***no es*** combinación lineal de los vectores (1,1,0) y (1,0,1).

- Se considera el espacio vectorial P(x) de los polinomios de una variable de grado menor o igual a n, con coeficientes reales. ¿Se puede expresar el polinomio $5x^2-7x$ como combinación lineal de los polinomios $1+x^2$, $1-x$, $2+x$?

Planteamos la ecuación vectorial $5x^2 - 7x = \lambda(1+x^2) + \mu(1-x) + \gamma(2+x)$ y resulta $5x^2 - 7x = \lambda x^2 + (-\mu+\gamma)x + \lambda + \mu + 2\gamma$ igualando coeficientes:

$$\left.\begin{array}{r} 5=\lambda \\ -7=-\mu+\gamma \\ 0=\lambda+\mu+2\gamma \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \lambda=5 \\ \mu=3 \\ \gamma=-4 \end{array}$$

. Existe solución, la respuesta es sí, se puede expresar como combinación lineal.

- Expresar $\vec{v}=(1,-1,x)$ como perteneciente al subespacio vectorial $L\left(\left\{\vec{a},\vec{b}\right\}\right)$ siendo $\vec{a}=(1,0,2)$ y $\vec{b}=(1,1,3)$.

Expresamos $\vec{v}=(1,-1,x)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$

$$\vec{v}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=\lambda(1,0,2)+\mu(1,1,3) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 1=\lambda+\mu \\ -1=\mu \\ x=2\lambda+3\mu \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \lambda=2 \\ \mu=-1 \\ x=1 \end{array}$$

Por tanto, $\vec{v}=2\vec{a}-\vec{b}$.

5. Dependencia e independencia lineal.

Definición:

Sean $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n$ vectores de V. Diremos que los vectores $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n \in V$ son ***linealmente dependientes***, cuando existan los elementos $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in K$ no todos nulos, tales que $\vec{0}=\lambda_1\vec{a}_1+\ldots+\lambda_n\vec{a}_n$. También se dice que constituyen un sistema ***ligado***.

Ejemplo:

- El sistema de vectores $\{(2,-4),(-3,6)\}$ es ligado

Puesto que $\vec{0}=\lambda_1(2,-4)+\lambda_2(-3,6)$ admite otras soluciones además de la trivial, en particular $\vec{0}=(0,0)=3(2,-4)+2(-3,6)$.

Definición:

Sean $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n$ vectores de V. Diremos que los vectores $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n \in V$ son ***linealmente independientes***, cuando no sean linealmente dependientes, es decir, cuando si $\vec{0}=\lambda_1\vec{a}_1+\ldots+\lambda_n\vec{a}_n$ .se deduce obligatoriamente que $\lambda_i=0, \forall i=1,\ldots,n$. También se dice que constituyen un sistema ***libre***.

Ejemplo:

- El sistema de vectores $\{(1,0),(1,-1)\}$ es libre.

Puesto que $\vec{0}=\lambda_1(1,0)+\lambda_2(1,-1)$ en solo admite la solución trivial $\lambda_1=\lambda_2=0$.

Proposición:

Los vectores $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n$ son linealmente dependientes si y solo si uno de ellos es combinación lineal de los restantes.

Demostración:

Consideremos que existe un vector que es combinación lineal de los restantes. Puede ser el primero sin perder generalidad,

$$\exists \vec{a}_1 \text{ tal que } \vec{a}_1=\lambda_2\vec{a}_2+\ldots+\lambda_n\vec{a}_n, \text{ siendo } \lambda_2,\ldots,\lambda_n\in K$$

$$\Leftrightarrow \vec{0}=-\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\ldots+\lambda_n\vec{a}_n$$

obteniendo una combinación lineal de los vectores igualada al vector nulo con al menos un escalar, el primero -1, distinto de cero y por tanto los vectores $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n$ son linealmente dependientes.

Ahora supongamos que los vectores son linealmente dependientes luego, existe al menos un escalar distinto de cero tal que $\vec{0}=\lambda_1\vec{a}_1+\ldots+\lambda_n\vec{a}_n$,

supongamos que es $\lambda_1\neq 0$ se puede multiplicar por el inverso de λ_1 la ecuación vectorial

$$\vec{0}=\lambda_1\vec{a}_1+\ldots+\lambda_n\vec{a}_n$$

resultando

$$\vec{0}=\lambda_1^{-1}\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_1^{-1}\lambda_2\vec{a}_2+\ldots+\lambda_1^{-1}\lambda_n\vec{a}_n$$

y despejando

$$\vec{a}_1=-\lambda_1^{-1}\lambda_2\vec{a}_2-\ldots-\lambda_1^{-1}\lambda_n\vec{a}_n$$

se cumple que el vector $\vec{a}_1$ es combinación lineal de los restantes $\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$

¿El vector nulo que clase de sistema es?

Si consideramos un sistema formado por un vector $\{\vec{a}\}$ es evidente que forma un sistema libre, pero el sistema $\{\vec{0}\}$ es tal que, $\lambda\vec{0}=\vec{0}$ se cumple para cualquier valor de λ, $1.\vec{0}=\vec{0}$ luego es ligado. Todo subespacio vectorial es lógicamente un sistema ligado.

Ahora, si consideramos un sistema formado por dos vectores $\{\vec{a},\vec{b}\}$ es fácil observar si son linealmente dependientes o independientes, puesto que si uno debe ser combinación lineal del otro (en caso de ser el sistema ligado) necesariamente deben ser proporcionales; geométricamente significa que los vectores son de la misma dirección.

Ejemplo:

- El sistema de vectores $\{(2,-4),(-3,6)\}$ es ligado,

puesto que $(2,-4)=-\frac{2}{3}(-3,6)$

Ejemplo:

- El sistema de vectores $\{(1,0),(1,-1)\}$ es libre,

puesto que $(1,0)\neq\lambda(1,-1),\forall\lambda$

Proposición:

Sea $H=\{\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n\}$ un sistema libre entonces todo subconjunto de H es libre.

Demostración:

Por ser libre H no hay ningún vector que sea combinación lineal de los restantes y cualquier subconjunto de H cumple la misma condición.

Proposición:

Sea $H=\{\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n\}$ un sistema ligado entonces todo conjunto que contenga a H es ligado.

Demostración:

Por ser ligado H existe, al menos; un vector combinación lineal de los restantes y cualquier conjunto que contenga a H, mantiene la combinación lineal, en efecto,

si H es tal que $\vec{a}_1=\lambda_2\vec{a}_2+\dots+\lambda_n\vec{a}_n$ con $\{a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_m\}\supset H$

se tiene que $\vec{a}_1=\lambda_2\vec{a}_2+\dots+\lambda_n\vec{a}_n+0\vec{b}_1+\dots+0\vec{b}_m$.

Proposición:

Cualquier sistema de vectores que contenga al vector nulo es ligado.

Demostración:

Por la proposición anterior y teniendo en cuenta que el vector nulo constituye un sistema ligado.

Ejemplos:

- Estudiar la dependencia lineal de los siguientes vectores de espacio vectorial R^3 $\vec{v}_1 = (1,0,1); \vec{v}_2 = (0,2,2); \vec{v}_3 = (3,7,1)$.

Vamos a ver si la ecuación vectorial tiene soluciones distintas de la trivial: $\vec{0} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 \quad \Rightarrow (0,0,0) = \lambda_1(1,0,1) + \lambda_2(0,2,2) + \lambda_3(3,7,1)$ la ecuación es equivalente al sistema homogéneo $\left.\begin{array}{r} \lambda_1 + 3\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + 7\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ que es compatible determinado puesto que el rango de la matriz de los coeficientes es tres, el sistema sólo admite la solución trivial y los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ son linealmente independientes.

- Estudiar la dependencia lineal de los siguientes vectores de espacio vectorial $\mathbf{R}^3$ $\vec{u}_1 = (2,3,1); \vec{u}_2 = (1,0,1); \vec{u}_3 = (0,3,-1)$.

Vamos a ver si la ecuación vectorial tiene soluciones distintas de la trivial: $\vec{0} = \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \lambda_3\vec{u}_3 \quad \Rightarrow (0,0,0) = \lambda_1(2,3,1) + \lambda_2(1,0,1) + \lambda_3(0,3,-1)$ la ecuación es equivalente al sistema homogéneo

$$\left.\begin{array}{r} 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que es compatible indeterminado puesto que el rango de la matriz de los coeficientes es dos menor que el número de incógnitas, el sistema admite soluciones distintas de la trivial; existen dos vectores linealmente independientes y el otro es combinación lineal de ellos ($\vec{u}_1 = 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3$). Por tanto, el sistema es ligado.

Definición:

El ***rango*** de un sistema de vectores es igual al número máximo de vectores linealmente independientes que contiene.

Ejemplos:

En los ejemplos anteriores el rango de $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ es tres y son los tres vectores linealmente independientes y el rango de $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es dos, siendo dos el mayor número de vectores linealmente independientes.

6. Espacios vectoriales de tipo finito

Definición:

Sea $H = \{\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n\}$ un subconjunto de V. Diremos que H es un ***sistema generador*** de V si para todo vector $\vec{v} \in V$ existen $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ tal que $\vec{v} = \lambda_1\vec{a}_1 + ... + \lambda_n\vec{a}_n$.

Ejemplo:

- El sistema $H = \{(1,0),(1,1),(0,1)\}$ es generador del espacio vectorial R^2.

En efecto: cualquier vector de R^2 se puede escribir $\vec{x} = (x_1, x_2) = \lambda_1(1,0) + \lambda_2(1,1) + \lambda_3(0,1)$ puesto que una solución puede ser $\lambda_1 = x_1 - x_2; \lambda_2 = x_2; \lambda_3 = 0$.

Definición:

Una *base* de un espacio vectorial V es un subconjunto de V que sea sistema generador y libre.

Ejemplos:

- El sistema $B = \{(1,0),(1,1)\}$ es una base del espacio vectorial R^2.

En efecto: B es libre pues son dos vectores linealmente independientes, al no ser proporcionales y cualquier vector de R^2 es combinación lineal de los vectores de B, $\vec{x} = (x_1, x_2) = \lambda(1,0) + \mu(1,1)$ puesto que $\lambda = x_1 - x_2; \mu = x_2$.

También se puede comprobar usando el rango: $r\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$ luego B es libre y $r\begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \end{pmatrix} = 2$ significa que el vector $\vec{x} = (x_1, x_2)$ es combinación lineal de los vectores de B.

- Los vectores $\{\vec{v}_1 = (1,0,1); \vec{v}_2 = (0,2,2); \vec{v}_3 = (3,7,1); \vec{v}_4 = (0,1,0)\}$ de espacio vectorial R^3 son linealmente dependientes, luego no puede formar una base de R^3.

Los vectores $\{\vec{v}_1 = (1,0,1); \vec{v}_2 = (0,2,2)\}$ de espacio vectorial R^3 son linealmente independientes, pero cualquier vector de R^3 es combinación lineal de los vectores de B si se cumple $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) = \lambda(1,0,1) + \mu(0,2,2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = 2\mu \\ x_3 = \lambda + 2\mu \end{cases}$ puesto que $\lambda = x_1; \mu/2 = x_2$ resulta la condición $x_3 = x_1 + x_2$ que imposibilita a B como sistema generador de R^3 luego no puede formar una base de R^3.

Ejemplo:

- Estudiar si B=$\{(1,1,1),(1,2,3),(1,0,-1)\}$ es base de $\mathbf{R}^3$.

Estudiamos $r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ =2<nº de vectores de B, luego B no es libre y, por tanto no puede ser base de $\mathbf{R}^3$.

Proposición:

La expresión de cualquier vector de V respecto a una base de V es única.

Demostración:

Sea $B = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ una base del espacio vectorial V. Por ser B base es libre y sistema generador, por tanto, $\forall \vec{v} \in V$ existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ tales que $\vec{v} = \lambda_1\vec{e}_1 + \ldots + \lambda_n\vec{e}_n$. Ahora si los escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, no son únicos existirán otros $\mu_1, \ldots, \mu_n \in K$ tales que $\vec{v} = \mu_1\vec{e}_1 + \ldots + \mu_n\vec{e}_n$ restando las dos expresiones del vector $\vec{v}$ queda $\vec{v} - \vec{v} = \lambda_1\vec{e}_1 + \ldots + \lambda_n\vec{e}_n - \mu_1\vec{e}_1 - \ldots - \mu_n\vec{e}_n$ $\vec{0} = (\lambda_1 - \mu_1)\vec{e}_1 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n)\vec{e}_n$. Utilizando que los vectores de B son linealmente independientes resulta: $0 = \lambda_1 - \mu_1 = \ldots = \lambda_n - \mu_n$ $\Rightarrow \lambda_1 = \mu_1; \ldots; \lambda_n = \mu_n$.

Definición:

Los escalares $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ tales que $\vec{v} = \lambda_1\vec{e}_1 + \ldots + \lambda_n\vec{e}_n$ son las ***coordenadas del vector*** $\vec{v}$ ***respecto de la base*** $B = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ del espacio vectorial V.

En consecuencia, fijada una base cualquiera B=$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ de V podemos establecer la siguiente aplicación:

$$V \longrightarrow K^n$$
$$\vec{x} \;\to\; (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \text{ tal que } \vec{x} = \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{u}_n$$

Esta aplicación es obviamente **biyectiva** y además verifica:

$$\vec{0} \longrightarrow (0,0,\cdots,0)$$
$$\vec{x}+\vec{y} \longrightarrow (\lambda_1+\mu_1,\lambda_2+\mu_2,\cdots,\lambda_n+\mu_n)=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)+(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$$
$$\alpha\,\vec{x} \longrightarrow (\alpha\lambda_1,\alpha\lambda_2,\cdots,\alpha\lambda_n)=\alpha(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

siendo $(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ y $(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$ las coordenadas respectivas de $\vec{x}$ e $\vec{y}$ respecto de B. Diremos que los **K**-espacios vectoriales V y $\mathbf{K}^n$ son ***isomorfos***.

Ejemplo:

Sabiendo que B=$\{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ es una base de $\mathbf{R}^3$, hallar las coordenadas del vector (3,1,0) respecto de B.

Buscamos los tres escalares que son la *solución única* de la ecuación vectorial:

(3,1,0)=x(1,1,1)+y(0,1,1)+z(0,0,1)

La anterior ecuación define el sistema $\begin{cases} 3=x \\ 1=x+y \\ 0=x+y+z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1-x=1-3=-2 \\ z=-x-y=-3+2=-1 \end{cases}$.

Luego **(3,-2,-1) son las coordenadas del vector (3,1,0)respecto de B**, es decir:

$$\boxed{(3,1,0)=3(1,1,1)-2(0,1,1)-1(0,0,1)}$$

Observación: Para identificar al vector $\vec{v}$ podemos utilizar la expresión analítica $\vec{v}=\lambda_1\vec{e}_1+...+\lambda_n\vec{e}_n$, o sus coordenadas $(\lambda_1,...,\lambda_n)$ respecto de la base B, pudiendo escribir dichas coordenadas mediante la matriz columna $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_n \end{pmatrix}$. Por ejemplo: si escribimos (1,0,0) respecto de la base $B=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ del espacio vectorial R^3 estamos indicando al vector $\vec{e}_1$, puesto que: $\vec{e}_1=1\vec{e}_1+0\vec{e}_2+0\vec{e}_3=(1,0,0)$, siendo los restantes vectores: $\vec{e}_2=0\vec{e}_1+1\vec{e}_2+0\vec{e}_3=(0,1,0)$ y $\vec{e}_3=0\vec{e}_1+0\vec{e}_2+1\vec{e}_3=(0,0,1)$. En general (1,0,...,0) indica al primer vector de la base; (0,1,0,...,0) indica al segundo vector de la base y así sucesivamente hasta el último vector (0,...,0,1) del espacio vectorial V.

Definición:

Llamaremos ***base canónica***, $B_{c,}$ a la base:

$B_c=\{e_1=(1,0,\ldots,0),e_2=(0,1,0,\ldots,0),\ldots,e_n=(0,0,\ldots,0,1),\}$ del espacio vectorial V.

Definición:

Los vectores $(\lambda_1\vec{e}_1,....,\lambda_n\vec{e}_n)$ tales que $\vec{v}=\lambda_1\vec{e}_1+...+\lambda_n\vec{e}_n$ son las ***componentes del vector*** $\vec{v}$ ***respecto de la base*** $B=\{\vec{e}_1,...,\vec{e}_n\}$ del espacio vectorial V.

Proposición:

Todo espacio vectorial V distinto del $\{\vec{0}\}$ tiene al menos una base.

Demostración:

Por ser V un espacio vectorial de tipo finito, admite un sistema finito de generadores $G = \{\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n\}$.

Si G es libre, ya es base de V. Si $\{\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n\}$ no es libre, existe algún vector $\vec{a}_i$ que es combinación lineal de los restantes, supongamos que es $\vec{a}_n$,

El sistema $\{\vec{a}_1, ..., \vec{a}_{n-1}\}$ sigue siendo generador de V. si también es libre, ya es base. En caso contrario, reiteramos el proceso, que si no es libre resulta ligado y uno de los vectores, por ejemplo, $\vec{a}_{n-1}$ es combinación lineal de los restantes; el proceso es finito por ser G finito hasta obtener un sistema y generador libre y por consiguiente base o únicamente queda $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$ y necesariamente base de V (V distinto del $\{\vec{0}\}$).

Corolario

Todo sistema generador contiene una base.

Proposición:

Si V es un espacio vectorial generado por n vectores, entonces cualquier sistema libre de V tiene como mucho n vectores.

Demostración:

Sea $\{\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n\}$ un sistema generador del espacio vectorial V. Si $\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_s\}$ es un sistema libre de V. El conjunto de vectores $\{\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n, \vec{b}_1\}$ es ligado (ya que $\vec{b}_1 \in V$ y $\{\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n\}$ es sistema generador de V) y la combinación lineal $\lambda_1\vec{a}_1 + ... + \lambda_n\vec{a}_n + \mu_1\vec{b}_1 = \vec{0}$ da lugar a la existencia de algún $\lambda_i \neq 0$ (no puede ser $\mu_1\vec{b}_1 = \vec{0}$ con $\mu_1 \neq 0$), por consiguiente, podemos quitar un vector $\vec{a}_i$ (por ejemplo a_1) y queda $\{\vec{a}_2, ..., \vec{a}_n, \vec{b}_1\}$ como sistema generador del espacio vectorial V. Repitiendo el proceso resulta $\{\vec{a}_2, ..., \vec{a}_n, \vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ que es ligado, obteniéndose el sistema generador $\{\vec{a}_3, ..., \vec{a}_n, \vec{b}_1, \vec{b}_2\}$.

Así sucesivamente, llegaríamos a:

- Si n<s $\Rightarrow \{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_n, \vec{b}_{n+1}, ..., \vec{b}_s\}$ libre y $\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_n\}$ sería un sistema generador lo cual es absurdo.

- Si n=s $\Rightarrow \left\{\vec{b}_1,\dots,\vec{b}_n\right\}$ es libre y sistema generador, por tanto base de V.
- Si s<n $\Rightarrow \left\{\vec{b}_1,\dots,\vec{b}_s,\vec{a}_{s+1},\dots,\vec{a}_n\right\}$ sistema generador del espacio vectorial V.

Solamente es posible que $s \le n$, es decir todo sistema libre tiene como mucho n vectores linealmente independientes.

Teorema de la base

Todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo número de vectores.

Demostración:

Sean $B=\left\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n\right\}$ y $B'=\left\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_m\right\}$ dos base de un mismo espacio vectorial V.

Por ser B y B' bases son sistemas libres y sistemas generadores de V, aplicando la proposición anterior:

B es sistema generador y B' es sistema libre $\Rightarrow m \le n$.
B' es sistema generador y B es sistema libre $\Rightarrow n \le m$.

Como $m \le n$ y $n \le m \Rightarrow n = m$.

Definición:

El número de elementos de cualquier base de un espacio vectorial se denomina ***dimensión*** del espacio vectorial. Escribiremos dim(V).

Si B es una base de V, se tiene que dim(V) = cardinal de B.

Ejemplos:

En los espacios vectoriales $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$,...,$\mathbf{R}^n$, $P_n(x)$ y M_{mxn} las dimensiones son: 1, 2, 3,..., n, n+1, m.n respectivamente.

La dimensión del subespacio impropio $\left\{\vec{0}\right\}$, por convenio, es cero y es el único espacio vectorial que no tiene base. Si F es un subespacio vectorial del espacio vectorial V, entonces se cumple que:
$\dim(F) \le \dim(V)$.

Proposición:

Sea H un sistema de vectores del espacio vectorial V, se cumple que r(H)=dim<H>.

Teorema

Si V un espacio vectorial de dimensión n y B conjunto de n vectores de V, entonces, las afirmaciones siguientes son equivalentes:

1. B es una base de V.
2. B es un sistema generador de V.
3. B es un sistema libre.

Demostración:

Por definición de base si B es una base de V es un sistema generador de V.

Cuando B es sistema generador de V: r(B)=dim<B>=dim(V)=n y por tanto B es libre.

Sea B=$\{\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n\}$ un sistema libre de n vectores del espacio vectorial V, falta demostrar que H es un sistema generador de V.

Sea $\vec{x}\in V$ entonces $\{\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n,\vec{x}\}$ es ligado por ser n el número máximo de vectores linealmente independientes y por tanto $\lambda_1\vec{a}_1+\dots+\lambda_n\vec{a}_n+\lambda\vec{x}=\vec{0}$ con algún $\lambda_i\neq 0$; no puede ser $\lambda=0$ puesto que sino B no sería libre y por tanto $\lambda\neq 0$ con lo cual $-\lambda^{-1}\lambda_1\vec{a}_1-\dots-\lambda^{-1}\lambda_n\vec{a}_n=\vec{x}$ siendo B un sistema generador de V y al ser un sistema libre resulta una base de V.

Teorema de la base incompleta

Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea $\{\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_s\}$ con s <n un sistema libre. Siempre pueden encontrarse n-s vectores de V, $\{\vec{a}_{s+1},\dots,\vec{a}_n\}$ tales que el conjunto $\{\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_s,\vec{a}_{s+1},\dots,\vec{a}_n\}$ sea una base de V.

Demostración:

Sea $\{\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_s\}$ un sistema libre de V, luego existirá al menos un elemento $\vec{a}_{s+1}$ de V tal que $\{\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_s,\vec{a}_{s+1}\}$ es un sistema libre (si no fuera así sería s=n).

Si $\{\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_s,\vec{a}_{s+1}\}$ es un sistema libre de V, luego existirá al menos un elemento $\vec{a}_{s+2}$ de V tal que $\{\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_s,\vec{a}_{s+1},\vec{a}_{s+2}\}$ es un sistema libre (si no fuera así $\{\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_s,\vec{a}_{s+1}\}$ es una base y s+1=n).

Es evidente que el proceso anterior se acaba después de n-s veces, siendo $\{\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_s,\vec{a}_{s+1},\dots,\vec{a}_n\}$ una base de V.

Corolario (prolongación de la base)

Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea F un subespacio vectorial de V siendo $\{\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_s\}$ una base de F, se puede encontrar una base de V que contiene a los vectores $\{\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_s\}$.

Proposición:

El conjunto de todas las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas de m ecuaciones y n incógnitas es un subespacio vectorial del espacio vectorial K^n, siendo la dimensión n menos el rango de la matriz de los coeficientes.

Demostración:

Sea el sistema homogéneo $\begin{pmatrix} a_{11} & .. & .. & a_{1n} \\ .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & .. & .. & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ .. \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ .. \\ .. \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX = 0$. Si r(A)=r queda $\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+\ldots+a_{1r}x_r = -a_{1r+1}x_{r+1}-\ldots-a_{1n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1+\ldots+a_{rr}x_r = -a_{rr+1}x_{r+1}-\ldots-a_{m}x_n \end{array}\right\}$ quedando r ecuaciones y r incógnitas linealmente independientes y por tanto n-r parámetros que indican la dimensión del subespacio vectorial.

Ecuaciones de un subespacio vectorial

Un subespacio vectorial F de un espacio vectorial V queda identificado conocida una base de F o unas ecuaciones paramétricas o por sus ecuaciones cartesianas. Siendo posible pasar de unas ecuaciones a otras, obtener una base y determinar su dimensión.

Ejercicio:

Sea el subespacio vectorial F generado por los siguientes vectores de espacio vectorial R^3: $\vec{u}_1 = (2,3,1); \vec{u}_2 = (1,0,1); \vec{u}_3 = (0,3,-1)$. Se pide:

a) Dimensión y una base F.

b) Unas ecuaciones paramétricas de F.

c) Ecuaciones cartesianas o implícitas de F.

d) A partir de las ecuaciones cartesianas otras ecuaciones paramétricas distintas del apartado anterior.

e) ¿El vector (1,0,0) pertenece o no a F?

f) Una base del espacio vectorial R^3 que contenga a los vectores de una base de F

Solución:

a) Se tiene que $H=\{\vec{u}_1;\vec{u}_2;\vec{u}_3\}$ es ligado y por tanto $F=<H>=<\vec{u}_2;\vec{u}_3>$. Tenemos que $\{\vec{u}_2;\vec{u}_3\}$ es una base del espacio vectorial F y su dimensión es 2, el cardinal de cualquier base.

b) Veamos, unas ecuaciones paramétricas de V. Como $\forall\vec{x}\in F\subset V$ se tiene que $\vec{x}=\lambda\vec{u}_2+\mu\vec{u}_3 \Leftrightarrow (x_1,x_2,x_3)=\lambda(1,0,1)+\mu(0,3,-1) \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x_1=\lambda \\ x_2=3\mu \\ x_3=\lambda-\mu \end{array}\right\}$, o bien,

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ **Ecuaciones paramétricas** del subespacio vectorial F, pues dando valores a los parámetros λ,μ se obtiene las coordenadas de los vectores de F, siendo la dimensión de F el número de parámetros linealmente independientes que tienen sus ecuaciones paramétricas.

c) Eliminando los parámetros obtenemos las ecuaciones cartesianas o implícitas de F.

$r(H)=r\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=2$ y por el teorema de Rouche-Fröbenius $r\begin{pmatrix} x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 3 \\ x_3 & 1 & -1 \end{pmatrix}=2$

luego $\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 3 \\ x_3 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -3x_1+x_2+3x_3=0$ es la **ecuación cartesiana o implícita** que identifica a F; las coordenadas de cualquier vector de F cumplen la ecuación anterior. Podemos observar que la dim F=dim V- número de ecuaciones linealmente independientes. Cuando F=V no hay ecuaciones cartesianas.

d) Se puede pasar de las ecuaciones cartesianas a las ecuaciones paramétricas, simplemente resolviendo el sistema de ecuaciones. En nuestro caso, con una sola ecuación $-3x_1+x_2+3x_3=0$ se despeja una incógnita $x_2=3x_1-3x_3$ quedando en función de las otras dos $\left\{\begin{array}{r} x_1=\alpha \\ x_2=3\alpha-3\beta \\ x_3=\beta \end{array}\right.$ otras ecuaciones paramétricas de F.

e) Las ecuaciones permiten saber que vectores son del subespacio vectorial F. Sustituyendo las coordenadas en las ecuaciones -3.1+0+3.0=0, evidentemente no se cumple, por tanto la respuesta es que $(1,0,0)\notin F$.

f) Ampliamos la base de F del apartado a) $\{\vec{u}_2;\vec{u}_3\}$ con el vector del apartado e) puesto que no es de F y conseguimos $\{\vec{u}_2;\vec{u}_3;(1,0,0)\}$ una base del espacio vectorial R^3.

7. Cambio de base en un espacio vectorial

Sea V un **K**-e.v. de dim n y $B=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\ldots,\vec{u}_n\}$, $B'=\{\vec{u}'_1,\vec{u}'_2,\ldots,\vec{u}'_n\}$ dos bases de V tales que: $\begin{cases}\vec{u}_1 = a_{11}\vec{u}'_1+a_{12}\vec{u}'_2+\cdots+a_{1n}\vec{u}'_n\\ \vec{u}_2 = a_{21}\vec{u}'_1+a_{22}\vec{u}'_2+\cdots+a_{2n}\vec{u}'_n\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \vec{u}_n = a_{n1}\vec{u}'_1+a_{n2}\vec{u}'_2+\cdots+a_{nn}\vec{u}'_n\end{cases}$ Por ser $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\ldots,\vec{u}_n\in V$, pueden expresarse en función de los vectores de la base B' y conocidas $(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$ las coordenadas de $\vec{u}_i$, $i=1,\cdots,n$, respecto de B'.

Todo vector $\vec{v}\in V$ se puede expresar en función, tanto de los vectores de B como de B'. Designemos por $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ y $(x'_1,x'_2,\cdots,x'_n)$ las coordenadas del vector $\vec{v}$ respecto de las bases B y B' respectivamente, entonces:

$$\vec{v} = \vec{x}_1\vec{u}_1+\vec{x}_2\vec{u}_2+\cdots+x_n\vec{u}_n = \vec{x}'_1\,\vec{u}'_1+\vec{x}'_2\,\vec{u}'_2+\cdots+x'_n\,\vec{u}'_n$$

Se trata de estudiar la relación que existe entre las coordenadas $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ y $(x'_1,x'_2,\cdots,x'_n)$ para ello se sustituyen en la ecuación anterior las expresiones analíticas de los vectores de la base B y obtenemos:

$x_1(a_{11}\vec{u}'_1+a_{12}\vec{u}'_2+\cdots+a_{1n}\vec{u}'_n)+x_2(a_{21}\vec{u}'_1+a_{22}\vec{u}'_2+\cdots+a_{2n}\vec{u}'_n)+\cdots+$
$x_n(a_{n1}\vec{u}'_1+a_{n2}\vec{u}'_2+\cdots+a_{nn}\vec{u}'_n)=\vec{x}'_1\,\vec{u}'_1+\vec{x}'_2\,\vec{u}'_2+\cdots+x'_n\,\vec{u}'_n$ Operando en el primer miembro resulta:

$(a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{n1}x_n)\vec{u}'_1+(a_{12}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{n2}x_n)\vec{u}'_2+\cdots+$

$(a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\cdots+a_{nn}x_n)\vec{u}'_n=\vec{x}'_1\,\vec{u}'_1+\vec{x}'_2\,\vec{u}'_2+\cdots+x'_n\,\vec{u}'_n$ Identificando los coeficientes de los vectores $\vec{u}'_i$, para cada $i=1,\cdots,n$, y puesto que la expresión de un vector respecto de una misma base es única, por consiguiente:

$$\begin{cases}x'_1 = a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{n1}x_n\\ x'_2 = a_{12}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{n2}x_n\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x'_n = a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\cdots+a_{nn}x_n\end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones se denomina ***ecuaciones del cambio de la base B a la base B'.***

Escrito en forma matricial

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Si llamamos $\vec{X}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$, $\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, P= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, abreviadamente la ecuación matricial anterior se escribe $\boxed{\vec{X}' = P\vec{X}}$, donde *P es la matriz que define el cambio de la base B a la base B'*. Diremos que P es la matriz de paso de B a B'.

Observaciones:

1. P tiene por columnas las coordenadas de los vectores de la base B respecto de la base B'

2. rango(P)=n, pues sus columnas son las coordenadas de los vectores de la base B, luego **P** es una matriz regular (inversible) y por tanto $|\mathbf{P}| \neq \mathbf{0}$.

3. Si **P** es la matriz de paso de B a B', entonces $\mathbf{P}^{-1}$ es la matriz de paso de B' a B.

Ejemplo:

Sea B= $\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ una base de $\mathbf{R}^3$, hallar las ecuaciones de cambio de la base B a la base canónica B_C= $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ y viceversa.

a) Designemos por (x,y,z) y (x_c,y_c,z_c) las coordenadas, respectivas, de un vector cualquiera de $\mathbf{R}^3$ respecto de B y B_C. Como las coordenadas de los vectores de la base B vienen en función de los vectores de la base canónica B_C, escribiremos directamente *la **ecuación matricial del cambio de la base B a la base canónica B_C:***

$$\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \; ; \; \vec{X}_C = P\vec{X}$$

La matriz P= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ tiene por columnas las coordenadas de los vectores de la base B respecto de la base canónica B_C.

b) La ecuación matricial del cambio de la base B_C a la base canónica B se obtiene

despejando en la ecuación anterior: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} \qquad \vec{X} = P^{-1}\ \vec{X}_C$$

La matriz $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ tiene por columnas las coordenadas de los vectores de la base B_C respecto de la base B.

Ejemplo:

Sean $B=\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ y $B'=\{\vec{u}'_1, \vec{u}'_2, \vec{u}'_3\}$ dos bases de $\mathbf{R}^3$, siendo:

$$\vec{u}_1 = (2,1,0),\ \vec{u}_2 = (-1,0,1),\ \vec{u}_3 = (0,1,-2);\ \vec{u}'_1 = (0,1,1),\ \vec{u}'_2 = (1,0,0),\ \vec{u}'_3 = (2,0,1)$$

Se piden las ecuaciones de cambio de la base B a la base B’ y viceversa.
Realizaremos el ejercicio por dos procedimientos diferentes:

1$^{\text{er}}$ Procedimiento

Dado que los vectores de las bases B y B’ están en función de la base canónica B_C, podemos escribir directamente las ecuaciones matriciales de cambio de la base B a la base B_C, y de la base B’ a la base B_C.

Designemos por (x,y,z) , (x’,y’,z’) y (x_c,y_c,z_c) las coordenadas, respectivas, de un vector cualquiera de $\mathbf{R}^3$ respecto de B, B’ y B_C . Así tenemos:

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$ *Ecuación matricial del cambio de B en B_C*

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$ *Ecuación matricial del cambio de B’ en B_C*

Igualando ambas expresiones: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

Despejando sucesivamente se obtienen las ecuaciones pedidas:

a) Ecuación matricial del cambio de B en B’

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 6 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

b) La ecuación matricial del cambio de B’ en B

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}$$

2º Procedimiento

a) Para hallar la **ecuación matricial del cambio de base de B en B’** obtenemos, previamente, las coordenadas de los vectores de la base B en función de los vectores de la base B’.

$$(2,1,0) = \lambda(0,1,1) + \mu(1,0,0) + \delta(2,0,1) \Rightarrow \begin{cases} 2 = \mu + 2\delta \\ 1 = \lambda \\ 0 = \lambda + \delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = 2 - 2\delta = 4 \\ \lambda = 1 \\ \delta = -\lambda = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\vec{u}_1 = (1,4,-1)_{B'}$$

$$(-1,0,1) = \lambda(0,1,1) + \mu(1,0,0) + \delta(2,0,1) \Rightarrow \begin{cases} -1 = \mu + 2\delta \\ 0 = \lambda \\ 1 = \lambda + \delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = -1 - 2\delta = -3 \\ \lambda = 0 \\ \delta = 1 - \lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\vec{u}_2 = (0,-3,1)_{B'}$$

$$(0,1,-2) = \lambda(0,1,1) + \mu(1,0,0) + \delta(2,0,1) \Rightarrow \begin{cases} 0 = \mu + 2\delta \\ 1 = \lambda \\ -2 = \lambda + \delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = -2\delta = 6 \\ \lambda = 1 \\ \delta = -2 - \lambda = -3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\vec{u}_3 = (1,6,-3)_{B'}$$

$$\text{Luego } \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 6 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

b) La **ecuación matricial del cambio de B’ en B** se obtiene despejando en la anterior:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 6 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

8. Intersección y suma de subespacios vectoriales

Teorema

Sean E_1 y E_2 dos subespacios vectoriales del espacio vectorial V, entonces $E_1 \cap E_2$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial V.

Demostración:

$E_1 \cap E_2 = \{\vec{x} \in V / \vec{x} \in E_1 \text{ y } \vec{x} \in E_2\}$. Sabiendo que E_1 y E_2 son subespacios vectoriales y se cumplen la caracterización de subespacios. Primeramente $E_1 \cap E_2 \subset V$ y luego:

$$\forall \lambda, \mu \in K, \forall \vec{a}, \vec{b} \in E_1 \cap E_2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} \forall \vec{a}, \vec{b} \in E_1 & \underset{E_1 \text{subesp.}}{\Rightarrow} & \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \in E_1 \\ \text{y} & & \text{y} \\ \forall \vec{a}, \vec{b} \in E_2 & \underset{E_2 \text{subesp.}}{\Rightarrow} & \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \in E_2 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \in E_1 \cap E_2 .$$

Por tanto, la intersección de subespacios es otro subespacio, sin embargo la unión $E_1 \cup E_2 = \{\vec{x} \in V / \vec{x} \in E_1 \text{ o } \vec{x} \in E_2\}$ no es un subespacio vectorial del espacio vectorial V.

Contraejemplo:

Sean $E_1 = <\vec{x}>$ y $E_2 = <\vec{y}>$ entonces $\vec{x} + \vec{y} \notin E_1 \cup E_2$ ya que $\vec{x} + \vec{y} \notin E_1$ y $\vec{x} + \vec{y} \notin E_2$. Obsérvese que los subespacios son proporcionales a un vector y la suma no es proporcionar a ninguno de los dos. La unión no es un subespacio vectorial, pero todo sistema de vectores genera un subespacio vectorial que contiene a todas las combinaciones lineales posibles de vectores del sistema.

Definición:

Sean E_1 y E_2 dos subespacios vectoriales del espacio vectorial V. Llamaremos ***suma*** *de E_1 y E_2* al subespacio vectorial generado por $E_1 \cup E_2$.

$$E_1 + E_2 = < E_1 \cup E_2 >$$

Proposición:

Se cumple que $E_1 + E_2 = < E_1 \cup E_2 > = \{\vec{x} \in V / \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{x}_1 \in E_1 \text{ y } \vec{x}_2 \in E_2\}$.

Demostración:

En efecto:

Si $E_1 = <\vec{a}_1, ..., \vec{a}_r>$ y $E_2 = <\vec{b}_1, ..., \vec{b}_s>$ entonces $< E_1 \cup E_2 > = <\vec{a}_1, ..., \vec{a}_r, \vec{b}_1, ..., \vec{b}_s>$.

$\forall \vec{x} \in < E_1 \cup E_2 > \Rightarrow \vec{x} = \underbrace{\lambda_1 \vec{a}_1 + ... + \lambda_r \vec{a}_r}_{\vec{x}_1} + \underbrace{\mu_1 \vec{b}_1 + ... + \mu_s \vec{b}_s}_{\vec{x}_2} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ con $\vec{x}_1 \in E_1$ y $\vec{x}_2 \in E_2$

luego $< E_1 \cup E_2 > \subset \{\vec{x} \in V / \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{x}_1 \in E_1 \text{ y } \vec{x}_2 \in E_2\}$ y obviamente $< E_1 \cup E_2 > \supset \{\vec{x} \in V / \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{x}_1 \in E_1 \text{ y } \vec{x}_2 \in E_2\}$ cumpliéndose la igualdad.

Definición:

Sean E_1 y E_2 dos subespacios vectoriales del espacio vectorial V. **Llamaremos *suma directa*** *de E_1 y E_2* a la suma cuando $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$ y se escribe $E_1 \oplus E_2$.

Proposición:

La suma de dos subespacios $E_1 + E_2$ es suma directa si y sólo si existen dos únicos vectores $\vec{x}_1 \in E_1$ y $\vec{x}_2 \in E_2$ tales que $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$.

Demostración:

Sabemos que $E_1 + E_2 =< E_1 \cup E_2 > = \{\vec{x} \in V / \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{x}_1 \in E_1 \text{ y } \vec{x}_2 \in E_2\}$, luego $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$, $\vec{x}_1 \in E_1$ y $\vec{x}_2 \in E_2$.

Si además existieran $\vec{y}_1 \in E_1$, $y_2 \in E_2$ tales que $\vec{x} = \vec{y}_1 + \vec{y}_2$,

entonces $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \vec{y}_1 + \vec{y}_2 \Rightarrow \vec{x}_1 + \vec{x}_2 - \vec{y}_1 - \vec{y}_2 = \vec{0} \Rightarrow \underbrace{\vec{x}_1 - \vec{y}_1}_{\in E_1} = \underbrace{\vec{x}_2 - \vec{y}_2}_{\in E_2}$

se tiene que $\vec{x}_1 - \vec{y}_1 = \vec{x}_2 - \vec{y}_2 \in E_1 \cap E_2$

y como $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$ resulta $\begin{cases} \vec{x}_1 - \vec{y}_1 = \vec{0} \Rightarrow \vec{x}_1 = \vec{y}_1 \\ \vec{x}_2 - \vec{y}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{x}_2 = \vec{y}_2 \end{cases}$

Recíprocamente, veremos que $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$, si $\exists \vec{x} \in E_1 \cap E_2 \Leftrightarrow \vec{x} \in E_1$ y $\vec{x} \in E_2$ siendo $\vec{x} = \vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x}$ dos formas de descomposición del vector, salvo que $\vec{x} = \vec{0}$.

Definición:

Sean E_1 y E_2 dos subespacios vectoriales del espacio vectorial V. Si se cumple $E_1 \oplus E_2 = V$, diremos que E_1 y E_2 son ***subespacios suplementarios***, en cuyo caso se verifican las dos condiciones siguientes: $E_1 + E_2 = V$ y $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$.

Cuando E_1 y E_2 son subespacios suplementarios y es $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ se dice que $\vec{x}_1$ es la **proyección** de $\vec{x}$ sobre E_1 y $\vec{x}_2$ es la **proyección** de $\vec{x}$ sobre E_2

Ejemplo:

El plano vectorial R^2 puede escribirse como suma directa de dos rectas vectoriales (subespacios de dimensión uno) no coincidentes.

Ejemplo:

El espacio vectorial R^3 puede escribirse como suma directa de una recta vectoriales (subespacio vectorial de dimensión uno) y un plano vectorial (subespacio vectorial de dimensión 2) cuyo único vector común sea el vector nulo.

Teorema

Sean B_1 y B_2 dos bases de los subespacios vectoriales E_1 y E_2, respectivamente, del espacio vectorial V. La suma $E_1 + E_2$ es directa si y solo si se verifican las dos condiciones siguientes:

i) $B_1 \cap B_2 = \varnothing$.

ii) $B_1 \cup B_2$ es un sistema libre de V.

Siendo $B_1 \cup B_2$ una base de $E_1 \oplus E_2$.

Demostración

$\Rightarrow)$ Supongamos que $E_1 \oplus E_2$, es decir, $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$. Veamos que i) $B_1 \cap B_2 = \varnothing$.

Si $\vec{x} \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \begin{cases} \vec{x} \in B_1 \subset E_1 \\ \vec{x} \in B_2 \subset E_2 \end{cases} \Rightarrow \vec{x} \in E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$ absurdo, ya que el vector nulo no puede pertenecer a ninguna base.

Ahora, la segunda condición ii) $B_1 \cup B_2$ es un sistema libre de V.

Sean $B_1 = \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r\}$ y $B_2 = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_s\}$ la ecuación vectorial $\underbrace{\lambda_1\vec{a}_1 + \dots + \lambda_r\vec{a}_r}_{\in E_1} + \underbrace{\mu_1\vec{b}_1 + \dots + \mu_s\vec{b}_s}_{\in E_2} = \vec{0} \Rightarrow \underbrace{\lambda_1\vec{a}_1 + \dots + \lambda_r\vec{a}_r}_{\in E_1} = \underbrace{-\mu_1\vec{b}_1 - \dots - \mu_s\vec{b}_s}_{\in E_2}$ y como antes

$$E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1\vec{a}_1 + \dots + \lambda_r\vec{a}_r = \vec{0} \underset{B_1\text{libre}}{\Rightarrow} \lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0 \\ \\ -\mu_1\vec{b}_1 - \dots - \mu_s\vec{b}_s = \vec{0} \underset{B_2\text{libre}}{\Rightarrow} \mu_1 = \dots = \mu_s = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$B_1 \cup B_2 = \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_s\}$ es libre.

$\Leftarrow)$ Si se cumplen las dos condiciones i) y ii) entonces $\vec{x} \in E_1 \cap E_2 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \vec{x} \in E_1 \Rightarrow \vec{x} = \lambda_1\vec{a}_1 + \dots + \lambda_r\vec{a}_r \\ \vec{x} \in E_2 \Rightarrow \vec{x} = \mu_1\vec{b}_1 + \dots + \mu_s\vec{b}_s \end{cases} \Rightarrow \vec{x} - \vec{x} = \lambda_1\vec{a}_1 + \dots + \lambda_r\vec{a}_r - \mu_1\vec{b}_1 - \dots - \mu_s\vec{b}_s = \vec{0}$$

$\underset{\text{ii)}}{\Rightarrow} \lambda_1 = \dots = \lambda_r = \mu_1 = \dots = \mu_s = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$. Luego $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$, es decir $E_1 + E_2$ es suma directa.

Proposición:

Sean E_1 y E_2 dos subespacios vectoriales del espacio vectorial V. Se cumple que:

$$\dim(E_1) + \dim(E_2) = \dim(E_1 + E_2) + \dim(E_1 \cap E_2)$$

Demostración:

Sea $B = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k\}$ una base de $E_1 \cap E_2$; completamos la base hasta obtener una base $B_1 = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k, \vec{a}_{k+1}, \ldots, \vec{a}_r\}$ de E_1, y otra $B_2 = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k, \vec{b}_{k+1}, \ldots, \vec{b}_s\}$ de E_2. Ahora $B_1 \cup B_2 = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k, \vec{a}_{k+1}, \ldots, \vec{a}_r, \vec{b}_{k+1}, \ldots, \vec{b}_s\}$ es tal que

$\lambda_1\vec{e}_1 + \ldots + \lambda_k\vec{e}_k + \lambda_{k+1}\vec{a}_{k+1} + \ldots + \lambda_r\vec{a}_r + \mu_{k+1}\vec{b}_{k+1} + \ldots + \mu_s\vec{b}_s = \vec{0}$

$\underbrace{\lambda_1\vec{e}_1 + \ldots + \lambda_k\vec{e}_k + \lambda_{k+1}\vec{a}_{k+1} + \ldots + \lambda_r\vec{a}_r}_{\in E_1} = \underbrace{-\mu_{k+1}\vec{b}_{k+1} - \ldots - \mu_s\vec{b}_s}_{\in E_2}$, resulta $-\mu_{k+1}\vec{b}_{k+1} - \ldots - \mu_s\vec{b}_s$ un vector de $E_1 \cap E_2$ cuya base es $B = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k\}$, por tanto $\mu_{k+1} = \ldots = \mu_s = 0$ quedando

$\lambda_1\vec{e}_1 + \ldots + \lambda_k\vec{e}_k + \lambda_{k+1}\vec{a}_{k+1} + \ldots + \lambda_r\vec{a}_r = \vec{0}$ siendo $B_1 = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k, \vec{a}_{k+1}, \ldots, \vec{a}_r\}$ base de E_1, y por consiguiente, $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = \lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_r = 0$. Queda demostrado que $B_1 \cup B_2 = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k, \vec{a}_{k+1}, \ldots, \vec{a}_r, \vec{b}_{k+1}, \ldots, \vec{b}_s\}$ es una base de E_1+E_2 con la siguiente dimensión.

$$\dim(E_1+E_2) = r+s-k = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2)$$
$$\dim(E_1) + \dim(E_2) = \dim(E_1 + E_2) + \dim(E_1 \cap E_2)$$

Corolario:

Si $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\} \Rightarrow \dim(E_1 \oplus E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2)$

Teorema

Todo subespacio vectorial F de un espacio vectorial V de dimensión n admite, al menos un subespacio suplementario F’ de V. Además si dim(F)=p, entonces dim(F’)=n-p.

Definición:

Se dice que un subespacio vectorial H del espacio vectorial V es un ***hiperplano*** si y solo si dim(H)=dim(V)-1.

En consecuencia, todo subespacio vectorial suplementario de un hiperplano tiene dimensión uno.

Ejemplo:

El plano vectorial R^2 el hiperplano será cualquier recta vectorial.

Ejemplo:

El espacio vectorial R^3 el hiperplano será cualquier plano vectorial.

Ejemplo:

Sean los subespacios vectorial F=<(1,0,1),(1,0,-1),(2,0,0)> y G=<(2,3,1),(1,0,1),(0,3,-1),(3,6,1)> del espacio vectorial $\mathbf{R}^3$. Se pide: bases, ecuaciones paramétricas y ecuaciones cartesianas de los subespacios F+G y $F \cap G$.

Solución:

Determinemos los subespacios F y G: el $r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 2$ y una base $B_F = \{(1,0,1),(2,0,0)\}$ dando lugar a las ecuaciones paramétricas $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y eliminando los parámetros $\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 2 \\ x_2 & 0 & 0 \\ x_3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x_2 = 0$.

El $r\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2$ y una base $B_G = \{(1,0,1),(0,3,-1)\}$ dando lugar a las ecuaciones paramétricas $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ y eliminando los parámetros $\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 3 \\ x_3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$.

Para obtener el subespacio intersección $F \cap G$ sólo necesitamos juntar las ecuaciones cartesianas de ambos subespacios $\left\{ \begin{array}{c} x_2 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_1 = x_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \lambda \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \lambda \end{array} \right.$ con una posible base $B_{F \cap G} = \{(1,0,1)\}$ y dim($F \cap G$)=1.

En el caso del subespacio suma F+G juntamos los vectores de las bases y quitamos los vectores que sean linealmente dependientes: $B_F \cup B_G = \{(1,0,1),(2,0,0),(0,3,-1)\}$ y el rango $r\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3$ resultando dim(F+G)=3 y, por tanto, F+G=R^3 con las ecuaciones paramétricas $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ o más sencillamente $\begin{cases} x_1 = \lambda_1 \\ x_2 = \lambda_2 \\ x_3 = \lambda_3 \end{cases}$, pero, evidentemente no tiene ecuaciones cartesianas, ya que es el espacio vectorial R^3.