

4. La causalidad

4.1 INTRODUCCIÓN

Hallar la causalidad de los grafos consiste en determinar cuál de las dos variables que llevan asociadas todos los grafos tiene una relación de dependencia; una siempre es función de la otra. Tomemos como ejemplo el móvil de la figura 4.1, que se encuentra inicialmente parado. Si se le aplica una fuerza F , se pone en movimiento y alcanza una velocidad V .

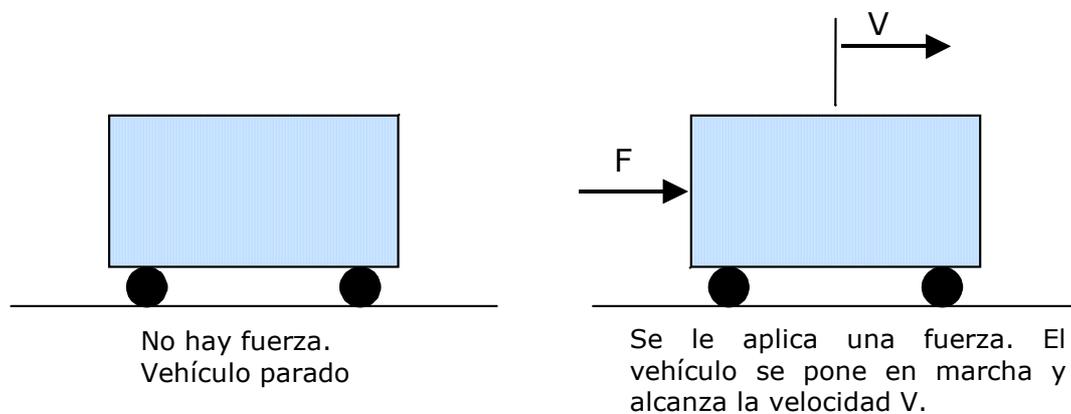


Figura 4.1

En este ejemplo la CAUSA es la fuerza y al ser aplicada aparece la velocidad que, en definitiva, podría decirse que es el EFECTO causado por la fuerza. Luego, en este caso:

CAUSA Fuerza

EFECTO Velocidad

Veamos ahora un vehículo que arrastra un remolque a una velocidad V , tal y como se indica en la figura 4.2.

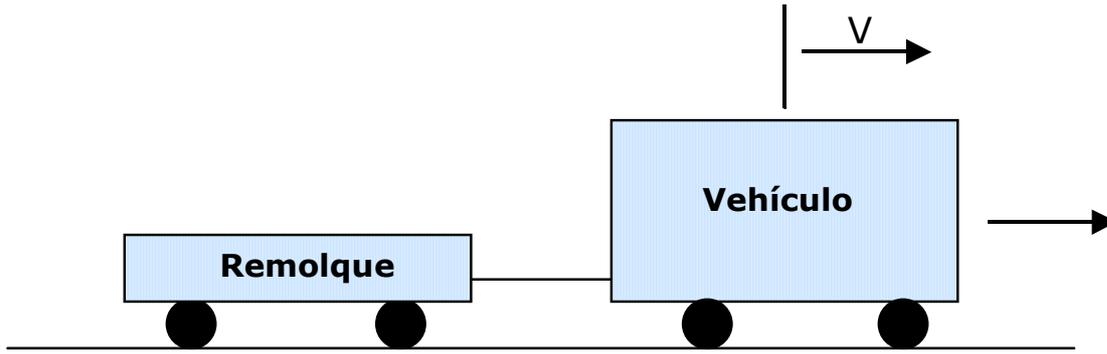


Figura 4.2

El remolque gracias a un enganche es arrastrado por el vehículo a la velocidad V . Para que el remolque se desplace a dicha velocidad es necesario comunicarle por medio del enganche una fuerza F .

En el remolque, la CAUSA es la velocidad conocida V a la que se desplaza, mientras que el EFECTO es la fuerza que necesariamente hay que transmitir por el enganche, para conseguir que el remolque se mueva a la velocidad V .

En mecánica, cuando la CAUSA es esfuerzo, el EFECTO es velocidad y a la inversa; cuando la CAUSA es velocidad, el EFECTO es el esfuerzo.

Si	CAUSA Esfuerzo	EFECTO	Velocidad
Si	CAUSA Velocidad	EFECTO	Esfuerzo

En los demás dominios de la física el planteamiento es el mismo, no hay más que sustituir el esfuerzo y el flujo por su significado en cada caso particular. Cuando la causa de un grafo es el flujo se coloca un trazo, perpendicular al grafo, en la parte posterior de éste.



Figura 4.3

Si la causa es el esfuerzo, el trazo se coloca en la parte anterior del grafo.



Figura 4.4

Causalidad en las fuentes

Cuando la fuente es de flujo, la causa siempre es el flujo y cuando la fuente es de esfuerzo, la causa es el esfuerzo.



Figura 4.5

Causalidad en los transformer

Debido a que este elemento relaciona siempre esfuerzos a la entrada con esfuerzos a la salida, o bien, flujos a la entrada con flujos a la salida, el transformer no modifica la causalidad y si en el grafo de entrada la causalidad es flujo, en el de salida también lo es y a la inversa. Se tendrán dos posibles casos:

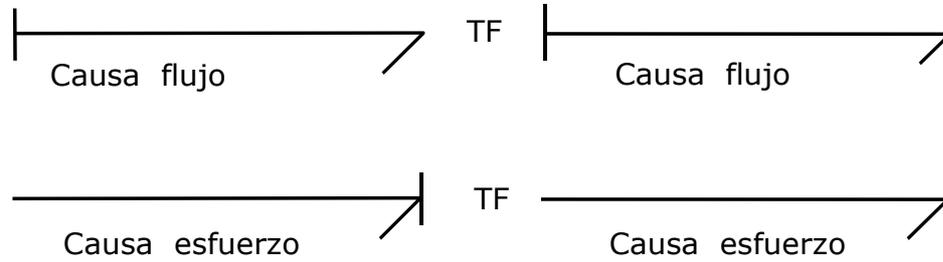


Figura 4.6

Causalidad en las puertas

En las puertas, cualquier elemento puede ser la causa, y se podrá tener:

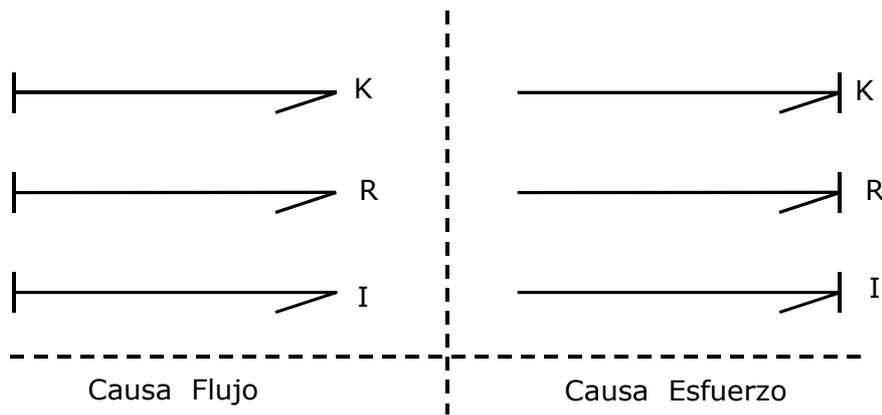


Figura 4.7

Causalidad en los gyrator

Por definición, el elemento gyrator relaciona esfuerzos a la entrada con flujos a la salida o a la inversa. En consecuencia, el gyrator cambia la causa en el grafo de salida respecto al de entrada. Se tendrán dos posibles casos.

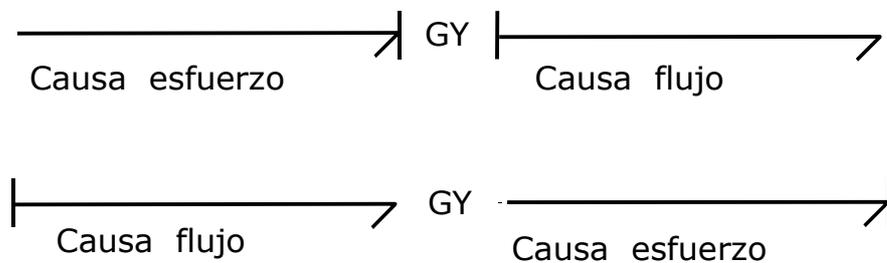


Figura 4.8

Causalidad de las uniones

Para definir la causalidad en las uniones, basta con recordar la definición de cada tipo de unión. En la unión 1 todos los flujos son iguales y, por lo tanto, en cuanto un grafo de entrada en la unión tenga causa flujo, todos los demás grafos tendrán como causa el flujo.

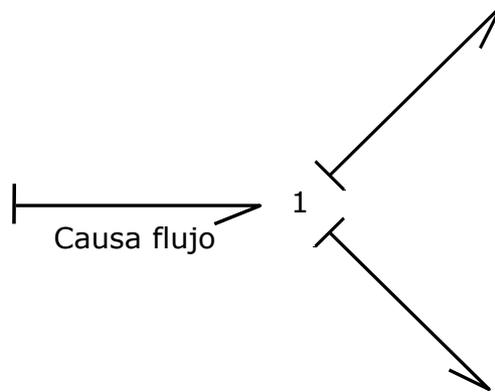


Figura 4.9

Si se trata de una unión 0, todos los esfuerzos son iguales y por lo tanto si un grafo de entrada tiene como causa el esfuerzo, todos los demás grafos lo tendrán también como causa.

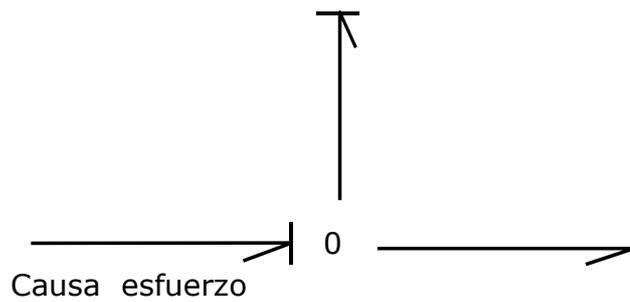


Figura 4.10

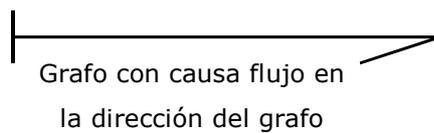


Figura 4.11

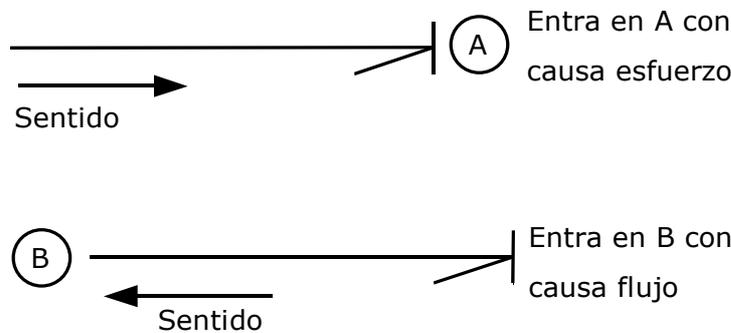
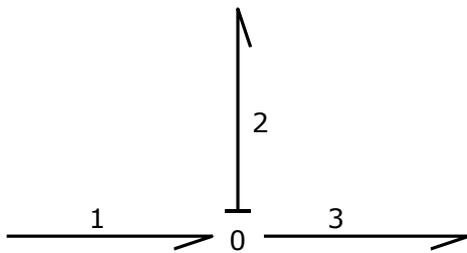


Figura 4.12

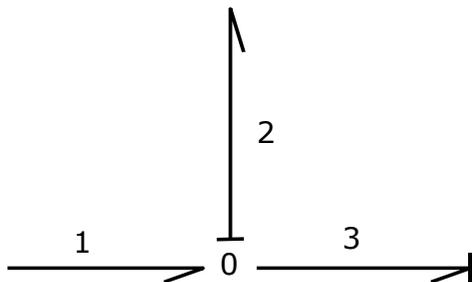
No es correcto hablar de la causalidad de un grafo, ya que éste puede recorrerse en los dos sentidos. La causa asociada a un grafo depende del sentido en que se recorre. La causa es esfuerzo cuando el trazo perpendicular al grafo aparece al final del recorrido, mientras que la causa es flujo cuando aparece al principio.

Teniendo en cuenta lo planteado en el apartado anterior, se pueden dar diferentes casos en las uniones 0 y 1. En la figura 4.13 y 4.14 se representa una unión tipo 0, con los pasos seguidos en el razonamiento necesario para determinar la causalidad.

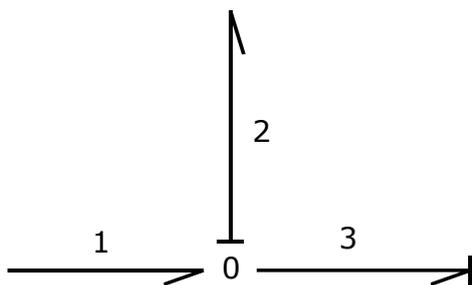


Se conoce la causalidad del grafo 2, que entra en la unión 0 con causa esfuerzo.

Figura 4.13



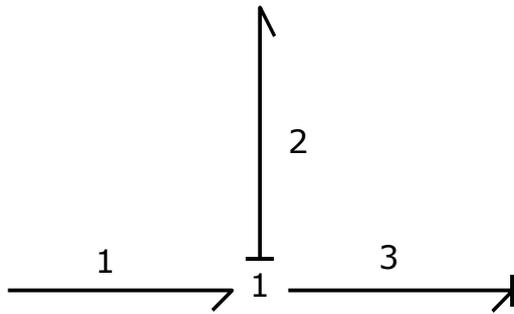
Al entrar el grafo 2 con causa esfuerzo, queda definido el esfuerzo de la unión, y por lo tanto el grafo 3 sale del nudo de unión con causa esfuerzo.



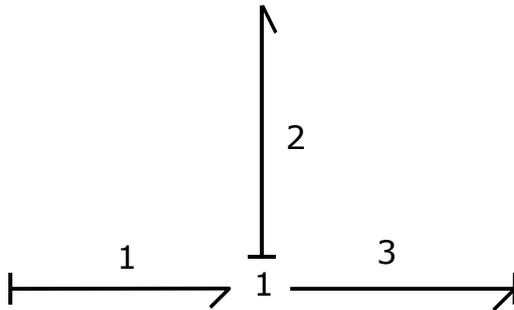
Por tener definido el esfuerzo de la unión, el grafo 1 sale de la unión con esfuerzo conocido o lo que es lo mismo; causa esfuerzo.

Figura 4.14

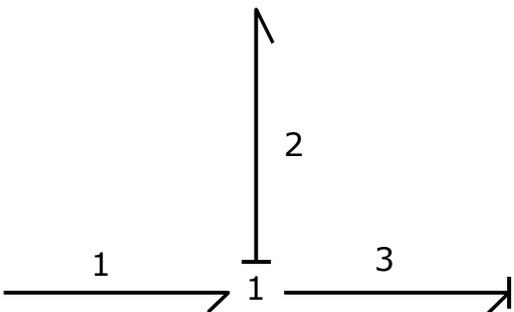
Este ejemplo también puede definirse diciendo que como en las uniones 0 se verifica que la suma de flujos de entrada es igual a la suma de flujos de salida, conocidos los flujos de entrada en grafo 1 y grafo 3, su suma es igual al flujo en 2, siendo por tanto su flujo de salida conocido. En la figura 4.15 se representa un caso parecido al anterior pero basado en una unión 1.



Se conoce inicialmente la causalidad del grafo 3, que sale de la unión 1 con causa esfuerzo y por lo tanto entra en la unión con causa flujo.



El grafo 3 ha definido el flujo de la unión y por lo tanto el grafo 2 sale con flujo conocido o lo que es lo mismo: causa flujo.



Al igual que el grafo 2, el grafo 1 sale de la unión con flujo conocido.

Figura 4.15

Este ejemplo también puede definirse de la siguiente forma:

- Grafo 1. Entra en la unión 1 con esfuerzo conocido.
- Grafo 2. Entra en la unión 1 con esfuerzo conocido.

Como en las uniones 1, se verifica la igualdad de las sumas de esfuerzos; conocidos los esfuerzos de entrada es conocido el esfuerzo de salida, y por lo tanto el grafo 3 sale con esfuerzo conocido o lo que es lo mismo: causa esfuerzo.

4.2 EJEMPLOS DE CAUSALIDAD

Primer ejemplo

En el diagrama de grafos que se representa en la figura 4.16, se van a seguir uno a uno los pasos necesarios para determinar la causalidad, refiriéndose siempre a la entrada o salida de la unión considerada.

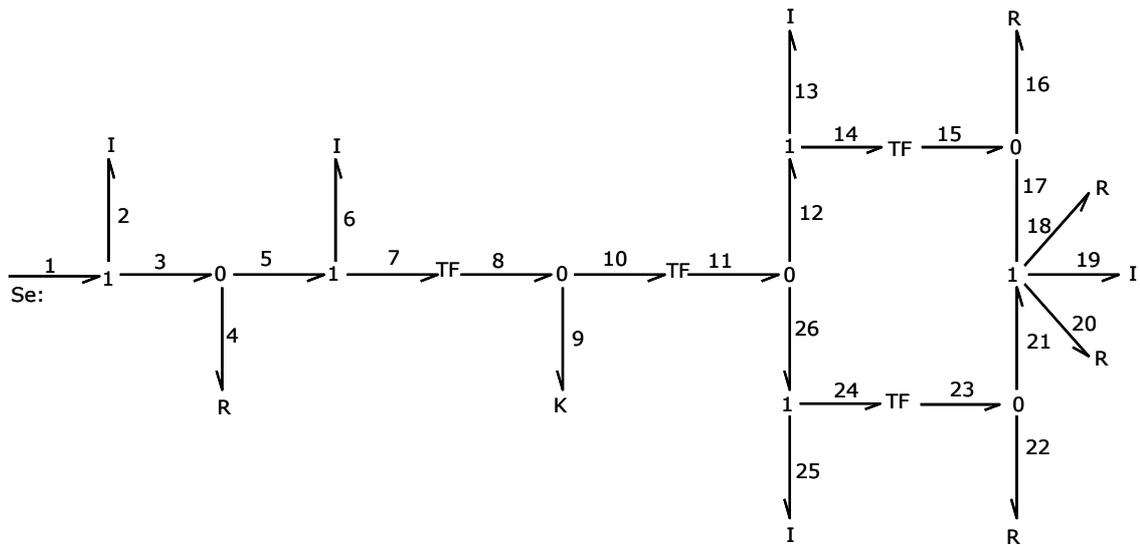


Figura 4.16

GRAFO 1. Entrada esfuerzo por ser fuente de esfuerzo.

GRAFO 2. Por ser puerta de inercia se le asocia como variable independiente el momento, que define, como se ha visto en capítulos anteriores, el flujo de la unión 1 en la que se encuentra.

Por lo tanto entrada flujo.

GRAFO 3. Sale flujo, ya que el grafo 2 ha definido el flujo de la unión.

GRAFO 4. En las puertas resistencia se puede definir cualquier causalidad. Como el grafo 3 no define la causalidad de la unión, se toma entrada esfuerzo para definirla.

GRAFO 5. Como el grafo 4 ha definido el esfuerzo de la unión, sale esfuerzo.

GRAFO 6. Entra flujo por ser puerta de inercia. Siempre que pueda elegirse, las puertas de inercia se colocan con entrada flujo sobre la unión.

GRAFO 7. El grafo 6 ha definido el flujo de la unión y por lo tanto, sale flujo.

GRAFO 8. Sale flujo. El transformer no modifica la causalidad.

GRAFO 9. En las puertas resorte se definía como variable independiente el desplazamiento, lo que permitía conocer el esfuerzo en el grafo como producto de K por el desplazamiento. Por lo tanto, entra en la unión con esfuerzo.

GRAFO 10. Sale esfuerzo, ya que el grafo 9 ha definido el esfuerzo de la unión.

GRAFO 11. Sale esfuerzo. Los transformer no modifican la causalidad.

GRAFO 12. Sale esfuerzo, ya que el grafo 11 define el esfuerzo de la unión.

GRAFO 26. Sale esfuerzo, por el mismo motivo que en el caso anterior.

GRAFO 13. Entra flujo por ser puerta de inercia.

GRAFO 14. Sale flujo, ya que el grafo 13 ha definido el flujo de la unión.

GRAFO 15. Sale flujo. Los transformer no modifican la causalidad.

GRAFO 16. Por ser puerta resistencia y no estar definido el esfuerzo de la unión, se toma entrada en esfuerzo.

GRAFO 17. Sale esfuerzo. El grafo 16 lo ha definido en la unión.

GRAFO 19. Entra flujo, por ser puerta de inercia y no estar previamente definido el flujo de la unión.

GRAFO 18. Sale flujo, el grafo 19 ha definido el flujo de la unión.

GRAFO 20. Sale flujo. Igual que el grafo 18.

GRAFO 21. Sale flujo. Igual que el grafo 18.

GRAFO 22. Entra esfuerzo por ser puerta resistencia en una unión 0, cuyo esfuerzo no está definido todavía.

GRAFO 23. Sale esfuerzo. El grafo 22 ha definido el esfuerzo de la unión.

GRAFO 24. Sale esfuerzo. Los transformer no modifican la causalidad.

GRAFO 26. Ya había sido definido anteriormente.

GRAFO 25. Ninguno de los grafos 26 y 24 definen el flujo de la unión, ya que entran con esfuerzo. Por lo tanto entra con flujo.

En este ejemplo que se ha desarrollado resulta muy importante repasar las decisiones que se han tomado para definir la causa en las puertas inercia, resorte y resistencia.

Como se verá más adelante, siempre que se pueda, la causalidad en estas puertas debe ser la siguiente:

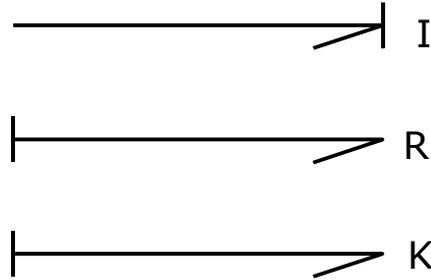


Figura 4.17

Segundo ejemplo

Se pretende hallar ahora la causalidad en el diagrama de grafos representado en la figura 4.18.

Para encontrar la causa de cada grafo no es necesario comenzar por el primero, como se hacía en el ejemplo anterior, más aún, en la práctica suele comenzarse por una puerta de inercia.

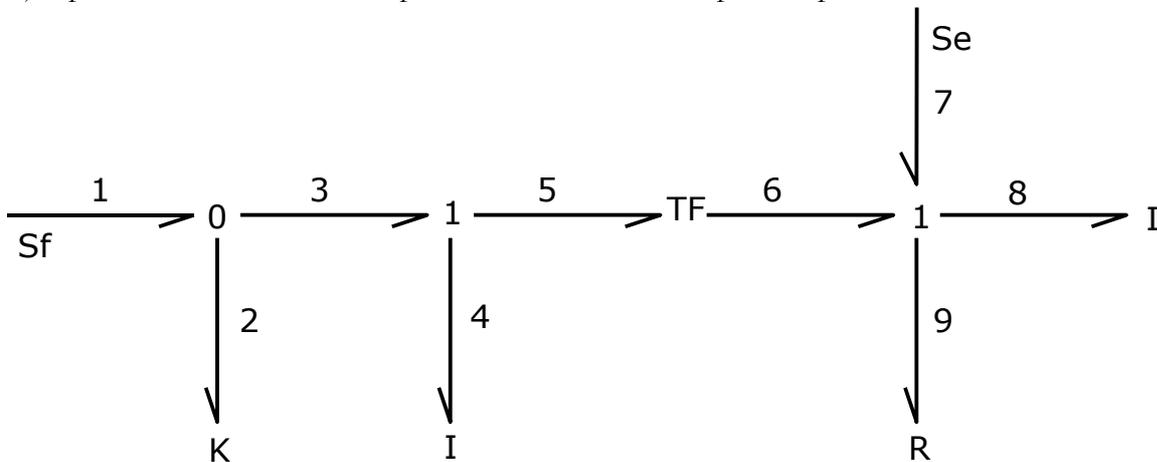


Figura 4.18

El primer paso consistirá en asignarle causa a una puerta de inercia, por ejemplo la del grafo 8. Al no existir ningún condicionamiento se toma causa de salida esfuerzo, o lo que es lo mismo, causa flujo en la entrada de la unión 1. Al tener una entrada de flujo conocido sobre esta unión, todos los demás grafos salen de ella con flujo conocido.

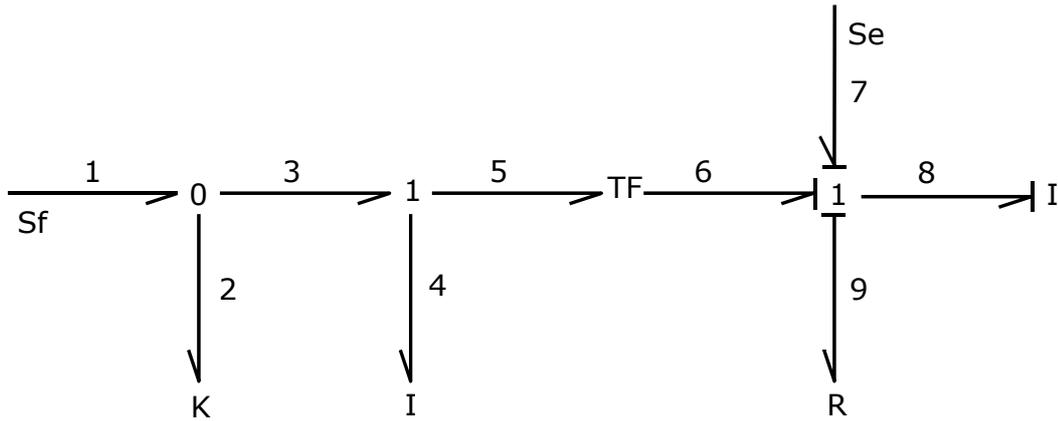


Figura 4.19

Al conocer la causa del grafo 6, es conocida también la del 5, por pertenecer ambos a un elemento transformer. Por otra parte, el grafo 5 entra en la unión 1 con causa flujo, o lo que es lo mismo; flujo conocido, definiendo el flujo de la unión.

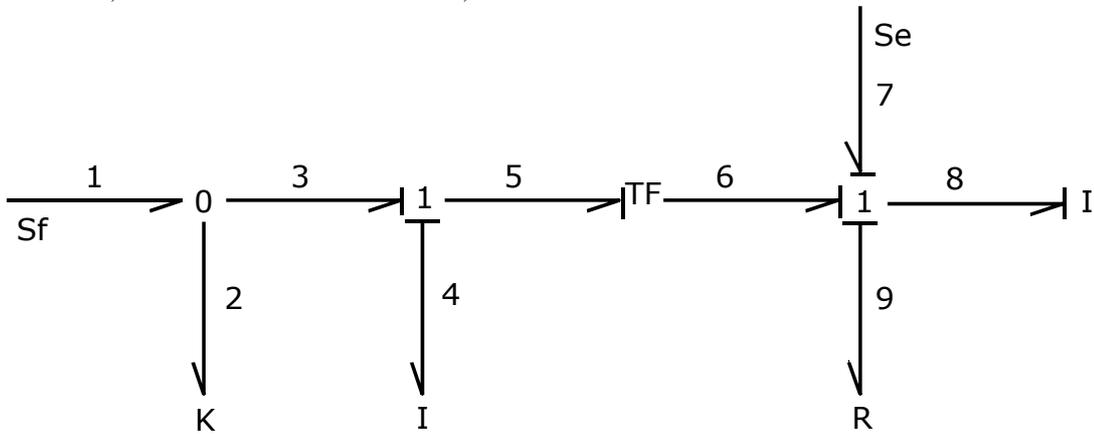


Figura 4.20

Por este motivo, tanto el grafo 3 como el 4 saldrán con flujo conocido (figura 4.20). En este caso no se ha podido elegir la causa del grafo 4, que es una puerta de inercia, ya que venía impuesta por el resto de los grafos. Más adelante se estudiará la repercusión de este hecho. Por último, la fuente de flujo Sf, grafo 1 entra en la unión 0 con flujo conocido, al igual que el grafo 3. Como las uniones 0 se definen como: suma de flujos de entrada igual a suma de flujos de salida, conocidos los flujos de entrada en 1 y 3, se conoce el de salida del grafo 2 (figura 4.21.)

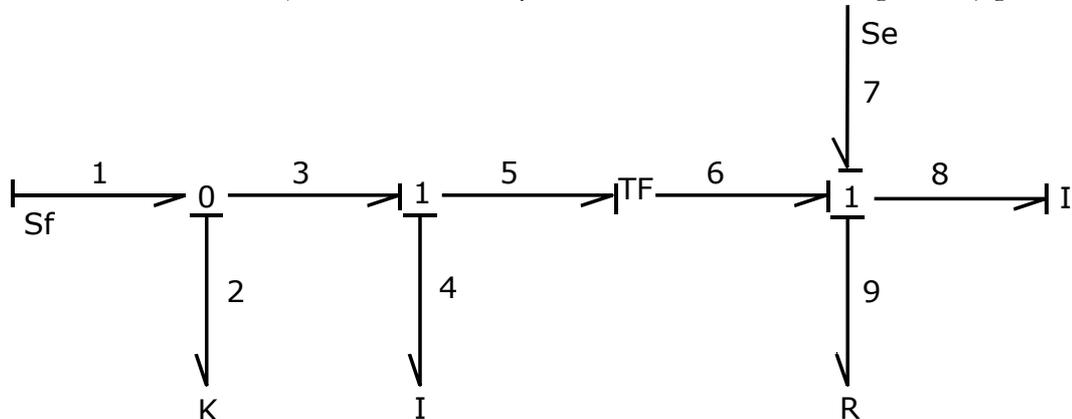


Figura 4.21

4.3 SIGNIFICADO DE LA CAUSALIDAD

Supongamos que se tiene una palanca de masa despreciable sobre la que se sitúan dos masas; m_1 y m_2 en los extremos, uno de los cuales descansa en un resorte de rigidez K .

En la figura 4.22 se representa el esquema del modelo, así como su diagrama de grafos. Para hallar la causalidad se comienza, por ejemplo, por la unión 1 de la izquierda.

GRAFO 1. Entra en la unión 1 con causa esfuerzo por ser fuente de esfuerzo.

GRAFO 2. Al no estar definido el flujo de la unión, puede elegirse la causa de la puerta inercia. Entra en la unión con flujo conocido.

GRAFO 3. Como el grafo 2 ha definido el flujo de la unión, el grafo 3 sale con flujo conocido.

GRAFO 4. Lo mismo que el 3, por ser grafos de un elemento transformer.

GRAFOS 5, 6, 7. Todos salen de la unión 1 con flujo conocido, ya que al entrar el grafo 4 con flujo conocido, se define el flujo de la unión.

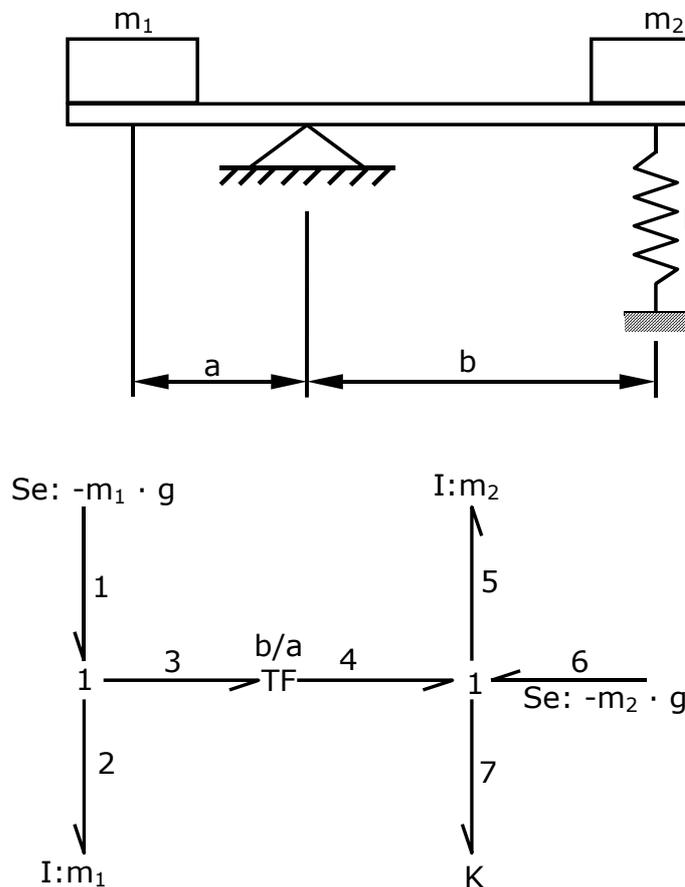


Figura 4.22

Observando en la figura 4.23, puede observarse que los grafos 2 y 5 correspondientes a las puertas de inercia tienen causas diferentes; el primero tiene causa esfuerzo y el segundo, flujo. Veamos cuál es el significado de esta discrepancia.

En los primeros capítulos se dice que, como variables independientes del sistema, se eligen los momentos asociados a las puertas de inercia. Como la definición de estas es que su flujo es igual

al momento dividido por su inercia, elegir como variable independiente el momento es lo mismo que definir el flujo.

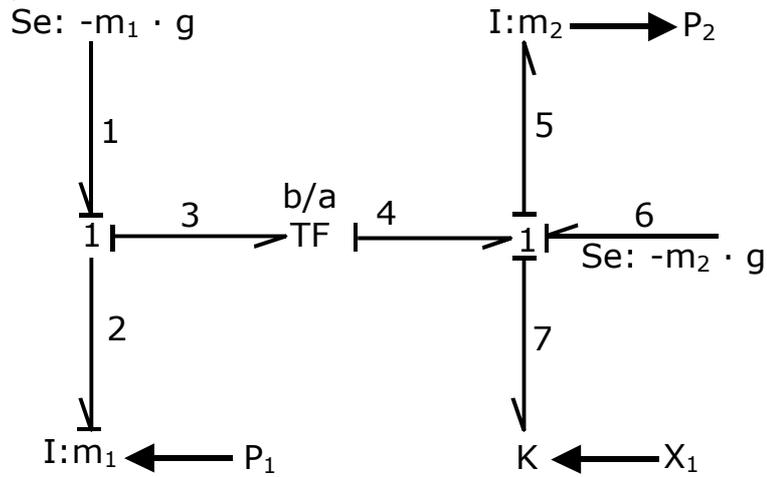


Figura 4.23

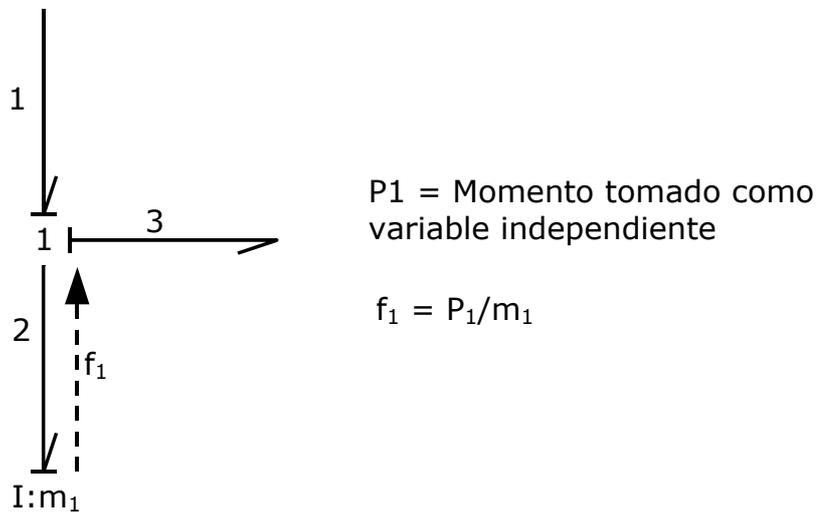


Figura 4.24

Si se recuerda ahora el razonamiento que se hace para determinar la causa de una puerta de inercia, se llega a la conclusión de que definir como variable independiente el momento de este grafo, es lo mismo que determinar que su causa de entrada en la unión 1 es flujo, o bien, que su causa en la dirección del grafo es esfuerzo.

La otra puerta de inercia (grafo 5) tiene la causalidad contraria, lo que coincide con el hecho de que este grafo está en una unión 1 cuyo flujo viene definido por el resto del sistema. Por lo tanto, podemos concluir con que si una puerta de inercia no define el flujo de la unión a la que pertenece, tampoco podrá definirse su momento como variable independiente del sistema.

Volviendo sobre el esquema del modelo, figura 4.22, se ve que se trata de un mecanismo que solamente tiene un grado de libertad, es decir, solamente hace falta una variable para definir la posición del mecanismo en el tiempo. Como por otra parte, existen dos masas que se traducen en el diagrama de grafos como dos puertas inercia, solo una de ellas puede llevar asociado el momento como variable independiente, mientras que la otra se dice que es una variable dependiente.

En conclusión: **Solamente se asignará el momento como variable independiente a las puertas de inercia con causa esfuerzo en la dirección de su grafo.**

Los conceptos pueden verse más claros calculando los flujos y esfuerzos asociados a cada grafo en este ejemplo.

Tomamos como variables independientes el momento P_1 , asociado al grafo 2, y el desplazamiento x_1 asociado al grafo 7.

Cálculo de flujos

$$\begin{aligned}f_2 &= P_1 / m_1 \\f_3 &= f_2 = f_1 = P_1 / m_1 \\f_4 &= f_3 \cdot (-b/a) = -P_1 \cdot b / m_1 \cdot a \\f_5 &= f_6 = f_4 = -P_1 \cdot b / m_1 \cdot a \\f_7 &= f_4 = -P_1 \cdot b / m_1 \cdot a\end{aligned}$$

Definiendo únicamente el momento P_1 se han obtenido los flujos en todos los grafos.

Así, el flujo en la puerta de inercia del grafo 5 queda definido en función del momento P_1 y no es necesario definir como variable el momento en esta puerta de inercia.

Cuando una puerta de inercia tiene por causa flujo en la dirección de su grafo, se supone conocido el esfuerzo asociado a ella, con un valor igual a la primera derivada del momento. De esta forma, los esfuerzos en cada grafo son los siguientes:

Cálculo de los esfuerzos

$$\begin{aligned}e_7 &= K \cdot x_1 \\e_5 &= \dot{P}_2 \\e_6 &= -m_2 \cdot g \\e_4 &= e_5 + e_7 - e_6 = \dot{P}_2 + K \cdot x_1 + m_2 \cdot g \\e_3 &= e_4 \cdot (-b/a) = -b \cdot (\dot{P}_2 + K \cdot x_1 + m_2 \cdot g)/a \\e_1 &= -m_1 \cdot g \\e_2 &= e_1 - e_3 = -m_1 \cdot g + b \cdot (\dot{P}_2 + K \cdot x_1 + m_2 \cdot g)/a\end{aligned}$$

Las ecuaciones diferenciales del sistema son:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_7 = -P_1 \cdot b / m_1 \cdot a \\ \dot{P}_1 &= e_2 = -m_1 \cdot g + b \cdot (\dot{P}_2 + K \cdot x_1 + m_2 \cdot g)/a\end{aligned}$$

La segunda ecuación no puede resolverse, ya que en el segundo miembro aparece una derivada.

Para evitar el problema será necesario poner \dot{P}_2 en función de \dot{P}_1

Sobre el grafo 5 el flujo vale:

$$f_5 = -P_1 \cdot b / m_1 \cdot a$$

Y también puede ponerse:

$$P_2 = m_2 \cdot f_5$$

Sustituyendo:

$$P_2 = -m_2 \cdot P_1 \cdot b / m_1 \cdot a$$

Como lo que se necesita encontrar es la relación entre \dot{p}_2 y \dot{p}_1 , se deriva la última expresión.

$$\dot{p}_2 = -m_2 \cdot b \cdot \dot{p}_1 / m_1 \cdot a$$

Y sustituyendo en las ecuaciones diferenciales del sistema.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -p_1 \cdot b / m_1 \cdot a \\ \dot{p}_1 &= -m_1 \cdot g + b \cdot (-m_2 \cdot b \cdot \dot{p}_1 / m_1 \cdot a + K \cdot x_1 + m_2 \cdot g) / a \end{aligned}$$

Y, en definitiva:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -p_1 \cdot b / m_1 \cdot a \\ \dot{p}_1 &= (-m_1 \cdot g + b \cdot (K \cdot x_1 + m_2 \cdot g) / a) / (1 - b^2 \cdot m_2 / a^2 \cdot m_1) \end{aligned}$$

4.4 APLICACIÓN DE LA CAUSALIDAD A CASOS CONCRETOS

Un ejemplo clásico en donde la causalidad resulta imprescindible es en los mecanismos engranados. En la figura 4.25 se representa un sistema formado por elementos de momentos de inercia J_1, J_2 y J_3 , unidos mediante ejes de rigideces torsionales K_1 y K_2 . El sistema gira y las ruedas están engranadas entre sí.

Como excitación se supone conocida la velocidad del eje de entrada.

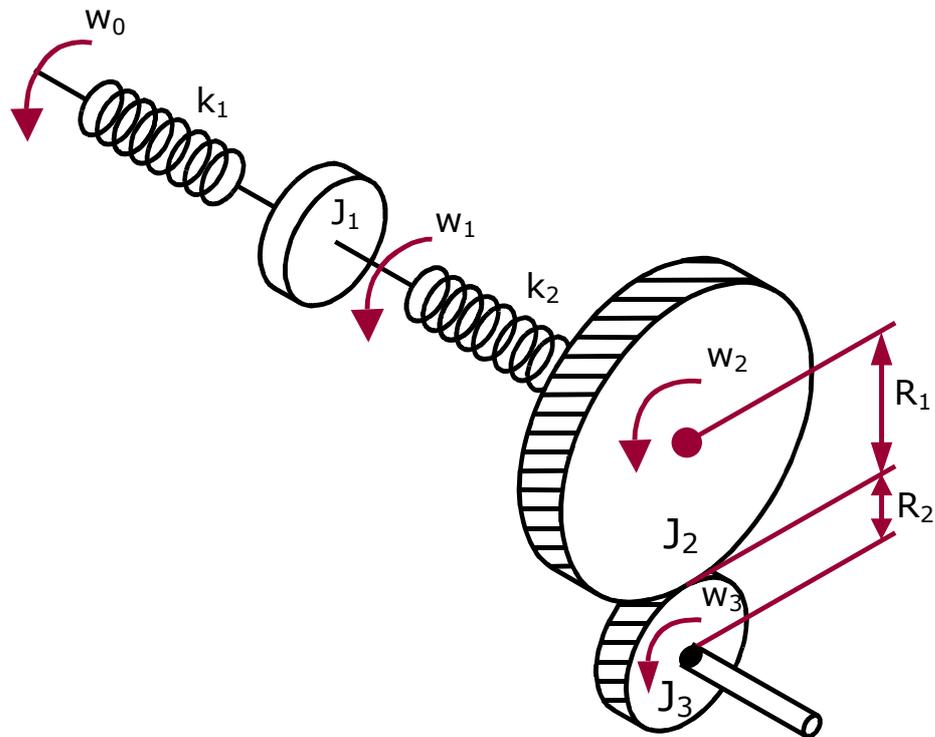


Figura 4.25

El diagrama de grafos de este sistema se realiza de la forma habitual.

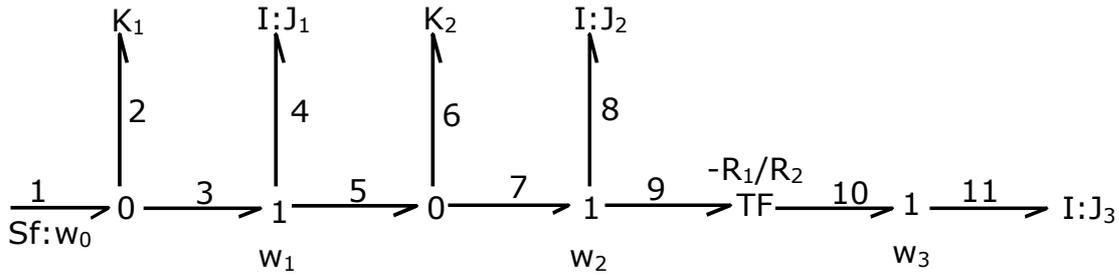


Figura 4.26

Veamos, por partes, cómo se obtiene la causalidad.

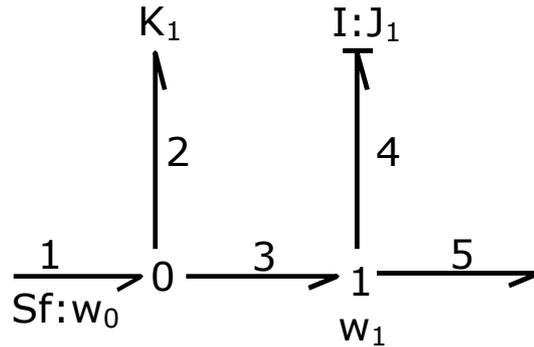


Figura 4.27

El grafo 1 queda definido por ser una fuente de flujo, mientras que para el grafo 4, se puede elegir la causa y se hace de tal forma que defina el flujo de la unión 1. De esta forma, se toma flujo conocido de entrada en la unión.

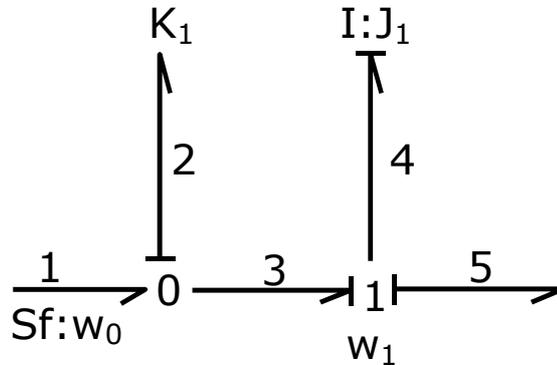


Figura 4.28

Conocido el flujo de la unión 1 (representa la velocidad angular w_1) son conocidos todos los flujos de salida en los restantes grafos de la unión. Por lo tanto, los grafos 3 y 5 salen con flujo conocido. En la unión 0, se conocen los flujos de entrada definidos por los grafos 1 y 3, y como en este tipo de uniones se verifica que la suma de los flujos de entrada es igual a la suma de los flujos de salida, se sabe también el valor del grafo 2.

Igual que en el primer caso, la unión 1 asociada a la velocidad angular w_2 , no tiene definido el flujo, por lo que podemos elegir la causa de la puerta inercia. Se toma la causa del grafo 8, de tal forma que defina con su entrada el flujo de la unión.

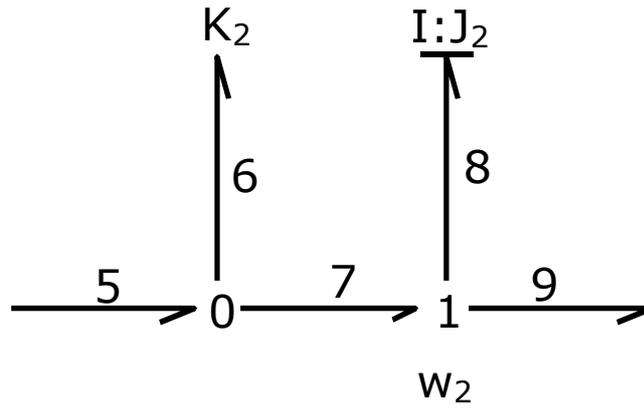


Figura 4.29

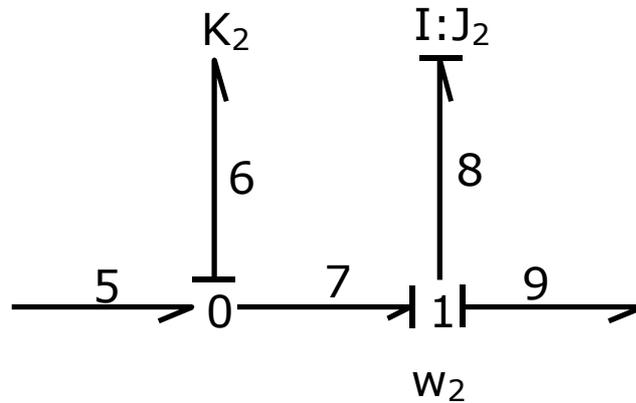


Figura 4.30

Conocido el flujo de la unión 1, son conocidos los flujos de salida de los grafos 7 y 9. En la unión 0 son conocidos los flujos de entrada de los grafos 5 y 7, por lo que su suma es igual al flujo de salida del grafo 6. Al conocer la causa del grafo 9, está definida la del grafo 10, por pertenecer ambos a un elemento transformer. A su vez, el grafo 10 define el flujo de la unión 1 que representa la velocidad angular w_3 . Definido el flujo de la unión, está definido el flujo de salida del grafo 11.

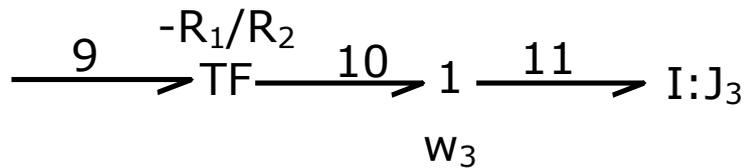


Figura 4.31

En la figura 4.32, se representa el diagrama de grafos con la causalidad definida. Como puede observarse, de las tres puertas inercia, dos tienen causa esfuerzo en la dirección del grafo, mientras que la del grafo 11 tiene causa flujo. Siguiendo el criterio mantenido en el ejemplo anterior, solo serán variables independientes los momentos asociados a los grafos 4 y 8, y además, según la causalidad, el sistema tendrá dos grados de libertad.

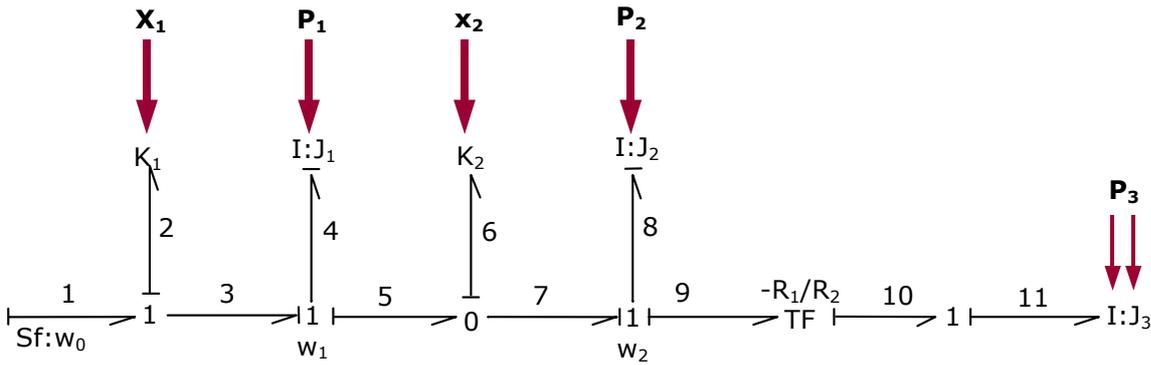


Figura 4.32

Si se analiza el sistema en la figura 4.25, se observa que el primer grado de libertad podría ser el que define la posición de la rueda J_1 , y el segundo, el que define la de la rueda J_2 .

Como la rueda J_3 está engranada a la rueda J_2 , definida la posición de J_2 , lo está también la de J_3 . Es decir, el sistema solamente tiene dos grados de libertad como la causalidad determinaba.

Vuelve a demostrarse en este ejemplo la gran importancia de la causalidad, que es capaz de definir los grados de libertad del sistema eligiendo las variables independientes. El resto de variables que son dependientes serán definidas en función de las independientes, planteando definitivamente las ecuaciones diferenciales del sistema.

Para hallar los flujos y esfuerzos en cada grafo, se asocia al grafo 11 un esfuerzo igual a la primera derivada de su momento, que denominamos \dot{P}_3 . Esto se hace por ser el grafo 11 una puerta de inercia con causa flujo en la dirección de su grafo.

Los flujos y esfuerzos son los siguientes:

Flujos

$$f_1 = w_0$$

$$f_4 = f_3 = f_5 = P_1 / J_1$$

$$f_2 = f_1 - f_3 = w_0 - P_1 / J_1$$

$$f_8 = f_7 = f_9 = P_2 / J_2$$

$$f_6 = f_5 - f_7 = P_1 / J_1 - P_2 / J_2$$

$$f_{10} = f_{11} = -R_1 \cdot f_9 / R_2 = -R_1 \cdot P_2 / R_2 \cdot J_2$$

Esfuerzos

$$e_2 = e_1 = e_3 = K_1 \cdot x_1$$

$$e_6 = e_7 = e_5 = K_2 \cdot x_2$$

$$e_4 = e_3 - e_5 = K_1 \cdot x_1 - K_2 \cdot x_2$$

$$e_{11} = e_{10} = \dot{P}_3$$

$$e_9 = -R_1 \cdot e_{10} / R_2 = -R_1 \cdot \dot{P}_3 / R_2$$

$$e_8 = e_7 - e_9 = K_2 \cdot x_2 + R_1 \cdot \dot{P}_3 / R_2$$

Las cuatro ecuaciones diferenciales del sistema son:

$$\dot{x}_1 = w_0 - P_1 / J_1$$

$$\dot{x}_2 = P_1 / J_1 - P_2 / J_2$$

$$\dot{p}_1 = K_1 \cdot x_1 - K_2 \cdot x_2$$

$$\dot{p}_2 = K_2 \cdot x_2 + R_1 \cdot \dot{p}_3 / R_2$$

En la última ecuación aparece \dot{p}_3 , que no es variable del sistema y debe ponerse en función de \dot{p}_2 , para de esta forma poder resolver la ecuación.

El momento en el grafo 11 puede ser definido como P_3 , que será igual al producto de la inercia J_3 por el flujo en 11.

$$P_3 = J_3 \cdot f_{11}$$

Como ya era conocido el valor de f_{11} , sustituyendo se tendrá:

$$P_3 = -J_3 \cdot R_1 \cdot P_2 / R_2 \cdot J_2$$

Y como lo que interesa es la relación entre \dot{p}_3 y \dot{p}_2 , derivando la última expresión:

$$\dot{p}_3 = -J_3 \cdot R_1 \cdot \dot{p}_2 / R_2 \cdot J_2$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$\dot{p}_2 = K_2 \cdot x_2 - R_1 \cdot J_3 \cdot R_1 \cdot \dot{p}_2 / R_2 \cdot R_2 \cdot J_2$$

Y despejando \dot{p}_2 1:

$$\dot{p}_2 = K_2 \cdot x_2 / (1 + R_1^2 \cdot J_3 / R_2^2 \cdot J_2)$$

Las cuatro ecuaciones diferenciales definitivas del sistema son:

$$\dot{x}_1 = w_0 - P_1 / J_1$$

$$\dot{x}_2 = P_1 / J_1 - P_2 / J_2$$

$$\dot{p}_1 = K_1 \cdot x_1 - K_2 \cdot x_2$$

$$\dot{p}_2 = K_2 \cdot x_2 / (1 + R_1^2 \cdot J_3 / R_2^2 \cdot J_2)$$

Otros ejemplos

Sea el sistema representado en la figura 4.33, en el que dos ruedas de momentos de inercia J_1 y J_2 están unidas mediante un resorte torsional. Una de las ruedas está engranada a una cremallera de masa M que se desplaza con rozamiento, comprimiendo un resorte de rigidez K_2 . Se supone conocido el par $N(t)$ en el eje de entrada.

En la figura 4.33, se presenta también el diagrama de grafos del sistema con la causalidad ya resuelta.

Observando el sistema pueden determinarse los grados de libertad. El primero de ellos para definir la posición en el tiempo de la rueda J_1 , y el segundo para definir el de la rueda J_2 . Como la

cremallera está engranada con la rueda J_2 , la posición de esta define perfectamente la de la cremallera.

Estamos pues, ante un sistema de dos grados de libertad, lo que se deduce también de la causalidad del diagrama de grafos, ya que solamente las puertas de inercia 2 y 6 tienen por causa esfuerzo en la dirección de su grafo.

Nuevamente se ve cómo la causalidad es capaz de distinguir las variables independientes de las dependientes.

Para establecer las ecuaciones diferenciales se siguen los pasos habituales, con la única diferencia de que a la puerta de inercia con causa flujo en su dirección se le asocia como esfuerzo la primera derivada de su momento.

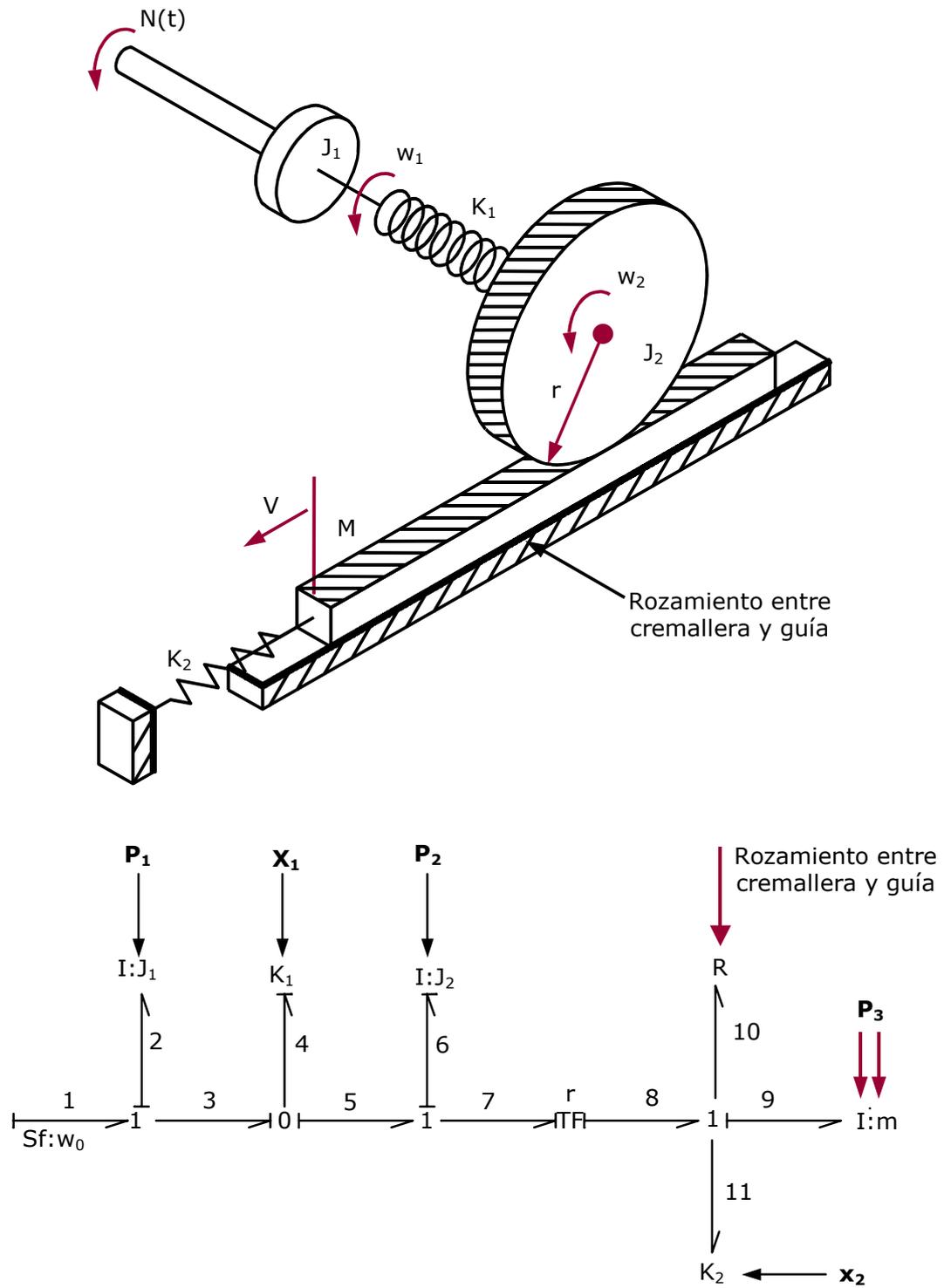


Figura 4.33

Flujos

$$f_2 = f_1 = f_3 = P_1 / J_1$$

$$f_6 = f_5 = f_7 = P_2 / J_2$$

$$f_4 = f_3 - f_5 = P_1 / J_1 - P_2 / J_2$$

$$f_8 = f_9 = f_{10} = f_{11} = r \cdot P_2 / J_2$$

Esfuerzos

$$e_1 = N(t)$$

$$e_4 = e_3 = e_5 = K_1 \cdot x_1$$

$$e_2 = e_1 - e_3 = N(t) - K_1 \cdot x_1$$

$$e_{11} = K_2 \cdot x_2$$

$$e_{10} = f_{10} \cdot R = r \cdot R \cdot P_2 / J_2$$

$$e_9 = \dot{p}_3$$

$$e_8 = e_9 + e_{10} + e_{11} = \dot{p}_3 + r \cdot R \cdot P_2 / J_2 + K_2 \cdot x_2$$

$$e_7 = r \cdot e_8 = r \cdot \dot{p}_3 + r^2 \cdot R \cdot P_2 / J_2 + r \cdot K_2 \cdot x_2$$

$$e_6 = e_5 - e_7 = K_1 \cdot x_1 - r \cdot \dot{p}_3 - r^2 \cdot R \cdot P_2 / J_2 - r \cdot K_2 \cdot x_2$$

Las ecuaciones diferenciales del sistema serán:

$$\dot{x}_1 = P_1 / J_1 - P_2 / J_2$$

$$\dot{x}_2 = r \cdot P_2 / J_2$$

$$\dot{p}_1 = N(t) - K_1 \cdot x_1$$

$$\dot{p}_2 = K_1 \cdot x_1 - r \cdot \dot{p}_3 - r^2 \cdot R \cdot P_2 / J_2 - r \cdot K_2 \cdot x_2$$

Para hallar la relación entre P_3 y P_2 , como de costumbre se hace:

$$P_3 = M \cdot f_9 = M \cdot r \cdot P_2 / J_2$$

Y derivando:

$$\dot{p}_3 = M \cdot r \cdot \dot{p}_2 / J_2$$

Sustituyendo en la última de las ecuaciones diferenciales se tiene:

$$\dot{p}_2 = K_1 \cdot x_1 - r^2 \cdot M \cdot \dot{p}_2 / J_2 - r^2 \cdot R \cdot P_2 / J_2 - r \cdot K_2 \cdot x_2$$

Y despejando, se obtiene definitivamente:

$$\dot{p}_2 = (K_1 \cdot x_1 - r^2 \cdot R \cdot P_2 / J_2 - r \cdot K_2 \cdot x_2) \cdot (1 / (1 + r^2 \cdot M / J_2))$$

4.5 CAUSALIDAD EN LAS PUERTAS RESORTE

Vamos a estudiar la importancia y el significado de la causalidad en las puertas resorte al igual que lo hemos hecho con las puertas inercia.

Observemos el ejemplo de la figura 4.34, del que se conoce la fuerza variable en el tiempo $F(t)$ que se ejerce sobre el punto A, y se desprecian todas las masas excepto la de la carga M.

En la figura 4.34, se representa también el diagrama de grafos con su causalidad.

Se va a comentar solamente la causalidad de las uniones más importantes, ya que el resto del diagrama de grafos no plantea ningún problema.

Al ser el grafo 1 fuente de esfuerzo, define el esfuerzo de la unión 0, por lo que el resto de grafos salen con causa esfuerzo.

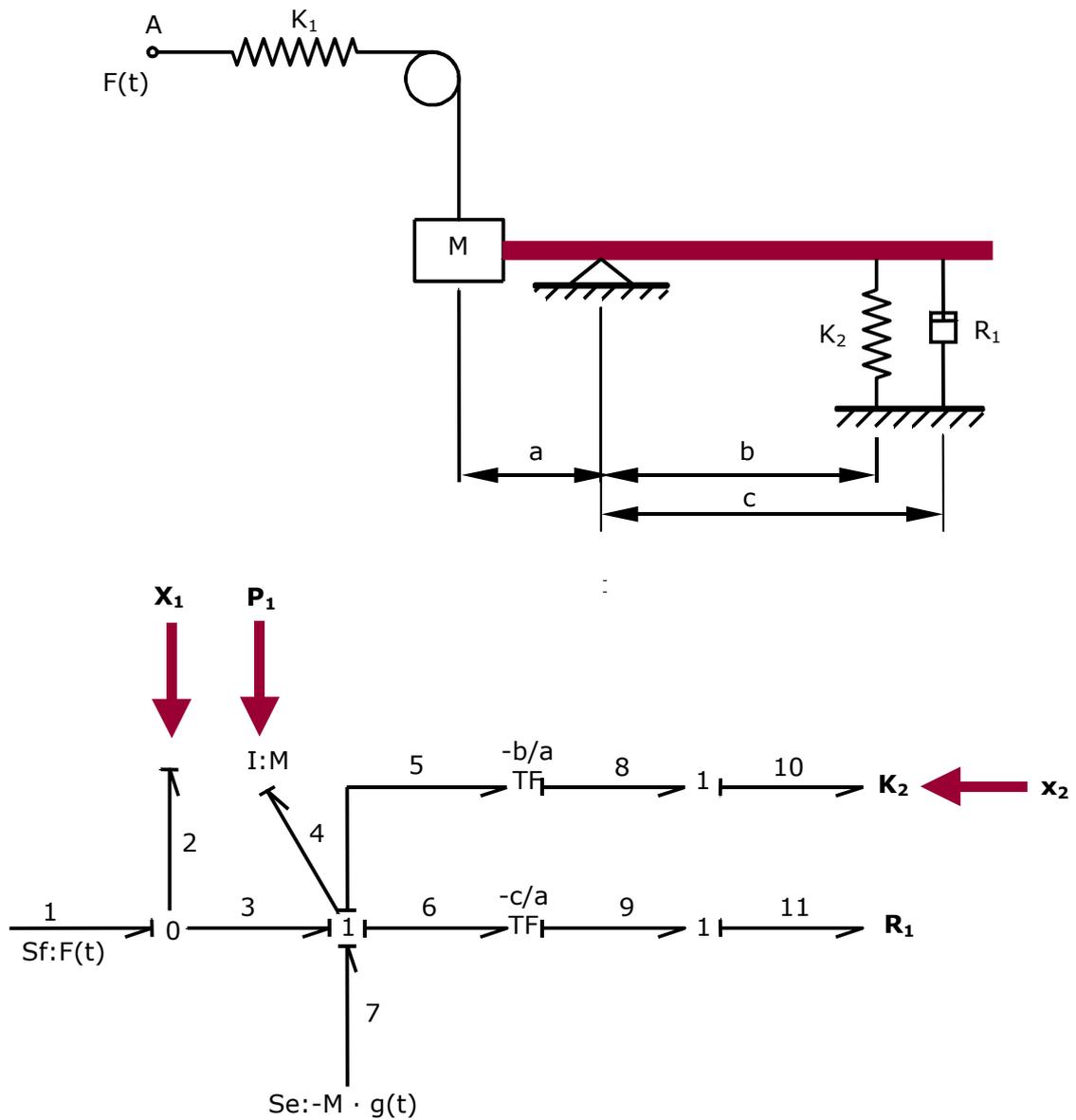


Figura 4.34

Como los grafos 3 y 7 entran con esfuerzo conocido en la unión 1, ninguno de ellos define el flujo de la unión y en consecuencia, se puede elegir causa en la puerta de inercia. Se toma con

causa de entrada; flujo, con lo que se define el flujo de la unión y por lo tanto, los grafos 5 y 6 tienen flujo conocido.

En la figura 4.34, puede verse cómo cada uno de los resortes del sistema tiene un tipo de causa. En el caso de la del grafo 2, la causa de salida de la unión es esfuerzo, lo que significa que el esfuerzo de la unión 0 ya estaba definido por otro grafo. Si este resorte tiene esfuerzo conocido, no tiene sentido definir como variable independiente su desplazamiento asociado.

En definitiva, se tendrá que solamente pueden asociarse variables independientes en las puertas resorte que tengan como causa el flujo en la dirección de su grafo. No obstante, todo lo anterior se entiende mucho mejor si se calculan los flujos y esfuerzos de los grafos.

Flujos

$$f_4 = f_5 = f_6 = f_7 = f_3 = P_1 / M$$

$$f_8 = - b \cdot f_5 / a = - b \cdot P_1 / a \cdot M$$

$$f_9 = - c \cdot f_6 / a = - c \cdot P_1 / a \cdot M$$

$$f_{10} = f_8 = - b \cdot P_1 / a \cdot M$$

$$f_{11} = f_9 = - c \cdot P_1 / a \cdot M$$

De la unión 0, solo se conoce el flujo del grafo 3, con lo que, en principio, no se pueden definir los flujos en los grafos 1 y 2. Para desbloquear la situación se asocia a la puerta resorte (grafo 2) una variable que es el flujo en este grafo \dot{x}_1 , analizando posteriormente si es o no variable independiente.

$$f_2 = \dot{x}_1$$

$$f_1 = f_3 + f_2 = P_1 / M + \dot{x}_1$$

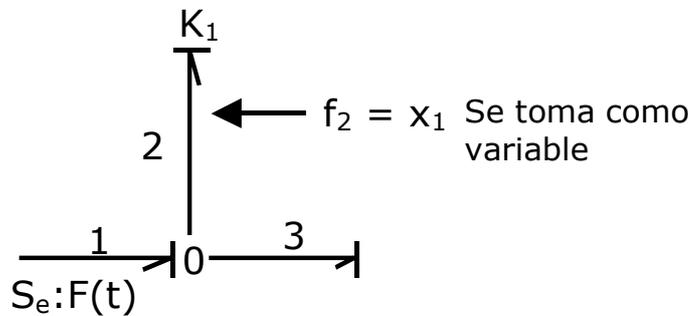


Figura 4.35

Esfuerzos

$$e_1 = e_2 = F(t)$$

Como se comentaba anteriormente, el esfuerzo en el resorte, grafo 2, no se hace en este caso igual a $K_1 \cdot x_1$, ya que el esfuerzo en este grafo viene dado por el resto del sistema.

Siguiendo con los esfuerzos:

$$e_3 = F(t)$$

$$e_{10} = K_2 \cdot x_2$$

El resorte del grafo 10 tiene como causa en la dirección de su grafo el flujo y como siempre, se le asocia su desplazamiento como variable independiente del sistema.

$$e_8 = e_{10} = K_2 \cdot x_2$$

$$e_5 = -b \cdot e_8 / a = -b \cdot K_2 \cdot x_2 / a$$

$$e_{11} = e_9 = f_{11} \cdot R_1 = -c \cdot P_1 \cdot R_1 / a \cdot M$$

$$e_6 = -c \cdot e_9 / a = c^2 \cdot P_1 \cdot R_1 / a^2 \cdot M$$

$$e_7 = -M \cdot g$$

$$e_4 = e_3 + e_7 - e_5 - e_6 = F(t) - M \cdot g + b \cdot K_2 \cdot x_2 / a - c^2 \cdot P_1 \cdot R_1 / a^2 \cdot M$$

Para plantear las ecuaciones diferenciales del sistema, queda analizar si la variable x_1 asociada al grafo 2, es variable independiente o dependiente. Si se observa la figura 4.34, se ve que el sistema tiene dos grados de libertad; uno para posicionar el punto A y el otro para posicionar el resto del mecanismo. En consecuencia, la variable x_1 es independiente y todas las puertas resorte llevarán asociadas variables independientes; en unos casos, el desplazamiento y en otros, el flujo.

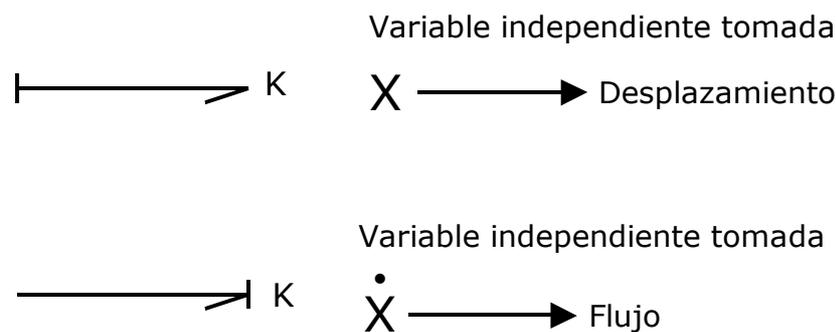


Figura 4.36

Las ecuaciones diferenciales del sistema serán las de los flujos en las puertas resorte, y las de los esfuerzos en las puertas inercia.

$$f_2 = \dot{x}_1$$

$$f_{10} = \dot{x}_2 = -b \cdot P_1 / a \cdot M$$

$$e_4 = \dot{p}_1 = F(t) - M \cdot g + b \cdot K_2 \cdot x_2 / a - c^2 \cdot P_1 \cdot R_1 / a^2 \cdot M$$

Queda por aclarar el hecho de que aun siendo un sistema de dos grados de libertad, el número de ecuaciones diferenciales de primer orden no sea cuatro sino tres, debido a que el punto A no tiene asociada ninguna masa y por lo tanto no puede plantearse el esfuerzo en la puerta inercia que representaría a esta masa.

Para poder resolver la primera de estas ecuaciones, hay que recordar que el esfuerzo en una puerta resorte es igual al producto de su rigidez por su desplazamiento.

Sea x_1 el desplazamiento en el grafo 2.

$$e_2 = K_1 \cdot x_1$$

Sustituyendo e_2 por su valor:

$$F(t) = K_1 \cdot x_1$$

De donde:

$$x_1 = F(t) / K_1$$

Y derivando:

$$\dot{x}_1 = \dot{F}(t) / K_1$$

Definitivamente, las ecuaciones diferenciales del sistema serán:

$$\dot{x}_1 = \dot{F}(t) / K_1$$

$$\dot{x}_2 = -b \cdot p_1 / a \cdot M$$

$$\dot{p}_1 = F(t) - M \cdot g + b \cdot K_2 \cdot x_2 / a - c^2 \cdot p_1 \cdot R_1 / a^2 \cdot M$$

4.6 CAUSALIDAD EN LAS PUERTAS RESISTENCIA

Utilicemos como ejemplo ahora, el esquema eléctrico representado en la figura 4.37. La realización del diagrama de grafos y de la causalidad no ofrece ningún problema, así que centraremos la atención en la causa de las puertas resistencia.

Como de costumbre, se toman como variables independientes el momento asociado a la puerta de inercia y el desplazamiento asociado a la puerta resorte.

Para ver la diferencia que supone la diferente causalidad de las puertas resistencia, vamos a comenzar calculando los flujos y esfuerzos en los grafos.

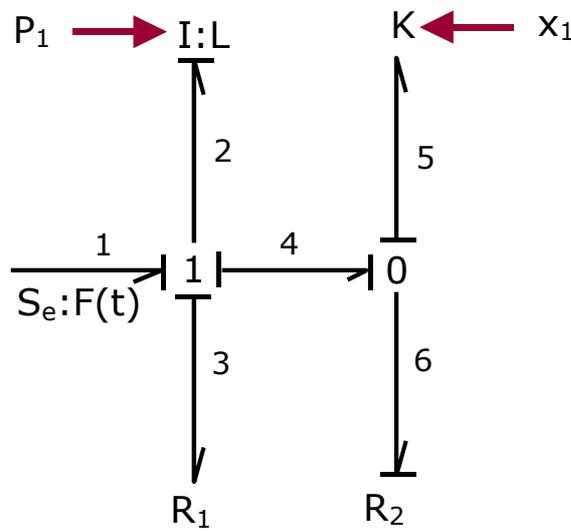
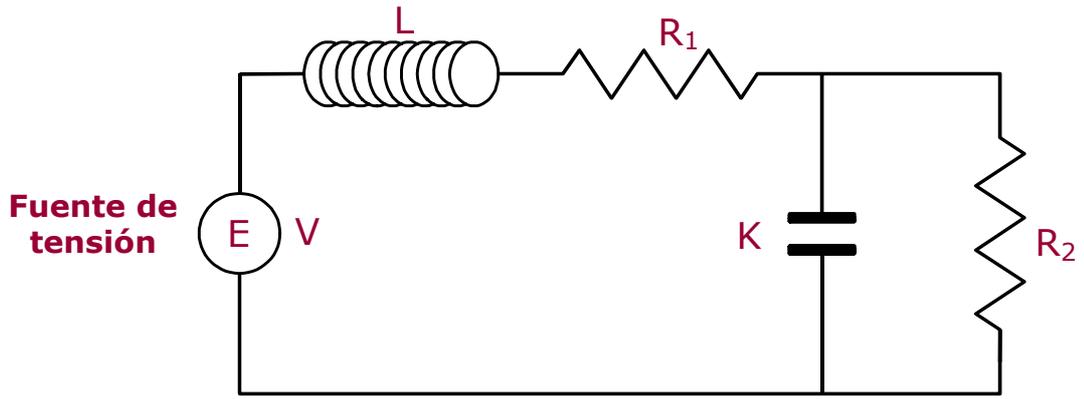


Figura 4.37

Flujos

$$f_2 = f_1 = f_3 = P_1/L$$

El grafo 3 es una puerta resistencia con causa de salida flujo, lo que significa que el resto del sistema define el flujo de este grafo, ya que él no hace más que tomar el de la unión 1 a que pertenece.

$$f_4 = P_1/L$$

Como no se puede definir el flujo en los grafos 5 y 6, se pasa a calcular los esfuerzos.

Esfuerzos

$$e_1 = V$$

$$e_5 = e_4 = e_6 = K \cdot x_1$$

$$e_3 = f_3 \cdot R_1 = P_1 \cdot R_1/L$$

$$e_2 = e_1 - e_3 - e_4 = V - P_1 \cdot R_1/L - K \cdot x_1$$

Una vez calculados los esfuerzos, se vuelve a los flujos para terminar de definirlos.

$$f_6 = e_6 / R_2 = K \cdot x_1 / R_2$$

$$f_5 = f_4 - f_6 = P_1 / L - K \cdot x_1 / R_2$$

Ya se había comenzado a analizar el comportamiento de las puertas resistencia, cuando se definía el flujo del grafo 3. Cuando se llega al esfuerzo en este grafo, se define como el producto de su coeficiente por el flujo.

Siempre que la causa de salida en una puerta resistencia sea el flujo, se cumplirá lo anteriormente expuesto.



Figura 4.38

En el caso de la puerta resistencia, grafo 6, la causa de salida es esfuerzo, lo que significa que el esfuerzo asociado a su grafo viene definido por el sistema.

A diferencia de las puertas de inercia, la causalidad en las puertas resistencia no define ningún tipo de variables independientes o dependientes, y se utiliza solamente en la definición de los flujos y esfuerzos de los grafos.

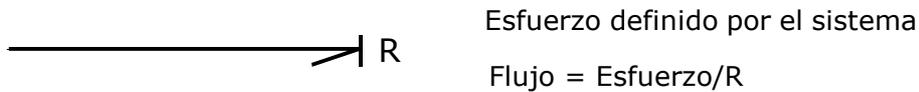


Figura 4.39

4.7 EL PÉNDULO

Estudiaremos el péndulo representado en la figura 4.40. Posee longitud l y masa concentrada en el extremo m .

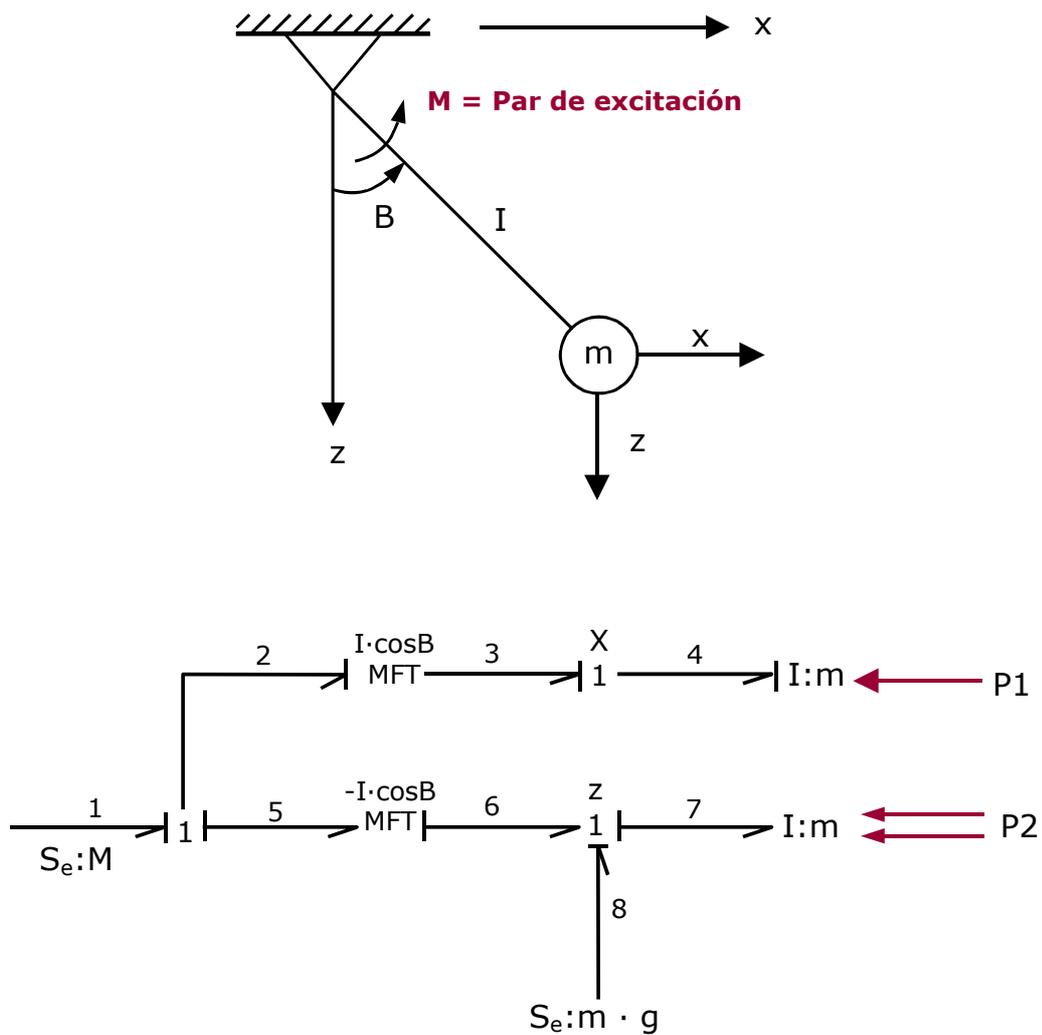


Figura 4.40

Evidentemente, el sistema tiene un único grado de libertad aunque en el diagrama de grafos aparecen dos puertas de inercia que inducirían a tomar dos variables independientes. La causalidad es la encargada de descubrir que una de las variables es independiente y la otra dependiente.

Como de costumbre, se toma como variable independiente el momento P_1 asociado a la puerta de inercia que tiene como causa en su dirección el esfuerzo. La otra puerta de inercia será variable dependiente y se le asocia la derivada del momento.

Cálculo de flujos y esfuerzos

$$f_4 = f_3 = P_1/m$$

$$f_2 = f_3/l \cdot \cos B = P_1/m \cdot l \cdot \cos B$$

$$f_1 = f_5 = f_2$$

$$f_6 = f_8 = f_7 = f_5 \cdot (-l \cdot \sin B) = -\frac{P_1}{m \cdot l \cdot \cos B} \cdot l \cdot \sin B = -\frac{P_1}{m} \tan B$$

$$e_7 = \dot{p}_2$$

$$e_8 = m \cdot g$$

$$e_6 = e_7 - e_8 = \dot{p}_2 - m \cdot g$$

$$e_5 = -l \cdot e_6 \cdot \text{sen}B = -(\dot{p}_2 - m \cdot g) \cdot l \cdot \text{sen}B$$

$$e_1 = M$$

$$e_2 = e_1 - e_5 = M + (\dot{p}_2 - m \cdot g) \cdot l \cdot \text{sen}B$$

$$e_3 = e_2 / l \cdot \text{cos} B = (M + l \cdot (\dot{p}_2 - m \cdot g) \text{sen}B) / (l \cdot \text{cos} B)$$

La ecuación diferencial del sistema será:

$$dP_1/dt = e_4 = (M + l \cdot (\dot{p}_2 - m \cdot g) \text{sen}B) / (l \cdot \text{cos} B)$$

En esta ecuación es necesario poner \dot{p}_2 en función de \dot{p}_1 .

Para ello, volviendo sobre el flujo en el grafo 7, puede ponerse:

$$f_7 = p_2 / m$$

Y por el cálculo desarrollado:

$$f_7 = -p_1 \cdot \text{sen}B / m \cdot \text{cos} B$$

Igualando ambas expresiones:

$$p_2 / m = -p_1 \cdot \text{sen}B / m \cdot \text{cos} B$$

$$p_2 = -p_1 \cdot \text{tag}B$$

Derivando ambos miembros de la ecuación, sustituyendo este valor y despejando, se obtiene definitivamente la ecuación diferencial en P_1 del sistema.

4.8 MOTORES DE EXCITACIÓN SERIE

En el caso de los motores de corriente continua con excitación en serie, la resistencia y la bobina de excitación R_e y L_e , están en serie con la resistencia y la bobina de la armadura R_a , L_a .

En el motor se considera la inercia J de la parte giratoria y también el rozamiento R en los cojinetes.

La figura 4.41, muestra el esquema del motor y su diagrama de grafos.

La intensidad de excitación i_e , modifica la razón del elemento gyrator y, en la práctica, puede ponerse que:

$$T = A \cdot i_e$$

En donde:

T = Razón del elemento gyrator.

A = Constante que depende de las características constructivas del motor.

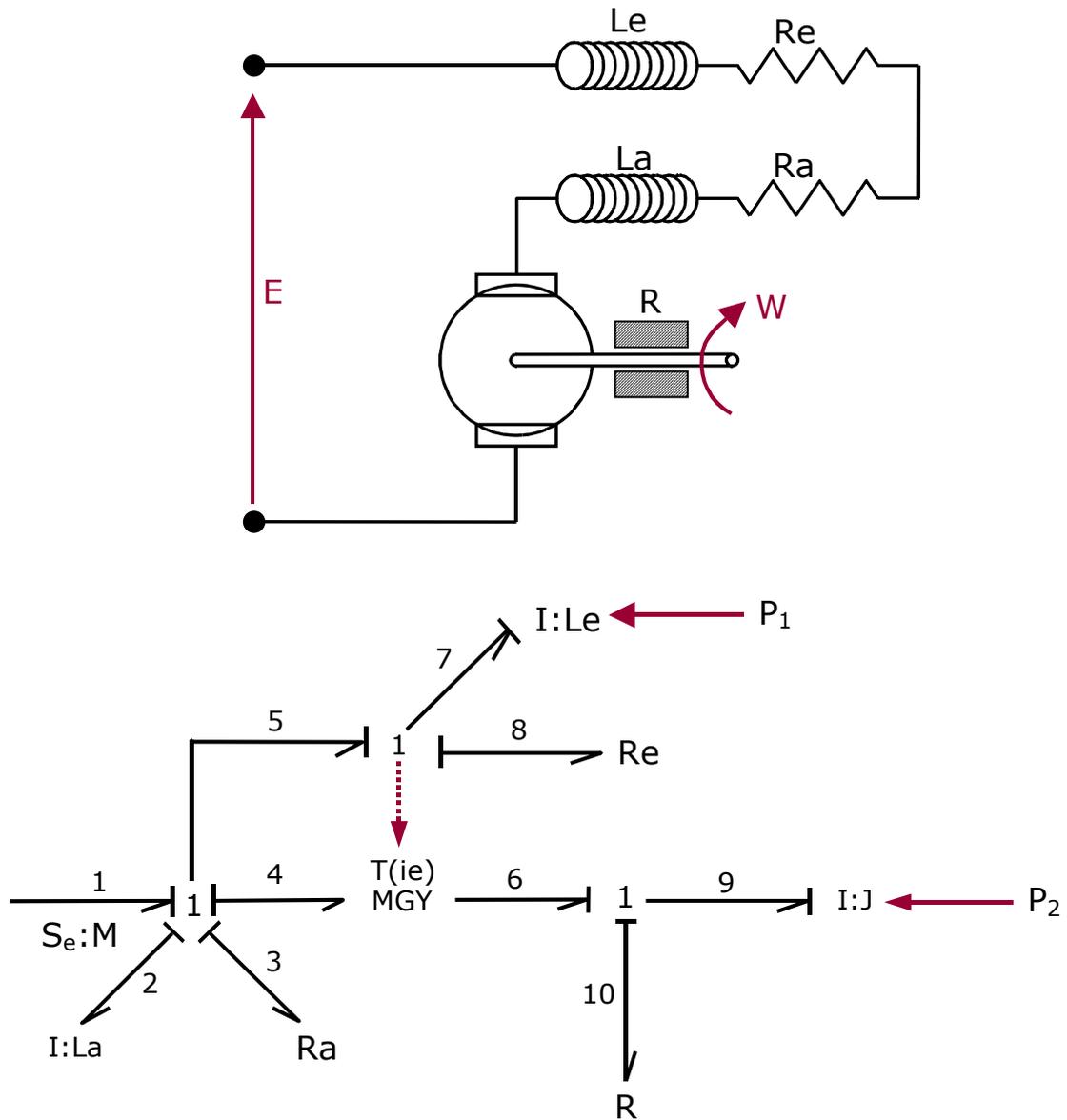


Figura 4.41

Como la razón del elemento gyrator es variable, se ha representado como MGY. Por otra parte, como la razón depende de la intensidad i_e se añade una línea de puntos, que partiendo de la unión 1 que representa esta intensidad, llega hasta la razón $T(i_e)$ del gyrator. Mediante la causalidad se observa que la inercia del grafo 2 tiene causalidad flujo en la dirección de su grafo, es decir, el flujo de este grafo queda definido por el resto del modelo.

Como ya se ha comentado anteriormente, si el flujo es conocido no puede elegirse como variable independiente del sistema el momento asociado a esta puerta de inercia. El hacerlo significaría que se ha tomado como variable independiente el flujo que ya está definido por el resto del sistema, lo cual puede observarse en la causalidad.

Efectivamente:

Momento = Inercia x Flujo

La inercia es una constante, elegir el **momento** como variable independiente es lo mismo que determinar que el flujo es variable independiente.

Para calcular los flujos y esfuerzos se toman como variables independientes los momentos asociados a las puertas de inercia de los grafos 7 y 9, ya que en ellas la causalidad es esfuerzo.

Siguiendo los pasos habituales se hallan los flujos y esfuerzos, haciendo $e_2 = \dot{P}_3$ y tomando \dot{P}_3 como variable auxiliar.

El flujo del grafo 2 tiene de valor:

$$f_2 = P_1 / L_e$$

Aunque también puede definirse como:

$$f_2 = P_3 / L_a$$

Igualando ambas expresiones de f_2 :

$$P_3 / L_a = P_1 / L_e \text{ de donde } P_3 = P_1 \cdot L_a / L_e$$

Y como L_a y L_e no dependen del tiempo, la primera derivada de P_3 vale:

$$\dot{P}_3 = \dot{P}_1 \cdot L_a / L_e$$

Sustituyendo este valor en e_7 se obtienen definitivamente las ecuaciones diferenciales del modelo que en forma matricial son:

$$\frac{d}{dt} \begin{vmatrix} P_1 \\ P_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -(R_z + R_e)/(L_a + L_e) & -L_e \cdot T(i_e)/J \cdot (L_e + L_z) \\ T(i_e)/L_e & -R/J \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} P_1 \\ P_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E \cdot L_e / (L_a + L_e) \\ 0 \end{vmatrix}$$

4.9. GRUPO DIFERENCIAL

Un caso especial y de gran aplicación de los engranajes planetarios, lo constituye el grupo diferencial de los automóviles. En la figura 4.43 se representa un esquema de este mecanismo. En síntesis, consiste en un engrane cónico sobre una caja de engranajes planetarios. La caja arrastra en su movimiento dos ruedas dentadas que se denominan satélites que a su vez, al girar hacen moverse a las ruedas dentadas acopladas a los ejes de salida. Estos ejes se denominan palieres.

El mecanismo diferencial toma un par de entrada y lo transforma en dos pares de salida que actúan en una dirección perpendicular al de entrada y en ambos sentidos.

Para facilitar el estudio del diferencial se comenzará analizando un mecanismo equivalente representado en la figura 4.43.

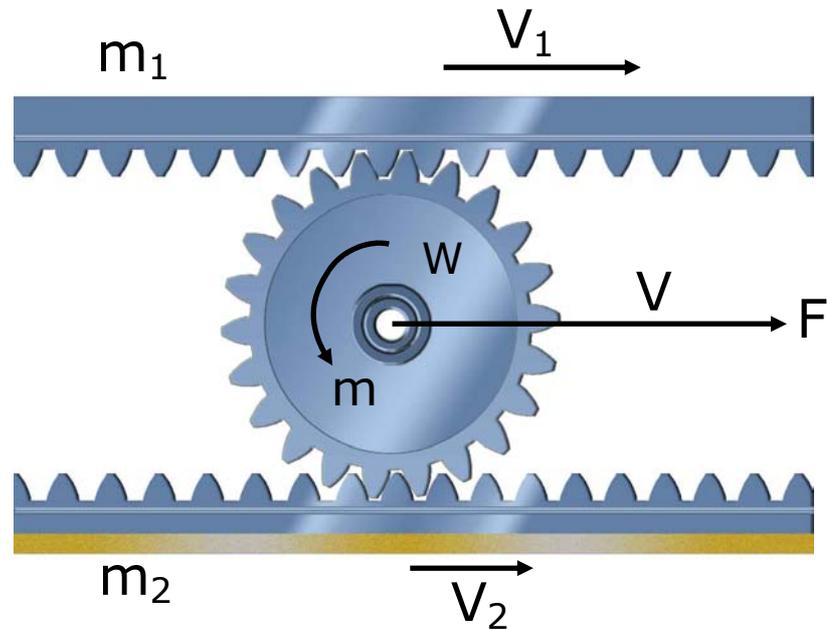


Figura 4.43

Está formado por una rueda dentada de radio r y masa m , que engrana con dos cremalleras. Sobre el centro de la rueda dentada, que puede girar libremente, se aplica una fuerza F . La rueda dentada equivale a uno de los satélites del diferencial y la fuerza F es la acción de la caja del diferencial sobre el eje del satélite. A su vez, las cremalleras equivalen a las ruedas dentadas del extremo de los palieres.

Al principio, la velocidad de desplazamiento del conjunto de las tres piezas será V . Pero si una de las dos cremalleras cambia su velocidad, por aparecer una resistencia o imponérsele una velocidad diferente, comienza a girar el satélite con una velocidad ω .

En este caso las velocidades V_1 y V_2 de las cremalleras serán:

$$V_1 = V + \omega \cdot r$$

$$V_2 = V - \omega \cdot r$$

En cuanto a las fuerzas ejercidas sobre las dos cremalleras (equivalentes a los pares que actúan sobre los palieres), se tiene:

Tomando momentos respecto al centro o , de la rueda dentada:

$$(F_2 - F_1) \cdot r = I_0 \cdot \dot{\omega}$$

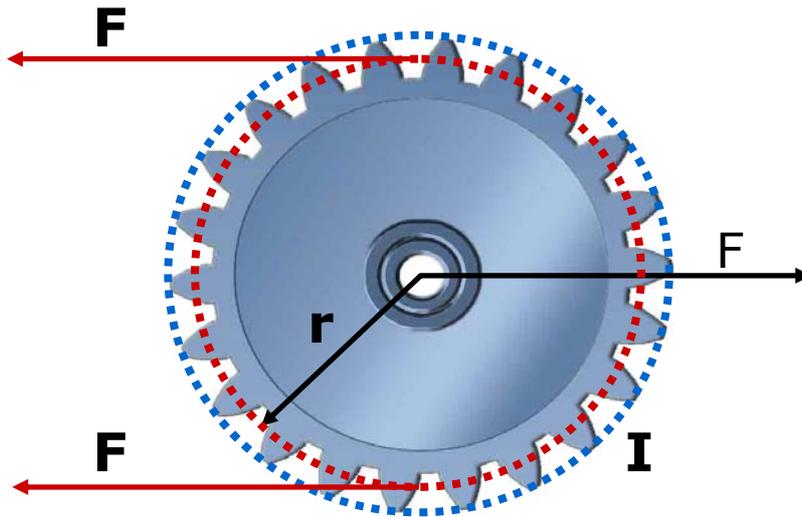


Figura 4.44

Cuando $\dot{\omega} = 0$, o bien cuando se considera despreciable su inercia I_0 , es decir; $I_0 = 0$, se cumple que:

$$F_1 = F_2$$

Por tanto, los pares en los palieres son iguales solamente en régimen estacionario ($\omega = \text{cte}$), o cuando I_0 es despreciable. En la práctica, se suele considerar que $I_0 \approx 0$.

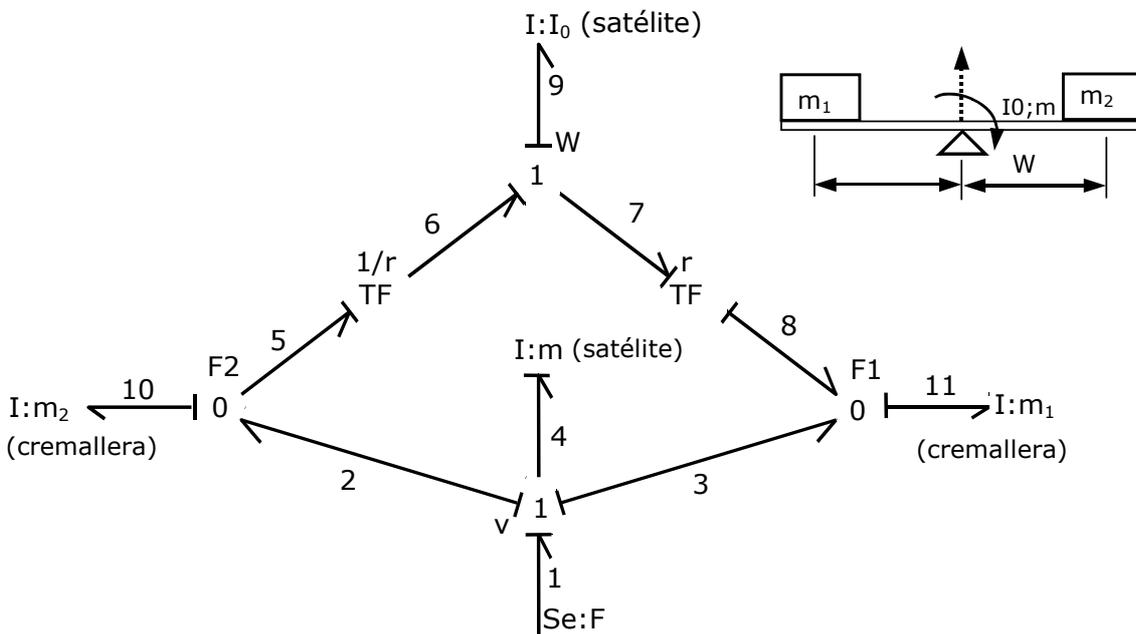


Figura 4.45

En la figura 4.45, se representa el Bond-Graph de este mecanismo equivalente, que es análogo al de una barra con masas en sus extremos.

Haciendo la causalidad se comprueba que hay dos grados de libertad V y ω .

Calculando los flujos en los grafos 10 y 11 se tiene:

$$f_{10} = V - \omega \cdot r$$

$$f_{11} = V + \omega \cdot r$$

Y en cuanto a los esfuerzos, haciendo despreciable tanto la masa como la inercia del satélite ($m = 0$; $I_0 = 0$), se tiene:

$$e_6 = e_9 + e_7$$

Como $I_0 = 0$ $e_9 = 0$,

$$e_6 = e_7$$

$$e_{11} = e_8 = e_7 / r$$

$$e_{10} = e_5 = e_6 / r$$

Y en definitiva:

$$e_{10} = e_{11}$$

$$e = e_2 = e_3$$

$$e_1 = e_2 + e_3 + e_4$$

Como $e_4 = 0$ por ser $m = 0$

$$e = e_1 / 2$$

En conclusión: $e_{10} = e_{11} = e_1 / 2$

Se cumple lo que ya se había demostrado, es decir, que a cada cremallera le llega el mismo esfuerzo, de valor; la mitad de F , siempre y cuando se considere que $I_0 = m = 0$.

En el mecanismo diferencial esto significa que para $I_0 = m = 0$, los pares transmitidos a los palieres son iguales y de valor: la mitad del par de entrada en el mecanismo.

La causalidad del Bond-Graph del modelo puede realizarse de otra forma: tal y como se muestra en la figura 4.46.

En este caso, los dos grados de libertad del mecanismo son los desplazamientos de las dos cremalleras y por lo tanto, ω y V son variables dependientes de $V_1 \cdot V_2$.

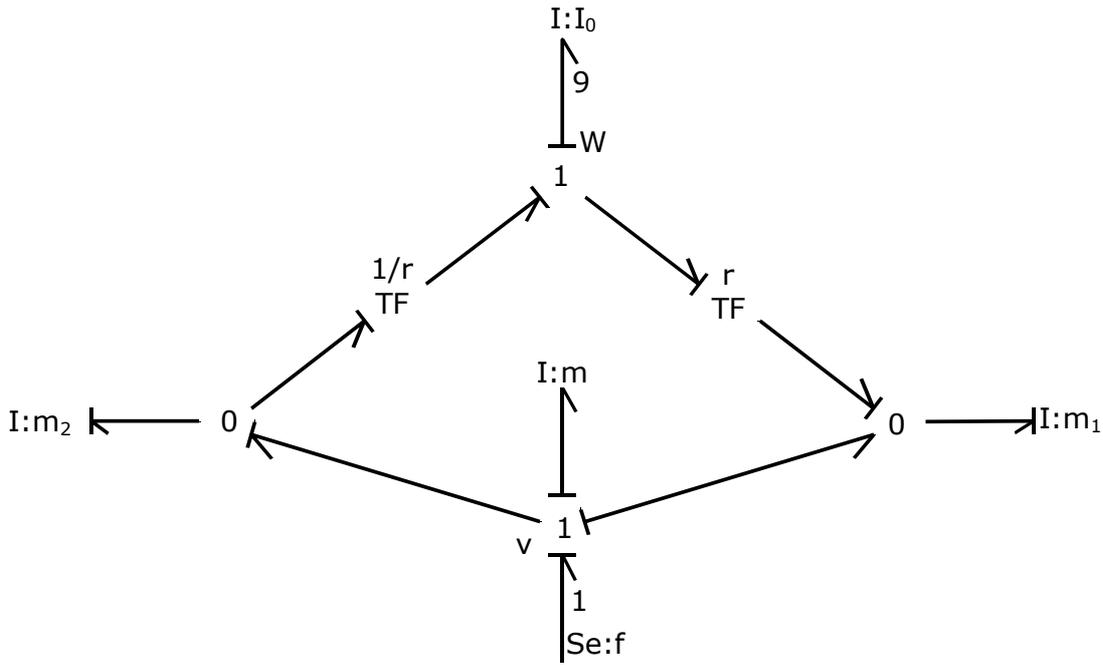
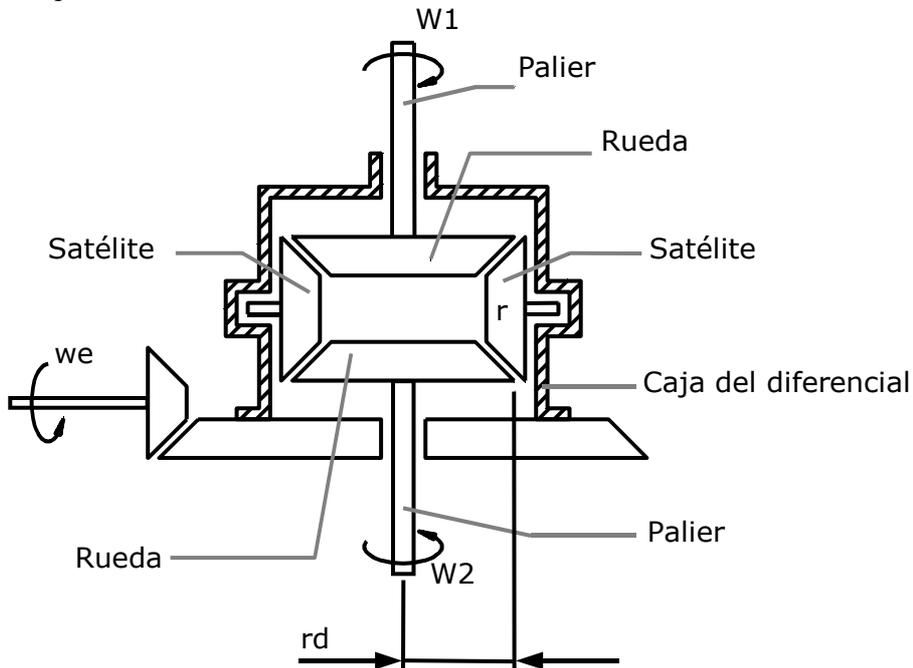


Figura 4.46

7.10 BOND-GRAPH DEL DIFERENCIAL REAL

Para trasladar todo lo desarrollado al diferencial, hay que convertir los movimientos de traslación del mecanismo equivalente en los movimientos de rotación del diferencial real.



w_e = Velocidad angular de entrada al grupo cónico

r = Radio del satélite

w_r = Velocidad angular de la caja de engranaje

r_d = Radio rueda dentada del palier

Figura 4.47

Para ello, se añade un transformer de razón r_d a la entrada y otro de razón $1/r_d$ en cada lado de la salida. En la figura 4.48, se representa el Bond-Graph resultante. Como se observa en la figura 4.47, el diferencial tiene dos satélites y su mecanismo equivalente sería el representado en la figura 4.49, que resulta ser hiperestático.

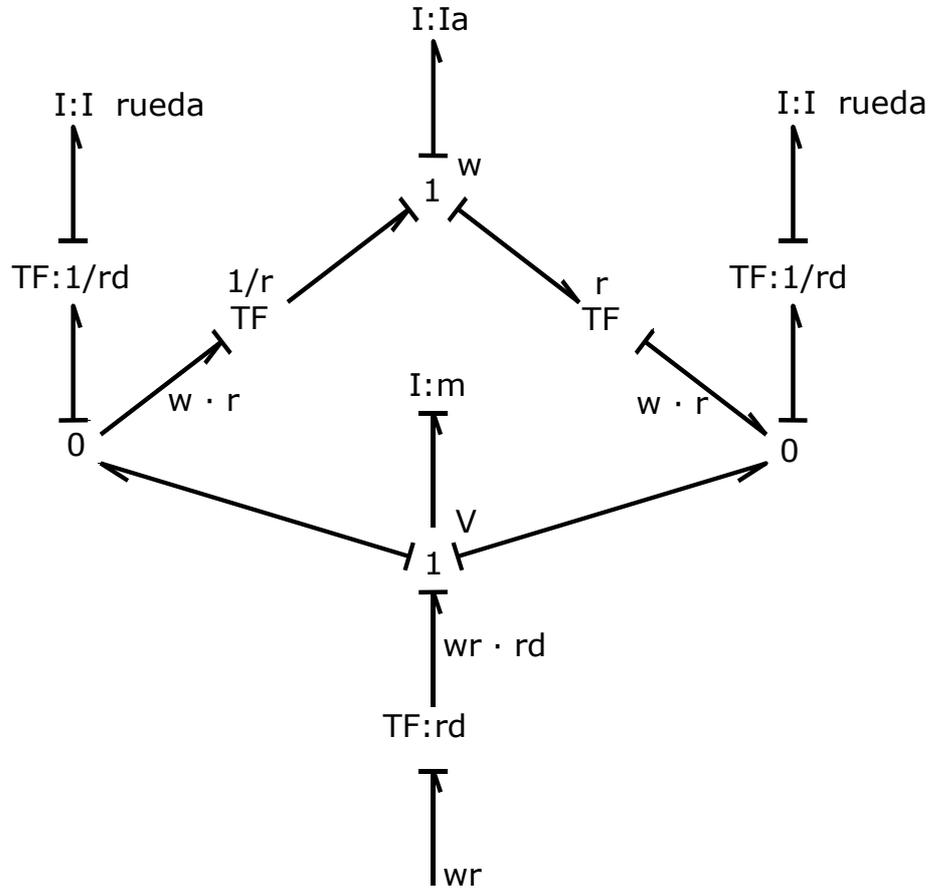


Figura 4.48

La acción que ejerce cada satélite sobre la cremallera depende no solo de la fuerza F sino también de la deformación que pueda sufrir la barra que une las dos ruedas. Esta barra es equivalente en el diferencial a la propia caja del mismo. Si se desprecia la deformación de esta caja, el mecanismo del diferencial se modeliza con un único satélite que tendrá la masa e inercia de la suma de los dos satélites del diferencial real.

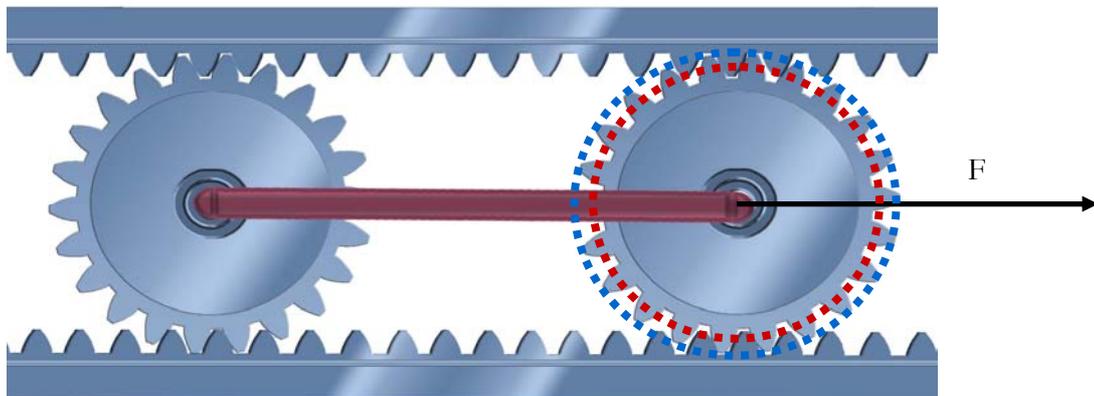


Figura 4.49

En la figura 4.50, se representa el Bond-Graph completo del diferencial.

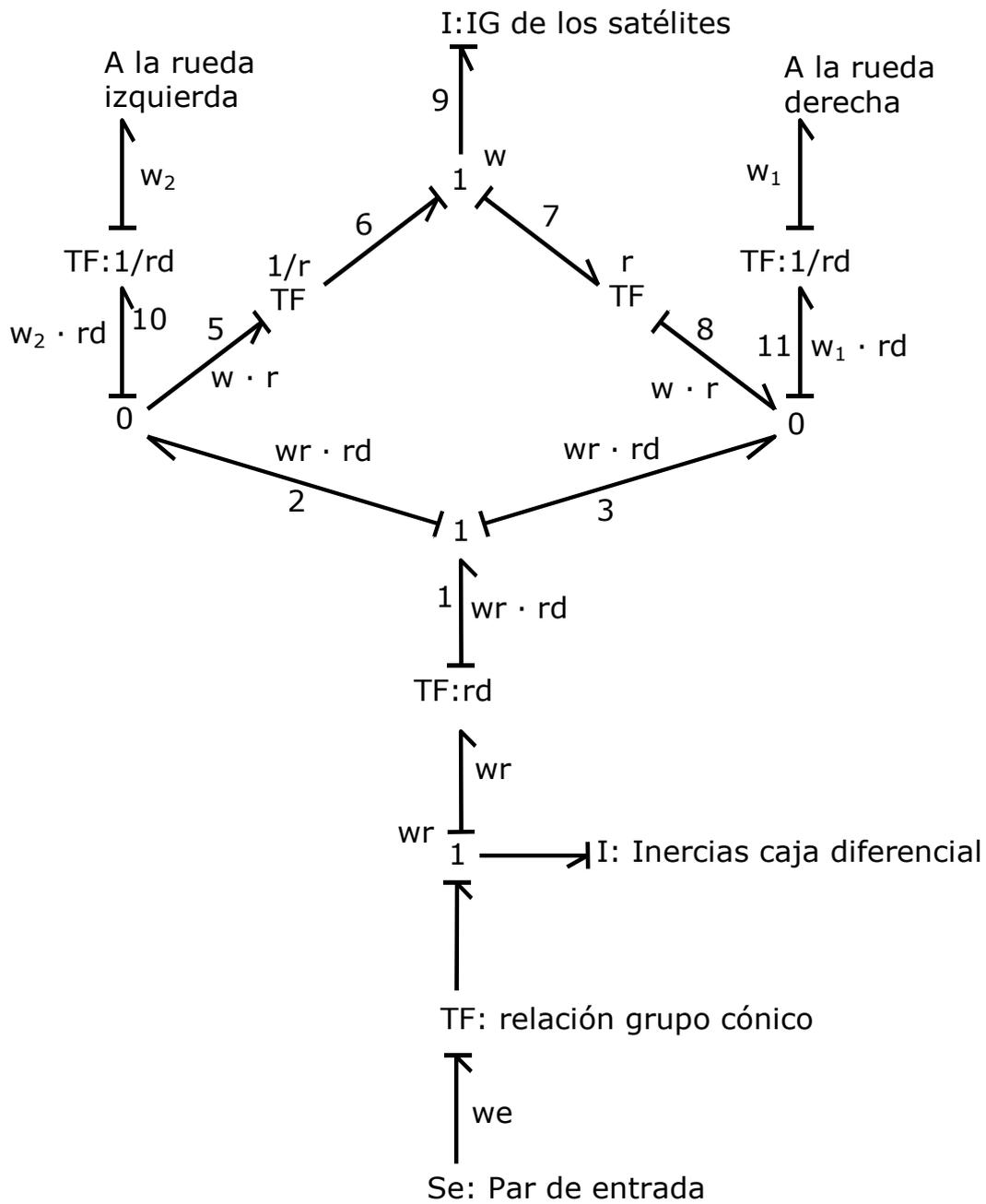


Figura 4.50

Comprobemos ahora la simulación del diferencial. Para ello, recordemos que las características fundamentales de este mecanismo son:

$$w_r = (w_1 + w_2)/2$$

Y en cuanto a los pares:

$$N_1 = N_2 = N \text{ entrada}/2$$

En el Bond-Graph del diferencial al que se ha llegado, se cumple que:

$$w_r \cdot r_d - \omega \cdot r = w_2 \cdot r_d$$

$$w_r \cdot r_d + \omega \cdot r = w_1 \cdot r_d$$

Sumando ambas ecuaciones queda así:

$$2 \cdot w_r \cdot r_d = (w_1 + w_2) \cdot r_d$$

Y definitivamente:

$$w_r = (w_1 + w_2)/2$$

En cuanto a los esfuerzos, se tendrá que:

$$e_{10} = e_5 = e_6 / r$$

Por otra parte:

$$e_6 = e_9 + e_7$$

$$e_7 = e_8 \cdot r$$

Sustituyendo estas dos expresiones en la inicial se tiene:

$$e_{10} = e_5 = (e_9 + e_7)/r = (e_9 + e_8 \cdot r)/r = e_9 / r + e_8$$

Y como $e_8 = e_{11}$

$$e_{10} = e_9 / r + e_{11}$$

Por otra parte, se cumple que:

$$e_1 = e_2 + e_3 = e_{10} + e_{11}$$

Por tanto:

$$e_{10} = e_9 / r + e_{11} = e_9 / r + e_1 - e_{10} ; \quad e_{10} = (e_1 + e_9 / r)/2$$

$$e_{11} = e_1 - e_{10} = e_1 - (e_1 + e_9 / r)/2 ; \quad e_{11} = (e_1 - e_9 / r)/2$$

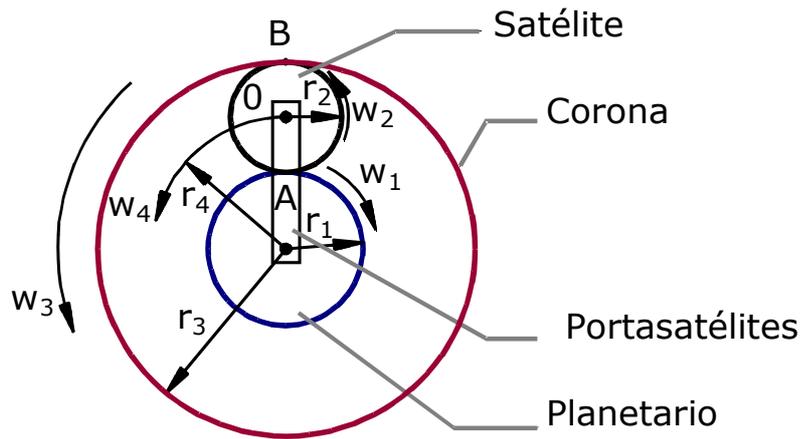
Si se supone despreciable la inercia de los satélites, es decir, $I_0=0$, el valor de e_9 será también prácticamente nulo. En este caso se cumple que:

$$e_{10} = e_{11} = e_1 / 2$$

O lo que es lo mismo; los pares en la salida son iguales en ambos palieres y su valor, la mitad del par de entrada.

4.11 GENERALIZACIÓN A LOS ENGRANAJES PLANETARIOS

El Bond-Graph de los engranajes planetarios en general se puede obtener fácilmente siguiendo un procedimiento análogo al empleado con el diferencial. En la figura 4.51 se presenta el esquema de un engranaje planetario y su Bond-Graph.



I:I planetaria

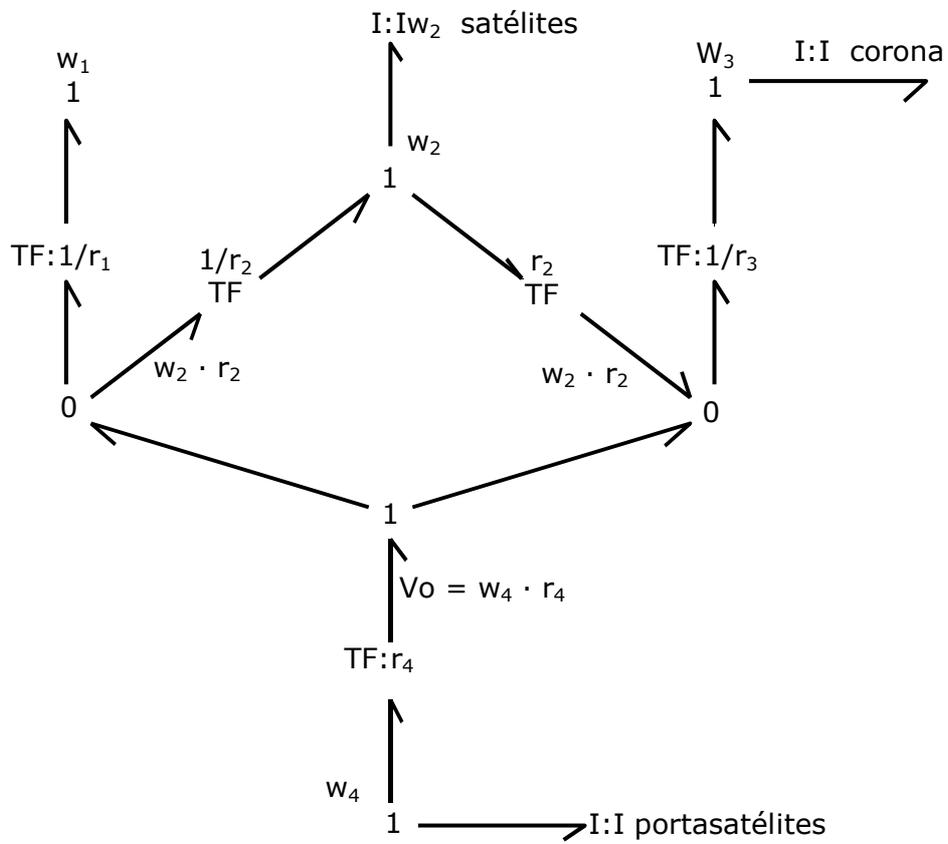


Figura 4.51