

Aplicación de Bond-Graph a Electricidad

6.1. INTRODUCCIÓN.

Como ya comentamos en el primer capítulo, en electricidad y también en electrónica el grafo lleva asociado como esfuerzo la tensión eléctrica y como flujo la intensidad.

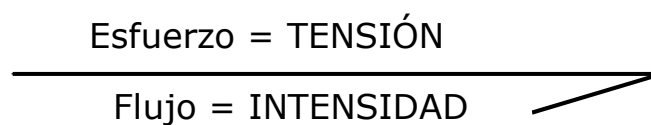


Figura 6.1

El producto de los valores asociados al grafo es, como en todos los casos anteriores, la potencia. Si en otros dominios de la física la construcción del diagrama de grafos es sencilla, en el caso de la electricidad lo es todavía más. Como se verá posteriormente, en la mayoría de los casos basta con seguir la intensidad a lo largo del circuito para poder desarrollar completamente el diagrama de grafos.

Las puertas clásicas de Bond-Graph tienen en electricidad el siguiente significado:

Puerta resorte

Las puertas resorte en electricidad simulan los condensadores ya que en un condensador se almacena energía y se cumple que:

$$\text{TENSION} = q/C$$

En donde:

C = Capacidad del condensador

q = Carga del condensador

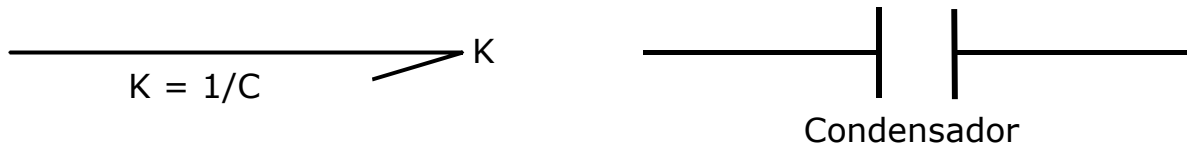


Figura 6.2

Se toma como razón de la puerta resorte la inversa de la capacidad C del condensador.

Puerta resistencia

Este elemento simula la resistencia eléctrica; el lugar donde se producen las pérdidas del circuito eléctrico. En ellas se cumple que:

$$\text{TENSIÓN} = i \cdot R$$

En donde:

i = Intensidad

R = Valor de la resistencia eléctrica



Figura 6.3

Puerta inercia

Sirve para representar el comportamiento de las bobinas eléctricas.

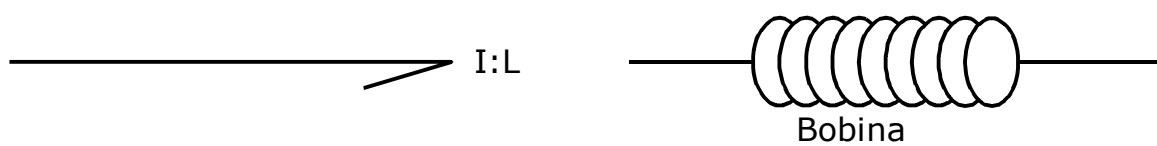


Figura 6.4

En donde:

L = Inductancia de la bobina

Si la intensidad que circula por la bobina es i y $P = L \cdot \dot{i}$ puede decirse que:

$$i = P/L$$

Cumpléndose también que:

$$\text{TENSIÓN} = dP/dt = L \cdot di/dt$$

Fuentes de tensión y de intensidad

Como se observa en la figura 6.5, las fuentes de tensión son fuentes de esfuerzo, mientras que las fuentes de intensidad lo son de flujo.

Variables independientes

Se toman como variables independientes, al igual que en los demás dominios de la física, los momentos asociados a las puertas de inercia y los desplazamientos asociados a las puertas resorte.

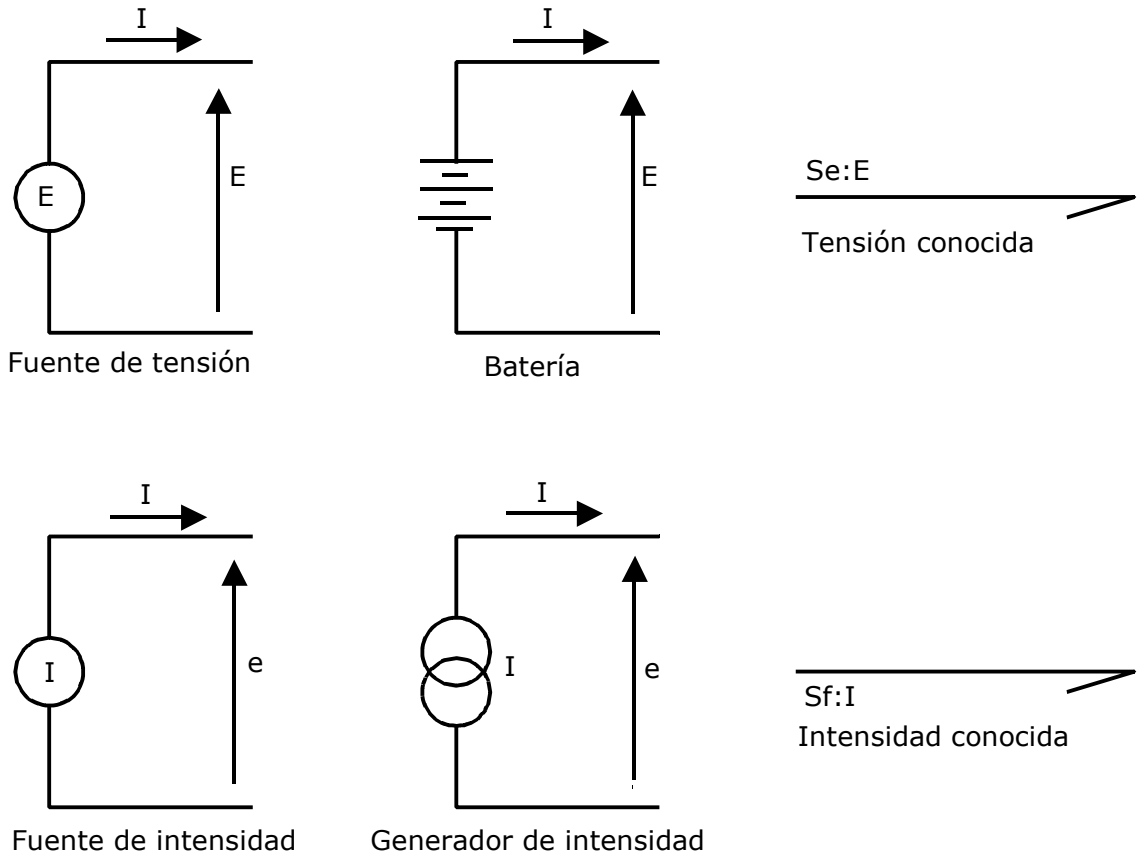


Figura 6.5

En Electricidad:

Momento $P = L \cdot i$

Desplazamiento $x = q$

Siendo q la carga eléctrica.

Como ecuaciones diferenciales se plantean las derivadas respecto al tiempo de los momentos y los desplazamientos.

$dP/dt = L \cdot di/dt =$ Tensión en el grafo de la puerta de inercia.

$dx/dt = dq/dt =$ Intensidad en el grafo de la puerta resorte.

Por cada grado de libertad del sistema existe una ecuación diferencial de segundo orden que define su comportamiento. Mediante la técnica de Bond-Graph, en su lugar se plantean dos ecuaciones de primer orden por cada grado de libertad, lo que facilitará posteriormente la aplicación de los diferentes algoritmos de resolución de ecuaciones diferenciales.

Sistemas electromecánicos

Alrededor de un núcleo magnético se ha colocado una bobina que está sometida a una tensión e_b por la que pasa una intensidad i_b .

El conjunto de bobina y núcleo crea un campo magnético en donde un hilo conductor es desplazado con un esfuerzo F a una velocidad V .

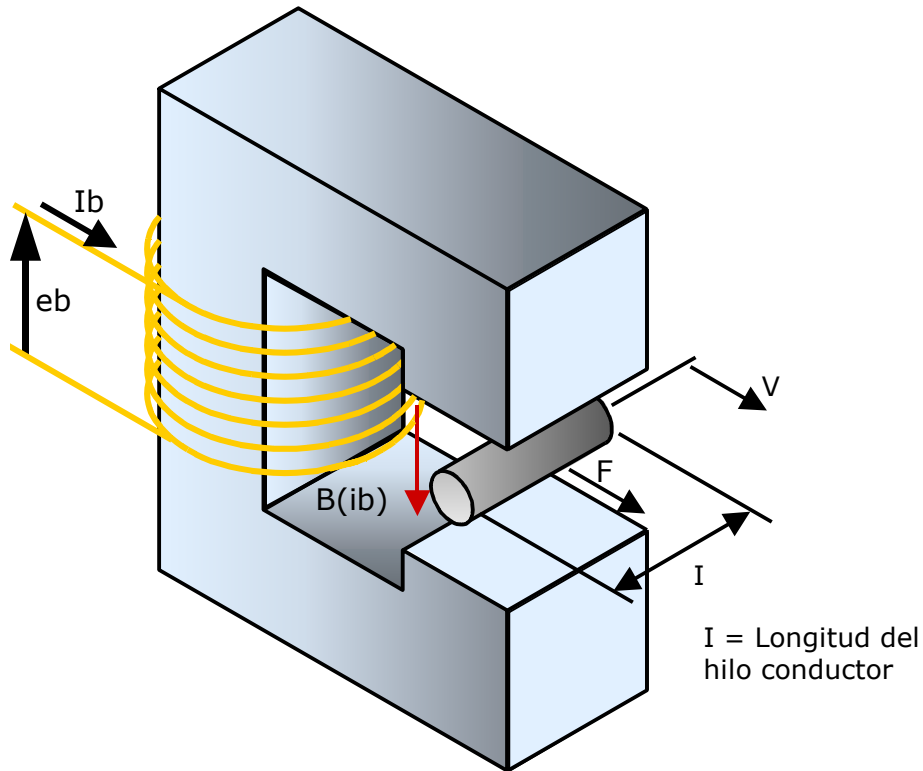


Figura 6.6

El campo magnético creado depende de la intensidad i_b que pasa por la bobina y se representa como $B(i_b)$.

Al desplazarse el hilo conductor dentro del campo magnético aparece en el hilo una tensión e , cuyo valor según la ley de Faraday es:

$$e = B(i_b) \cdot l \cdot v$$

Por el hilo conductor pasa una intensidad que según la ley de Lorentz vale:

$$i = F/B(i_b) \cdot l$$

El fenómeno que se produce en el hilo conductor se representa en Bond-Graph mediante un elemento GYRATOR de razón variable $B(i_b) \cdot l$

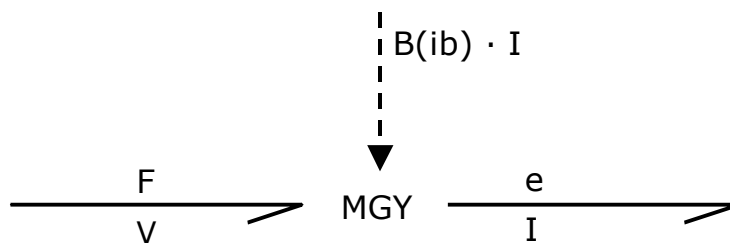


Figura 6.7

Como la razón es variable el gyrator se representa por MGY. Este elemento permite el cambio de la mecánica a la electricidad.

A la inversa, si sobre el hilo conductor se hace pasar una intensidad i y se le somete a una tensión e , aparece sobre él una fuerza F que lo desplaza a una velocidad V , y se siguen cumpliendo las leyes de Faraday y Lorentz.

Como puede observarse, el elemento gyrator simula perfectamente ambos funcionamientos.

6.2. EJEMPLO DE LA APLICACIÓN DE BOND-GRAPH A ELECTRICIDAD

En la figura 6.2, se representa un circuito eléctrico cualquiera compuesto por resistencias, condensadores, bobinas y excitación por medio de una fuente de tensión.

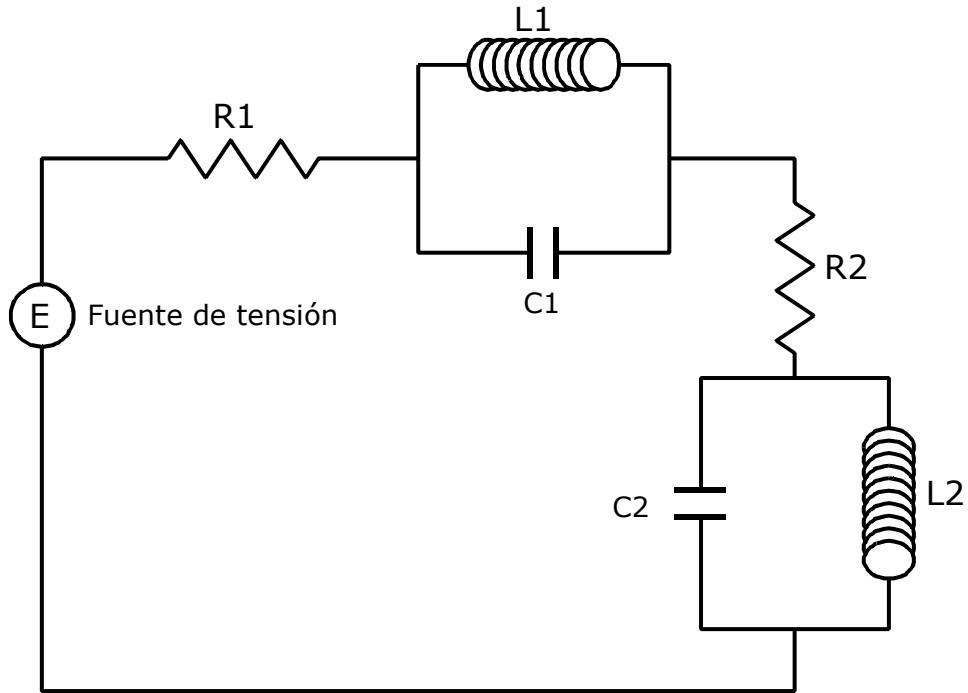


Figura 6.8

Se va a desarrollar el Bond-Graph del circuito interpretando en cada grafo la intensidad que lleva asociada.

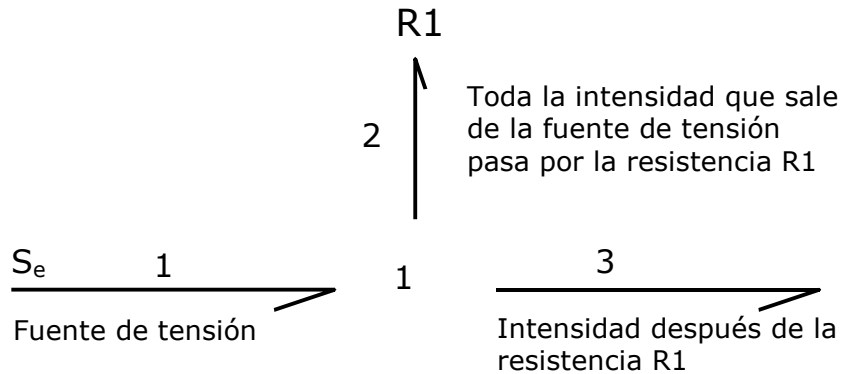


Figura 6.9

Toda la intensidad del circuito pasa por la resistencia R_1 , es decir, está en serie y por este motivo es la misma intensidad la que entra en la resistencia que la que sale de ella. Los grafos 1, 2 y 3 estarán en torno a una unión 1.

La bobina L_1 y el condensador C_1 están en paralelo entre ellos, pero en serie con el circuito, es decir, toda la intensidad que pasa por ellos vuelve a sumarse posteriormente y continúa por el circuito.

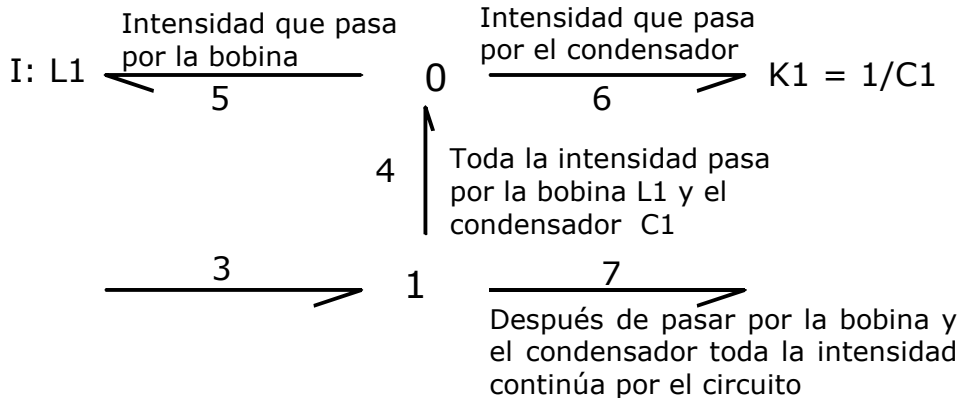


Figura 6.10

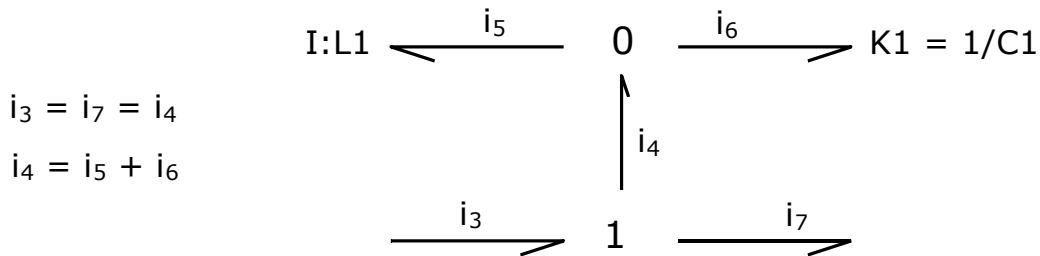
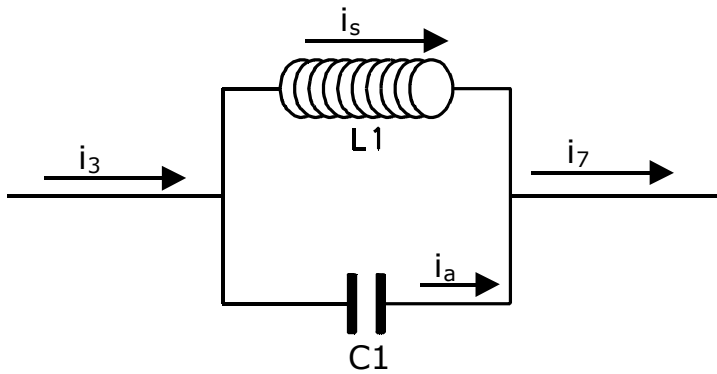


Figura 6.11

Como los grafos 3, 4, 7 están asociados a la misma intensidad, se encuentran en una unión 1.

La intensidad que llega por el grafo 4 se divide, posteriormente, en la que pasa por la bobina y la que se va por el condensador. Como se debe cumplir que $i_4 = i_5 + i_6$, los grafos 4, 5 y 6 estarán en torno a una unión 0.

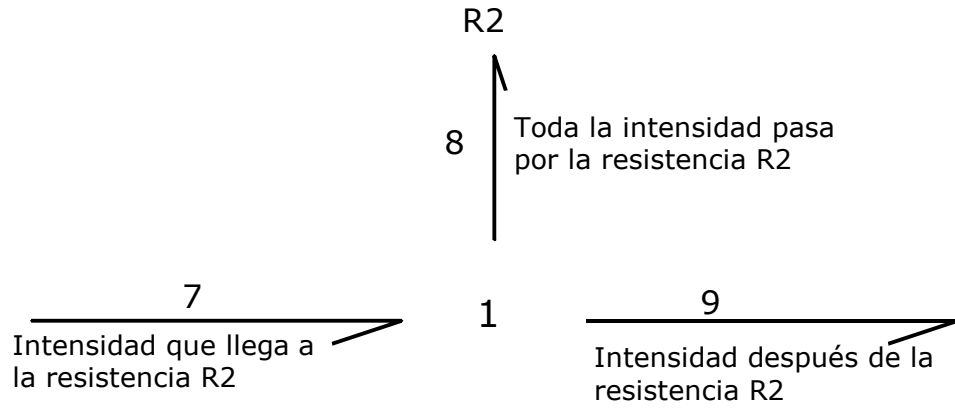


Figura 6.12

Al igual que la otra resistencia, R_2 está en serie con el circuito y, por lo tanto, toda la intensidad pasa por ella. Los grafos 7, 8 y 9 forman una unión 1.

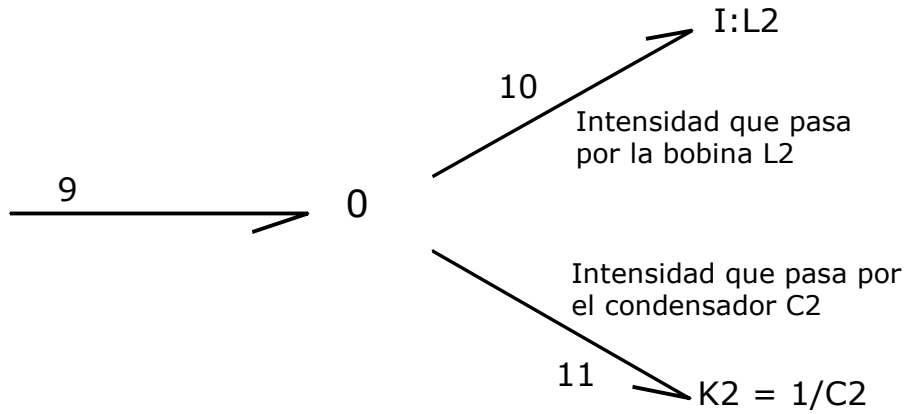


Figura 6.13

La bobina L_2 y el condensador C_2 , se encuentran en paralelo y por lo tanto, la intensidad que llega después de la resistencia R_2 debe dividirse entre la bobina y el condensador.

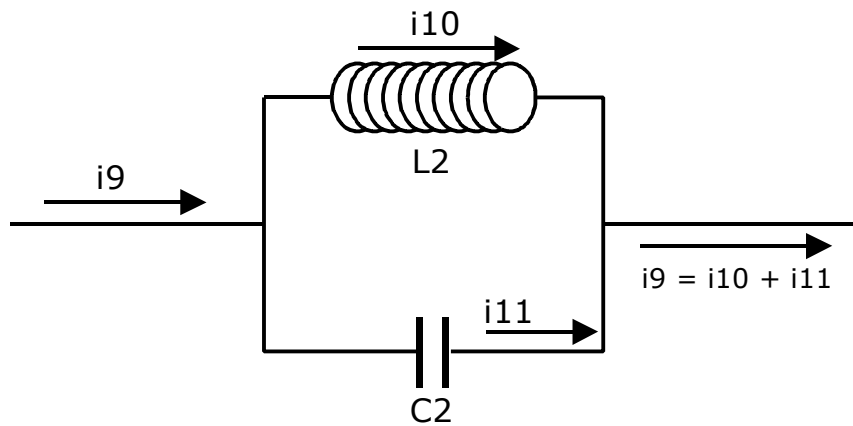


Figura 6.14

Debido a que la intensidad i_9 debe dividirse en dos ramas, los grafos 9, 10 y 11 se encuentran en una unión 0.

El diagrama de grafos completo del circuito se representa en la figura 6.15.

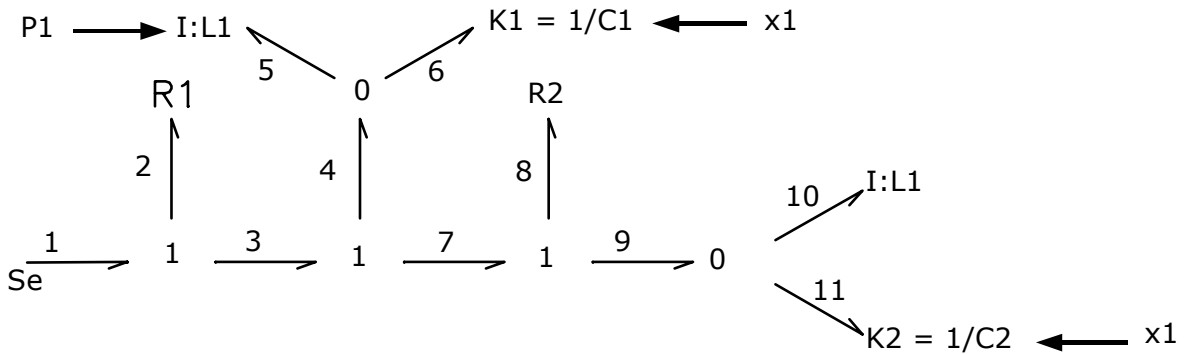


Figura 6.15

Igual que el diagrama de grafos se ha hecho pensando en las intensidades, podría haberse resuelto analizando las tensiones. Como ejemplo vamos a construir nuevamente el diagrama de grafos, pero ahora con las tensiones asociadas a cada uno de ellos.

En la resistencia R_1 hay una caída de tensión, de tal forma que después de ella la tensión es igual a la suministrada por la fuente menos la pérdida en la resistencia.

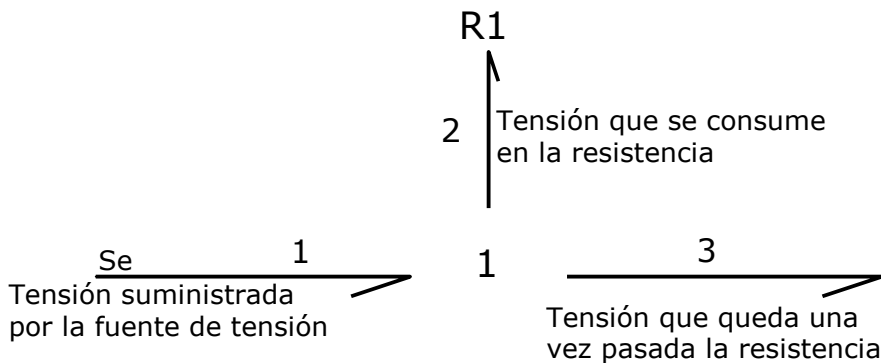


Figura 6.16

Es decir:

$$\text{Tensión en 3} = \text{Tensión en 1} - \text{Tensión en 2}$$

Por este motivo los grafos 1, 2 y 3 están en una unión 1.

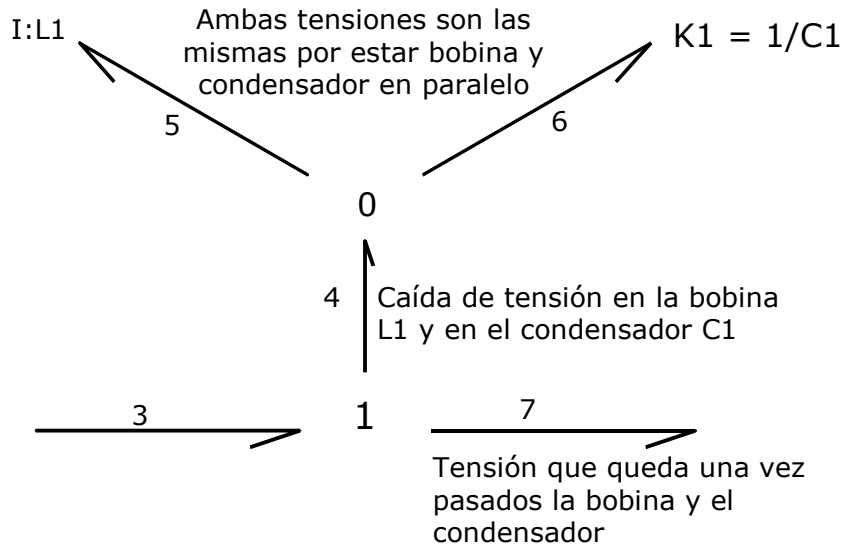


Figura 6.17

Como la bobina y el condensador están en paralelo tienen la misma tensión por lo que los grafos 4, 5 y 6 se encuentran en una unión 0.

Como el paralelo bobina-condensador está en serie con el circuito, tras él la tensión es igual a la de entrada menos la pérdida en la bobina y el condensador. Los grafos 3, 4 y 7 están en una unión 1.

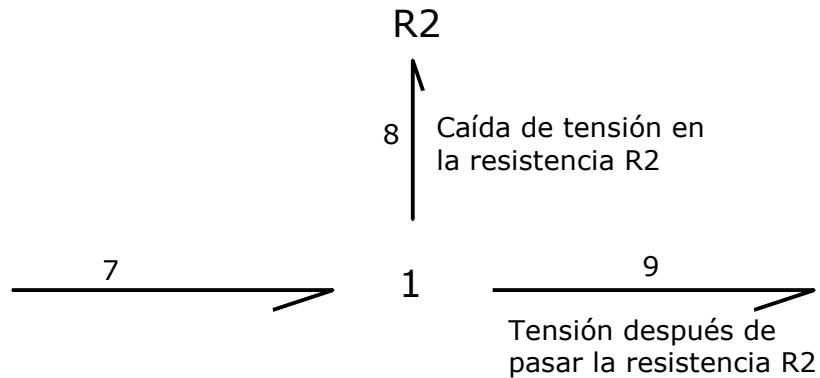


Figura 6.18

Como la resistencia R_2 está en serie con el circuito, después de ella la tensión es igual a la de entrada menos la caída en la resistencia. Por este motivo, los grafos 7, 8 y 9 están en una unión 1.

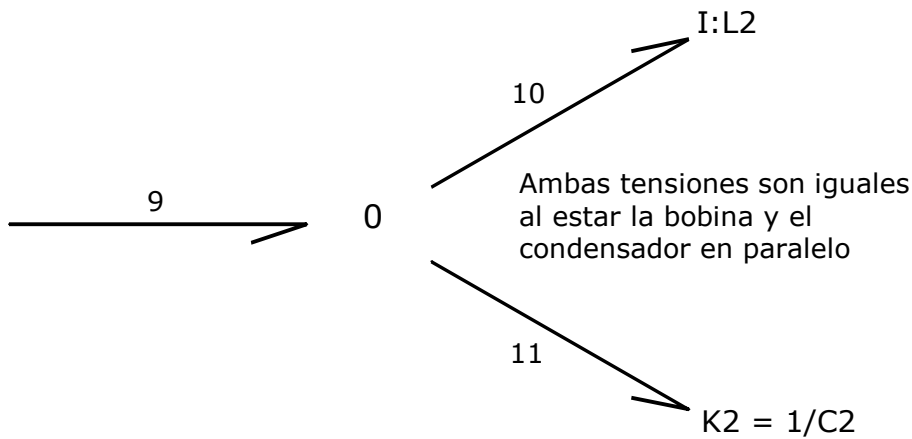


Figura 6.19

Por último, como la bobina L_2 y el condensador de capacidad C_2 están en paralelo, la tensión es la misma en ambos elementos y en consecuencia los grafos 9, 10 y 11 están en una unión 0.

6.3. AMPLIFICADORES OPERACIONALES

Circuito multiplicador

En la figura 6.20, se representa el circuito característico de un amplificador, en el que un amplificador operacional da a la salida una tensión superior a la de entrada. Si la característica del circuito es $-G$, se dirá que a la salida la tensión es $-G$ veces la tensión de entrada.

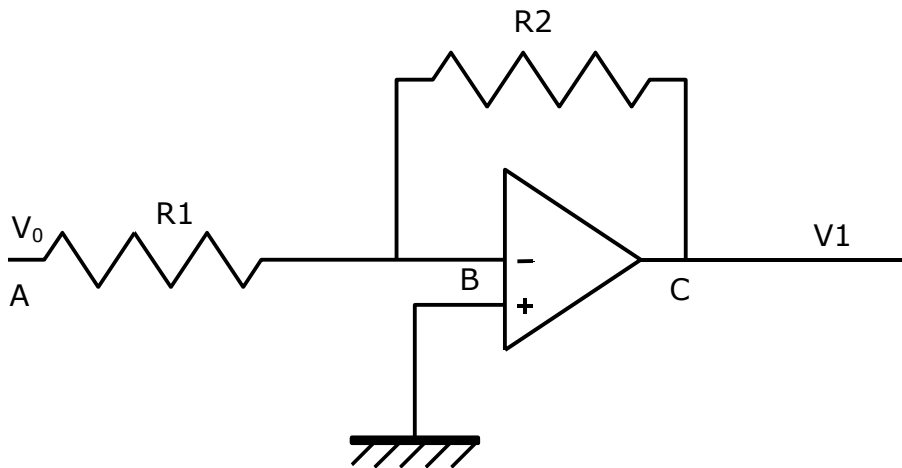


Figura 6.20

El circuito se completa colocando dos resistencias R_1 y R_2 que, en definitiva, marcarán la relación existente entre la tensión V_0 de entrada al circuito general y la tensión V_1 de salida. Para desarrollar el diagrama de grafos se comienza por la tensión de entrada y la resistencia R_1 .

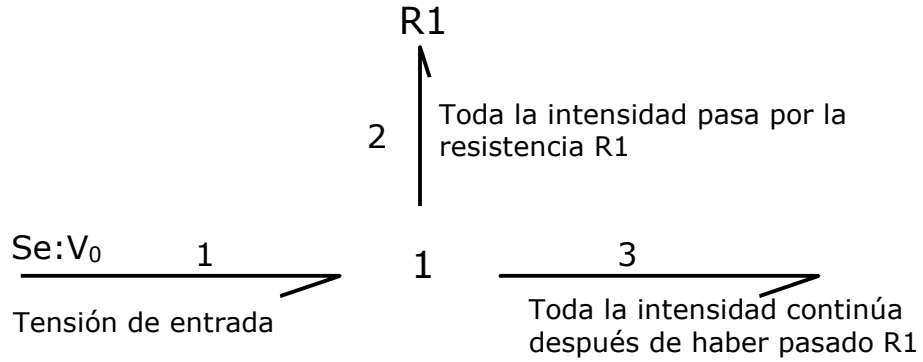


Figura 6.21

Toda la intensidad que entra en el circuito pasa por la resistencia R_1 y, por lo tanto, la puerta resistencia R_1 sale de una unión 1.

Situados en el punto B de la figura 6.20, nos encontramos con la resistencia R_2 en paralelo con el amplificador operacional.

Los amplificadores operacionales funcionan de tal manera que por ellos pasa una intensidad prácticamente despreciable, y se limitan a multiplicar su tensión por la constante de referencia que, en éste caso, es $-G$.

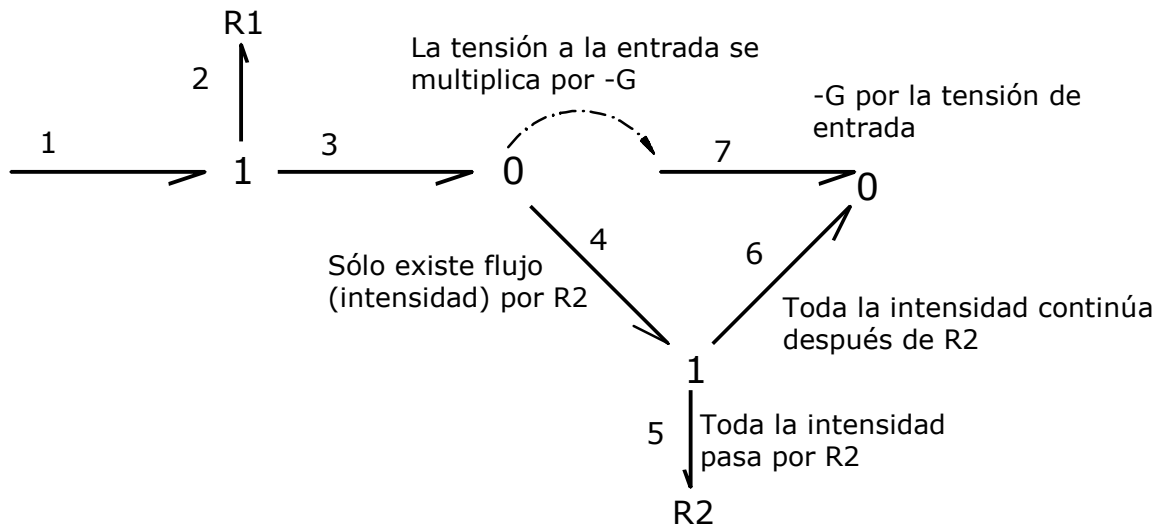


Figura 6.22

Para representar el funcionamiento del amplificador operacional se ha colocado en la figura 6.22 una línea de puntos, que sin ser un grafo, representa la multiplicación por $-G$ de la tensión en el grafo 3, de tal manera que en el grafo 7 la tensión es igual a $-G$ por la tensión del grafo 3.

Toda la intensidad que llega al punto B se va por el grafo 4, pasa por la resistencia R_2 , y sale por el grafo 6, es decir, se deriva por la resistencia R_2 en paralelo con el amplificador operacional.

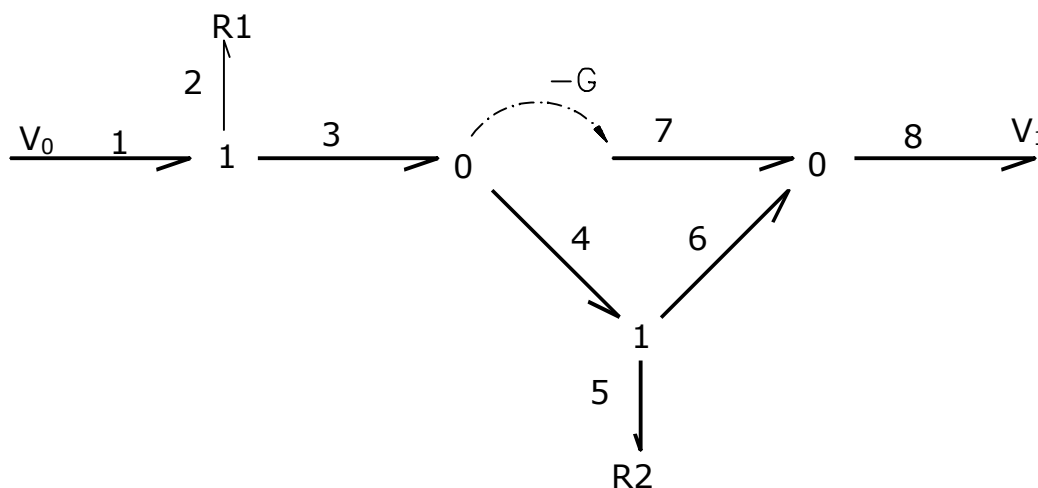


Figura 6.23

Por último, como puede observarse en el diagrama de grafos completo, en el grafo 8 se encuentra la salida del circuito con su tensión definida por el grafo 7 (que al no tener intensidad, se comporta como una fuente de tensión) y su intensidad; definida por el grafo 6.

Sumador

Cuando se quieren sumar dos tensiones eléctricas, puede emplearse el circuito de la figura 6.24, que está basado en el empleo de un amplificador operacional. El circuito no sólo permite que la tensión V_0 , a la salida, sea la suma de las tensiones V_1 y V_2 de entrada, si no que permite también obtener la suma multiplicada por un factor que depende de los valores de las resistencias del circuito.

En la unión 0, de los grafos 3, 6 y 7, se suman las intensidades que vienen en paralelo por la resistencia R_1 y por la R_2 . La intensidad sale toda por el grafo 7 que conduce a la resistencia R_3 . La línea de puntos no es un grafo, solamente sirve para transmitir información al grafo 10. Lo que se está representando es el hecho de que en el amplificador operacional no entra intensidad, y toda la que llega por las resistencias R_1 y R_2 , sólo puede pasar por la resistencia R_3 .

Aunque por el amplificador operacional no pasa intensidad, la tensión a su salida, V_0 , es igual a la de entrada por $-G$. Esta tensión de entrada viene definida por la tensión en la unión 0 de los grafos 3, 6, 7, y la línea de puntos sirve para reflejar que la tensión en el grafo 10, es la de la unión 0 por $-G$.

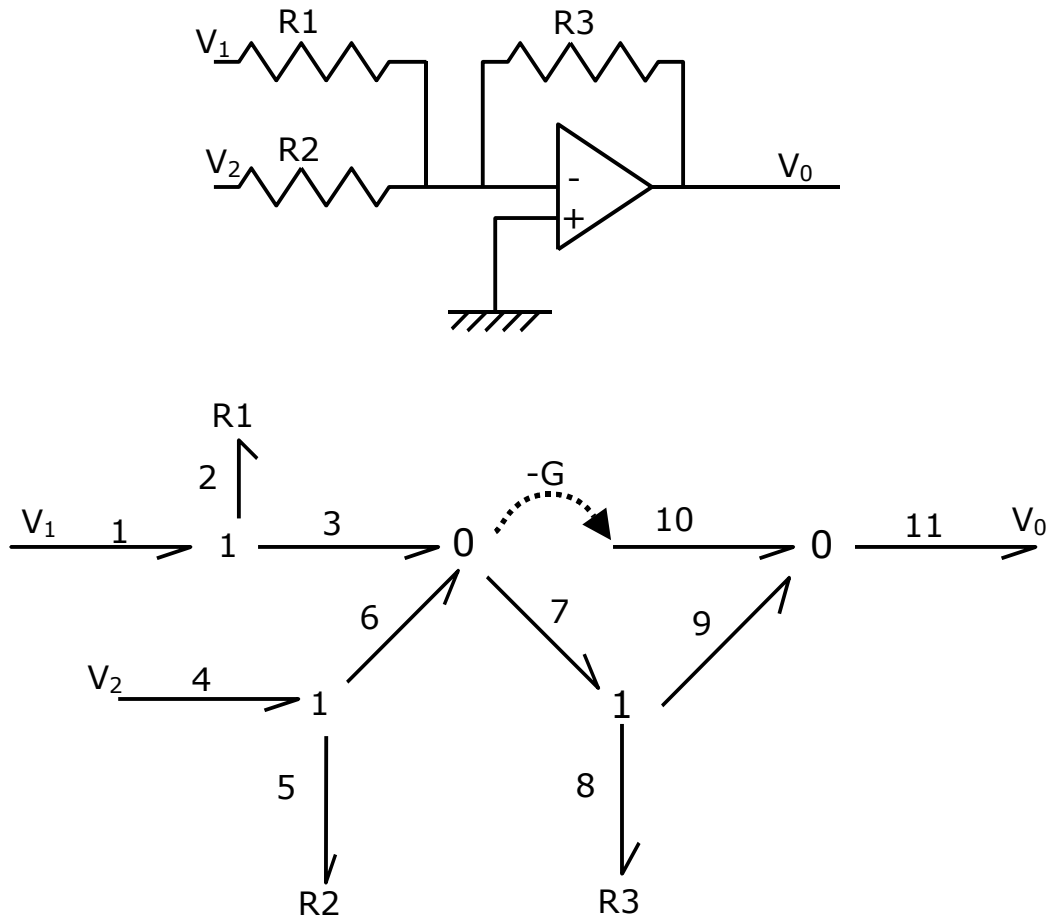


Figura 6.24

6.4. MOTORES DE CORRIENTE CONTINUA

Motor con excitación en paralelo

Se denomina también motor con excitación shunt y, en este caso la resistencia e inductancia de la carcasa, R_e y L_e , están en paralelo con la resistencia e inductancia de la armadura, R_a y L_a . Hay que recordar que R_e y L_e suponen la excitación del motor.

Por otra parte, se supone que el motor tiene una inercia J , y unas pérdidas por rozamiento que dependen linealmente de la velocidad angular del motor con un coeficiente R_q .

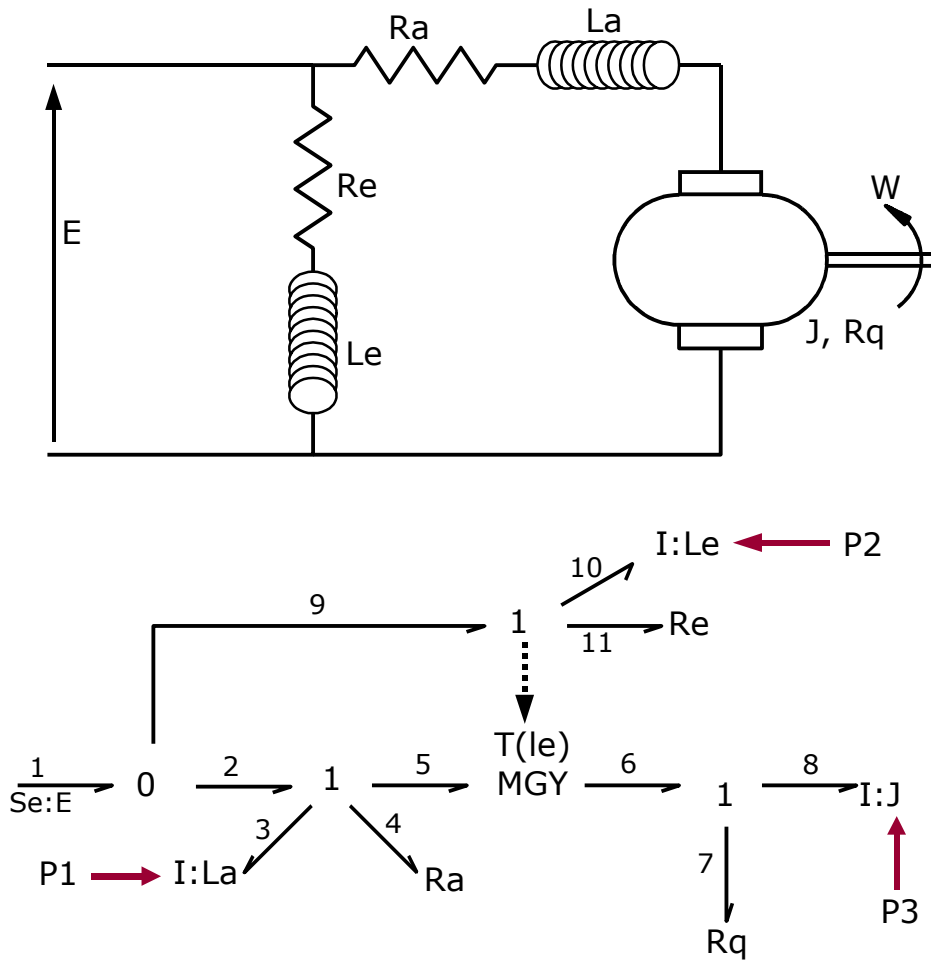


Figura 6.26

En el diagrama de grafos, E es el valor de la fuente de tensión y como R_a y L_a están en paralelo con R_e y L_e , tienen la misma tensión y en definitiva, los grafos 1, 2 y 9 se encuentran en una unión 0.

Una vez en la parte de excitación, R_e y L_e están en serie y por lo tanto, pasa por ellas la misma intensidad, de modo que los grafos 9, 10 y 11 están en una unión 1.

En la parte del motor sucede lo mismo con R_a y L_a . Posteriormente se entra en un elemento gyrator encargado de transformar la intensidad que pasa por la parte giratoria del motor, en el par mecánico de su eje de salida.

El elemento gyrator es de razón variable y por lo tanto, se representa por MGY. La magnitud de su razón es T y depende de la intensidad en la bobina de excitación, por ese motivo se pone una línea de trazos desde la unión 1: grafos 9, 10 y 11.

A la salida del gyrator se encuentra los grafos que representan la inercia mecánica del motor y el rozamiento mecánico de su parte giratoria.

Motor con excitación independiente

Se entiende por motores de corriente continua con excitación independiente, aquellos en los que la resistencia y la bobina de la carcasa, que están encargadas de la excitación, tienen una fuente de tensión completamente independiente de la que alimenta a R_a y L_a .

Como en el caso anterior, T es la razón variable del gyrator que representa el paso de intensidad eléctrica a par mecánico. La inercia del rotor es J y en su giro hay un rozamiento que depende linealmente de su velocidad angular mediante un coeficiente que denominaremos R_q .

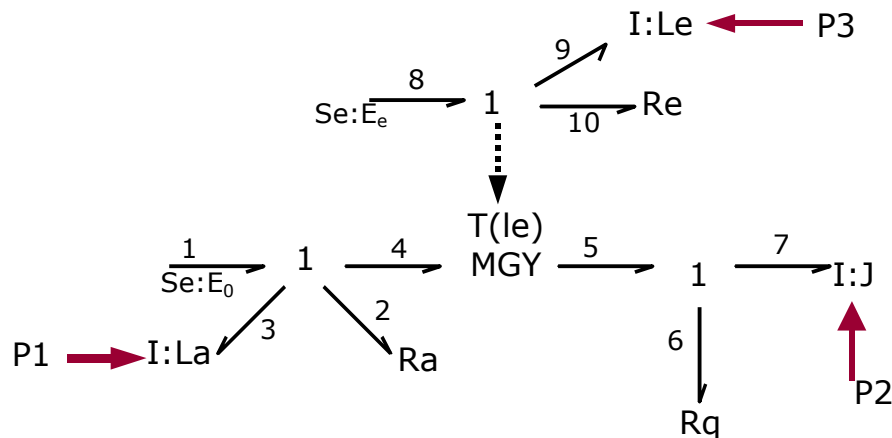
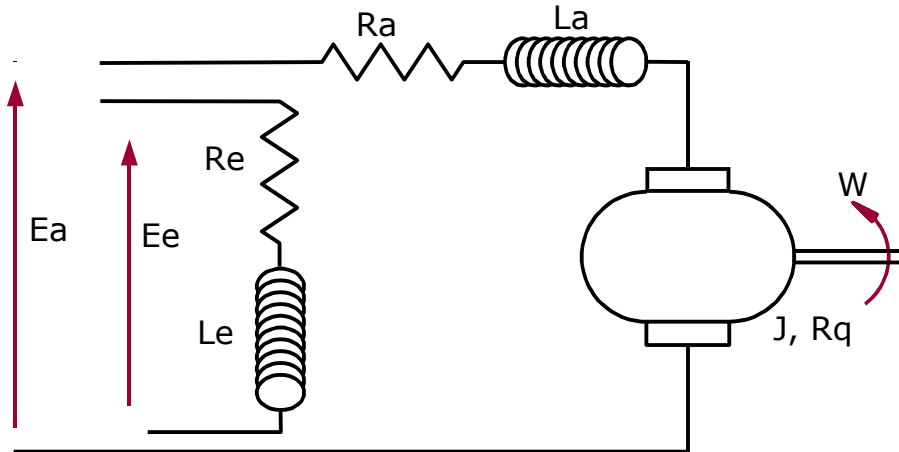


Figura 6.27

6.5. OTRAS APLICACIONES ELÉCTRICAS

Ejemplo de una aplicación electromagnética

En la figura 6.28, se muestra un ejemplo electro-mecánico basado en una masa m suspendida de un resorte de rigidez K . La masa lleva adosada una bobina que se introduce en un imán permanente y está alimentada por una tensión E . Al variar esta tensión la masa se desplaza comprimiendo y traccionando el resorte K .

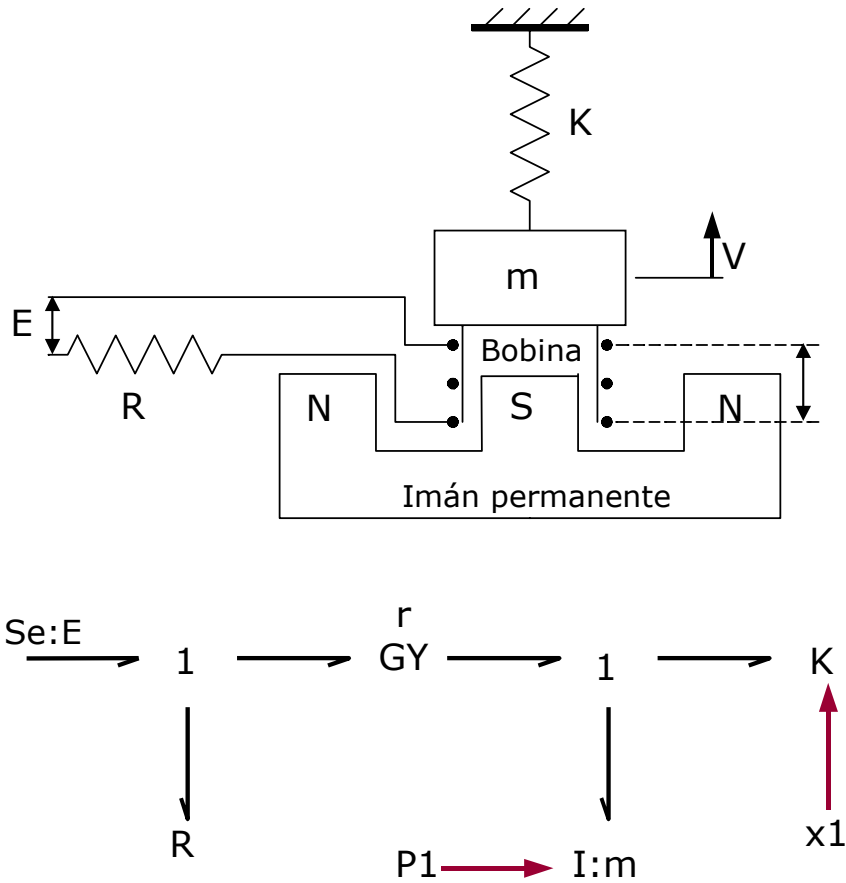


Figura 6.28

La fuerza F que se produce en la bobina tiene como valor:

$$F = B \cdot l \cdot n \cdot i$$

En donde:

n = Número de espiras de la bobina

B = Campo magnético producido por el imán

l = Longitud de la bobina

i = Intensidad que circula por la bobina

Como puede observarse, la fuerza que se produce en la bobina depende de la intensidad que circula por ella, por lo que se representará con Bond-Graph mediante un elemento gyrator de razón r .

$$r = B \cdot l \cdot n$$

Desarrollando los flujos y esfuerzos en cada grafo pueden plantearse las ecuaciones diferenciales del sistema, que en forma matricial son:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} P_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r^2/R \cdot m & -K \\ 1/m & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r \cdot E/R \\ 0 \end{bmatrix}$$

Galvanómetro

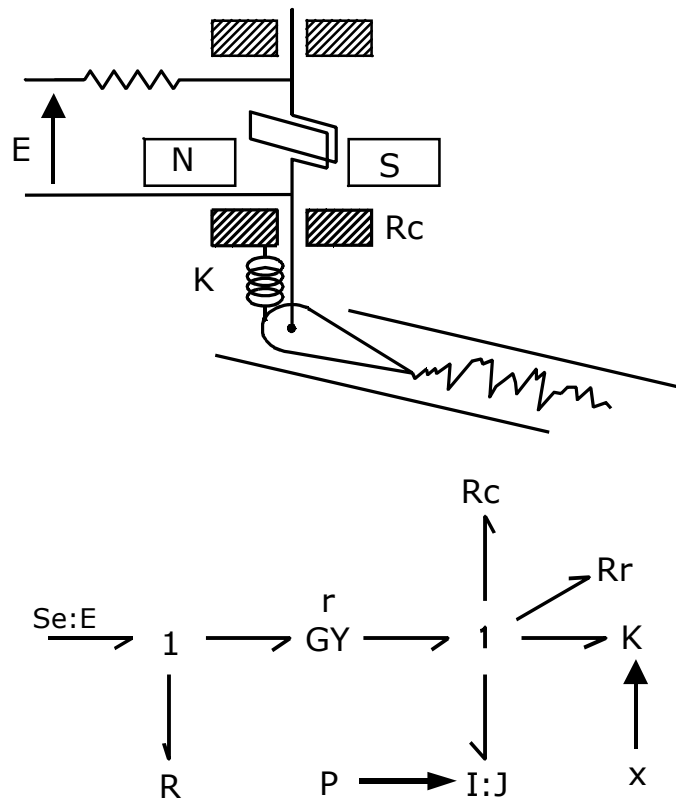


Figura 6.29

En la figura 6.29 se muestra el esquema de un galvanómetro que se supone que presenta una resistencia R al paso de la corriente. La aguja tiene una inercia J, y se suponen despreciables todas las demás inercias. Como rozamientos se consideran los del eje del galvanómetro con los cojinetes Rc, y los de la aguja con el papel Rr. Por último, existe un resorte de rigidez K desde la aguja hasta un punto fijo del aparato, cuya misión es asegurar la puesta a cero de la aguja cuando no entra ninguna señal en el galvanómetro.

Como en casos anteriores, para representar el comportamiento de la bobina sometida al campo magnético de los imanes se utiliza un elemento gyrator.

Una vez calculados los flujos y esfuerzos asociados a cada grafo se plantean las ecuaciones diferenciales del modelo que, en forma matricial, son:

$$d/dt \begin{vmatrix} P \\ x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -r^2/R \cdot J - (R_c + R_r)/J & -K \\ 1/J & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} P \\ x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} r \cdot E/R \\ 0 \end{vmatrix}$$

Altavoz

El altavoz funciona mediante los movimientos generados en una membrana por una bobina, que es recorrida por una corriente eléctrica. En la figura 6.30, se representa el esquema y el diagrama de grafos de un altavoz.

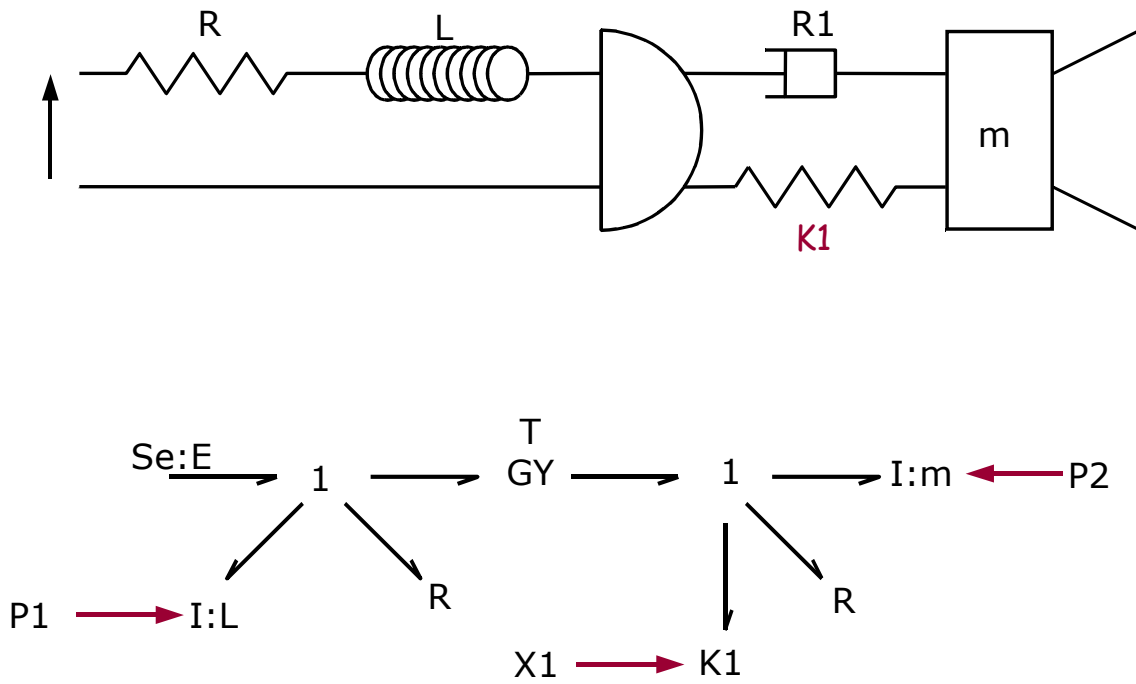


Figura 6.30

En la parte eléctrica del altavoz aparecen la resistencia R y la bobina L, que mueven la membrana de masa m. La membrana, debido a su forma, se comporta como si tuviera un resorte mecánico de rigidez K₁ y un amortiguador de coeficiente R₁, que la une a la bobina.

Calculando los flujos y esfuerzos asociados a cada grafo pueden plantearse las ecuaciones diferenciales del sistema, que en forma matricial son:

$$\begin{vmatrix} P_1 \\ P_2 \\ x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -R/L & -T/m & 0 \\ T/L & -R_1/m & -K_1 \\ 0 & 1/m & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} P_1 \\ P_2 \\ x_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Aplicación de motores eléctricos

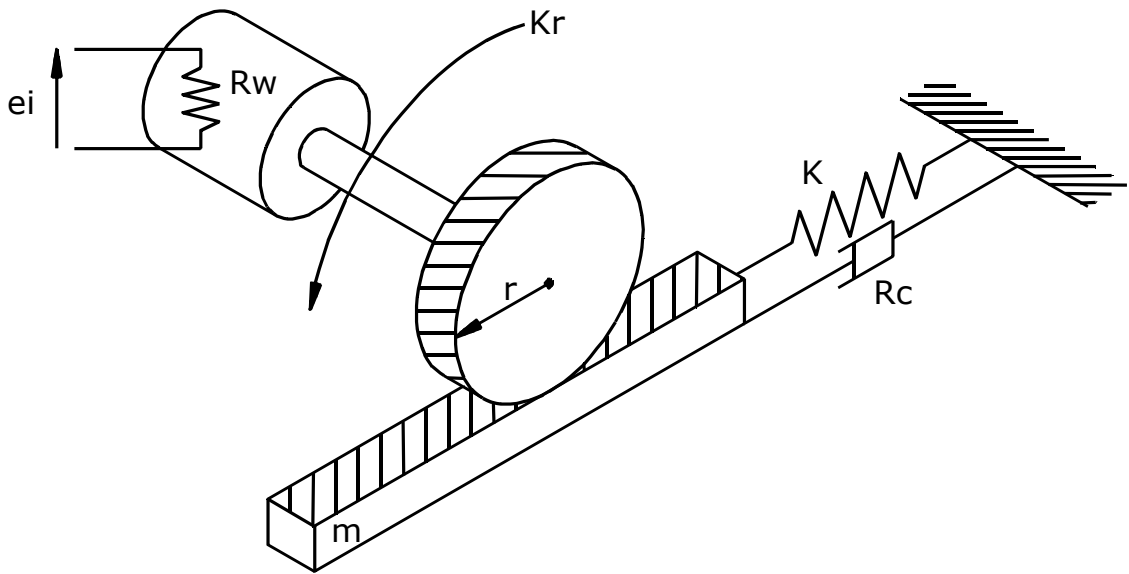


Figura 6.31

Se tiene un motor eléctrico de corriente continua, definido por su resistencia interna R_w y la inercia de su rotor giratorio J . Por medio de un eje, del que se va a considerar su elasticidad, se mueve una rueda dentada engranada con una cremallera de masa m , que se desplaza sin rozamiento contra un resorte de rigidez K y un amortiguador de coeficiente R_c . Se considera despreciable la inercia de la rueda dentada.

Los motores eléctricos son máquinas que dan un par en el eje de salida; el cual es función de sus características y de la intensidad que los recorre. Es pues, un elemento que transforma flujo de entrada (intensidad eléctrica) en esfuerzo (par mecánico) y, por lo tanto, se representará en el diagrama de grafos mediante un gyrator de razón el valor de la relación entre la intensidad y el par.

Se supone conocida la tensión de alimentación al motor eléctrico e_i .

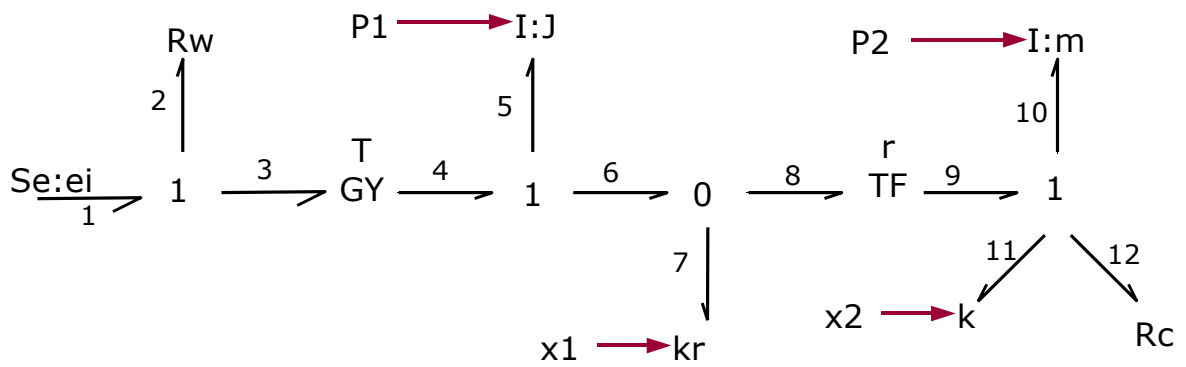


Figura 6.32