

Conceptos Básicos

12.1. INTRODUCCIÓN A LA SIMULACIÓN DE SISTEMAS MECÁNICOS

Los ingenieros tienen la necesidad de analizar teóricamente el comportamiento de los sistemas mecánicos para predecir, dentro de lo posible, los resultados de sus diferentes diseños. De esta forma, intentan optimizar su funcionamiento con un número reducido de pruebas y ensayos.

Hasta la introducción del ordenador, el estudio debía hacerse planteando las ecuaciones diferenciales del sistema y resolviéndolas manualmente. La complejidad de esta tarea hacía que los sistemas mecánicos analizados fueran simplificados para plantear y resolver pocas ecuaciones, por lo que había que esperar a la construcción del prototipo para estudiar en profundidad el comportamiento del mecanismo.

Con la llegada del ordenador se solucionó uno de los problemas; ya se podían resolver fácilmente las ecuaciones, pero seguía existiendo la dificultad de plantearlas.

El inconveniente radica en que incluso un experto en esta temática, difícilmente puede analizar un sistema de unos 6 ó 10 grados de libertad, ya que el planteamiento de las ecuaciones diferenciales, conforme se incrementa el número de grados de libertad, se complica enormemente hasta que la tarea se hace inviable.

Conscientes de la necesidad de incrementar las posibilidades de simular por ordenador cualquier comportamiento cinemático o dinámico de un sistema, en los últimos años se han desarrollado herramientas que pueden facilitar la creación de modelos teóricos.

En este contexto han nacido programas como ADAMS, DADS, COMPAMM y otros. Todos ellos tienen la particularidad de plantear de una forma automática las ecuaciones diferenciales que caracterizan un modelo concreto, cualquiera que sea su número de grados de libertad.

Mediante la utilización de programas, el ingeniero puede simular por ordenador la cinemática y la dinámica de cualquier mecanismo, analizando no sólo los valores que alcanzan las principales variables, sino incluso observando en la pantalla de un ordenador los movimientos del mecanismo.

En la actualidad, ya empieza a ser habitual encontrar en las revistas técnicas, imágenes de ordenador de sistemas tan complejos como la suspensión de un vehículo, o incluso de modelos que

simulan el comportamiento del hombre al correr en una prueba atlética o al ser atropellado por un automóvil.

Con la simulación de sistemas mecánicos por ordenador, el ingeniero conoce ya con cierta profundidad en la fase de diseño, la respuesta y el comportamiento del sistema, lo que le permite optimizar su funcionamiento con más facilidad y construir menor número de prototipos disminuyendo así el tiempo en que se alcanza el producto final.

El objetivo del módulo de simulación de Sistemas Mecánicos es introducir al alumno en la cinemática y la dinámica de los sistemas mecánicos, de tal forma que se familiarice con la mecánica computacional y con la simulación por ordenador del comportamiento de estos sistemas.

12.2. ÁLGEBRA VECTORIAL

INTRODUCCIÓN

El análisis vectorial es la mejor herramienta para describir la geometría de los sistemas mecánicos. Esta forma de representación, en contraste con la más tradicional basada en la geometría, resulta más fácil de usar para cualquier manipulación de fórmulas y además presenta enormes ventajas cuando se quieren realizar aplicaciones informáticas.

Seguidamente, se indican algunas de las propiedades más importantes de los vectores y matrices, para recordar algunos conceptos y establecer la notación que se va a utilizar en adelante.

VECTORES GEOMÉTRICOS

En la figura 12.1 se muestra un vector geométrico \vec{a} , cuyas componentes según los ejes de referencia X, Y y Z son: $a_{(x)}$, $a_{(y)}$, $a_{(z)}$. Así mismo, el vector \vec{a} forma con los semiejes positivos de este sistema de referencia los ángulos $\theta_{(x)}$, $\theta_{(y)}$, $\theta_{(z)}$.

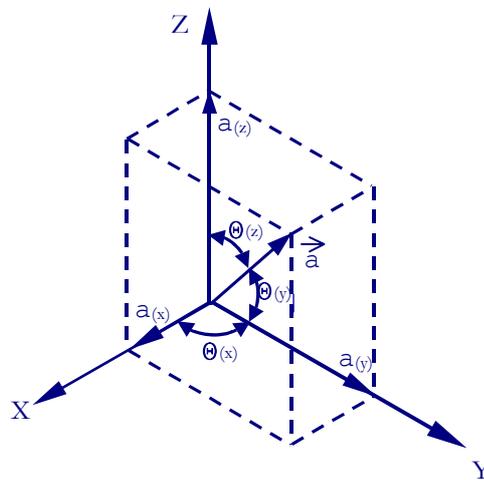


Figura 12.1. Vector \vec{a}

Para ayudar en las operaciones matemáticas con los vectores, se suelen definir unos vectores unitarios en las direcciones de los ejes X, Y, Z. A estos vectores se les denominará $\vec{u}_{(x)}$, $\vec{u}_{(y)}$, $\vec{u}_{(z)}$.

En la figura 12.2 se muestra un punto A, cuya posición se encuentra definida por el vector \vec{a} . Este vector puede descomponerse según las direcciones de los ejes del sistema de referencia XYZ, y por tanto, se puede considerar como suma de tres vectores, cada uno de ellos definido en uno de los

ejes de referencia. Así, el vector en la dirección del eje X, por ejemplo, será $a_{(x)} \cdot \vec{u}_{(x)}$, en donde $a_{(x)}$ es un escalar que determina la magnitud del vector, y $\vec{u}_{(x)}$ un vector unitario que marca su dirección y sentido.

El vector \vec{a} , como suma de sus tres vectores componentes, puede ponerse en la siguiente forma:

$$\vec{a} = a_{(x)} \vec{u}_{(x)} + a_{(y)} \vec{u}_{(y)} + a_{(z)} \vec{u}_{(z)}$$

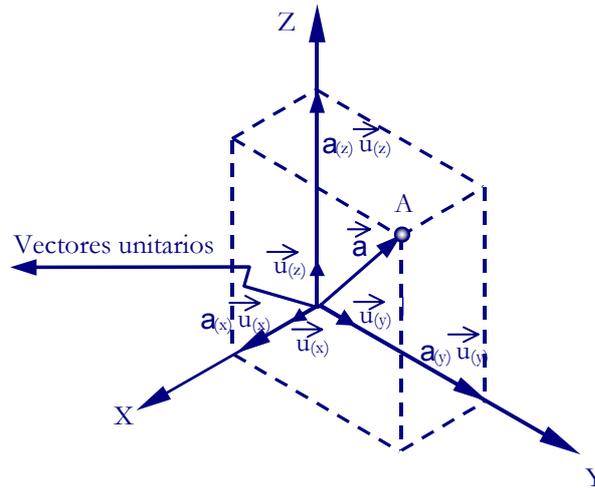


Figura 12.2. Vectores componentes del vector \vec{a}

Por otra parte, observando la figura 12.1, puede verse cómo las magnitudes $a_{(x)}$, $a_{(y)}$, $a_{(z)}$ pueden expresarse en función del módulo o magnitud del vector \vec{a} .

$$a_{(x)} = |\vec{a}| \cos \theta_{(x)}$$

$$a_{(y)} = |\vec{a}| \cos \theta_{(y)}$$

$$a_{(z)} = |\vec{a}| \cos \theta_{(z)}$$

En donde $|\vec{a}|$ representa el módulo del vector \vec{a} .

Sustituyendo estos valores en la expresión de \vec{a} queda:

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cos \theta_{(x)} \vec{u}_{(x)} + |\vec{a}| \cos \theta_{(y)} \vec{u}_{(y)} + |\vec{a}| \cos \theta_{(z)} \vec{u}_{(z)}$$

OPERACIONES CON VECTORES ALGEBRAICOS

Como se deduce de los apartados anteriores, un vector se define por sus componentes. Los vectores algebraicos se representan en forma de matriz columna, siendo sus elementos las componentes del vector. Así, el vector \vec{a} puede representarse como

$$a = \begin{bmatrix} a_{(x)} \\ a_{(y)} \\ a_{(z)} \end{bmatrix}$$

Producto escalar de dos vectores

Dados dos vectores algebraicos **a** y **b** de componentes

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} ; \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

El producto escalar de estos dos vectores se representa como:

$$\vec{a} \cdot \vec{b}$$

Y es equivalente a:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a^T b = b^T a$$

Efectivamente,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = [a_1 \ a_2 \ a_3] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

En consecuencia, el producto escalar de dos vectores es un escalar y no un vector.

El producto escalar de dos vectores puede expresarse también como el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman entre sí (figura 12.3).

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$$

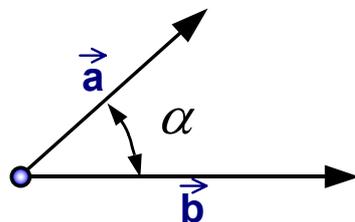


Figura 12.3. Producto escalar de dos vectores

Igualando las dos expresiones del producto escalar se tiene:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

En cinemática y dinámica, el producto escalar se utiliza principalmente para dos casos. El primero es la obtención de la proyección de un vector sobre una dirección. Efectivamente, si se halla el producto escalar de un vector \vec{a} por un vector unitario \vec{u} que define una dirección, se tiene que:

$$\vec{a} \cdot \vec{u} = |\vec{a}| \cdot 1 \cdot \cos \alpha = |\vec{a}| \cos \alpha$$

El resultado es la proyección del vector \vec{a} sobre la dirección definida por el vector unitario (figura 12.4).

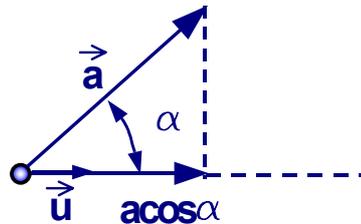


Figura 12.4. Producto escalar de un vector \vec{a} por otro unitario \vec{u}

Otra aplicación común en cinemática y dinámica consiste en utilizar el producto escalar para definir la condición de perpendicularidad de dos vectores. Efectivamente, si \vec{a} y \vec{b} son dos vectores perpendiculares, el ángulo que forman entre ellos es de 90° y en consecuencia, su coseno es igual a cero. Así pues, cuando \vec{a} y \vec{b} son perpendiculares se tiene:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 90^\circ = 0$$

Es decir, el producto escalar de dos vectores perpendiculares es igual a cero.

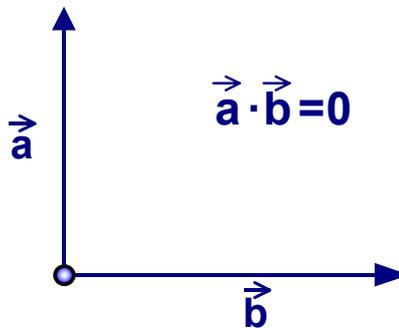


Figura 12.5. Producto escalar de dos vectores perpendiculares

Producto vectorial de dos vectores

Otra operación entre vectores que se utiliza mucho es su producto vectorial. El producto vectorial de dos vectores \vec{a} y \vec{b} se representa por:

$$\vec{a} \times \vec{b}$$

Para establecer el producto vectorial de un vector \vec{a} por otro \vec{b} resulta muy útil definir una matriz antisimétrica asociada al vector \vec{a} , y que viene dada por:

$$\tilde{a} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

En base a la matriz \tilde{a} puede representarse el producto vectorial de \vec{a} por \vec{b} como:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \tilde{a} \mathbf{b}$$

Operando, se obtiene:

$$\tilde{a} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix}$$

El producto vectorial se utiliza principalmente en cinemática y dinámica para establecer las condiciones de paralelismo entre dos vectores, ya que el producto vectorial de dos vectores paralelos es igual a cero.

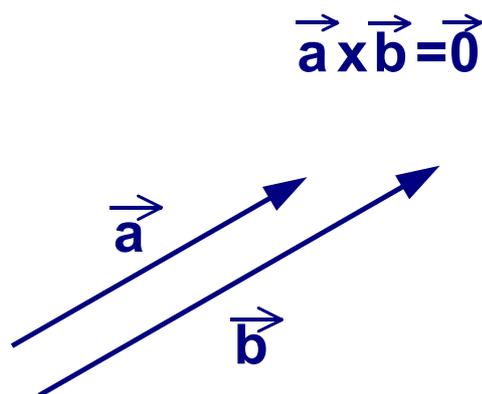


Figura 12.6. Producto vectorial de dos vectores paralelos

Si \vec{a} y \vec{b} son paralelos, se tiene:

$$\tilde{a} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aunque la anterior expresión matricial equivale a tres ecuaciones algebraicas, solamente dos de ellas son independientes, ya que la tercera puede ser expresada como combinación lineal de las dos anteriores. Esto significa que para representar el paralelismo entre dos vectores se cuenta con dos ecuaciones algebraicas.

Diferenciación de vectores y matrices

En el análisis cinemático y dinámico de sistemas mecánicos, los vectores que representan la posición de los puntos pertenecientes a cada elemento son normalmente función del tiempo y de otras variables, y lo mismo ocurre con las ecuaciones que describen la geometría o la dinámica del movimiento. Por tanto, es necesario conocer las derivadas respecto al tiempo y también las derivadas parciales respecto a las otras variables.

Derivadas respecto al tiempo

Dado un vector \mathbf{a} cuyas componentes a_i son funciones del tiempo,

$$\mathbf{a}(t) = [a_1(t), a_2(t), a_3(t)]^T$$

se define su derivada respecto al tiempo, t , como:

$$\dot{\mathbf{a}} = \frac{d}{dt}\mathbf{a}(t) = \left[\frac{d}{dt}a_1(t), \frac{d}{dt}a_2(t), \frac{d}{dt}a_3(t) \right]^T \quad (1)$$

Sea una matriz \mathbf{A} de orden $(m \times n)$, definida como:

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

La derivada de la matriz \mathbf{A} respecto del tiempo es:

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{d}{dt}\mathbf{A}(t) = \left[\frac{d}{dt}a_{ij}(t) \right] \quad (2)$$

A continuación se indicarán algunas de las propiedades más importantes de estas derivadas:

- Derivada de la suma de los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} :

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{a} + \mathbf{b}] = \dot{\mathbf{a}} + \dot{\mathbf{b}} \quad (3)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\mathbf{a} + \mathbf{b}] &= \left[\frac{d}{dt}(a_i + b_i) \right] = \\ &= \left[\frac{d}{dt}a_i \right] + \left[\frac{d}{dt}b_i \right] = \frac{d}{dt}[a_i] + \frac{d}{dt}[b_i] = \dot{\mathbf{a}} + \dot{\mathbf{b}} \end{aligned}$$

- Derivada del producto de un escalar α por un vector \mathbf{a}

$$\frac{d}{dt} [\alpha \mathbf{a}] = \dot{\alpha} \mathbf{a} + \alpha \dot{\mathbf{a}} \quad (4)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\alpha \mathbf{a}] &= \left[\frac{d}{dt} (\alpha a_i) \right] = \left[\frac{d\alpha}{dt} a_i + \alpha \frac{d a_i}{dt} \right] = \\ &= \frac{d\alpha}{dt} [a_i] + \left[\alpha \frac{d}{dt} a_i \right] = \dot{\alpha} \mathbf{a} + \alpha \dot{\mathbf{a}} \end{aligned}$$

- Derivada del producto escalar de \mathbf{a} por \mathbf{b} :

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{a}^T \mathbf{b}] = \dot{\mathbf{a}}^T \mathbf{b} + \mathbf{a}^T \dot{\mathbf{b}} \quad (5)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\mathbf{a}^T \mathbf{b}] &= \frac{d}{dt} \sum a_i b_i = \sum \frac{d}{dt} (a_i b_i) = \\ \sum \left(\frac{d a_i}{dt} b_i + a_i \frac{d b_i}{dt} \right) &= \sum \left(\frac{d a_i}{dt} b_i \right) + \sum \left(a_i \frac{d b_i}{dt} \right) = \dot{\mathbf{a}}^T \mathbf{b} + \mathbf{a}^T \dot{\mathbf{b}} \end{aligned}$$

- Derivada del producto vectorial de \mathbf{a} por \mathbf{b} :

$$\frac{d}{dt} [\tilde{\mathbf{a}} \mathbf{b}] = \tilde{\dot{\mathbf{a}}} \mathbf{b} + \tilde{\mathbf{a}} \dot{\mathbf{b}} \quad (6)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\tilde{\mathbf{a}} \mathbf{b}] &= \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{a}_2 b_3 + a_2 \dot{b}_3 - \dot{a}_3 b_2 - a_3 \dot{b}_2 \\ \dot{a}_3 b_1 + a_3 \dot{b}_1 - \dot{a}_1 b_3 - a_1 \dot{b}_3 \\ \dot{a}_1 b_2 + a_1 \dot{b}_2 - \dot{a}_2 b_1 - a_2 \dot{b}_1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \dot{a}_2 b_3 - \dot{a}_3 b_2 \\ \dot{a}_3 b_1 - \dot{a}_1 b_3 \\ \dot{a}_1 b_2 - \dot{a}_2 b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 \dot{b}_3 - a_3 \dot{b}_2 \\ a_3 \dot{b}_1 - a_1 \dot{b}_3 \\ a_1 \dot{b}_2 - a_2 \dot{b}_1 \end{bmatrix} = \tilde{\dot{\mathbf{a}}} \mathbf{b} + \tilde{\mathbf{a}} \dot{\mathbf{b}} = \dot{\tilde{\mathbf{a}}} \mathbf{b} + \tilde{\mathbf{a}} \dot{\mathbf{b}} \end{aligned}$$

- Derivada de la suma de las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} :

$$\frac{d}{dt} [A + B] = \dot{A} + \dot{B} \quad (7)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [A + B] &= \left[\frac{d}{dt} (a_{ij} + b_{ij}) \right] = \\ &= \left[\frac{d}{dt} a_{ij} \right] + \left[\frac{d}{dt} b_{ij} \right] = \dot{A} + \dot{B} \end{aligned}$$

- Derivada del producto de un escalar α por una matriz \mathbf{A} :

$$\frac{d}{dt} [\alpha A] = \dot{\alpha} A + \alpha \dot{A} \quad (8)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\alpha A] &= \left[\frac{d}{dt} (\alpha A_{ij}) \right] = \left[\frac{d\alpha}{dt} a_{ij} + \alpha \frac{da_{ij}}{dt} \right] = \\ &= \frac{d\alpha}{dt} [a_{ij}] + \alpha \left[\frac{d}{dt} a_{ij} \right] = \dot{\alpha} A + \alpha \dot{A} \end{aligned}$$

- Derivada del producto de las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} :

$$\frac{d}{dt} [A B] = \dot{A} B + A \dot{B} \quad (9)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [A B] &= \left[\frac{d}{dt} \sum_k (a_{ik} b_{kj}) \right] = \left[\sum_k (\dot{a}_{ik} b_{kj} + a_{ik} \dot{b}_{kj}) \right] = \\ &= \left[\sum_k \dot{a}_{ik} b_{kj} \right] + \left[\sum_k a_{ik} \dot{b}_{kj} \right] = \dot{A} B + A \dot{B} \end{aligned}$$

- Derivada del producto de la matriz \mathbf{A} por el vector \mathbf{a} :

$$\frac{d}{dt} [A a] = \dot{A} a + A \dot{a} \quad (10)$$

Demostración:

Esta identidad se deduce directamente de la igualdad (9) sin más que tener en cuenta que un vector es un caso particular de una matriz con una sola columna.

Derivadas parciales. Matriz jacobiana

Dados: un vector algebraico \mathbf{x} con r componentes variables reales, x_j ,

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_r]^T$$

y una función escalar y diferenciable, Ψ , dependiente de las variables x_j ,

$$\Psi = \Psi(x_1, x_2, \dots, x_r) = \Psi(\mathbf{x})$$

se define la derivada parcial de la función escalar $\Psi(\mathbf{x})$ respecto al vector \mathbf{x} como:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}} = \left[\frac{\partial \Psi}{\partial x_j} \right]_{(1 \times r)} \tag{11}$$

De la definición anterior se desprende que la derivada parcial de una función escalar $\Psi(\mathbf{x})$ respecto a un vector \mathbf{x} de orden $(1 \cdot r)$ es también un vector de orden $(1 \cdot r)$.

Si se considera ahora un vector Ψ formado por s funciones escalares diferenciables, Ψ_i , dependientes de las variables x_j ,

$$\Psi_i = \Psi_i(x_1, x_2, \dots, x_r) = \Psi_i(\mathbf{x})$$

$$\Psi(\mathbf{x}) = [\Psi_1(\mathbf{x}), \Psi_2(\mathbf{x}), \dots, \Psi_s(\mathbf{x})]^T$$

Por definición, la derivada parcial del vector $\Psi(\mathbf{x})$, de orden $(1 \cdot s)$, respecto al vector \mathbf{x} , de orden $(1 \cdot r)$, es una matriz de orden $(s \cdot r)$ cuyos elementos vienen dados por la expresión:

$$\left[\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}} \right]_{ij} = \left[\frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j} \right] \tag{12}$$

A continuación se indicarán algunos de los conceptos de mayor interés relacionados con las derivadas parciales de vectores algebraicos.

- *Matriz jacobiana.*- Se llama matriz jacobiana, Ψ_x , asociada al vector de funciones escalares $\Psi(\mathbf{x})$ a la derivada parcial de $\Psi(\mathbf{x})$ respecto de \mathbf{x}

$$\Psi_x = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}} \tag{13}$$

La matriz jacobiana es una matriz de orden $(s \cdot r)$ en la que el elemento situado en la intersección de la i -ésima fila con la j -ésima columna vale:

$$[\Psi_x]_{ij} = \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j} \quad (14)$$

- Derivada parcial del producto escalar de los vectores $\mathbf{a}(x)$ y $\mathbf{b}(x)$, respecto al vector \mathbf{x} :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{a}^T \mathbf{b}] = \mathbf{b}^T \mathbf{a}_x + \mathbf{a}^T \mathbf{b}_x \quad (15)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{a}^T \mathbf{b}] &= \left[\frac{\partial (\mathbf{a}^T \mathbf{b})}{\partial x_j} \right]_{(1 \times 3)} = \left[\frac{\partial \sum_i (a_i b_i)}{\partial x_j} \right]_{(1 \times 3)} = \sum_i \left[\frac{\partial (a_i b_i)}{\partial x_j} \right]_{(1 \times 3)} = \\ &= \sum_i \left[\frac{\partial a_i}{\partial x_j} b_i + a_i \frac{\partial b_i}{\partial x_j} \right]_{(1 \times 3)} = \sum_i \left[\frac{\partial a_i}{\partial x_j} b_i \right]_{(1 \times 3)} + \sum_i \left[a_i \frac{\partial b_i}{\partial x_j} \right]_{(1 \times 3)} = \\ &= \left[\sum_i b_i \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right]_{(1 \times 3)} + \left[\sum_i a_i \frac{\partial b_i}{\partial x_j} \right]_{(1 \times 3)} = \mathbf{b}^T \mathbf{a}_x + \mathbf{a}^T \mathbf{b}_x \end{aligned}$$

- Derivada parcial del producto vectorial de los vectores $\mathbf{a}(x)$ y $\mathbf{b}(x)$, respecto al vector \mathbf{x} :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} [\tilde{\mathbf{a}} \mathbf{b}] = \tilde{\mathbf{a}} \mathbf{b}_x - \tilde{\mathbf{b}} \mathbf{a}_x \quad (16)$$

Demostración:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} [\tilde{\mathbf{a}} \mathbf{b}] = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}$$

Teniendo en cuenta la expresión (12), la j -ésima columna de la matriz anterior será:

$$\left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\tilde{\mathbf{a}} \mathbf{b}) \right]^j = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_2 b_3 - a_3 b_2) \\ \frac{\partial}{\partial x_j} (a_3 b_1 - a_1 b_3) \\ \frac{\partial}{\partial x_j} (a_1 b_2 - a_2 b_1) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial a_2}{\partial x_j} b_3 - \frac{\partial a_3}{\partial x_j} b_2 \\ \frac{\partial a_3}{\partial x_j} b_1 - \frac{\partial a_1}{\partial x_j} b_3 \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_j} b_2 - \frac{\partial a_2}{\partial x_j} b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 \frac{\partial b_3}{\partial x_j} - a_3 \frac{\partial b_2}{\partial x_j} \\ a_3 \frac{\partial b_1}{\partial x_j} - a_1 \frac{\partial b_3}{\partial x_j} \\ a_1 \frac{\partial b_2}{\partial x_j} - a_2 \frac{\partial b_1}{\partial x_j} \end{bmatrix} = \\
 &= - \begin{bmatrix} b_2 \frac{\partial a_3}{\partial x_j} - b_3 \frac{\partial a_2}{\partial x_j} \\ b_3 \frac{\partial a_1}{\partial x_j} - b_1 \frac{\partial a_3}{\partial x_j} \\ b_1 \frac{\partial a_2}{\partial x_j} - b_2 \frac{\partial a_1}{\partial x_j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 \frac{\partial b_3}{\partial x_j} - a_3 \frac{\partial b_2}{\partial x_j} \\ a_3 \frac{\partial b_1}{\partial x_j} - a_1 \frac{\partial b_3}{\partial x_j} \\ a_1 \frac{\partial b_2}{\partial x_j} - a_2 \frac{\partial b_1}{\partial x_j} \end{bmatrix} = \\
 &= - \begin{bmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j} a_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_j} a_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_j} a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j} b_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_j} b_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_j} b_3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Los vectores que aparecen en la expresión anterior representan la j -ésima fila de las matrices \mathbf{a}_x y \mathbf{b}_x respectivamente. Por tanto, la expresión anterior puede escribirse como:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} (\tilde{a} b) \right]^j = - \tilde{b} [a_x]^j + \tilde{a} [b_x]^j = \tilde{a} [b_x]^j - \tilde{b} [a_x]^j$$

Conocida la relación que siguen las columnas de las matrices, puede extenderse esta a la totalidad de las mismas, teniéndose que:

$$\frac{\partial}{\partial x} [\tilde{a} b] = \tilde{a} b_x - \tilde{b} a_x$$

12.3. GRADOS DE LIBERTAD DE UN SISTEMA MECÁNICO

El concepto de *grado de libertad* de un sistema mecánico es fundamental para la síntesis y el análisis de los mecanismos, y puede definirse como *el número de entradas que se necesita proporcionar a fin de originar una salida predecible*, o bien como *el número de parámetros o medidas independiente que se requiere para definir unívocamente su posición en el espacio en cualquier instante*.

Es necesario poder determinar rápidamente el número de grados de libertad de un mecanismo cuyo comportamiento se desee analizar, especialmente en el inicio del proceso de diseño, en el que habitualmente se suele disponer de alguna definición general del movimiento de salida deseado. El número de entradas necesario para obtener tal salida puede o no estar especificado. Aquí, el costo es la principal restricción. Cada entrada requerida necesitará de algún tipo de accionamiento o actuador, ya sea un operario humano o un "esclavo" en forma de motor, solenoide, cilindro de aire u otro dispositivo de conversión de energía. Estos múltiples dispositivos de entrada deberán tener sus acciones coordinadas por un "controlador", que debe poseer cierto grado de inteligencia. Este control se proporciona ahora con frecuencia mediante un ordenador, pero puede también estar programado mecánicamente dentro del diseño del mecanismo. No existe el requisito de que el mecanismo tenga un solo grado de libertad, aunque eso a menudo es deseable para simplificar. Algunas máquinas tienen muchos grados de libertad, como por ejemplo un robot industrial, que lleva incorporado un actuador en cada una de sus articulaciones, o una máquina excavadora, cuyo manejo requiere la utilización de varias palancas de control.

En la figura 12.7 se muestra un lápiz colocado sobre una hoja de papel en un plano al que se ha asociado un sistema de coordenadas xy . Si este lápiz permanece en el plano del papel, se requiere un mínimo de tres parámetros para definir completamente su posición respecto a la hoja de papel, dos coordenadas lineales (x , y) para definir la posición de cualquier punto del lápiz y una coordenada angular (θ) para definir el ángulo que forma ese objeto con respecto al eje x . Este sistema del lápiz en un plano tiene entonces tres grados de libertad.

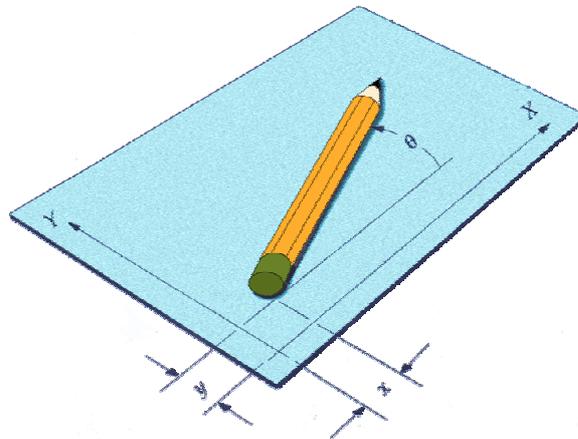


Figura 12.7. Un cuerpo rígido en el plano tiene tres grados de libertad.

Obsérvese que los parámetros particulares elegidos para definir su posición no son únicos. Podría utilizarse un conjunto alternativo de tres parámetros. Existen múltiples combinaciones de parámetros posibles, pero en este caso deben ser tres por conjunto, tales como dos longitudes y un ángulo, para definir la posición del sistema, ya que un cuerpo rígido en movimiento plano tiene tres grados de libertad. Nótese también que el número de grados de libertad se define con respecto a un marco de referencia previamente seleccionado.

Considérese ahora al lápiz en un mundo tridimensional. Si lo sostenemos por encima de la cubierta de la mesa y lo movemos respecto a ella podemos observar que un posible conjunto de

parámetros que podría usarse para definir su posición podría estar formado por tres longitudes (x, y, z), más tres ángulos (φ, ψ, β). En consecuencia, un cuerpo rígido en el espacio tridimensional posee seis grados de libertad.

A continuación, con el propósito de poder comprender mejor la definición de grado de libertad, recurriremos a varios ejemplos de complejidad creciente.

Grados de libertad de un punto en el plano

En la figura 12.8 se muestra un punto A que parte de una posición inicial A_0 y que se mueve dentro de un plano, de tal modo que al transcurrir un tiempo t ocupa una posición diferente A_t .

Suponiendo que la posición inicial es conocida y que se está empleando un sistema de referencia de ejes X e Y, para determinar la posición del punto en el instante t se necesita conocer el desplazamiento que ha realizado éste respecto a su posición inicial durante el tiempo t . Naturalmente, el desplazamiento debe especificarse mediante sus dos componentes según las direcciones X e Y.

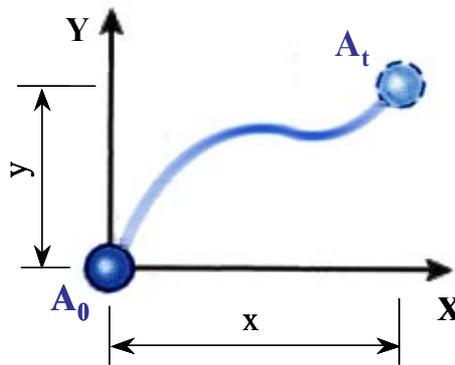


Figura 12.8. Movimiento de un punto en el plano. Dos grados de libertad.

Así pues, para determinar la posición de un punto en el plano se tienen dos incógnitas: el desplazamiento según la dirección X y el desplazamiento según la dirección Y, por lo que se dice que este tipo de movimiento tiene dos grados de libertad.

Grados de libertad de un punto en el espacio

Si en lugar de tratarse de un punto en el plano, este estuviera situado en el espacio (figura 12.9), para determinar su posición transcurrido un tiempo t , sería necesario conocer los tres desplazamientos según las direcciones X, Y y Z. En este caso se dice que el movimiento de un punto en el espacio tiene tres grados de libertad.

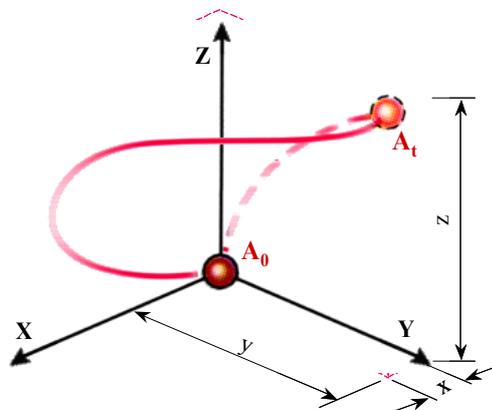


Figura 12.9. Movimiento de un punto en el espacio. Tres grados de libertad.

Grados de libertad de una barra en el plano

Veamos ahora el caso de una barra en el plano (figura 12.10). El movimiento de la barra puede descomponerse en una traslación de su centro de gravedad más un giro alrededor de este. Por tanto, para obtener su posición transcurrido un tiempo t , además de los desplazamientos, según X e Y , de su centro de gravedad, es necesario conocer el ángulo que ha girado la barra. Son tres incógnitas y por lo tanto, se dice que el movimiento de una barra en el plano tiene tres grados de libertad.

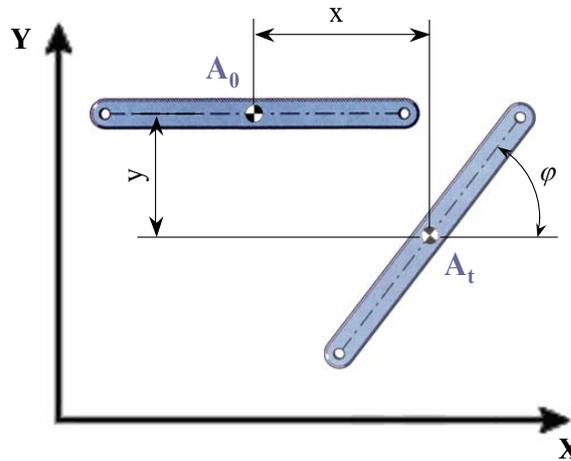


Figura 12.10. Movimiento de una barra en el plano. Tres grados de libertad.

Grados de libertad de un cuerpo cualquiera en el plano

Si en lugar de una barra se tiene cualquier otro cuerpo (figura 12.11), el movimiento también puede descomponerse en dos traslaciones y un giro, y por tanto se tienen tres grados de libertad.

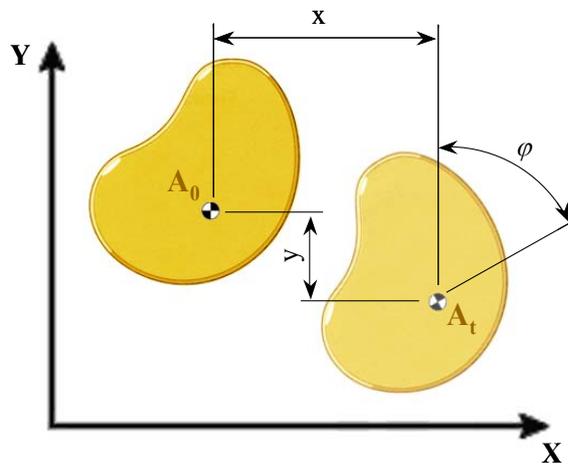


Figura 12.11. Movimiento de un cuerpo en el plano. Tres grados de libertad.

Grados de libertad, en el plano, de una barra articulada en un extremo

Siguiendo con los movimientos en el plano, si la barra está articulada en uno de sus extremos, el único movimiento posible es un giro, por lo que para definir su posición transcurrido un tiempo t basta con conocer el ángulo girado. Así pues, se tiene una única incógnita y se dice que la barra articulada tiene un grado de libertad en el plano.

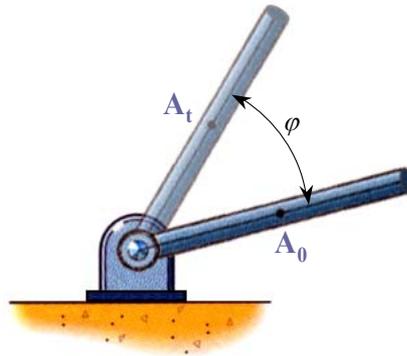


Figura 12.12. Barra articulada. Un grado de libertad.

Grados de libertad de un cuadrilátero articulado en el plano

Veamos ahora qué sucede con un mecanismo formado por varias barras articuladas entre sí, como es el caso del cuadrilátero articulado que se mueve en el plano. En la figura 12.13 puede apreciarse cómo, partiendo de una posición inicial determinada, basta con conocer el ángulo girado por la barra n° 1 para poder dibujar la posición de todos los elementos del mecanismo cuando ha transcurrido un tiempo t . Esto se debe a que, posicionada una barra, la posición de las demás viene dada por la geometría del mecanismo.

Como solo existe una incógnita, se dice que el cuadrilátero articulado moviéndose en el plano tiene un grado de libertad.

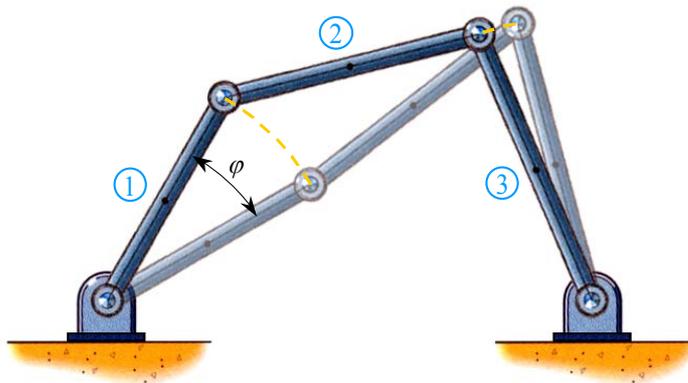


Figura 12.13. Movimiento de un cuadrilátero en el plano. Un grado de libertad.

Grados de libertad del mecanismo biela-manivela

Otro mecanismo interesante es el formado por una biela y una manivela, como el que se ilustra en la figura 12.14. Nuevamente, se puede definir la posición del mecanismo con una sola incógnita, por lo que se dice que tiene un grado de libertad.

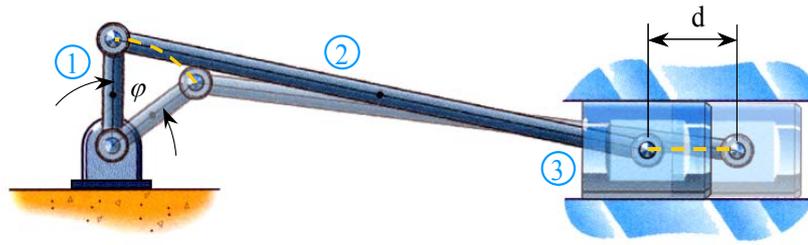


Figura 12.14. Movimiento de una biela-manivela en el plano. Un grado de libertad.

Hasta el momento, se ha asociado cada uno de los grados de libertad de un sistema mecánico con una incógnita concreta (desplazamiento en la dirección del eje X, desplazamiento según el eje Y, ángulo girado, etc.). Sin embargo, esto no es del todo cierto, ya que cada grado de libertad podría relacionarse con más de uno de los distintos parámetros que permiten describir la evolución del mecanismo, si bien tan sólo debe emplearse uno de ellos. Esto puede verse con claridad en el caso del mecanismo biela-manivela.

En la figura 12.14 se observa cómo, conocido el ángulo ν girado por la manivela 1, la posición del mecanismo queda perfectamente determinada. Suponiendo que este ángulo fuese desconocido, bastaría con conocer el desplazamiento d de la corredera 3 para nuevamente poder posicionar todo el mecanismo. Con esto se pretende ilustrar cómo el hecho de que un mecanismo tenga un grado de libertad implica que existe una incógnita que puede emplearse para definir su posición exacta en todo momento, si bien esta incógnita no es una concreta, sino una cualquiera de ellas. Así, la posición del mecanismo biela-manivela puede definirse mediante el ángulo ν , o bien por el desplazamiento d y, por tanto, conociendo solamente uno de estos valores puede representarse perfectamente la configuración del mecanismo.

Grados de libertad de dos barras en el espacio

En la figura 12.15, se muestran dos barras, articuladas entre sí, que se mueven en el plano. Para posicionar la barra A después de un tiempo t , se tienen tres incógnitas: los desplazamientos X e Y de su centro de gravedad y el giro realizado. Por otra parte, la barra B está articulada a la A, y en consecuencia se ve arrastrada por esta, pero puede girar libremente respecto a ella. Este giro de la barra B respecto a la A es una nueva incógnita, y en consecuencia un grado de libertad más. En definitiva, estas dos barras tienen cuatro grados de libertad.

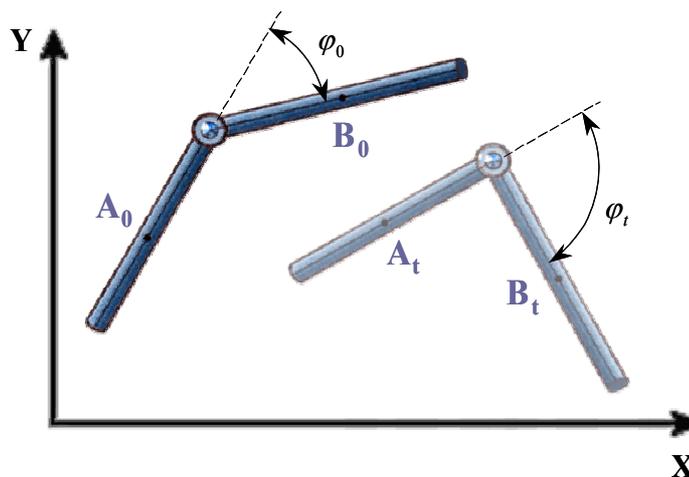


Figura 12.15. Dos barras articuladas en el plano. Cuatro grados de libertad.

Grados de libertad un sólido rígido en el espacio

Al comienzo de este apartado (figura 12.9), se ha visto cómo un punto que se mueve en el espacio tiene tres grados de libertad, asociados a sus tres posibles desplazamientos. Si en lugar de un punto se tiene un sólido rígido, el número de grados de libertad se eleva, ya que este no sólo se desplaza en el espacio, sino que además puede girar.

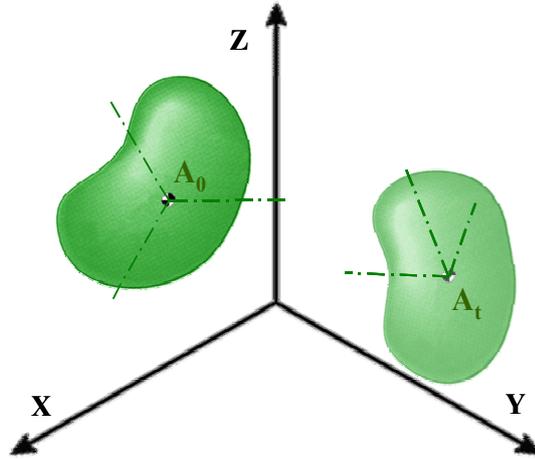


Figura 12.16. Cuerpo en el espacio. Seis grados de libertad.

El movimiento de un cuerpo en el espacio puede descomponerse en una traslación de su centro de gravedad más una rotación alrededor de dicho punto. Evidentemente, la traslación del centro de gravedad tiene tres componentes en las direcciones del sistema de referencia, y del mismo modo la rotación puede descomponerse en otras tres alrededor de ejes paralelos a los coordenados y que pasen por el centro de gravedad.

Así pues, un sólido rígido en el espacio tiene seis grados de libertad: tres correspondientes a los desplazamientos de su centro de gravedad en las direcciones X, Y y Z, más otros tres correspondientes a los giros respecto a los ejes paralelos a X, Y y Z que pasan por el centro de gravedad del cuerpo.

12.4. PLANTEAMIENTO DINÁMICO DE LOS GRADOS DE LIBERTAD

De lo comentado hasta ahora, se deduce claramente que los grados de libertad están ligados a las incógnitas del sistema mecánico, y por lo tanto para conocer la posición de todos sus elementos en un instante dado es necesario plantear tantas ecuaciones como grados de libertad tenga el mecanismo (ya que para que un sistema de ecuaciones tenga solución única es preciso que el número de ecuaciones sea igual al número de incógnitas).

A modo de ejemplo, se muestra en la figura 12.17 un cuerpo de masa m que únicamente puede desplazarse en dirección horizontal dentro de un plano, y sobre el cual se aplica una fuerza $F(t)$ conocida.

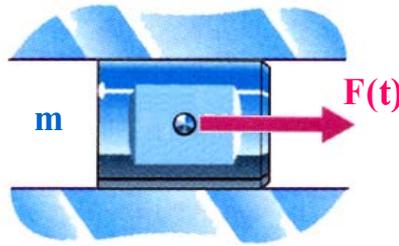


Figura 12.17. Esfuerzo $F(t)$ sobre un cuerpo de masa m .

Es evidente que dicho mecanismo posee un grado de libertad. Por otro lado, también resulta obvio que para resolver la dinámica de este cuerpo basta con aplicar la segunda ley de Newton en la dirección del movimiento:

$$F(t) = m a(t) \quad (1)$$

Siendo $a(t)$, la aceleración que la fuerza $F(t)$ produce sobre la masa m . Obviamente, como la fuerza $F(t)$ es variable con el tiempo, también lo será la aceleración.

Para obtener la velocidad de la masa en cualquier instante basta con integrar la aceleración, y para calcular el desplazamiento hay que integrar la velocidad.

Si en la ecuación (1) se sustituye la aceleración por la segunda derivada del desplazamiento, esta toma la forma de una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden:

$$F(t) = m \ddot{x}(t) \quad (2)$$

Siendo x el desplazamiento de la masa m .

De lo anteriormente expuesto se deduce que el modelo planteado en la figura 12.17 tiene un grado de libertad, y que para analizarlo desde el punto de vista dinámico es necesario plantear una ecuación diferencial de segundo orden, en la que la incógnita a despejar es el parámetro que se ha asociado al único grado de libertad del mecanismo.

Otro ejemplo en el que se puede apreciar claramente la relación entre los grados de libertad de un mecanismo y las ecuaciones que definen su comportamiento dinámico es el de una barra que se mueve en un plano.

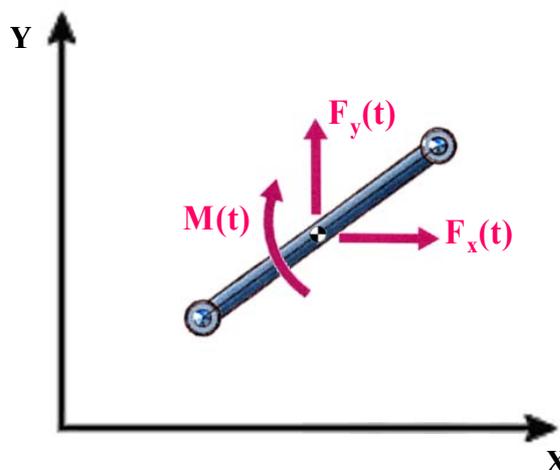


Figura 12.18. Barra solicitada a los esfuerzos $F_x(t)$, $F_y(t)$ y $M(t)$.

En la figura 12.18 se muestra una barra sometida a una fuerza $F(t)$, variable con el tiempo, la cual se ha descompuesto en sendas fuerzas $F_x(t)$ y $F_y(t)$ en la dirección de los ejes X e Y. Existe también un par $M(t)$, variable con el tiempo, que actúa sobre la barra.

Como ya se ha visto, una barra en un plano tiene tres grados de libertad, por lo que su posición quedará perfectamente determinada en todo instante si se conocen las coordenadas x e y de su centro de gravedad, así como el ángulo ν que forma la barra con el eje X. Dado que se tienen tres incógnitas, será necesario plantear un sistema de tres ecuaciones (tantas como incógnitas) que, por tratarse de un problema dinámico, serán diferenciales de segundo orden.

Como en el caso anterior, las ecuaciones diferenciales necesarias para plantear el problema dinámico se obtienen al aplicar la segunda ley de Newton a los giros o desplazamientos asociados a cada uno de los grados de libertad:

$$F_x(t) = m \ddot{x}(t)$$

$$F_y(t) = m \ddot{y}(t)$$

$$M(t) = I \ddot{\varphi}(t)$$

Siendo m la masa de la barra e I su momento de inercia.

En capítulos posteriores, cuando se estudie la dinámica de los sistemas mecánicos se profundizará más en el planteamiento y resolución de estas ecuaciones. Por ahora, basta con que el lector sepa que el número de grados de libertad es el mismo que el de ecuaciones diferenciales de segundo orden que se necesitan para determinar el movimiento del mecanismo.

12.5. ESLABONES, JUNTAS Y CADENAS CINEMÁTICAS

Cada uno de los cuerpos rígidos que se muestran en los ejemplos anteriores representa un elemento o eslabón cinemático que, para propósitos del análisis cinemático, se supondrá que no experimenta ninguna deformación. Esta es una hipótesis conveniente que permite definir más fácilmente los movimientos totales del eslabón. Después pueden sobreponerse cualesquiera deformaciones debidas a cargas externas o de inercia a los movimientos o efectos cinemáticos, para obtener una más completa y exacta imagen del comportamiento del cuerpo. Pero conviene recordar que en la etapa inicial del proceso de diseño no se pueden determinar deformaciones de un cuerpo hasta definir tamaño, forma, propiedades de materiales y cargas. Por consiguiente, en dicha etapa se supone, para fines de síntesis y análisis cinemáticos, que los eslabones o elementos cinemáticos son rígidos y sin masa.

Los **eslabonamientos** cinemáticos son los componentes básicos de todos los mecanismos. De hecho, todas las formas comunes de mecanismos, como levas, engranes, bandas o cadenas, son variantes de una clase común de eslabonamientos, los cuales se componen de eslabones y juntas.

Un **eslabón** es, hipotéticamente, un cuerpo rígido que posee al menos dos **odos**, que son los puntos de unión con otros eslabones. Estos pueden ser:

- binarios: *los que tiene dos nodos.*
- ternarios: *los que tiene tres nodos.*
- cuaternarios: *los que tiene cuatro nodos, etcétera.*

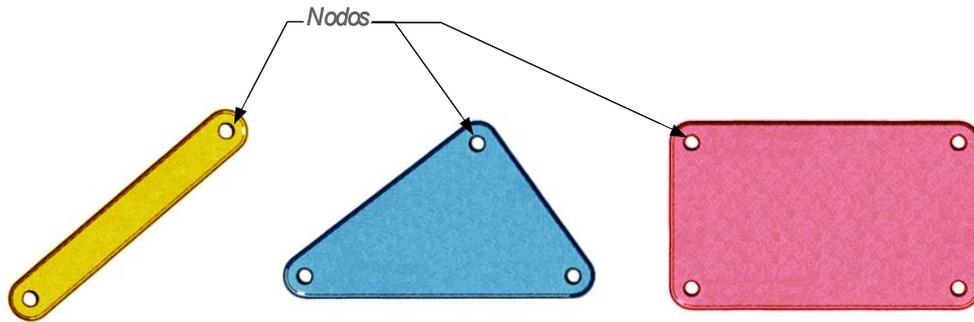


Figura 12.19. Eslabones (o elementos) cinemáticos de diferente orden.

Una **junta** o **par cinemático** es una conexión entre dos o más eslabones, en sus nodos, que permite algún movimiento entre los eslabones conectados.

Para visualizar el número de grados de libertad de una junta en un mecanismo, es útil "desconectar mentalmente" del resto del mecanismo los dos eslabones que forman la junta. Se puede, entonces, ver con más facilidad cuántas libertades tienen entre sí los dos eslabones conectados.

Una **cadena cinemática** se define como un ensamblaje de eslabones y juntas, interconectados de modo que proporcionen un movimiento de salida controlado en respuesta a un movimiento de entrada proporcionado.

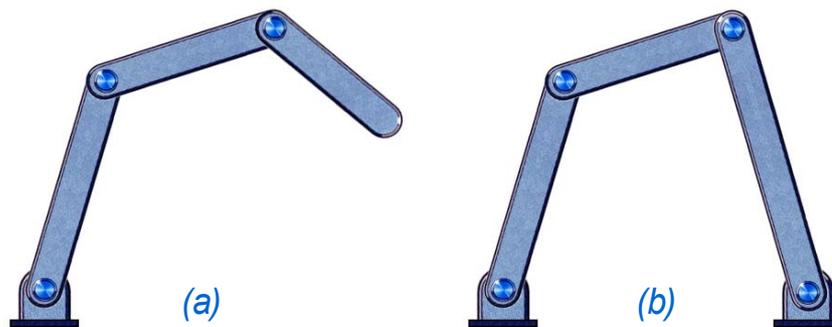


Figura 12.20. Mecanismos de: a) cadena abierta, b) cadena cerrada.

Las cadenas cinemáticas pueden ser **abiertas** o **cerradas**. En la figura 12.20 se presenta un mecanismo abierto y uno cerrado. Un mecanismo cerrado no tendrá puntos de conexión o nodos con apertura, y puede tener uno o más grados de libertad. Un mecanismo abierto con más de un eslabón tendrá siempre más de un grado de libertad, y con esto necesitará tantos actuadores (motores) como grados de libertad tenga. Un ejemplo común de mecanismo abierto es un robot industrial.

Un **mecanismo** se define como una cadena cinemática en la cual por lo menos un eslabón ha sido fijado o sujeción al marco de referencia, que puede estar en movimiento.

Una **máquina** se define como una combinación de cuerpos resistentes dispuestos para hacer que las fuerzas mecánicas de la naturaleza realicen trabajo acompañado por movimientos determinados. O bien, según la definición de Reuleaux, una máquina puede considerarse como un conjunto de mecanismos dispuestos para transmitir fuerzas y realizar trabajo.

Definiremos también una **manivela** como un eslabón que está unido a un elemento fijo o "tierra" mediante una junta de revolución y efectúa una vuelta completa; un **balancín** es un eslabón que tiene rotación oscilatoria (de vaivén) y está conectado a tierra por un par de revolución; y una **biela** o **acoplador**, como un eslabón que tiene movimiento complejo y no está unido a ningún elemento fijo. Este medio inmovilizante, el **elemento fijo** se define como cualquier eslabón o conjunto de eslabones que está sujeto en el espacio (sin movimiento) en relación

con el marco de referencia. Obsérvese también que el propio marco puede, de hecho, estar en movimiento.

12.6. PARES CINEMÁTICOS

De todo lo anterior se desprende que para que un mecanismo pueda cumplir la finalidad para la que ha sido concebido, es preciso que los elementos que lo integran estén conectados entre sí de algún modo, con objeto de transmitir los movimientos de unos a otros. Y son precisamente los pares cinemáticos quienes llevan a cabo esta misión de lograr el contacto permanente de unos elementos con otros, pero permitiendo el movimiento relativo entre ellos.

Existe una clasificación de los pares cinemáticos, atendiendo al grado del lugar geométrico en el que se produce el contacto; así, si el contacto es superficial, los pares reciben el nombre de inferiores, y si es lineal o puntual se denominan superiores. Dentro de los pares inferiores, existe también otra división, y pueden considerarse lineales, superficiales o espaciales.

Pares inferiores lineales

Son aquellos en los que la trayectoria de cada punto (vista desde el otro miembro de par) es una línea recta, un arco de circunferencia o una hélice cilíndrica. Estos pares se denominan de traslación, de rotación y helicoidal, respectivamente.

Par prismático o de traslación

Se compone de un cuerpo prismático que se mueve dentro de otro hueco de la misma forma, o viceversa. El movimiento queda restringido a una traslación paralela a las aristas del prisma (figura 12.21).

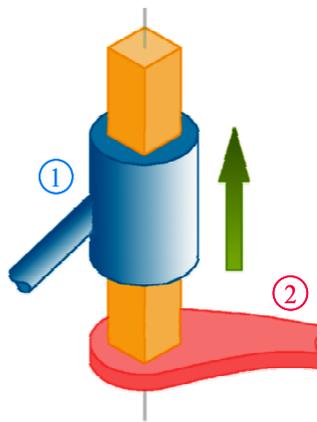


Figura 12.21. Par prismático o de traslación.

Como puede verse en la figura, el elemento 2 solamente puede trasladarse respecto al 1 en una dirección determinada. Si se considera el movimiento de ambos cuerpos en el plano, el sistema mecánico que forman tiene cuatro grados de libertad: los tres correspondientes al elemento 1, que está libre, más el asociado al desplazamiento del segundo eslabón respecto al primero.

Si ambos elementos estuvieran libres, y por lo tanto no constituyesen un par cinemático, tendrían un total de seis grados de libertad (tres cada uno); por tanto, el par prismático de traslación disminuye en 2 el número de grados de libertad.

Par de rotación o de revolución

En un par de rotación o revolución, un elemento gira respecto al otro, con un único posible movimiento de rotación alrededor de un eje de revolución concreto (figura 12.16).

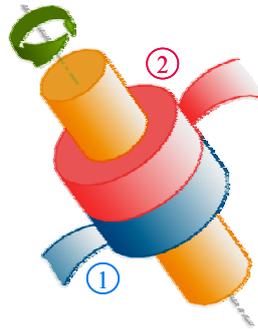


Figura 12.22. Par de rotación o revolución.

Como se ve en la figura, el cuerpo 2 solamente puede girar respecto al 1 alrededor de un eje determinado. Si se considera el movimiento de ambos elementos en el plano, este par tiene cuatro grados de libertad: los tres propios del elemento 1, más el giro del elemento 2 respecto al 1.

Al igual que antes, si ambos elementos estuvieran libres, y por lo tanto no formasen un par cinemático, tendrían seis grados de libertad (tres cada uno), por lo que el par de rotación o revolución disminuye en dos el número de grados de libertad.

Par helicoidal

Este par se compone de un sólido de núcleo cilíndrico dotado de un filete helicoidal, que se mueve dentro del hueco correspondiente labrado en el otro miembro. Su posible movimiento viene definido por una traslación paralela a las generatrices del cilindro, más una rotación alrededor del eje del mismo, de tal modo que cada punto siga una trayectoria helicoidal (figura 12.23).

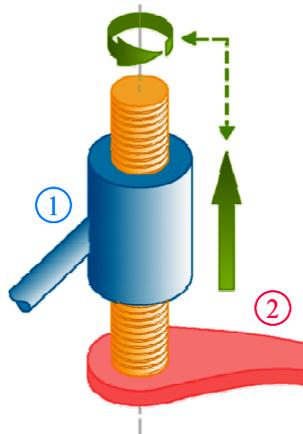


Figura 12.23. Par helicoidal.

Como puede observarse en la figura, el elemento 1 gira y se desplaza respecto al 2, pero el ángulo girado está relacionado con el desplazamiento por medio del paso del filete helicoidal. Un ejemplo de este par cinemático lo constituyen un tornillo junto con su tuerca.

Aunque los movimientos del cuerpo 1 son dos (giro y desplazamiento), solamente tiene un grado de libertad, ya que para cada ángulo girado, la traslación que se produce queda determinada por el paso de la hélice.

Y como este sólido sólo tiene un grado de libertad (frente a los tres que tendría si fuera libre), este par cinemático disminuye dos grados de libertad en el mecanismo, al igual que ocurría en los casos anteriores.

A continuación se describirán algunos pares cinemáticos inferiores para elementos que se mueven en el espacio.

Pares inferiores superficiales

Se llaman pares inferiores superficiales aquellos en los que la trayectoria de cada punto, vista desde el otro elemento del par, está situada sobre una superficie, que puede ser cilíndrica, plana o esférica, denominándose pares cilíndricos, planos y esféricos respectivamente.

Par cilíndrico

Este par está formado por un sólido cilíndrico que se mueve dentro de otro de la misma forma, o viceversa. Sus posibles movimientos son una rotación alrededor del eje del cilindro y una traslación a lo largo del mismo.

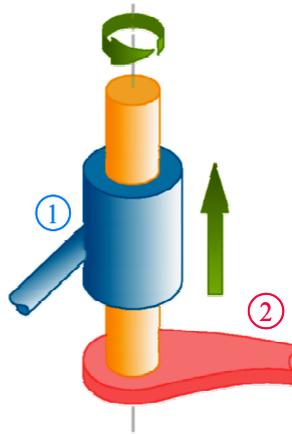


Figura 12.24. Par cilíndrico.

En la figura 12.24 se muestra un esquema de este tipo de par cinemático, y puede observarse cómo el elemento 1 puede girar libremente respecto al elemento 2 y además también puede desplazarse libremente respecto a este, sin que exista ninguna ley que pueda relacionar ambos movimientos.

Si el elemento 1 se moviese libremente en el espacio, tendría seis grados de libertad, mientras que al existir el par cilíndrico, solamente puede girar respecto a un eje y desplazarse por él. Es decir, sólo tiene dos grados de libertad y por tanto puede decirse que ha perdido cuatro.

Par plano

Está constituido por un sólido de bases planas paralelas, que se mueve entre los dos planos de sus bases. El movimiento relativo es una traslación paralela a los citados planos.

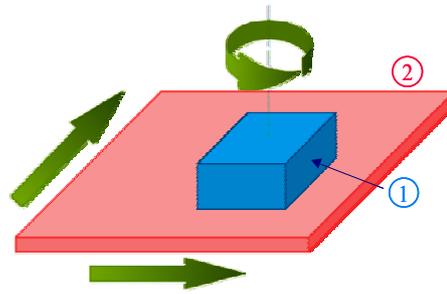


Figura 12.25. Par plano.

En la figura 12.25 se muestra un esquema de este par cinemático, y puede apreciarse cómo el elemento 1 se mueve libremente por el plano del elemento 2, y en consecuencia tiene tres grados de libertad: los dos desplazamientos x e y , más el giro v .

Como el elemento 1 tendría seis grados de libertad si estuviese libre en el espacio, y al formar parte de un par plano solamente tiene tres, este tipo de par cinemático restringe los grados de libertad en tres unidades

Par esférico

Está formado por un sólido esférico que se mueve dentro de otro de la misma forma o viceversa. Su posible movimiento es una rotación alrededor del centro de la esfera.

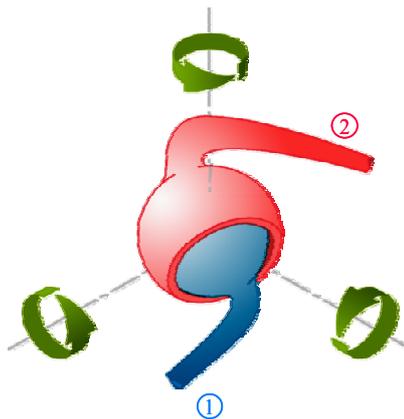


Figura 12.26. Par esférico.

En la figura 12.26 se muestra un esquema de un par esférico, y puede observarse cómo el elemento 1 puede girar libremente respecto a cualquiera de los tres ejes, sin desplazarse respecto al elemento 2. En definitiva, como se dispone de tres posibles rotaciones, tiene tres grados de libertad, que frente a los seis generales del cuerpo libre en el espacio supone una pérdida de tres grados de libertad.

Pares cinemáticos superiores

Los pares cinemáticos se denominan superiores cuando el lugar geométrico en el que se produce el contacto es lineal o puntual.

Hay un número infinito de pares superiores, por lo que estos no pueden clasificarse fácilmente. Los más frecuentes son:

- Par leva-seguidor
- Par guía-corredera

- Palancas rodantes
- Engranajes

12.7. DETERMINACIÓN DEL NÚMERO DE GRADOS DE LIBERTAD.

Veamos ahora cómo se determina en la práctica el número de grados de libertad de un mecanismo, atendiendo al número de elementos que lo forman, así como al número de pares cinemáticos que lo componen.

Criterio de Gruebler

A modo de ejemplo, se determinará el número de grados de libertad de un cuadrilátero articulado (figura 12.27). Por tratarse de un mecanismo plano, cada una de las barras que lo componen tendría tres grados de libertad si estuviera libre y en consecuencia, dado que el cuadrilátero está constituido por tres barras, el máximo número de grados de libertad sería nueve. Sin embargo, existen cuatro articulaciones formadas por sendas juntas de revolución, las cuales, como se ha visto en los apartados anteriores, reducen el número de grados de libertad en dos unidades cada una. Por tanto, al existir cuatro pares de rotación, la reducción total de grados de libertad es de ocho unidades que, al ser restadas de los nueve posibles grados de libertad dan un total de un grado de libertad.

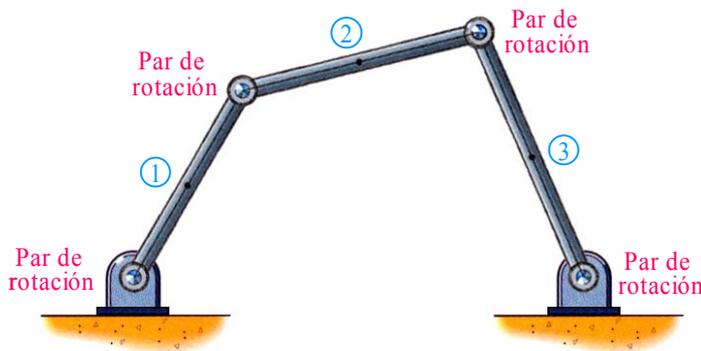


Figura 12.27. Cuadrilátero articulado.

En general, en los mecanismos planos en los que todos los miembros están unidos por juntas de revolución se verifica la siguiente relación:

$$N.^{\circ} \text{ Grados de Libertad} = 3 \cdot N.^{\circ} \text{ Elementos} - 2 \cdot N.^{\circ} \text{ Pares de Revolución}$$

Aplicando la expresión anterior al caso concreto del cuadrilátero articulado, se tiene que:

$$N.^{\circ} \text{ Grados de Libertad} = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1$$

Otro planteamiento empleado para definir el número de grados de libertad de un mecanismo consiste en considerar los apoyos como elementos del sistema. Siguiendo este criterio, el cuadrilátero de la figura 12.27 estará formado por un elemento fijo, que sería el suelo, más tres barras, lo que hace un total de cuatro elementos. Y por tratarse de un mecanismo plano, el mayor número de grados de libertad posibles es de doce (tres por cada uno de los cuatro elementos). No obstante, dado que los elementos fijos tienen su movimiento totalmente restringido, no tienen ningún grado de libertad, lo que reduce el número total de grados de libertad del sistema.

En definitiva, siguiendo este último criterio, la ecuación general que proporciona el número de grados de libertad de cualquier mecanismo plano constituido por la unión de pares de revolución puede expresarse como:

$$\begin{aligned}
 N.º \text{ Grados de Libertad} &= 3 \cdot N.º \text{ Elementos} - \\
 &\quad - 2 \cdot N.º \text{ Pares de Revolución} - \\
 &\quad - 3 \cdot N.º \text{ Elementos fijados al suelo}
 \end{aligned}$$

En concreto, para el ejemplo que nos ocupa se tiene que:

$$N.º \text{ Grados de Libertad} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 1$$

Por último, otra posibilidad consiste en considerar los elementos fijados al suelo como un único elemento denominado suelo. En tal caso, la ecuación general toma la forma:

$$N.º \text{ Grados de Libertad} = 3 \cdot N.º \text{ Elementos} - 2 \cdot N.º \text{ Pares de Revolución} - 3 \cdot 1$$

Esta ecuación aplicada al cuadrilátero articulado da:

$$N.º \text{ Grados de Libertad} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 1$$

En la figura 12.28 se muestra un mecanismo biela-manivela, formado por tres elementos: dos barras y una corredera. Por tratarse de tres elementos moviéndose en el plano, el conjunto tiene nueve posibles grados de libertad (tres por cada elemento). Por otra parte, el mecanismo está formado por la unión de cuatro pares cinemáticos:

- Un par de revolución formado por el suelo y la barra 1.
- Un par de revolución formado por las barras 1 y 2.
- Un par de revolución formado por la barra 2 y la corredera 3.
- Un par de traslación formado por la corredera 3 y el suelo.

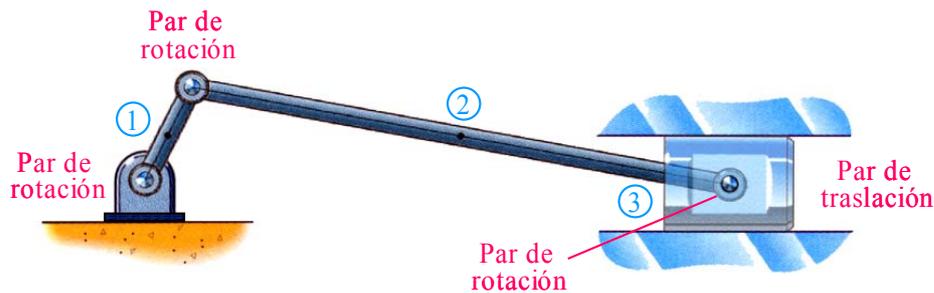


Figura 12.28. Mecanismo biela-manivela

Como recordará el lector, el par de traslación, al igual que el de rotación, reduce el número de grados de libertad del sistema en dos unidades. En definitiva, el mecanismo biela-manivela está formado por cuatro pares elementales, cada uno de los cuales reduce dos grados de libertad, por lo que en total se tienen:

$$N.º \text{ Grados de Libertad} = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1$$

En general, para mecanismos planos se tendrá que:

$$G = 3 \cdot (N - F) - 2 \cdot P_1 - 1 \cdot P_2$$

Análogamente, para mecanismos espaciales, en los que los cuerpos libres tienen seis grados de libertad y las juntas pueden restringir entre uno y cinco grados de libertad, el criterio de Gruebler toma la siguiente forma:

$$G = 6 \cdot (N - F) - 5 \cdot P_1 - 4 \cdot P_2 - 3 \cdot P_3 - 2 \cdot P_4 - 1 \cdot P_5$$

Siendo P_i el orden de la junta, es decir, el número de grados de libertad de movimiento que permite.

Esta ecuación que se conoce con el nombre de **condición de Gruebler** no aporta información acerca de tamaños o formas de eslabones, sino sólo su cantidad.

Paradojas

Debido a que el criterio de Gruebler no presta atención a los tamaños y formas de los cuerpos, puede ocasionar resultados engañosos ante las configuraciones geométricas únicas. Existen algunos sistemas mecánicos sobredeterminados que no satisfacen el criterio de Gruebler; son sistemas que en teoría no deberían moverse, ya que la ecuación de Gruebler predice para ellos un número de grados de libertad menor o igual que cero. Sin embargo, en la práctica sí pueden moverse, debido a las dimensiones específicas de sus elementos y a una disposición particular de los ejes de las juntas.

Un ejemplo típico es el cuadrilátero articulado plano con cuatro juntas de revolución. Cuando se considera como un mecanismo tridimensional (figura 12.29), la ecuación de Gruebler predice -2 grados de libertad para él. Sin embargo, el mecanismo se mueve cuando las cuatro juntas de revolución tienen los ejes paralelos. Si esta condición no se satisface, el sistema estaría bloqueado.

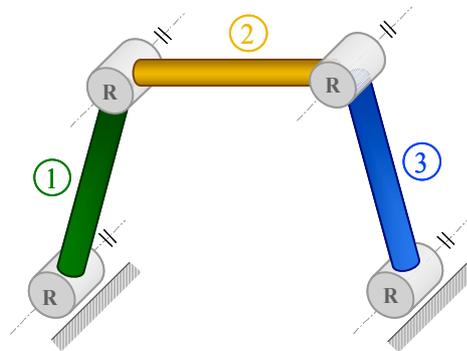


Figura 12.29. Cuadrilátero articulado espacial

Para evitar la confusión, podrían considerarse las juntas como cilíndricas (con dos grados de libertad cada una) lo que conduciría a un mecanismo con dos grados de libertad: el asociado al movimiento habitual del cuadrilátero articulado, más otro relacionado con el movimiento de traslación del conjunto en la dirección normal al plano del mecanismo. Naturalmente, este último grado de libertad podría obviarse sin más que considerar que una de las cuatro juntas es de revolución, lo que sería suficiente para impedir dicho desplazamiento.

Otro de los mecanismos que incumplen la ecuación de Gruebler es el de Bricard, que se muestra en la figura 12.30, y en el que la disposición particular de las cinco barras, de modo que cada una de ellas es perpendicular a las adyacentes, permite un movimiento que en otro caso no podría tener lugar.

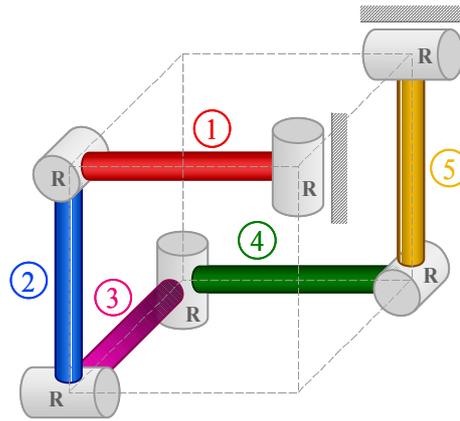


Figura 12.30. Mecanismo de Bricard

Hay otros ejemplos de paradojas que no cumplen el criterio de Gruebler debido a su geometría especial, por lo que es aconsejable estar alerta ante estas posibles incongruencias.

12.8. MECANISMOS Y ESTRUCTURAS

Los grados de libertad de un conjunto de cuerpos ensamblados entre sí predicen por completo su carácter. Hay sólo tres posibilidades. Si el número de grados de libertad es positivo se tendrá un mecanismo, y los eslabones tendrán movimiento relativo unos respecto a otros, si es igual a cero, entonces se tendrá una estructura, y ningún movimiento es posible y si es negativo lo que se tendrá es una estructura precargada, lo que significa que ningún movimiento es posible y algunos esfuerzos pueden también estar presentes en el momento del ensamble. En la figura 12.31 se muestran ejemplos de estos tres casos, habiéndose fijado un elemento en cada uno de ellos.

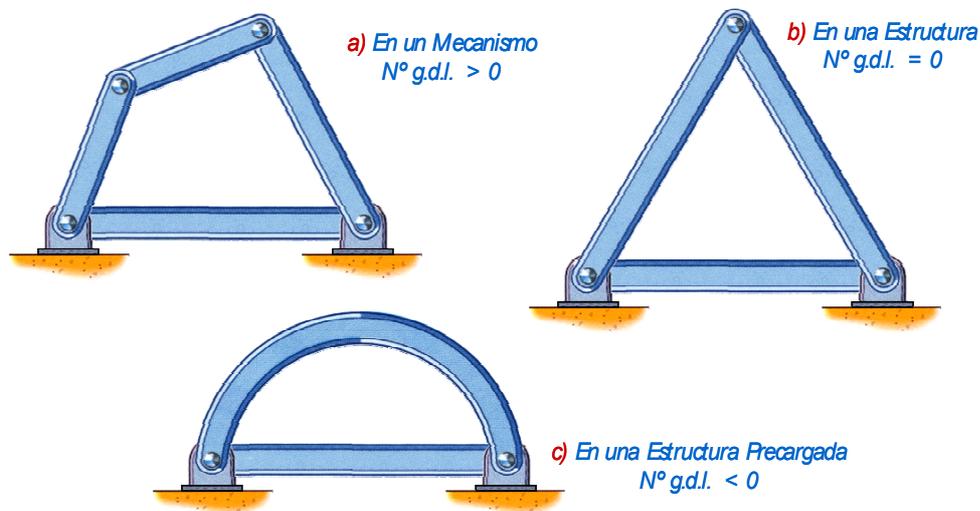


Figura 12.31. Mecanismo biela-manivela

En la figura 12.31 (a) se presentan cuatro barras conectadas por cuatro juntas de revolución, lo cual, a partir de la ecuación de Gruebler, da un grado de libertad. Se moverá y sólo una entrada es necesaria para originar resultados predecibles.

En la figura 12.31 (b) se muestran tres barras unidas mediante tres juntas de revolución. Tiene cero grados de libertad y es por tanto una estructura. Nótese que los tres pasadores se pueden insertar en sus respectivos nodos sin esforzar la estructura, ya que puede hallarse siempre una posición que permita el ensamblaje.

Finalmente, en la figura 12.31 (c) se muestran dos eslabones conectados por dos juntas de revolución. Su número de grados de libertad es igual a menos uno, lo cual lo convierte en una estructura precargada. Nótese que para insertar los dos pasadores sin someter a esfuerzo los elementos, la distancia al centro de los agujeros en ambos cuerpos debe ser exactamente la misma, lo que es muy difícil de realizar en la práctica. Habrá siempre algún error de fabricación, aunque sea muy pequeño, por lo que es muy posible que deba forzarse el segundo pasador a su lugar, y originar con ello algún esfuerzo en los eslabones. La estructura estará, entonces, precargada. Este mismo caso se da en una viga hiperestática, es decir, aquella en la cual se tienen también demasiados apoyos o restricciones para las ecuaciones disponibles. Una viga estáticamente indeterminada o hiperestática también tiene un grado de libertad negativo, en tanto que una viga simplemente apoyada o isostática tiene cero grados de libertad.

Las estructuras simples y las estructuras precargadas por lo general se utilizan en ingeniería. De hecho, la estructura real con cero grados de libertad es rara en la práctica de la ingeniería. La mayor parte de las edificaciones, puentes y armazones de máquina son estructuras precargadas, debido al uso de juntas soldadas y remachadas en vez de juntas de pasador o articuladas. Aun estructuras muy simples, como puede ser una simple silla, con frecuencia son precargadas. Puesto que el interés aquí es acerca de los mecanismos, nos concentraremos sólo en dispositivos con un número positivo de grados de libertad.

12.9. COORDENADAS

La elección del sistema de coordenadas más apropiado para el tipo de mecanismo que se desea analizar influye notablemente en la complejidad de la formulación y resolución de las ecuaciones del movimiento, así como en el número de ecuaciones empleadas para plantear el problema. Por ello, conviene prestar suficiente atención a esta etapa del análisis.

Independientemente del sistema de coordenadas con el que se decida trabajar, la información que se pretende conocer es la posición y orientación de cada uno de los elementos que componen el sistema multicuerpo respecto a un sistema cartesiano de referencia XYZ (figura 12.32), que puede ser fijo o inercial, y al que llamaremos sistema global. Una vez conocido esto, la obtención de las coordenadas globales de cualquier punto del sistema resulta una tarea sencilla.

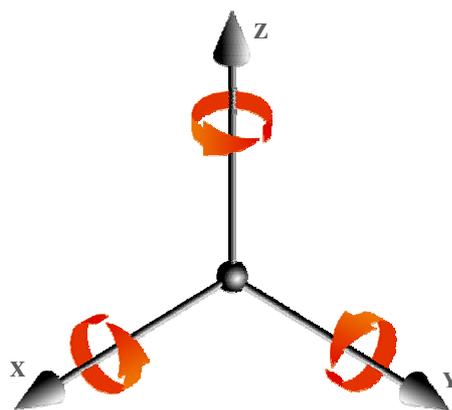


Figura 12.32. Sistema de referencia global.

Como se sabe, para poder determinar la posición de cada uno de los elementos de un mecanismo es preciso conocer el valor de tantos parámetros como grados de libertad tenga el sistema mecánico. Sin embargo, no existe ningún inconveniente en emplear un número mayor de parámetros. A estos parámetros empleados para definir unívocamente la configuración del sistema en todo instante se les denomina coordenadas.

Dado que en un sistema con k grados de libertad tan sólo se necesitan k coordenadas, si se trabaja con un conjunto de n ($n \geq k$) coordenadas, tan sólo habrá k coordenadas independientes, mientras que las $m = n - k$ restantes estarán relacionadas de algún modo con las otras.

Existen varios tipos de coordenadas para definir la posición de un cuerpo dentro de un mecanismo. Los más empleados son:

- Coordenadas cartesianas locales (o de punto de referencia),
- Coordenadas relativas (o lagrangianas),
- Coordenadas básicas (o de punto),
- Coordenadas naturales,
- Coordenadas mixtas.

Seguidamente, daremos una breve descripción de cada uno de estos sistemas de coordenadas.

Coordenadas locales o de punto de referencia

Tradicionalmente, para identificar la posición de cada uno de los elementos del sistema multicuerpo respecto al sistema de referencia global XYZ se recurre a la definición de sendos sistemas cartesianos, $\xi\eta\zeta$, ligados a cada uno de los elementos que componen el sistema multicuerpo, y que evolucionan solidariamente con el miembro al que se han fijado (figura 12.33).

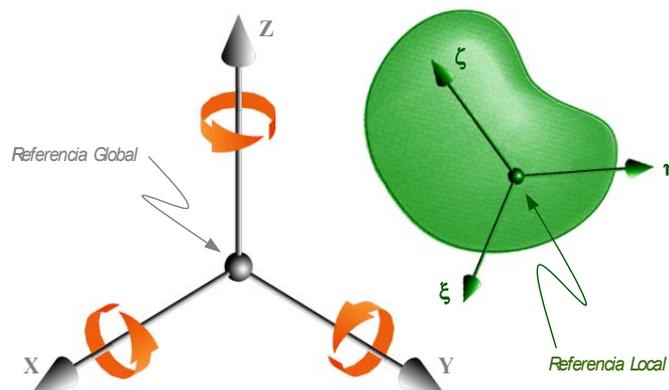


Figura 12.33. Sistema de referencia local.

De este modo, para especificar la posición de cada cuerpo basta con indicar las coordenadas cartesianas globales del punto en el que se encuentra el origen de la referencia local que evoluciona solidariamente con él. En cuanto a su orientación, en los sistemas planos es suficiente con definir un ángulo que indique la orientación del sistema local respecto al global, mientras que en el espacio se necesitarán tres coordenadas angulares (cuatro, en el caso de trabajar con parámetros de Euler) que definan unívocamente la orientación de los ejes locales respecto a los globales.

El uso de este tipo de coordenadas permite formular el problema dinámico de forma muy generalizada, y relativamente sencilla para los sistemas planos. Sin embargo, en el caso de trabajar en el espacio tridimensional, los sistemas de coordenadas que emplean tan sólo tres parámetros para definir la orientación presentan la gran desventaja de degenerar en algunos puntos del espacio, por lo que resulta más conveniente la utilización de los parámetros de Euler, con el inconveniente de que conducen a una formulación bastante complicada.

En la figura 12.34 se muestran estas coordenadas aplicadas a un mecanismo plano.

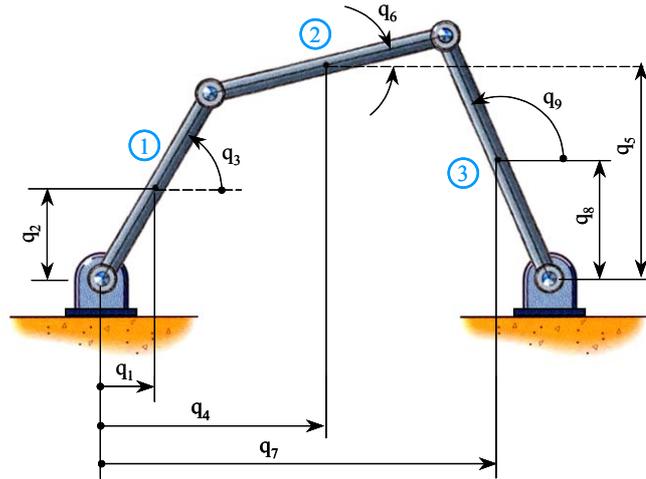


Figura 12.34. Coordenadas de punto de referencia

En este caso se emplean tres coordenadas para definir la posición de cada una de las barras, con lo cual se necesitan nueve coordenadas para el mecanismo completo.

Coordenadas relativas

Cuando se trabaja con coordenadas relativas, en lugar de definir la posición y orientación de cada elemento respecto al sistema global de referencia, lo que se hace es referirlas al miembro contiguo, mediante un ángulo, una distancia, o bien mediante combinaciones de ambos. Así, las distancias se asocian con los grados de libertad que permiten el desplazamiento relativo entre ambos cuerpos, mientras que los ángulos se aplican en los casos en que existe posibilidad de giro.

En la figura 12.35 se muestran tres pares cinemáticos con su configuración en el espacio, y se señalan las coordenadas relativas que se utilizan.

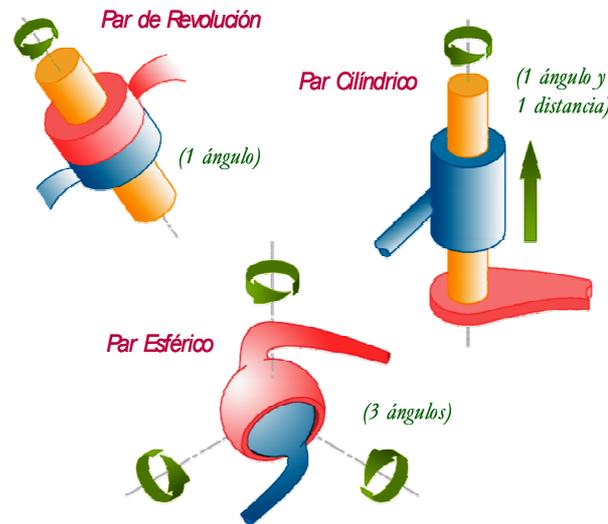


Figura 12.35. Pares cinemáticos espaciales con sus coordenadas relativas

En general, para posicionar cada uno de los elementos se necesitan menos parámetros que en el caso de emplear coordenadas locales; concretamente, tan sólo se necesita una variable por cada uno de los grados de libertad permitidos en el movimiento relativo entre el cuerpo que se pretende localizar y el cuerpo respecto al cual se están refiriendo las coordenadas.

Una vez conocidas la posición y orientación globales de uno de los miembros del sistema multicuerpo, así como las coordenadas relativas correspondientes a todos los demás, es posible determinar la posición exacta de todos ellos en el sistema global.

Este tipo de coordenadas resulta especialmente apropiado para trabajar con sistemas multicuerpo abiertos; sin embargo, para sistemas cerrados conducen a una formulación bastante más compleja que la que se obtendría en el caso de definir la configuración del sistema mediante coordenadas locales. No obstante, como ya apuntamos anteriormente, el número de variables del problema se reduce sensiblemente.

En la figura 12.36 se muestran dos ejemplos de mecanismos planos en los que se han empleado coordenadas relativas para definir su posición.

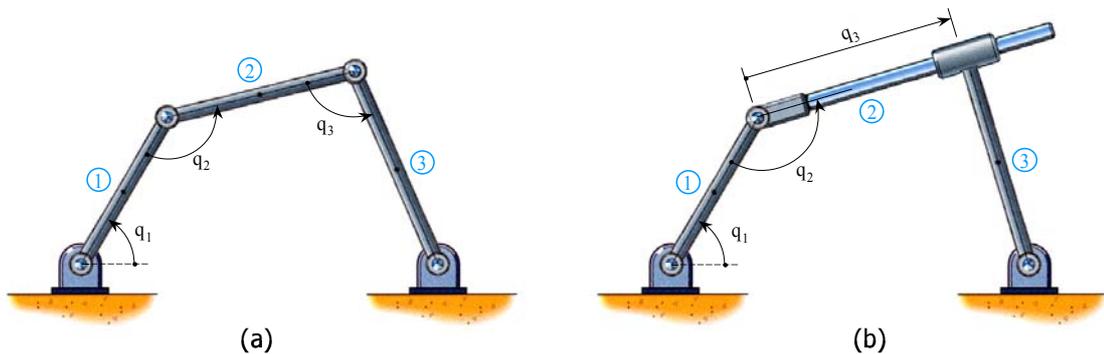


Figura 12.36. Mecanismos planos con coordenadas relativas.

En el primer caso se han utilizado tres coordenadas, q_1 , q_2 , q_3 , que son respectivamente los ángulos relativos entre la primera barra y el suelo, entre la segunda barra y la primera, y entre la tercera y la segunda, respectivamente.

Si se compara este número de coordenadas con el utilizado en el mismo ejemplo pero trabajando con coordenadas de punto de referencia (figura 12.34), puede comprobarse cómo las coordenadas de punto de referencia requieren un número más elevado de coordenadas: nueve, en este caso, frente a las tres coordenadas relativas.

En el segundo ejemplo también se han empleado tres coordenadas q_1 , q_2 , q_3 ; las dos primeras son iguales a las del ejemplo anterior, mientras que la tercera es ahora la longitud, medida en la dirección de la barra número 2, desde su articulación con la barra 1 hasta el punto variable en el que se apoya sobre la barra 3.

Coordenadas básicas

Podemos considerar las coordenadas básicas como una interesante alternativa a los dos tipos de coordenadas anteriores. Su filosofía de utilización consiste en definir la configuración del sistema tan solo mediante las coordenadas globales de ciertos puntos significativos pertenecientes a cada uno de sus miembros, y a los que llamaremos puntos primarios.

Mediante la utilización de estas coordenadas, la posición y orientación de un cuerpo queda definida por al menos dos puntos, necesitándose a lo sumo cuatro puntos en el caso más general. Así, un cuerpo unidimensional —como podría ser una barra de pequeño diámetro—, se representaría por dos puntos primarios (figura 12.37); un cuerpo bidimensional —como por ejemplo una placa delgada—, podría definirse mediante tres puntos (figura 12.38); y uno tridimensional por cuatro puntos (figura 12.39). Y conociendo las coordenadas globales de todos los puntos primarios de un sólido, podríamos calcular la de cualquier otro punto.

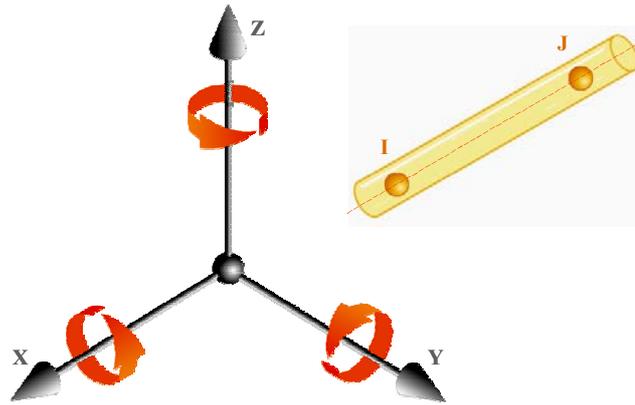


Figura 12.37. Coordenadas básicas de un cuerpo unidimensional.

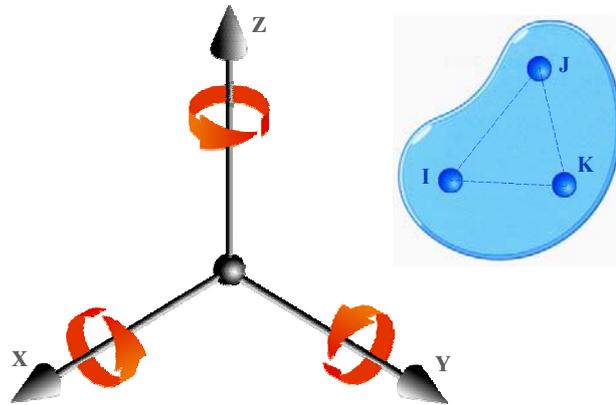


Figura 12.38. Coordenadas básicas de un cuerpo plano.

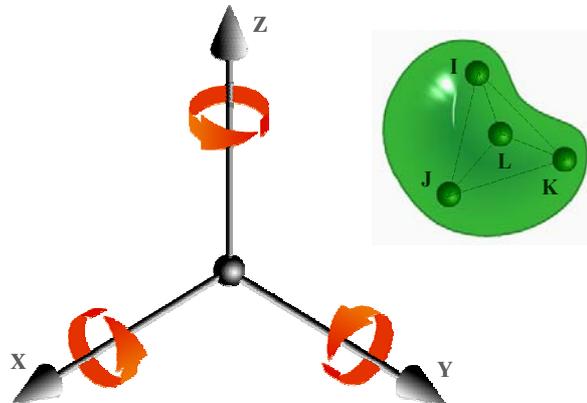


Figura 12.39. Coordenadas básicas de un cuerpo tridimensional.

Este tipo de coordenadas presenta la gran ventaja de poder definir la orientación de un cuerpo sin necesidad de recurrir a la utilización de coordenadas angulares que, como va dicho, tienen un tratamiento complicado al trabajar en tres dimensiones. Esto se traduce en una extraordinaria sencillez en la formulación de las relaciones de dependencia entre las distintas coordenadas, que han tenerse en consideración sea cual sea el sistema de coordenadas elegido, y que se deben a la existencia de restricciones geométricas que limitan el movimiento relativo entre miembros contiguos de un sistema multicuerpo, ligados entre sí por juntas cinemáticas.

Otra de sus ventajas es que resultan igualmente apropiadas para sistemas abiertos o cerrados, cosa que no ocurría con las coordenadas relativas

Las coordenadas básicas pueden ser consideradas como una evolución de las coordenadas de punto de referencia, en donde los puntos de referencia se desplazan hasta las juntas de unión de los pares cinemáticos. De esta forma, los puntos de referencia son siempre compartidos por dos elementos.

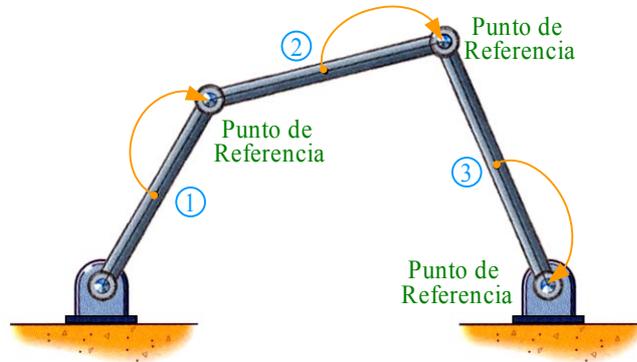


Figura 12.40. Paso de coordenadas de punto de referencia a coordenadas básicas.

En la figura 12.40 se muestra esquemáticamente la evolución de las coordenadas de punto de referencia, y las coordenadas resultantes, que son las coordenadas básicas.

Coordenadas naturales

Las coordenadas naturales son las más recientes de todas las que hemos citado, y proceden de una evolución más sofisticada de las coordenadas básicas.

Simplificando, podríamos considerarlas como el resultado de sustituir algunas parejas de puntos primarios correspondientes a un mismo cuerpo, por uno tan solo de ellos, más un vector que va desde este hasta el otro, con la salvedad de que en la práctica se emplean vectores unitarios (figura 12.41). De este modo, cada uno de los miembros de un sistema multicuerpo quedaría definido mediante un conjunto de puntos y vectores, cuyas coordenadas y componentes, referidas al sistema global de referencia, definirían de forma unívoca su posición y orientación en el espacio.

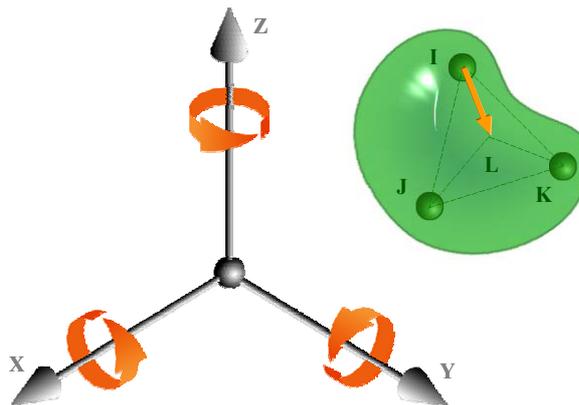


Figura 12.41. Coordenadas naturales.

Estas coordenadas presentan las mismas cualidades que las coordenadas básicas, con la ventaja añadida de que la utilización de vectores resulta especialmente apropiada para modelizar las relaciones de dependencia que existen entre las distintas coordenadas.

La formulación tradicional de estas relaciones de dependencia requiere la imposición, en numerosas ocasiones, de las condiciones de paralelismo o perpendicularidad entre ciertos vectores,

que en el caso de trabajar con coordenadas naturales pueden ser los mismos que se han utilizado para definir la posición y orientación de los distintos cuerpos.

Coordenadas mixtas

Las coordenadas mixtas no son más que una combinación de los tipos de coordenadas anteriores, y se emplean en algunos casos en los que interesa conocer determinado tipo de desplazamientos relativos entre dos miembros del sistema multicuerpo. Para ello, con el objeto de facilitar el cálculo de estos desplazamientos en el caso de no trabajar con coordenadas relativas, además del tipo de coordenadas elegido para definir por completo la posición y orientación de cada sólido, se utilizan una serie de parámetros adicionales como, por ejemplo, el ángulo que forman dos cuerpos, o la distancia que hay entre ellos.

Referencias

1. C.Vera, B. Suárez, “Fundamentos Teóricos de la Simulación de Sistemas Mecánicos I”, U.N.E.D.
2. Robert L. Norton, “Diseño de Maquinaria”, McGraw-Hill Inc.