

Análisis Cinemático de Sistemas Multicuerpo

13.1 INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS CINEMÁTICO

Los problemas cinemáticos son aquellos en los que se estudia la posición o el movimiento de un sistema multicuerpo, independientemente de las fuerzas que lo producen. Estos problemas son de naturaleza puramente geométrica y pueden resolverse sin tener en cuenta, no sólo las fuerzas que actúan, sino también las características inerciales de los cuerpos que forman el sistema, tales como masa, tensor de inercia y posición del centro de gravedad.

Definiremos como elementos de entrada de un sistema multicuerpo aquellos cuya posición o movimiento son conocidos. La posición o movimiento de los restantes cuerpos del sistema puede determinarse de acuerdo con la correspondiente al elemento de entrada, existiendo tantos elementos de entrada como grados de libertad.

En la práctica, pueden presentarse diferentes tipos de problemas cinemáticos que describiremos a continuación:

Problema de Posición Inicial

Consiste en encontrar la posición de todos los elementos del sistema multicuerpo que se esté analizando, para una posición inicial dada de los cuerpos de entrada.

Problema de Desplazamientos Finitos

Desde una posición conocida del sistema multicuerpo, y un desplazamiento finito (no infinitesimal) de los cuerpos de entrada, este problema consiste en conocer la posición final de los restantes cuerpos del sistema.

Análisis de Velocidades y Aceleraciones

Dada una posición del sistema multicuerpo y la velocidad de los elementos de entrada, el análisis de velocidades consiste en determinar las velocidades de todos los otros elementos.

Una vez conocida la velocidad de todos los cuerpos del sistema, el análisis de aceleraciones consiste en calcular la aceleración de cada uno de ellos para una aceleración determinada de los elementos de entrada.

Simulación cinemática

La simulación cinemática proporciona una visión del rango completo de movimiento del sistema multicuerpo. La solución a este problema engloba todos los anteriores, con un especial énfasis en el caso de los desplazamientos finitos. Permite detectar colisiones, estudiar las trayectorias de diferentes puntos, secuencias en las posiciones de un determinado elemento del sistema, etc.

En todos estos casos, la solución del problema, cuando se aplican técnicas de análisis de sistemas multicuerpo, pasa por el planteamiento y resolución de un sistema de ecuaciones, denominadas ecuaciones de restricción, que expresan de forma analítica las limitaciones de movimiento impuestas por las juntas al movimiento relativo de los dos cuerpos unidos por ellas, y cuya primera y segunda derivadas respecto al tiempo son las ecuaciones de velocidad y aceleración, respectivamente.

Estas técnicas de análisis de sistemas mecánicos que se emplean en el desarrollo de los programas informáticos de simulación, tienen como objetivo el desarrollo de metodologías básicas que permitan plantear y resolver de manera automática las ecuaciones del movimiento, lo que requiere técnicas sistemáticas de formulación de ecuaciones y métodos numéricos para resolverlas.

13.2 PLANTEAMIENTO DE LAS ECUACIONES DE RESTRICCIÓN

Restricciones en Posición, utilizando Coordenadas Cartesianas

Veamos con un ejemplo y de una manera intuitiva el significado de las ecuaciones de restricción anteriormente citadas.

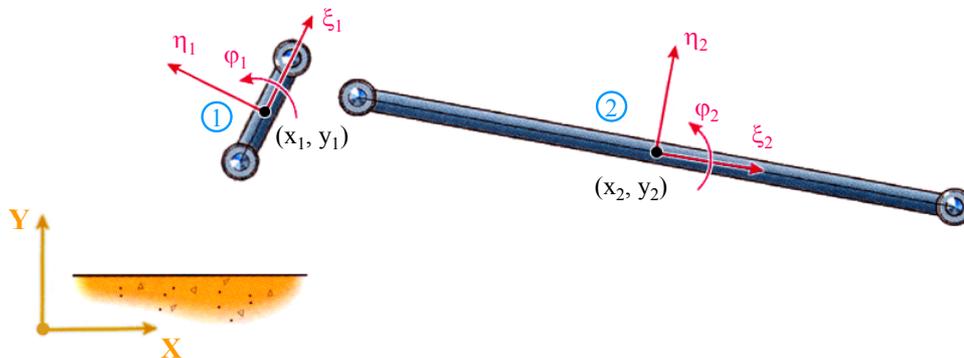


Figura 13.1. Barras 1 y 2 en el plano.

Al ser totalmente independientes, las barras 1 y 2 que se muestran en la figura 13.1 tienen tres grados de libertad cada una cuando se mueven en el plano.

A cada barra se le ha dotado de un sistema de referencia local, de tal forma que al tener cada una de ellas tres grados de libertad, para estudiar su movimiento será necesario conocer tres coordenadas: x_1, y_1, φ_1 para la barra 1, y x_2, y_2, φ_2 para la 2.

Recuerde el lector que la cinemática establece relaciones entre desplazamientos, velocidades y aceleraciones, por lo tanto, cuando se tienen seis grados de libertad (total de las barras 1 y 2) es necesario conocer la evolución de seis variables o coordenadas en el tiempo. Es decir, para estudiar la

cinemática de las barras 1 y 2 de la figura 13.1 es necesario conocer, por ejemplo, las coordenadas $x_1, y_1, \varphi_1, x_2, y_2, \varphi_2$ a lo largo de todo el intervalo de tiempo en que se quiera analizar el movimiento.

Por otra parte, si las variables del problema son los desplazamientos $x_1, y_1, \varphi_1, x_2, y_2, \varphi_2$, y ya de partida es necesario conocer cuánto valen en cada instante estas variables, da la sensación de que no existe el problema planteado. ¿Qué es entonces lo que sucede?. Lo que sucede es que la cinemática no trata de hallar las variables o coordenadas asociadas a los grados de libertad del sistema, sino que, partiendo de que ya las conoce, trata de encontrar los desplazamientos, velocidades y aceleraciones de otros puntos del mecanismo en función de las variables conocidas, también llamadas variables independientes. Así pues, en la figura 13.2, la cinemática no trata de hallar las coordenadas $x_1, y_1, \varphi_1, x_2, y_2, \varphi_2$, que ya se conocen, sino, por ejemplo, las correspondientes a los puntos A y C en base a las anteriores.

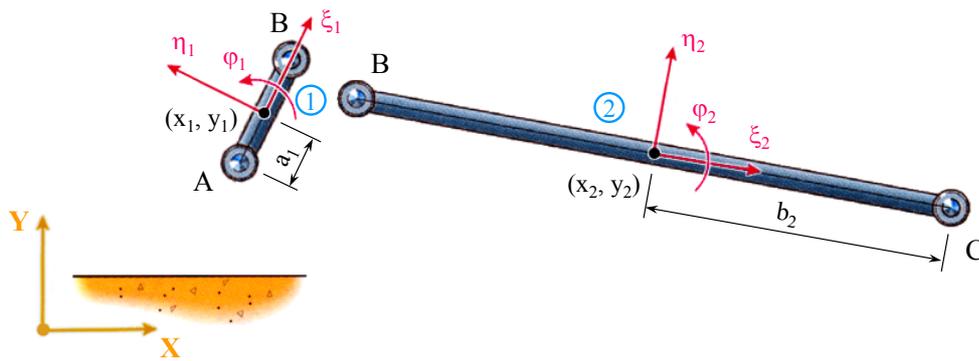


Figura 13.2. Coordenadas locales de los puntos A y C.

Efectivamente, conocidas $x_1, y_1, \varphi_1, x_2, y_2, \varphi_2$, las coordenadas de los puntos A y C son:

$$\left. \begin{aligned} x_1^A &= x_1 - a_1 \cdot \cos \varphi_1 \\ y_1^A &= y_1 - a_1 \cdot \text{sen} \varphi_1 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} x_2^C &= x_2 + b_2 \cdot \cos \varphi_2 \\ y_2^C &= y_2 + b_2 \cdot \text{sen} \varphi_2 \end{aligned} \right\}$$

Queda claro con este ejemplo que la cinemática relaciona coordenadas, ya que halla las correspondientes a los puntos A y C en función de otras coordenadas conocidas, como son las que definen la posición y orientación de los sistemas de referencia locales.

Veamos ahora qué sucede si se unen las barras por sus respectivos puntos B, y esta unión se hace articulada de tal forma que una barra pueda girar respecto a la otra. El mecanismo formado es el mostrado en la figura 13.3, y como el lector ya sabe tiene cuatro grados de libertad: tres de la barra 1, por ejemplo, más el giro de la barra 2 respecto a la 1, aunque estos cuatro grados de libertad pueden definirse como se quiera, es decir, también es válido referirse a tres grados de libertad de la barra 2 respecto a la 1.

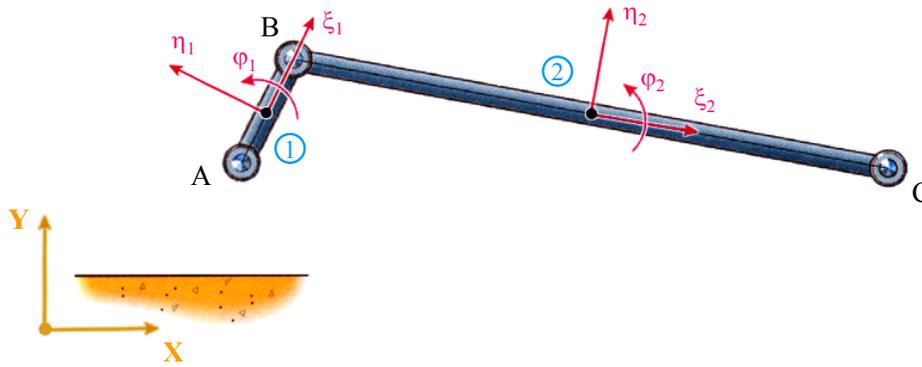


Figura 13.3. Barras 1 y 2 moviéndose en el plano, y articuladas en el punto B.

En la figura 13.3, al mecanismo articulado se le han definido, al igual que antes, dos sistemas de referencia locales, cada uno asociado a una de las barras, estando definida la posición de cada uno de ellos por tres variables x, y, φ . Podría parecer, en definitiva, que se piensa estudiar el movimiento del mecanismo en base a las seis variables o coordenadas $x_1, y_1, \varphi_1, x_2, y_2, \varphi_2$. No obstante, está claro que este mecanismo solamente tiene cuatro grados de libertad, y por lo tanto para resolverlo sólo es necesario conocer la evolución de cuatro variables en el tiempo.

Pongamos por ejemplo que conocemos las coordenadas $x_1, y_1, \varphi_1, \varphi_2$; en tal caso, el comportamiento del mecanismo estará perfectamente definido, ya que se tienen cuatro grados de libertad y se conocen cuatro coordenadas. No obstante, al elegir en la figura 13.3 las seis variables del mecanismo, $x_1, y_1, \varphi_1, x_2, y_2, \varphi_2$, como aquellas con cuya respuesta se va a analizar el comportamiento del sistema, existen todavía dos coordenadas, x_2, y_2 , que no conocemos. Para hallarlas, lógicamente serán necesarias dos ecuaciones que relacionen estas dos coordenadas con las cuatro conocidas. El planteamiento de estas ecuaciones puede hacerse, por ejemplo, observando que las componentes globales, en x y en y , del vector de posición del punto B son las mismas, tanto si se hallan considerando que este punto pertenece a la barra 1, como si se toma como un punto de la barra 2.

De este planteamiento se obtienen dos ecuaciones, que son las que se necesitaban para encontrar x_2 e y_2 . A estas dos ecuaciones se les denomina “**ecuaciones de restricción**” y reciben este nombre porque definen el comportamiento en las uniones, en las cuales se disminuyen o restringen los grados de libertad del mecanismo.

El resumen de lo indicado para el ejemplo que se está analizando se muestra en la figura 13.4.

The diagram is identical to Figure 13.3, showing the two-link mechanism with local coordinate systems and degrees of freedom labels. To the right of the diagram, the following text is provided:

Nº VARIABLES = 6: $(x_1, y_1, \varphi_1, x_2, y_2, \varphi_2)$.
 Nº GRADOS DE LIBERTAD = 4.
 Nº ECUACIONES DE RESTRICCIÓN = 2
 (En la articulación B).

Figura 13.4. Mecanismo articulado formado por las barras 1 y 2.

Veamos qué sucede si al mecanismo se le añade un apoyo en uno de sus extremos (figura 13.5), de tal modo que permita el giro de la barra a la que se articula respecto al cuerpo fijo.

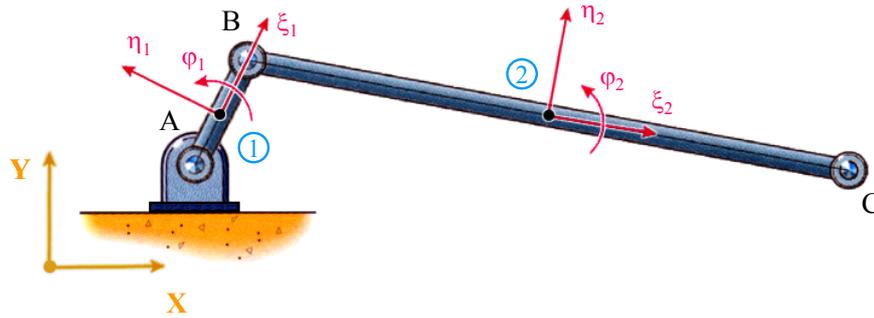


Figura 13.5. Mecanismo con apoyo articulado.

Ahora se siguen eligiendo las mismas seis variables para estudiar el comportamiento del sistema, pero sólo tiene dos grados de libertad y, por lo tanto, basta con conocer dos coordenadas para poder definir completamente su movimiento.

Sean, por ejemplo, conocidas las evoluciones de las coordenadas φ_1 , φ_2 a lo largo del intervalo de tiempo en que se quiere estudiar el mecanismo. En este caso, se necesitan plantear las ecuaciones que permiten encontrar los valores de x_1 , y_1 , x_2 , y_2 , en función de las dos primeras.

Debido a la articulación en el punto B hemos obtenido ya dos ecuaciones, y por lo tanto sólo falta encontrar otras dos. Como ahora se ha introducido un apoyo articulado para la barra 1, en este apoyo se puede plantear que las componentes globales, en las direcciones x e y, de la velocidad del punto A son nulas. Con esto aparecen dos nuevas ecuaciones de restricción, y el mecanismo tiene dos grados de libertad y cuatro ecuaciones de restricción. La suma de los grados de libertad más las ecuaciones de restricción tiene que ser siempre igual al número de variables elegidas para el estudio del mecanismo.

Si por último se obliga a que el punto C sólo pueda desplazarse en dirección horizontal (figura 13.6) los grados de libertad del mecanismo quedan reducidos a uno, por lo que supondremos conocida tan sólo una de las variables, por ejemplo φ_1 .

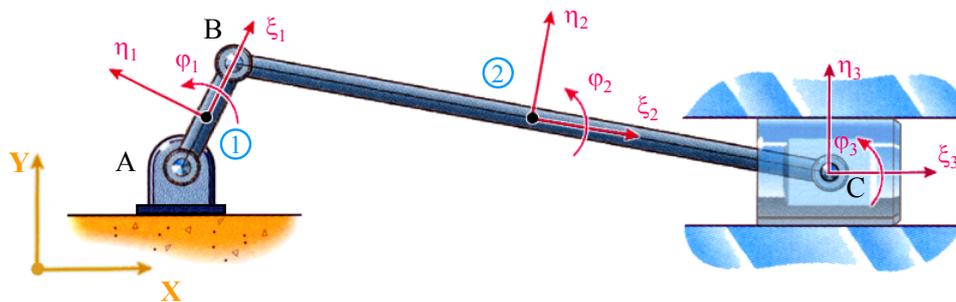


Figura 13.6. Mecanismo con un grado de libertad.

Al seguir utilizando las mismas seis variables para estudiar su comportamiento, será necesario encontrar cinco ecuaciones de restricción, que nos permitan relacionar x_1 , y_1 , x_2 , y_2 , φ_2 con φ_1 para poder resolver el problema. Ya teníamos cuatro de ellas, la quinta ecuación se obtiene planteando que la coordenada que define el desplazamiento vertical del punto C es constante y de valor conocido.

A lo largo de este apartado hemos trabajado siempre con las posiciones, pero en el análisis cinemático de un mecanismo se estudian también las velocidades y las aceleraciones.

Cuando se quieren analizar las velocidades, por ejemplo, del mecanismo mostrado en la figura 13.6, se tiene:

- ❑ Variables para el estudio del mecanismo: $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{\phi}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{\phi}_2$.
- ❑ Desplazamientos conocidos (tantos como grados de libertad): ϕ_1 .
- ❑ Ecuaciones de restricción: 5 ecuaciones que relacionan $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{\phi}_2$ con $\dot{\phi}_1$.

Es decir, el problema es el mismo que el que se ha planteado hasta ahora, con la única diferencia de que se conoce una velocidad, y que las ecuaciones de restricción encontradas deben relacionar entre sí las velocidades, y no los desplazamientos.

Cuando el análisis que se quiere realizar es de aceleraciones, el planteamiento es el mismo. Como variables del mecanismo se tienen las aceleraciones $\ddot{x}_1, \ddot{y}_1, \ddot{\phi}_1, \ddot{x}_2, \ddot{y}_2, \ddot{\phi}_2$, y suponiendo que se conoce $\ddot{\phi}_1$, las ecuaciones de restricción que se obtengan deberán relacionar el resto de variables con la ya conocida, que en este caso es $\ddot{\phi}_1$.

Por último, recordemos que conocido el valor de una coordenada, su primera derivada es la velocidad y la segunda la aceleración.

En el siguiente apartado estudiaremos este mecanismo con más detalle, partiendo ya de su configuración definitiva con un grado de libertad, y formulando las ecuaciones de restricción de las que hemos hablado en este apartado.

13.3 INTRODUCCIÓN A LA SIMULACIÓN EN CINEMÁTICA

Como ya hemos adelantado, a modo de introducción a la simulación cinemática de mecanismos, comenzaremos analizando un ejemplo de forma manual y posteriormente, a la vista del desarrollo, iremos planteando su simulación por ordenador.

En la figura 13.7 se muestra un mecanismo formado por dos barras unidas por una junta de revolución en el punto A. A su vez, una de ellas se articula en un bulón fijo al suelo, y la otra con una masa obligada a desplazarse horizontalmente.

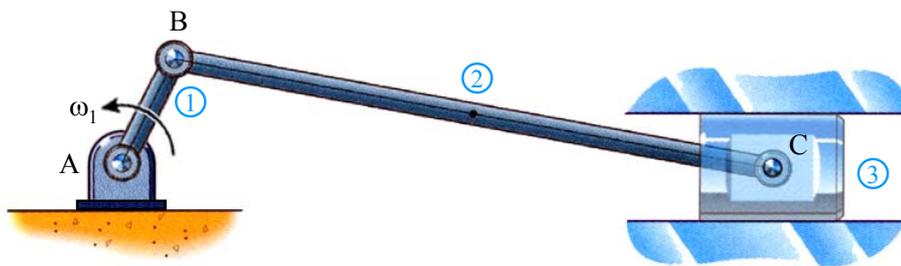


Figura 13.7. Mecanismo de un grado de libertad.

Como consecuencia de lo anteriormente expuesto, en un estudio cinemático no se plantean las ecuaciones de Newton que relacionan las aceleraciones del sistema con las fuerzas aplicadas sobre él, y por lo tanto sólo pueden analizarse aquellos sistemas que no tienen ningún grado de libertad. Por ello, cuando se quiere realizar el estudio cinemático de un mecanismo es necesario anular todos los grados de libertad que posea, para lo que habrá que añadir tantas ecuaciones motrices como grados de libertad tenga este.

Se entiende por ecuación motriz aquella en la que se define la evolución de una de las variables del sistema en función del tiempo. Así, si en el mecanismo de la figura 13.7 se supone conocida la velocidad de giro, ω , de la barra 1, a la expresión que define esta velocidad en función del tiempo se

la denomina ecuación motriz, y al imponer su cumplimiento el mecanismo pierde el grado de libertad que tenía.

Para calcular las relaciones entre los desplazamientos, velocidades y aceleraciones de los diferentes elementos del sistema, comenzaremos eligiendo las variables que definen la posición de cada uno de ellos, así como sus derivadas primera y segunda, que son las que proporcionan la información necesaria para determinar su velocidad y aceleración; debemos escoger también el sistema de referencia respecto al cual se definen estos parámetros.

En la figura 13.8 se muestra nuevamente el ejemplo que se está estudiando, en el que se muestran también todas las variables y sistemas de referencia definidos para su posterior análisis cinemático.

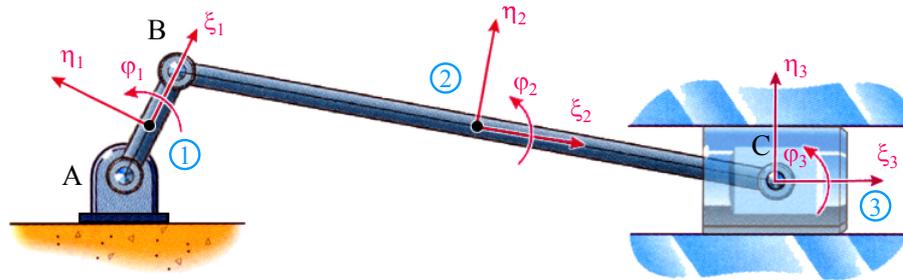


Figura 13.8. Mecanismo en estudio, con variables y sistemas de referencia definidos.

Sobre la barra 1 elegimos tres variables que permiten conocer su posición en todo momento: las coordenadas x_1 e y_1 del centro de la barra respecto a un sistema de referencia inercial XY, y el ángulo φ_1 que forma con el eje de abscisas del sistema global, tal como se muestra en la figura 13.8.

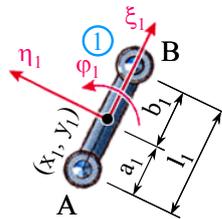


Figura 13.9. Barra 1.

Según se desprende de la figura anterior, las coordenadas globales del extremo A de la barra pueden expresarse en función de las citadas variables según las relaciones:

$$\left. \begin{aligned} x_1^A &= x_1 - a_1 \cdot \cos \varphi_1 \\ y_1^A &= y_1 - a_1 \cdot \text{sen} \varphi_1 \end{aligned} \right\}$$

Por otra parte, si se tiene en cuenta que el punto A representa una junta de revolución que conecta la barra con el elemento fijo, y para mayor simplicidad situamos sobre ese mismo punto el origen del sistema global, resulta evidente que las coordenadas x e y de dicho punto son forzosamente nulas (figura 13.8). Según esto, y teniendo en cuenta el sistema de referencia elegido, es claro que:

$$\left. \begin{aligned} x_1^A &= 0 \\ y_1^A &= 0 \end{aligned} \right\}$$

De aquí se deduce que:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_1 \cdot \cos \varphi_1 \\ y_1 &= a_1 \cdot \text{sen} \varphi_1 \end{aligned} \right\}$$

Supondremos ahora que el ángulo girado por esta barra responde a la expresión:

$$\varphi_1 = \omega_1 \cdot t$$

Donde, t representa al tiempo y ω_1 una velocidad angular constante.

Obsérvese que esta última ecuación es la restricción motriz que se necesita para eliminar el único grado de libertad del mecanismo.

Hasta aquí hemos obtenido las ecuaciones que permiten calcular los valores de las tres variables empleadas para definir el movimiento de la barra 1, que sustituyendo φ_1 por su valor son:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) \\ y_1 &= a_1 \cdot \text{sen}(\omega_1 \cdot t) \\ \varphi_1 &= \omega_1 \cdot t \end{aligned} \right\}$$

Pasemos ahora a calcular las velocidades en el punto B. Nuevamente, a la vista de la figura 13.9 podemos deducir las siguientes relaciones:

$$\left. \begin{aligned} x_1^B &= x_1 + b_1 \cdot \cos \varphi_1 \\ y_1^B &= y_1 + b_1 \cdot \text{sen} \varphi_1 \end{aligned} \right\}$$

Que al sustituir por los valores obtenidos anteriormente, se transforman en:

$$\left. \begin{aligned} x_1^B &= a_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) + b_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) \\ y_1^B &= a_1 \cdot \text{sen}(\omega_1 \cdot t) + b_1 \cdot \text{sen}(\omega_1 \cdot t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x_1^B &= l_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) \\ y_1^B &= l_1 \cdot \text{sen}(\omega_1 \cdot t) \end{aligned} \right\}$$

Una vez halladas las coordenadas x_1^B e y_1^B , comenzaremos a abordar el cálculo de las posiciones correspondientes a la barra 2. En la figura 13.10 se muestra esta barra, junto con un sistema de referencia local solidario a ella, y que está situado en su punto medio.

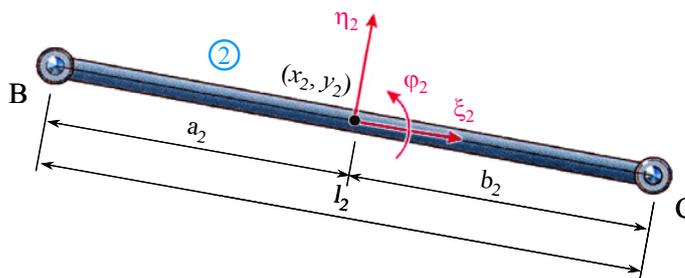


Figura 13.10. Barra 2.

Al igual que antes, de esta figura se desprende que:

$$\left. \begin{aligned} x_2^B &= x_2 - a_2 \cdot \cos \varphi_2 \\ y_2^B &= y_2 - a_2 \cdot \text{sen} \varphi_2 \end{aligned} \right\}$$

Por otro lado, al estar el punto B situado en la articulación de las barras 1 y 2, su posición global es siempre la misma, sea cual sea la barra a la que se considere que pertenece. En consecuencia, para

analizar el movimiento de la barra 2 partiremos del hecho de que ya conocemos la posición del punto B. Según esto, tenemos que:

$$\left. \begin{aligned} x_2 - a_2 \cdot \cos \varphi_2 &= l_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) \\ y_2 - a_2 \cdot \text{sen} \varphi_2 &= l_1 \cdot \text{sen}(\omega_1 \cdot t) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

De estas expresiones podríamos despejar dos de las tres variables empleadas para definir la posición de la barra 2 en función de la tercera. Sin embargo, nosotros buscamos el valor correspondiente a esas tres variables y, dado que tenemos un sistema con más incógnitas que ecuaciones, es claro que necesitamos una ecuación adicional.

Para hallar la condición que falta es necesario recurrir al punto C, cuyas coordenadas globales vendrán dadas por las relaciones:

$$\left. \begin{aligned} x_2^C &= x_2 + b_2 \cdot \cos \varphi_2 \\ y_2^C &= y_2 + b_2 \cdot \text{sen} \varphi_2 \end{aligned} \right\}$$

Además, al estar situado en la articulación con el elemento 3, que está obligado a desplazarse horizontalmente, el punto C tendrá una coordenada vertical nula (recuérdese que hemos situado la referencia global sobre el punto A, que está alineado con el C).

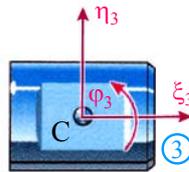


Figura 13.11. Cuerpo 3.

Según esto,

$$y_2 + b_2 \cdot \text{sen} \varphi_2 = 0 \Rightarrow y_2 = -b_2 \cdot \text{sen} \varphi_2 \quad (2)$$

Y al sustituir este valor en la segunda ecuación de (1), quedará:

$$\begin{aligned} -b_2 \cdot \text{sen} \varphi_2 - a_2 \cdot \text{sen} \varphi_2 &= l_1 \cdot \text{sen}(\omega_1 \cdot t) \Rightarrow -l_2 \cdot \text{sen} \varphi_2 = l_1 \cdot \text{sen}(\omega_1 \cdot t) \\ \Rightarrow \text{sen} \varphi_2 &= -\frac{l_1}{l_2} \cdot \text{sen}(\omega_1 \cdot t) \end{aligned}$$

Sustituyendo este último resultado en la ecuación (2), tendremos:

$$y_2 = b_2 \cdot \frac{l_1}{l_2} \cdot \text{sen}(\omega_1 \cdot t)$$

Y haciendo lo mismo en la primera ecuación de (1):

$$x_2 = l_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) + a_2 \cdot \cos \varphi_2 \Rightarrow x_2 = l_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) + a_2 \cdot \frac{\sqrt{l_2^2 - l_1^2 \text{sen}^2(\omega_1 \cdot t)}}{l_2}$$

En cuanto a las variables que definen la posición del cuerpo 3, es evidente que al estar solamente permitido el desplazamiento horizontal tendremos:

$$y_3 = 0$$

$$\varphi_3 = 0$$

Y dado que la posición del punto C coincide con la del origen de la referencia local del cuerpo 3, se tendrá que:

$$\begin{aligned} x_3 = x_2^C = x_2 + b_2 \cdot \cos \varphi_2 &\Rightarrow x_3 = l_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) + a_2 \cdot \cos \varphi_2 + b_2 \cdot \cos \varphi_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow x_3 = l_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) + l_2 \cdot \cos \varphi_2 &\Rightarrow x_3 = l_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) + \sqrt{l_2^2 - l_1^2 \text{sen}^2(\omega_1 \cdot t)} \end{aligned}$$

Llegados a este punto, ya hemos hallado las expresiones que definen todas las variables elegidas para definir el movimiento del mecanismo; en resumen, considerando que $a = b = l/2$ tenemos:

$$x_1 = \frac{l_1}{2} \cdot \cos(\omega_1 \cdot t)$$

$$y_1 = \frac{l_1}{2} \cdot \text{sen}(\omega_1 \cdot t)$$

$$\varphi_1 = \omega_1 \cdot t$$

$$x_2 = l_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) + \frac{\sqrt{l_2^2 - l_1^2 \text{sen}^2(\omega_1 \cdot t)}}{2}$$

$$y_2 = \frac{l_1}{2} \cdot \text{sen}(\omega_1 \cdot t)$$

$$\varphi_2 = \arcsen \left[-\frac{l_1}{l_2} \cdot \text{sen}(\omega_1 \cdot t) \right]$$

$$x_3 = l_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) + \sqrt{l_2^2 - l_1^2 \text{sen}^2(\omega_1 \cdot t)}$$

$$y_3 = 0$$

$$\varphi_3 = 0$$

La obtención de estas soluciones no ha resultado una tarea demasiado compleja, pero imagínese el lector lo que puede suceder si el mecanismo a estudiar es más complicado; en la mayoría de los casos el trabajo se vuelve arduo y tedioso.

Por otra parte, hasta ahora tan sólo hemos encontrado las relaciones que nos permiten conocer la posición de cada cuerpo, pero hace falta hallar todavía las velocidades y las aceleraciones. La simulación por ordenador presenta la ventaja de que son los propios programas los que plantean y resuelven las ecuaciones algebraicas necesarias para el cálculo de desplazamientos, velocidades y aceleraciones.

Siguiendo con el cálculo manual del ejemplo planteado, es necesario hallar los valores concretos de cada variable en cada instante del intervalo de tiempo que consideremos para el estudio del comportamiento cinemático del mecanismo. Para ello, es necesario comenzar determinando los parámetros del modelo. Entenderemos por parámetros del modelo, aquellos valores que no van a sufrir cambio a lo largo del cálculo y que en el ejemplo concreto que se está analizando *los parámetros* son las distancias a_1 , b_1 , y a_2 , b_2 anteriormente definidas, cuya suma es igual a la longitud total de las barras 1 y 2 respectivamente.

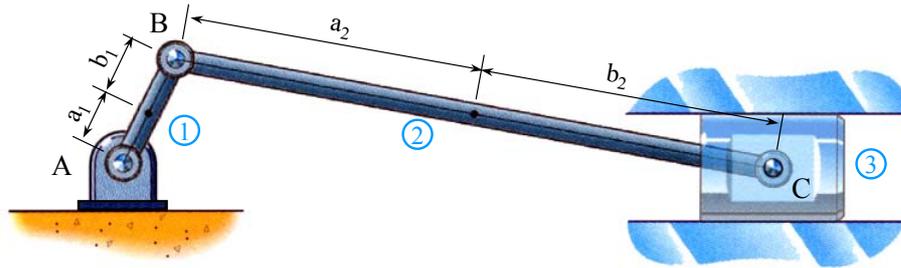


Figura 13.12. Parámetros del modelo.

Una vez conocidos los parámetros del modelo, hay que determinar las condiciones iniciales, que son los valores que presentan en el instante inicial aquellas variables asociadas a los grados de libertad del mecanismo y que, en el caso que nos ocupa, sería el valor del ángulo φ_1 . Obsérvese que este valor está ya implícito en la ecuación motriz y que sólo sería necesario indicarlo en el caso de que la restricción motriz se refiriese al valor que tiene la velocidad angular ω_1 .

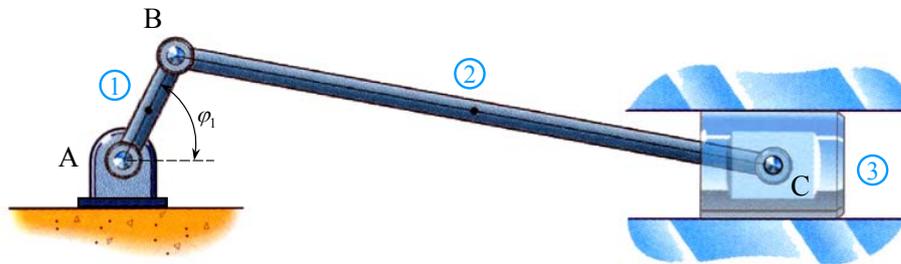


Figura 13.13. Condiciones iniciales.

En resumen tendremos:

ECUACIONES MOTRICES: tantas como grados de libertad, en el ejemplo:

$$\varphi_1 = \omega_1 \cdot t$$

PARÁMETROS DEL MODELO: las distancias a_1, b_1, a_2, b_2 .

CONDICIONES INICIALES: el valor de φ_1 en el instante en el instante inicial.

Una vez determinados los parámetros y las condiciones iniciales, ya se puede proceder al cálculo de las posiciones del sistema.

Imaginemos que este ejemplo se va a resolver por ordenador. Como todas estas ecuaciones dependen del tiempo, el programa de simulación va tomando valores de t con un intervalo que el usuario debe elegir.

Tomemos, por ejemplo, la coordenada y_1 , suponiendo que $a_1 = 1$ m, que $\omega_1 = 0.5$ rad/s, y que el intervalo de tiempo elegido es de 0.1 s, el programa de simulación realizaría los siguientes cálculos:

Para $t = 0$:

$$y_1 = 1 \cdot \text{sen}(0.5 \cdot 0)$$

Para $t = 0.1$:

$$y_1 = 1 \cdot \text{sen}(0.5 \cdot 0.1) = 0.0087$$

Para $t = 0.2$:

$$y_1 = 1 \cdot \text{sen}(0.5 \cdot 0.2) = 0.00174$$

Para $t = 0.3$:

$$y_1 = 1 \cdot \text{sen}(0.5 \cdot 0.3) = 0.00262$$

Y así sucesivamente hasta el tiempo final de la simulación, elegido por el usuario.

Es decir, en cuanto al tiempo, el programa de simulación necesita dos valores:

El *INTERVALO DE TIEMPO*, que es el paso de cálculo.

El *TIEMPO FINAL*, que es el tiempo hasta el cual se quiere calcular el comportamiento del sistema.

Si la coordenada y_1 fuera calculada por un programa de simulación con un intervalo de tiempo de 0.1 s y un tiempo final de 6.1 s, las respuestas que se obtendrían serían del tipo de las mostradas en la figura 13.14.

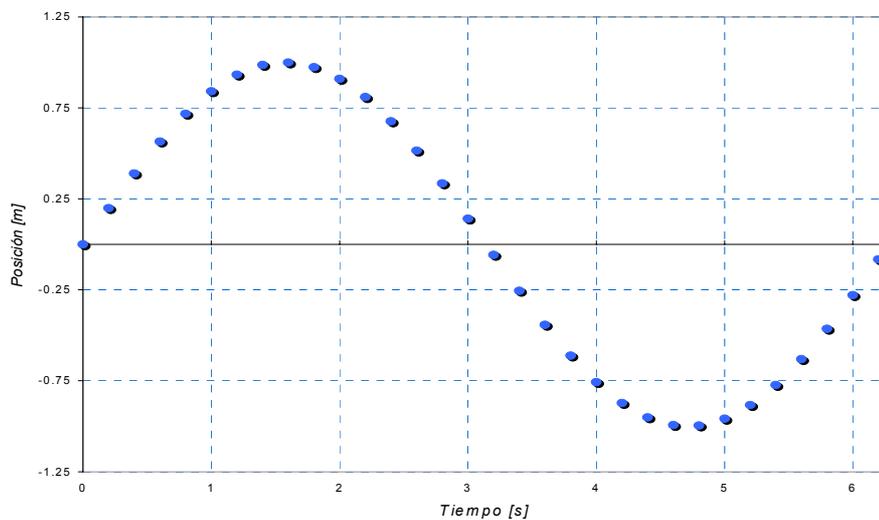


Figura 13.14. Respuesta obtenida por el programa de simulación a la coordenada y_1 .

Como se verá más adelante, cuando con un programa de simulación se representa en pantalla una variable, como por ejemplo la de la figura 13.14, se observa una respuesta continua y no una sucesión de puntos. Esto se debe, no a que el ordenador calcule de una forma diferente a la aquí señalada, sino simplemente al hecho de que en las salidas gráficas el programa une los puntos calculados mediante líneas.

Como observará el lector, para el análisis cinemático de un mecanismo, además de hallar las ecuaciones que relacionan los desplazamientos, velocidades y aceleraciones hay que calcularlos y representarlos. La simulación por ordenador de la cinemática de un sistema mecánico tiene la ventaja de que él solo plantea las ecuaciones del movimiento y posteriormente las resuelve y representa gráficamente.

Cuando se analiza el comportamiento cinemático de un sistema con lo expuesto hasta ahora, se obtienen curvas de resultados que en muchos casos, aunque cuantifican las respuestas, no permiten tener una idea clara y rápida del comportamiento del sistema. Si por el contrario, además de los gráficos de resultados, se puede mostrar el mecanismo moviéndose en la pantalla del ordenador de una forma realista, se facilita muchísimo el comportamiento, lo que constituye otra gran ventaja de los programas de simulación. La mayoría de los programas de simulación ofrecen la posibilidad de visualizar este tipo de salida de resultados.

En la figura 13.15 se muestra un esquema de la animación del movimiento para el ejemplo que se está utilizando.



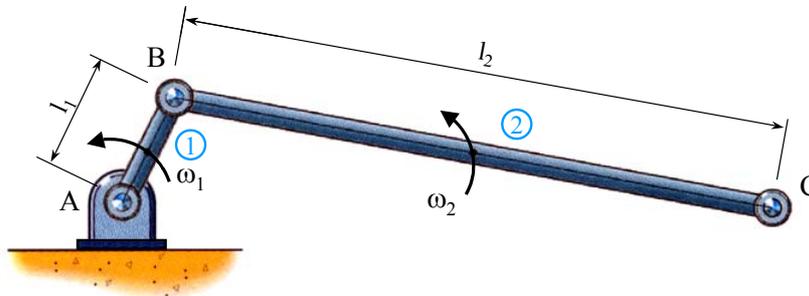
Figura 13.15. Representación esquemática del movimiento.

13.4 EJEMPLOS

A modo de ejemplo, estudiaremos el comportamiento cinemático de unos mecanismos sencillos, con el propósito de observar las diferencias que existen en cuanto al proceso de formulación de las ecuaciones del movimiento según se trabaje con coordenadas cartesianas o relativas, y de qué manera influye en estas últimas el hecho de que el mecanismo que se esté estudiando sea de cadena cinemática abierta o, por el contrario, contenga algún bucle cerrado.

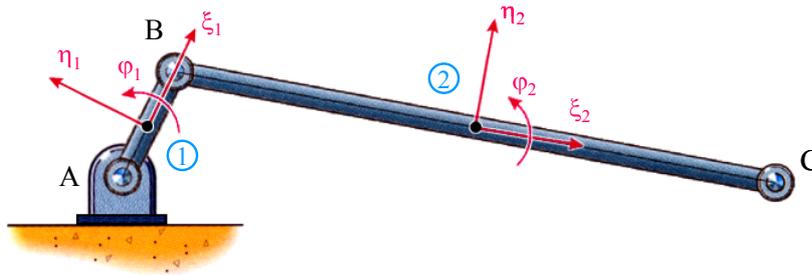
Péndulo Doble

Una vez vista la metodología a seguir en el caso de trabajar con coordenadas relativas, comenzaremos abordando el análisis cinemático de un péndulo doble, para el que trataremos de calcular el desplazamiento horizontal de su extremo, x_2^C .

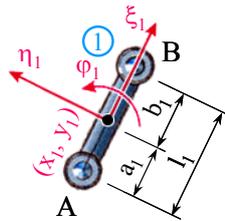


Coordenadas Cartesianas

Como antes, comenzaremos seleccionando un sistema de referencia local ligado a cada cuerpo, para después plantear las ecuaciones que proporcionan las coordenadas de posicionamiento de las juntas dentro de cada elemento, así como las ecuaciones de restricción que definen el movimiento relativo entre los dos cuerpos conectados por cada junta.



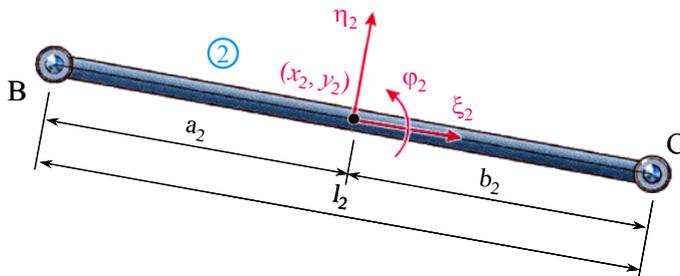
Barra 1:



$$\vec{r}_1^A : \begin{cases} x_1^A = x_1 - a_1 \cdot \cos \varphi_1 \\ y_1^A = y_1 - a_1 \cdot \text{sen} \varphi_1 \end{cases}$$

$$\vec{r}_1^B : \begin{cases} x_1^B = x_1 + b_1 \cdot \cos \varphi_1 \\ y_1^B = y_1 + b_1 \cdot \text{sen} \varphi_1 \end{cases}$$

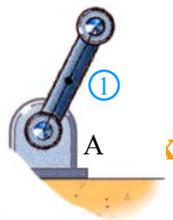
Barra 2:



$$\vec{r}_2^B : \begin{cases} x_2^B = x_2 - a_2 \cdot \cos \varphi_2 \\ y_2^B = y_2 - a_2 \cdot \text{sen} \varphi_2 \end{cases}$$

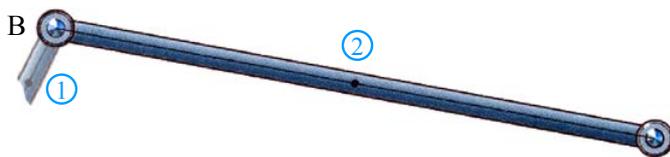
$$\vec{r}_2^C : \begin{cases} x_2^C = x_2 + b_2 \cdot \cos \varphi_2 \\ y_2^C = y_2 + b_2 \cdot \text{sen} \varphi_2 \end{cases}$$

Junta de revolución en A:



$$\vec{r}_1^A = \vec{0} : \begin{cases} x_1 - a_1 \cdot \cos \varphi_1 = 0 \\ y_1 - a_1 \cdot \text{sen} \varphi_1 = 0 \end{cases}$$

Junta de revolución en B:



$$\vec{r}_1^B = \vec{r}_2^B : \begin{cases} x_1 + b_1 \cdot \cos \varphi_1 = x_2 - a_2 \cdot \cos \varphi_2 \\ y_1 + b_1 \cdot \text{sen} \varphi_1 = y_2 - a_2 \cdot \text{sen} \varphi_2 \end{cases}$$

Si escogemos como variables independientes los ángulos φ_1 y φ_2 , y tomamos las longitudes a y b como la mitad de la longitud total de su correspondiente barra, podemos expresar estas ecuaciones de restricción en la forma:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{l_1}{2} \cdot \cos \varphi_1 \\ y_1 &= \frac{l_1}{2} \cdot \text{sen} \varphi_1 \\ x_1 - x_2 &= -\frac{l_1}{2} \cdot \cos \varphi_1 - \frac{l_2}{2} \cdot \cos \varphi_2 \\ y_1 - y_2 &= -\frac{l_1}{2} \cdot \text{sen} \varphi_1 - \frac{l_2}{2} \cdot \text{sen} \varphi_2 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \varphi_1, \varphi_2 \rightarrow x_1, y_1, x_2, y_2 \end{array}$$

La solución a este sistema proporciona el valor de las variables dependientes x_1 , y_1 , x_2 e y_2 , en función de las variables independientes φ_1 y φ_2 . Dicha solución es:

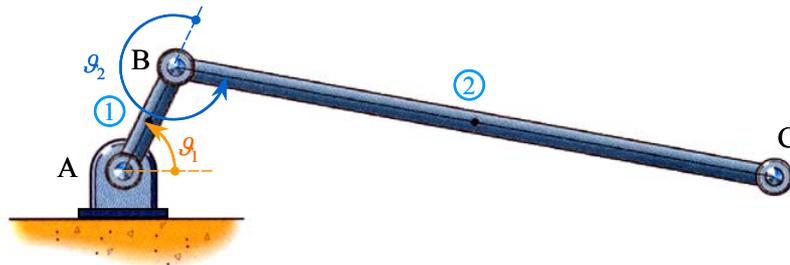
$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{l_1}{2} \cdot \cos \varphi_1 \\ y_1 &= \frac{l_1}{2} \cdot \text{sen} \varphi_1 \\ x_2 &= l_1 \cdot \cos \varphi_1 + \frac{l_2}{2} \cdot \cos \varphi_2 \\ y_2 &= l_1 \cdot \text{sen} \varphi_1 + \frac{l_2}{2} \cdot \text{sen} \varphi_2 \end{aligned}$$

Y x_2^C se calcula mediante la expresión:

$$x_2^C = x_2 + b_2 \cdot \cos \varphi_2 = l_1 \cdot \cos \varphi_1 + l_2 \cdot \cos \varphi_2$$

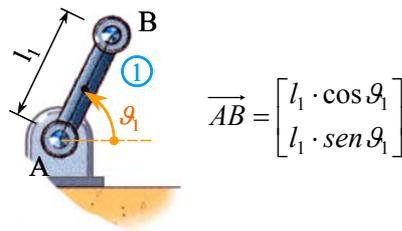
Coordenadas Relativas

En esta ocasión iniciaremos el estudio en coordenadas relativas seleccionando las variables ϑ_1 y ϑ_2 que definen los grados de movilidad de cada una de las juntas del mecanismo.

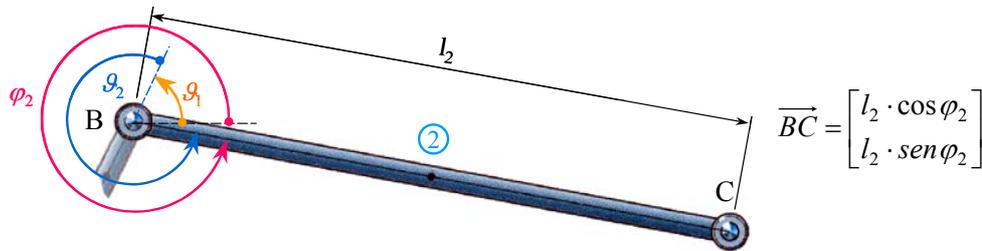


A continuación, definiremos una cadena vectorial que recorra el mecanismo abierto (que como es sabido tiene estructura topológica de árbol) desde la raíz, asociada al cuerpo fijo, hacia las ramas, que serán aquellos cuerpos con un extremo libre. A partir de esta cadena vectorial podremos calcular la posición de cualquier punto del mecanismo, tal y como vamos a ver a continuación.

Barra 1:



Barra 2:



Como:

$$\varphi_2 = \vartheta_1 + \vartheta_2 \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix} l_2 \cdot \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) \\ l_2 \cdot \text{sen}(\vartheta_1 + \vartheta_2) \end{bmatrix}$$

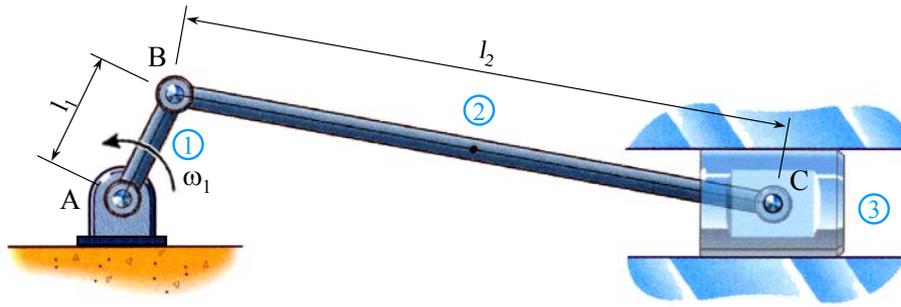
Punto C:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix} l_1 \cdot \cos \vartheta_1 + l_2 \cdot \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) \\ l_1 \cdot \text{sen} \vartheta_1 + l_2 \cdot \text{sen}(\vartheta_1 + \vartheta_2) \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow x_2^C &= \overrightarrow{AC}_x \Rightarrow x_2^C = l_1 \cdot \cos \vartheta_1 + l_2 \cdot \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) \end{aligned}$$

En comparación con las ecuaciones obtenidas al trabajar con coordenadas cartesianas, puede observarse cómo en este caso no ha sido necesario formular ninguna ecuación de restricción, ni tampoco ha habido que resolver ningún sistema de ecuaciones para obtener el valor de la coordenada x_2^C que estábamos buscando. De hecho, al utilizar coordenadas relativas en el análisis de mecanismos abiertos de cualquier tipo, nunca es necesario plantear ninguna restricción geométrica, ya que la posición de cualquier punto del mecanismo puede obtenerse de manera explícita en función de las variables independientes elegidas.

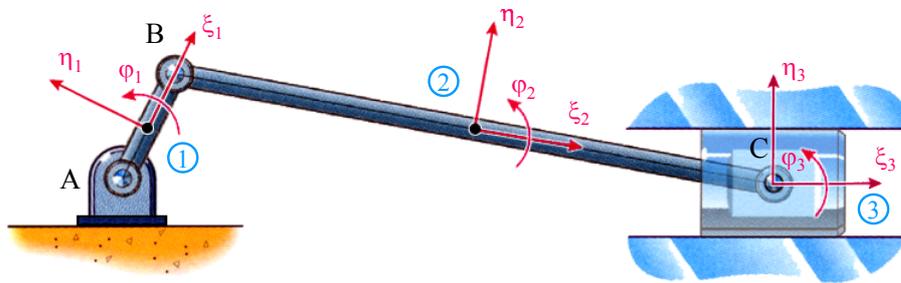
Biela Manivela

Abordaremos nuevamente el estudio del mecanismo de biela y manivela, pero esta vez, en lugar de tratarlo en su globalidad, lo consideraremos como una ampliación del péndulo doble que acabamos de analizar, al que añadiremos una junta de traslación en el extremo anteriormente libre, situado en el punto C. Calcularemos, como antes, el valor de la coordenada x_2^C .

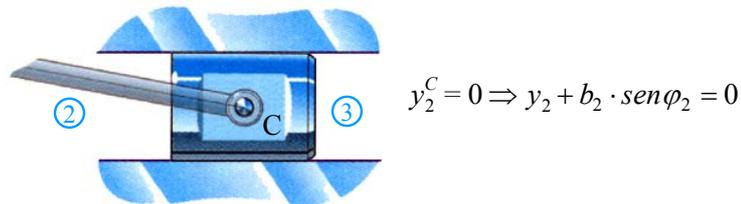


Coordenadas Cartesianas

A las ecuaciones de restricción anteriores (las obtenidas para el péndulo doble), añadiremos la correspondiente a la junta de traslación.



□ Junta de traslación en C:



Si escogemos como variable independiente el ángulo φ_1 , y tomamos las longitudes a y b como la mitad de la longitud total de su correspondiente barra, las ecuaciones de restricción tomarán la forma:

$$\left. \begin{aligned} x_1 - x_2 + \frac{l_2}{2} \cdot \cos \varphi_2 &= -\frac{l_1}{2} \cdot \cos \varphi_1 \\ y_1 - y_2 + \frac{l_2}{2} \cdot \text{sen} \varphi_2 &= -\frac{l_1}{2} \cdot \text{sen} \varphi_1 \\ x_1 &= \frac{l_1}{2} \cdot \cos \varphi_1 \\ y_1 &= \frac{l_1}{2} \cdot \text{sen} \varphi_1 \\ y_2 + \frac{l_2}{2} \cdot \text{sen} \varphi_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \varphi_1 \rightarrow x_1, y_1, x_2, y_2, \varphi_2 \end{array}$$

La solución a este sistema proporciona el valor de las variables dependientes $x_1, y_1, x_2, y_2, \varphi_2$, en función de la variable independiente φ_1 . Dicha solución es:

$$x_1 = \frac{l_1}{2} \cdot \cos \varphi_1$$

$$y_1 = \frac{l_1}{2} \cdot \text{sen} \varphi_1$$

$$x_2 = l_1 \cdot \cos \varphi_1 + \frac{\sqrt{l_2^2 - l_1^2 \text{sen}^2 \varphi_1}}{2}$$

$$y_2 = \frac{l_1}{2} \cdot \text{sen} \varphi_1$$

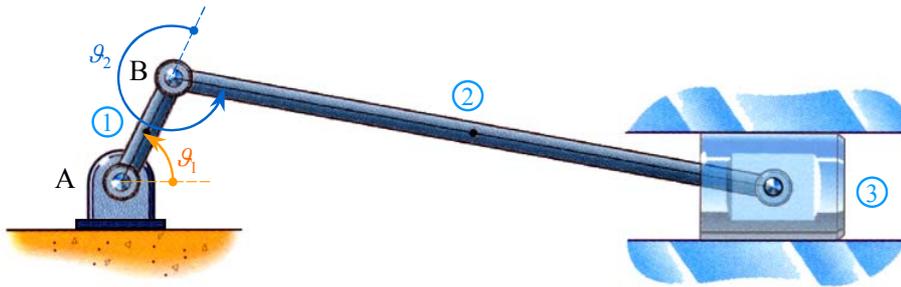
$$\varphi_2 = \arcsen \left[-\frac{l_1}{l_2} \cdot \text{sen} \varphi_1 \right]$$

Y x_2^C se calcula mediante la expresión:

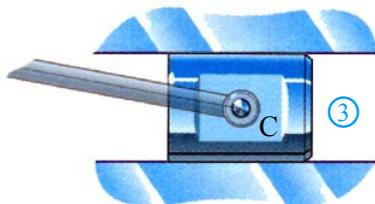
$$x_2^C = l_1 \cdot \cos \varphi_1 + \sqrt{l_2^2 - l_1^2 \text{sen}^2 \varphi_1}$$

Coordenadas Relativas

En este caso, por tratarse de un mecanismo cerrado, deberemos añadir una restricción cinemática de cierre de lazo que asociaremos, por ejemplo, a la junta de traslación.



□ Junta de traslación en C:



$$\vec{AC}_y = 0 \Rightarrow l_1 \cdot \text{sen} \vartheta_1 + l_2 \cdot \text{sen}(\vartheta_1 + \vartheta_2) = 0 \xrightarrow{\vartheta_1} \vartheta_2$$

Y como, según vimos para el péndulo doble:

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \begin{bmatrix} l_1 \cdot \cos \vartheta_1 + l_2 \cdot \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) \\ l_1 \cdot \text{sen} \vartheta_1 + l_2 \cdot \text{sen}(\vartheta_1 + \vartheta_2) \end{bmatrix}$$

La ecuación de restricción tendrá la forma:

$$l_1 \cdot \text{sen} \vartheta_1 + l_2 \cdot \text{sen}(\vartheta_1 + \vartheta_2) = 0 \xrightarrow{\vartheta_1} \vartheta_2$$

Ecuación que nos proporciona el valor de la variable dependiente ϑ_2 en función de la variable independiente ϑ_1 .

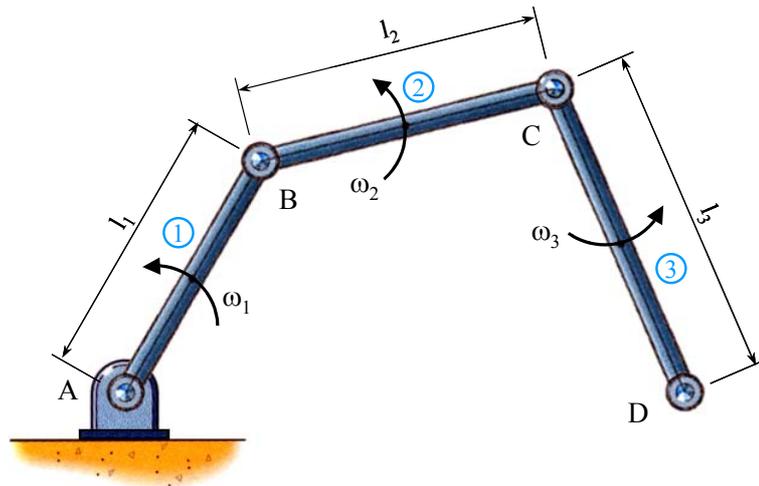
Si comparamos este resultado con el obtenido para el péndulo doble, podemos apreciar que por el hecho de tener un bucle cerrado, ha sido necesario formular y resolver una ecuación de restricción que antes no existía.

Sin embargo, al comparar este mismo resultado con el correspondiente al planteamiento mediante coordenadas cartesianas, resulta evidente que el número de restricciones es notablemente inferior al trabajar con coordenadas relativas. De hecho, al trabajar con coordenadas relativas tendremos que añadir tantas restricciones como número de lazos independientes haya en el mecanismo, mientras que en coordenadas relativas hay que formular por cada cuerpo 3 ecuaciones, en el caso de mecanismos planos y 6 para los espaciales.

Como contrapartida, si bien el sistema de ecuaciones que definen el comportamiento del mecanismo es mucho menor al utilizar coordenadas relativas, también tiene un orden de no linealidad mucho mayor, lo que en ocasiones podría dificultar su resolución.

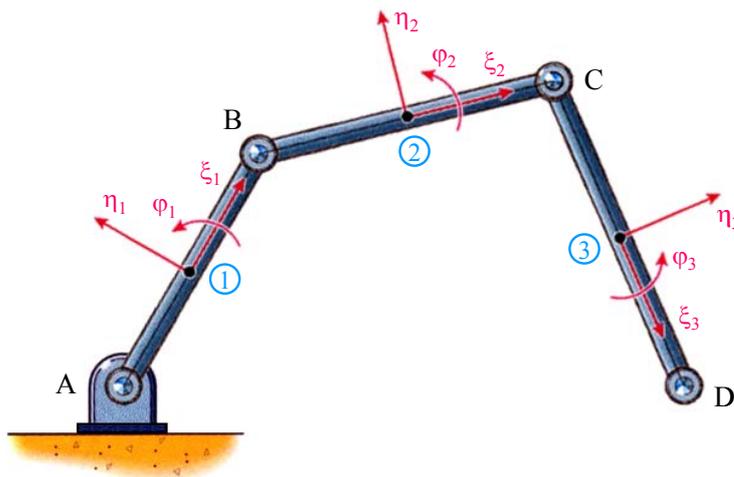
Péndulo Triple

En esta ocasión trataremos de encontrar las coordenadas horizontal y vertical del extremo libre, D, de un péndulo triple, lo que podría ser equivalente a calcular la posición en la que se encuentra en cada momento la garra de un manipulador de base fija, conocidas las evoluciones temporales del ángulo girado por cada una de sus tres articulaciones.

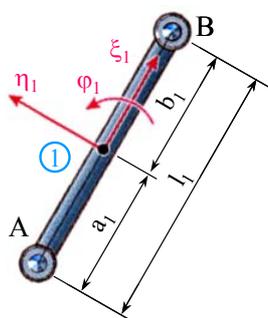


Coordenadas Cartesianas

Como siempre, el análisis en coordenadas cartesianas comienza con la selección de un sistema de referencia local ligado a cada cuerpo.



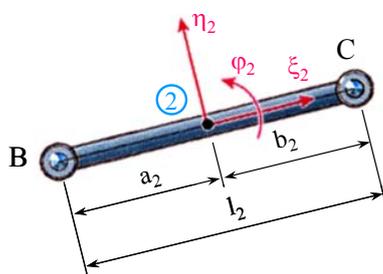
Barra 1:



$$\vec{r}_1^A : \begin{cases} x_1^A = x_1 - a_1 \cdot \cos \varphi_1 \\ y_1^A = y_1 - a_1 \cdot \text{sen} \varphi_1 \end{cases}$$

$$\vec{r}_1^B : \begin{cases} x_1^B = x_1 + b_1 \cdot \cos \varphi_1 \\ y_1^B = y_1 + b_1 \cdot \text{sen} \varphi_1 \end{cases}$$

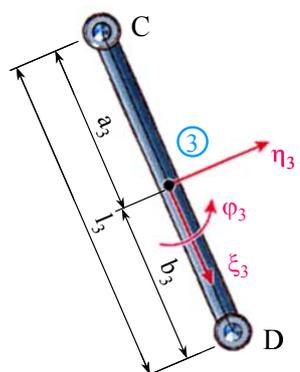
Barra 2:



$$\vec{r}_2^B : \begin{cases} x_2^B = x_2 - a_2 \cdot \cos \varphi_2 \\ y_2^B = y_2 - a_2 \cdot \text{sen} \varphi_2 \end{cases}$$

$$\vec{r}_2^C : \begin{cases} x_2^C = x_2 + b_2 \cdot \cos \varphi_2 \\ y_2^C = y_2 + b_2 \cdot \text{sen} \varphi_2 \end{cases}$$

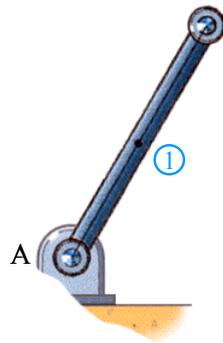
Barra 3:



$$\vec{r}_3^C : \begin{cases} x_3^C = x_3 - a_3 \cdot \cos \varphi_3 \\ y_3^C = y_3 - a_3 \cdot \text{sen} \varphi_3 \end{cases}$$

$$\vec{r}_3^D : \begin{cases} x_3^D = x_3 + b_3 \cdot \cos \varphi_3 \\ y_3^D = y_3 + b_3 \cdot \text{sen} \varphi_3 \end{cases}$$

Junta de revolución en A:



$$\vec{r}_1^A = \vec{0} : \begin{cases} x_1 - a_1 \cdot \cos \varphi_1 = 0 \\ y_1 - a_1 \cdot \text{sen} \varphi_1 = 0 \end{cases}$$

□ Junta de revolución en B:



$$\vec{r}_1^B = \vec{r}_2^B : \begin{cases} x_1 + b_1 \cdot \cos \varphi_1 = x_2 - a_2 \cdot \cos \varphi_2 \\ y_1 + b_1 \cdot \text{sen} \varphi_1 = y_2 - a_2 \cdot \text{sen} \varphi_2 \end{cases}$$

□ Junta de revolución en C:



$$\vec{r}_2^C = \vec{r}_3^C : \begin{cases} x_2 + b_2 \cdot \cos \varphi_2 = x_3 - a_3 \cdot \cos \varphi_3 \\ y_2 + b_2 \cdot \text{sen} \varphi_2 = y_3 - a_3 \cdot \text{sen} \varphi_3 \end{cases}$$

Si escogemos como variables independiente los ángulos φ_1 , φ_2 y φ_3 , y tomamos las longitudes a y b como la mitad de la longitud total de su correspondiente barra, podemos expresar estas ecuaciones de restricción en la forma:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{l_1}{2} \cdot \cos \varphi_1 \\ y_1 &= \frac{l_1}{2} \cdot \text{sen} \varphi_1 \\ x_1 - x_2 &= -\frac{l_1}{2} \cdot \cos \varphi_1 - \frac{l_2}{2} \cdot \cos \varphi_2 \\ y_1 - y_2 &= -\frac{l_1}{2} \cdot \text{sen} \varphi_1 - \frac{l_2}{2} \cdot \text{sen} \varphi_2 \\ x_2 - x_3 &= -\frac{l_2}{2} \cdot \cos \varphi_2 - \frac{l_3}{2} \cdot \cos \varphi_3 \\ y_2 - y_3 &= -\frac{l_2}{2} \cdot \text{sen} \varphi_2 - \frac{l_3}{2} \cdot \text{sen} \varphi_3 \end{aligned} \right\} \begin{matrix} \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \rightarrow x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 \end{matrix}$$

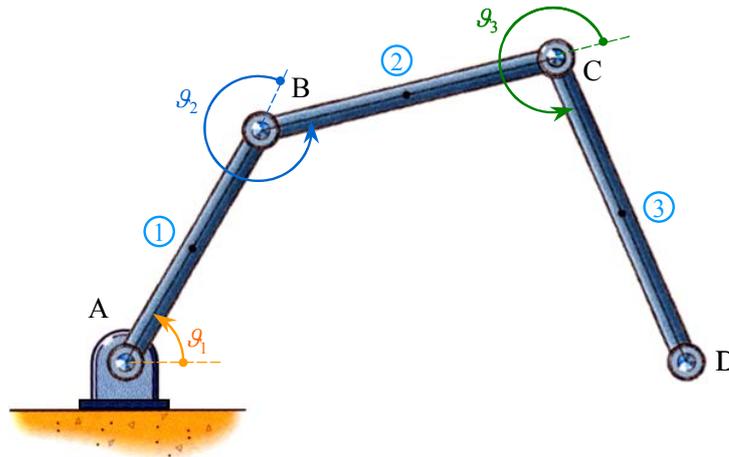
La solución a este sistema proporciona el valor de las variables dependientes x_1 , y_1 , x_2 , y_2 , x_3 e y_3 , en función de las variables independientes φ_1 , φ_2 y φ_3 .

Una vez resuelto este sistema, la coordenada x_3^D se calculará sin más que sustituir la solución que se acaba de obtener en la expresión:

$$x_3^D = x_3 + b_3 \cdot \cos \varphi_3$$

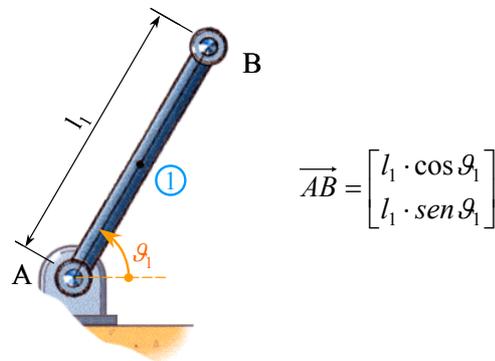
Coordenadas Relativas

Comenzaremos el proceso de cálculo definiendo las variables asociadas a cada uno de los grados de libertad de movimiento permitidos por las juntas.

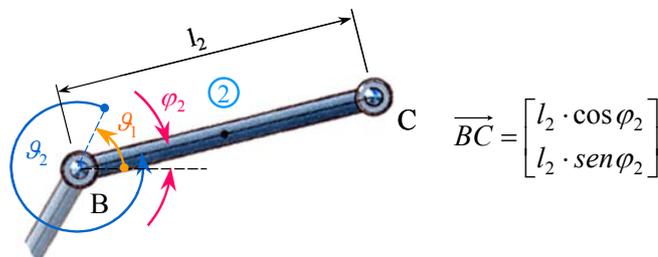


Y como antes, construiremos una cadena vectorial que parta de la raíz hacia las ramas de la estructura topológica del mecanismo.

□ Barra 1:



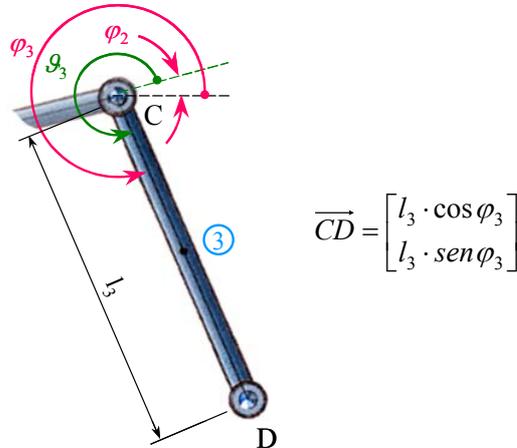
□ Barra 2:



Como :

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 = 2\pi + \varphi_2 = \varphi_2 \Rightarrow \overline{BC} = \begin{bmatrix} l_2 \cdot \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) \\ l_2 \cdot \text{sen}(\vartheta_1 + \vartheta_2) \end{bmatrix}$$

□ Barra 3:



$$\overline{CD} = \begin{bmatrix} l_3 \cdot \cos \varphi_3 \\ l_3 \cdot \text{sen} \varphi_3 \end{bmatrix}$$

Como :

$$\varphi_3 = \varphi_2 + \vartheta_3 = \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 \Rightarrow \overline{CD} = \begin{bmatrix} l_3 \cdot \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3) \\ l_3 \cdot \text{sen}(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3) \end{bmatrix}$$

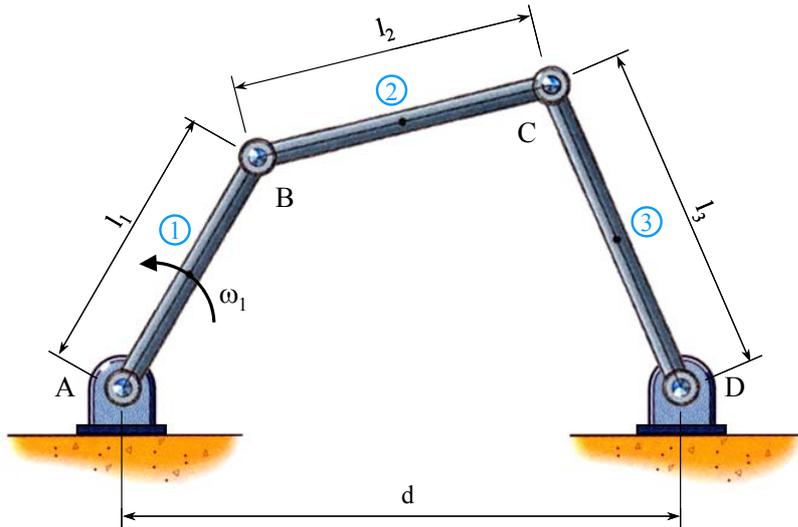
□ Punto D:

$$\vec{r}^D = \overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = \begin{bmatrix} l_1 \cdot \cos \vartheta_1 + l_2 \cdot \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + l_3 \cdot \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3) \\ l_1 \cdot \text{sen} \vartheta_1 + l_2 \cdot \text{sen}(\vartheta_1 + \vartheta_2) + l_3 \cdot \text{sen}(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3) \end{bmatrix}$$

Obsérvese cómo, por tratarse de un mecanismo abierto, no ha sido preciso resolver ningún sistema de ecuaciones para calcular la posición del extremo libre del péndulo.

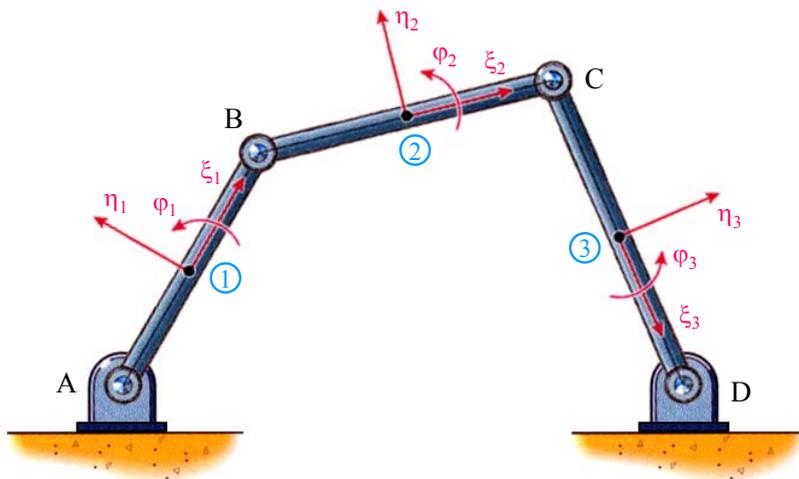
Cuadrilátero Articulado

Para terminar, abordaremos el estudio de un cuadrilátero articulado, considerándolo como una extensión del péndulo triple al que se ha añadido una junta de revolución en el extremo anteriormente libre, D. En este caso, en lugar de la posición del punto D, que ahora es fija, trataremos de encontrar la correspondiente al punto C.

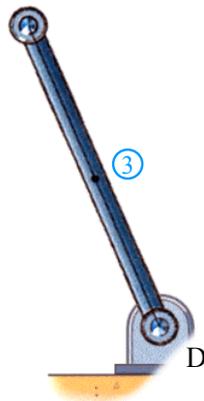


Coordenadas Cartesianas

A las ecuaciones de restricción anteriores (las obtenidas para el péndulo doble), añadiremos la correspondiente a la nueva junta de revolución.



□ Junta de revolución en D:



$$x_3^D = \overline{AD} \Rightarrow x_3 + b_3 \cdot \cos \varphi_3 = \overline{AD}$$

$$y_3^D = 0 \Rightarrow y_3 + b_3 \cdot \text{sen} \varphi_3 = 0$$

Si escogemos como variable independiente el ángulo φ_1 , y tomamos las longitudes a y b como la mitad de la longitud total de su correspondiente barra, las ecuaciones de restricción tomarán la forma:

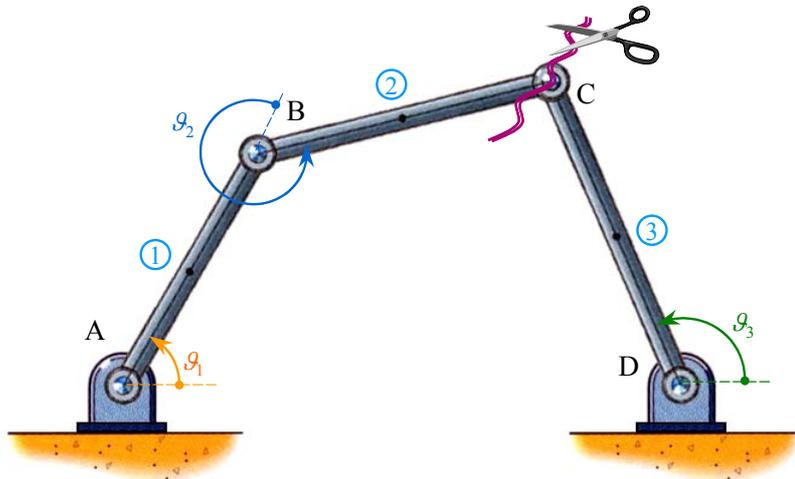
$$\left. \begin{aligned}
 x_1 &= \frac{l_1}{2} \cdot \cos \varphi_1 \\
 y_1 &= \frac{l_1}{2} \cdot \text{sen} \varphi_1 \\
 x_1 - x_2 + \frac{l_2}{2} \cdot \cos \varphi_2 &= -\frac{l_1}{2} \cdot \cos \varphi_1 \\
 y_1 - y_2 + \frac{l_2}{2} \cdot \text{sen} \varphi_2 &= -\frac{l_1}{2} \cdot \text{sen} \varphi_1 \\
 x_2 - x_3 + \frac{l_2}{2} \cdot \cos \varphi_2 + \frac{l_3}{2} \cdot \cos \varphi_3 &= 0 \\
 y_2 - y_3 + \frac{l_2}{2} \cdot \text{sen} \varphi_2 + \frac{l_3}{2} \cdot \text{sen} \varphi_3 &= 0 \\
 x_3 + \frac{l_3}{2} \cdot \cos \varphi_3 &= \overline{AD} \\
 y_3 + \frac{l_3}{2} \cdot \text{sen} \varphi_3 &= 0
 \end{aligned} \right\} \varphi_1 \rightarrow x_1, y_1, x_2, y_2, \varphi_2, y_3, \varphi_3$$

Y una vez resuelto el sistema, la coordenada x_2^C se calcula mediante la expresión:

$$x_2^C = x_2 + b_2 \cdot \cos \varphi_2$$

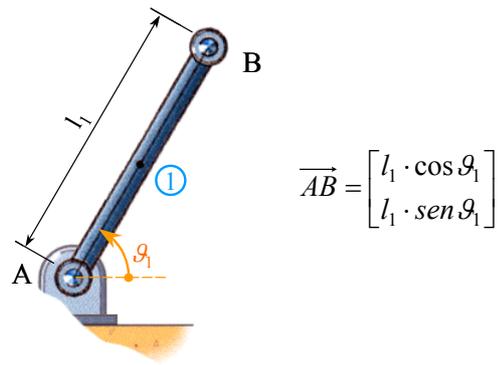
Coordenadas Relativas

En este caso, por tratarse de un mecanismo cerrado, deberemos añadir una restricción cinemática de cierre de lazo que asociaremos, por ejemplo, a la junta de revolución situada en el punto C, para lo que consideraremos que “abrimos” el mecanismo por dicha junta, y en consecuencia tendremos que prescindir de la variable asociada a ella. De igual modo, tendremos que añadir una nueva variable, para definir la movilidad de la nueva junta, que antes no existía.

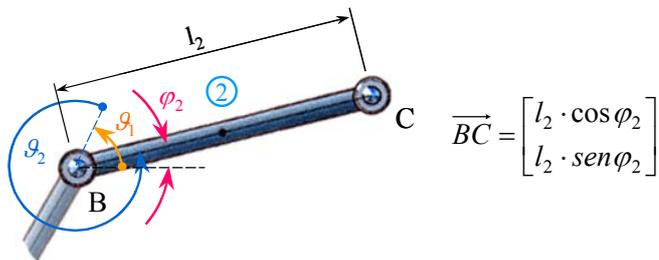


En esta ocasión será necesario construir dos cadenas vectoriales, que van desde el cuerpo fijo hasta cada uno de los dos extremos de la junta por la que hemos “abierto” el mecanismo; es decir, una cadena desde A hasta C, pasando por B y otra desde A hasta C pero pasando por el punto D.

Barra 1:



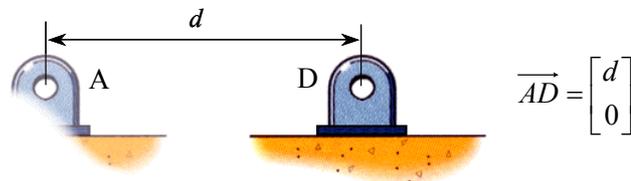
Barra 2:



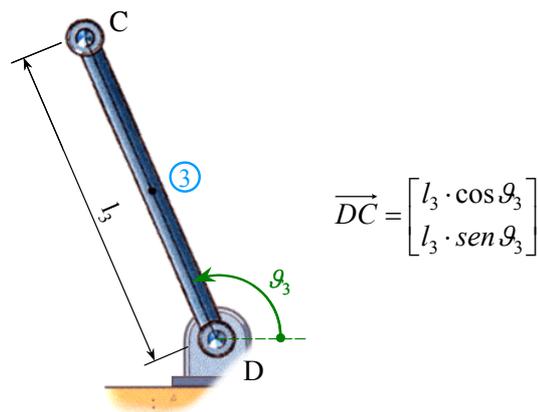
Como :

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 = 2\pi + \varphi_2 = \varphi_2 \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix} l_2 \cdot \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) \\ l_2 \cdot \text{sen}(\vartheta_1 + \vartheta_2) \end{bmatrix}$$

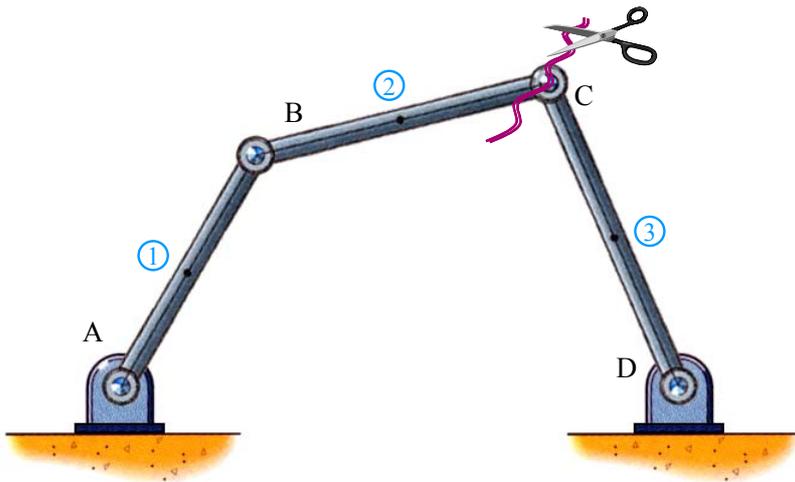
Cuerpo fijo:



Barra 3:



□ Junta de Revolución en D (cierre de lazo):



$$\vec{r}_2^C = \vec{r}_3^C \Rightarrow \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AD} + \vec{DC}$$

Teniendo en cuenta las expresiones anteriores, esta restricción puede expresarse en la forma:

$$\left. \begin{aligned} l_1 \cdot \cos \vartheta_1 + l_2 \cdot \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) &= d + l_3 \cdot \cos \vartheta_3 \\ l_1 \cdot \text{sen} \vartheta_1 + l_2 \cdot \text{sen}(\vartheta_1 + \vartheta_2) &= l_3 \cdot \text{sen} \vartheta_3 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\vartheta_1} \vartheta_2, \vartheta_3$$

Si tomamos el ángulo ϑ_1 como variable independiente, estas dos últimas expresiones nos permiten obtener el valor de las variables dependientes ϑ_2 y ϑ_3 en función de la anterior.

□ Punto C:

Una vez resuelto el sistema anterior y conocidos, por tanto, los valores de los parámetros ϑ_1 , ϑ_2 y ϑ_3 , podremos determinar la posición del punto C sin más que sustituir valores en la expresión:

$$\vec{r}^C = \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \begin{bmatrix} l_1 \cdot \cos \vartheta_1 + l_2 \cdot \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) \\ l_1 \cdot \text{sen} \vartheta_1 + l_2 \cdot \text{sen}(\vartheta_1 + \vartheta_2) \end{bmatrix}$$