

Análisis Dinámico de Sistemas Multicuerpo

En este capítulo introduciremos los conceptos teóricos en los que se basa el análisis dinámico de sistemas multicuerpo, tanto abiertos como cerrados, y con restricciones cinemáticas o sin ellas. Al igual que en el capítulo anterior, presentaremos algunos ejemplos sencillos que permitan apreciar la diferencia que supone, en cuanto al planteamiento, número y complejidad de las ecuaciones del movimiento, el hecho de definir la posición del sistema mediante coordenadas cartesianas o relativas, así como el diferente tratamiento que debe darse, con estas últimas, a los mecanismos de cadena abierta y cerrada.

15.1. DINÁMICA DE LA PARTÍCULA. LEYES DE NEWTON

Introducción

Como es sabido, la cinemática estudia los movimientos de las partículas y de los cuerpos rígidos sin considerar las fuerzas necesarias para originar dichos movimientos. La estática se encarga del estudio de los sistemas mecánicos en los que la resultante del sistema de fuerzas es nula y que, por tanto, están en equilibrio (en reposo o moviéndose con velocidad constante). Finalmente, cuando dicha resultante no es nula, el sistema mecánico se halla animado de movimiento acelerado, y estas fuerzas no equilibradas y los movimientos que originan constituyen el campo de estudio de la dinámica.

Ecuaciones del movimiento

En los tiempos anteriores a Galileo y Newton, se creía que un cuerpo en reposo estaba en su estado natural; por tanto, para mantenerlo en movimiento era necesaria una cierta fuerza. La gran contribución de Newton a la Mecánica fue darse cuenta de que no era necesaria una fuerza para mantener en movimiento un cuerpo una vez que se hubiera puesto en movimiento y que el efecto de una fuerza es alterar la velocidad, no mantenerla.

Segunda ley de Newton

Los fundamentos de los estudios de mecánica técnica son las leyes que formuló Sir Isaac Newton en 1687. En un tratado titulado “The Principia”, Newton enunció las leyes fundamentales que rigen el movimiento de una partícula de la manera siguiente:

- ❑ **Primera ley:** Todo cuerpo se mantiene en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo y uniforme, salvo si se ve forzado a cambiar dicho estado por la acción de fuerzas a él aplicadas.
- ❑ **Segunda ley:** El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz aplicada y tiene lugar en la dirección de la recta según la cual se aplica la fuerza.
- ❑ **Tercera ley:** La reacción es siempre igual y opuesta a la acción; es decir, las acciones que dos cuerpos se ejercen uno sobre otro son siempre iguales y directamente opuestas.

Estas leyes, que hoy se conocen con el nombre de “Leyes de Newton del movimiento”, suelen expresarse actualmente de la siguiente manera:

- ❑ **Primera ley:** en ausencia de fuerzas exteriores, una partícula inicialmente en reposo o que se mueve con una velocidad constante seguirá en reposo o moviéndose con velocidad constante a lo largo de una recta.
- ❑ **Segunda ley:** Si sobre una partícula se ejerce una fuerza exterior, aquella se acelerará en la dirección y sentido de la fuerza y el módulo de la aceleración será directamente proporcional a la fuerza e inversamente proporcional a la masa de la partícula.
- ❑ **Tercera ley:** Para toda acción existe una reacción igual y opuesta. Las fuerzas de acción y reacción entre dos cuerpos en contacto son de igual módulo e igual recta soporte, pero sentidos contrarios.

La primera ley atañe a una partícula (o punto material) en reposo o que se mueva con velocidad constante, y la tercera ley rige la acción y la reacción entre cuerpos que interactúan, por lo que ambas se han utilizado para desarrollar los conceptos de estática. La segunda ley de Newton, que relaciona el movimiento acelerado de un punto material con las fuerzas que lo originan, constituye la base de los estudios de la dinámica.

Matemáticamente, la segunda ley de Newton se expresa en la forma conocida:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

donde

\vec{a} es la aceleración de la partícula

\vec{F} es la fuerza que se ejerce sobre la partícula

m es la masa de la partícula

Esta ecuación expresa el hecho de que los módulos de \vec{F} y \vec{a} son proporcionales y que los vectores \vec{F} y \vec{a} tienen la misma dirección y sentido (ya que m es un escalar positivo), y es válida tanto para fuerzas constantes como para fuerzas que varíen con el tiempo (en módulo o dirección).

Cuando se utilice la ecuación para resolver problemas dinámicos, las medidas de la aceleración hay que efectuarlas respecto a ejes de referencia fijos en el espacio (que tengan una orientación constante respecto a las estrellas fijas). Un tal sistema de ejes se denomina terna galileana o sistema inercial primario. Cuando un sistema de ejes de referencia sea solidario a la Tierra, la aceleración que

en él se mida no será la aceleración absoluta que ha de figurar en la ecuación anterior, a causa de la rotación de la Tierra en torno a su eje y de su aceleración respecto al Sol al recorrer su órbita. En la mayoría de los problemas técnicos en la superficie terrestre, las correcciones a efectuar para compensar la aceleración de la Tierra respecto al sistema inercial primario son despreciables y las aceleraciones medidas respecto a ejes solidarios a la superficie terrestre se pueden tratar como si fuesen absolutas. Sin embargo, la citada ecuación no será válida cuando \vec{a} represente una aceleración relativa medida respecto a un sistema de ejes móviles sobre la Tierra. Además, habrá que considerar las componentes de la aceleración del movimiento de la Tierra cuando se aborden problemas tales como el vuelo de naves espaciales o las trayectorias de misiles balísticos.

Ecuaciones del movimiento de un punto

Los conceptos básicos y las leyes de la dinámica pueden introducirse mejor comenzando con la dinámica de una partícula.

El cuerpo más simple que puede aparecer en el estudio del movimiento es una partícula o masa puntual, definida como una masa concentrada en un punto. Si bien en realidad la masa suele estar distribuida en el espacio, el concepto de que un cuerpo tiene toda su masa concentrada en un punto es una aproximación apropiada para muchos propósitos. Más aún, como veremos, el centro de gravedad de una distribución de masa se comporta como una masa puntual. Por tanto, el análisis del comportamiento de una masa puntual conduce a resultados útiles, incluso en sistemas complejos.

Cuando sobre un punto material se ejerce un sistema de fuerzas $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$, su resultante es una fuerza \vec{R} cuya línea de acción pasa por el centro de masa del punto, ya que todo sistema de fuerzas que se ejerzan sobre un punto debe constituir un sistema de fuerzas concurrentes. El movimiento del punto material debido a la acción de la resultante \vec{R} viene regido por la segunda ley de Newton para el movimiento en la forma

$$\vec{R} = \sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Si escribimos la fuerza resultante \vec{R} y la aceleración \vec{a} en función de sus componentes cartesianas rectangulares, la ecuación anterior será

$$\sum (F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}) = m(a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k})$$

Expresando esta ecuación vectorial en forma de componentes tenemos

$$\vec{R}_x = \sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x$$

$$\vec{R}_y = \sum \vec{F}_y = m\vec{a}_y$$

$$\vec{R}_z = \sum \vec{F}_z = m\vec{a}_z$$

cuya forma escalar es:

$$R_x = \sum F_x = ma_x$$

$$R_y = \sum F_y = ma_y$$

$$R_z = \sum F_z = ma_z$$

En muchos problemas de dinámica del punto conviene expresar la aceleración del punto material en función de su posición (x, y, z) . En tales casos, combinando las ecuaciones anteriores tenemos

$$\sum (F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}) = m(\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k})$$

Las componentes escalares de esta ecuación vectorial son

$$\sum F_x = ma_x = m \frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x}$$

$$\sum F_y = ma_y = m \frac{d^2y}{dt^2} = m\ddot{y}$$

$$\sum F_z = ma_z = m \frac{d^2z}{dt^2} = m\ddot{z}$$

15.2. DINÁMICA DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

Ecuaciones del movimiento de un sistema de puntos

Las ecuaciones del movimiento de un sistema de puntos materiales se pueden obtener aplicando la segunda ley de Newton a cada uno de los puntos pertenecientes al sistema. Por ejemplo, consideremos el conjunto de n partículas representado en la figura 15.1-a. La partícula i -ésima tiene una masa m_i y su situación se especifica respecto a un sistema de ejes de referencia adecuado utilizando el vector de posición \vec{r}_i con origen en el del sistema de coordenadas.

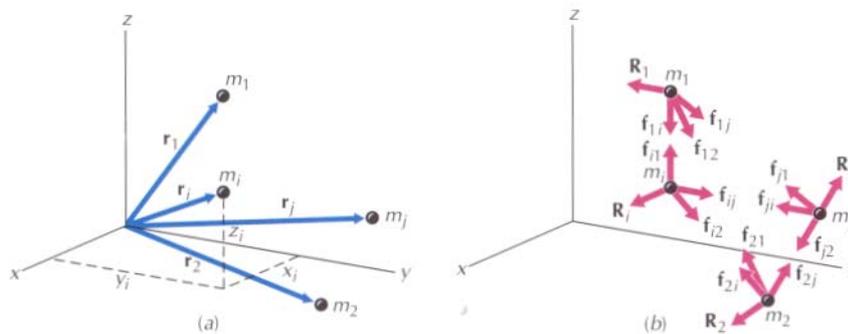


Figura 15.1. Fuerzas aplicadas sobre un sistema de partículas.

Cada partícula del sistema (ver. figura 15.1-b) puede estar sometida a un sistema de fuerzas exteriores de resultante \vec{R}_i y a un sistema de fuerzas interiores $\vec{f}_{i1}, \vec{f}_{i2}, \vec{f}_{i3}, \dots, \vec{f}_{in}$. Las fuerzas interiores se deben a las interacciones elásticas entre partículas y a efectos eléctricos o magnéticos. La fuerza interior ejercida por la partícula p_j sobre la partícula p_i se representa por \vec{f}_{ij} . Aplicando la segunda ley de Newton a la partícula i -ésima se tiene

$$\vec{R}_i + \sum_{j=1}^n \vec{f}_{ij} = m_i \vec{a}_i$$

En la suma de fuerzas interiores, \vec{f}_{ii} es nula porque la partícula p_i no ejerce fuerza sobre sí misma.

Además, si una partícula p_j ejerce una fuerza \vec{f}_{ij} sobre la partícula p_i , la tercera ley de Newton nos dice que la partícula p_i ejercerá sobre la p_j una fuerza \vec{f}_{ji} de igual recta soporte y módulo que \vec{f}_{ij} pero de sentido opuesto. Por tanto,

$$\vec{f}_{ij} + \vec{f}_{ji} = \vec{0}$$

Sumando las ecuaciones del movimiento correspondientes a las n partículas del sistema se obtiene una ecuación del movimiento para el sistema. Así pues,

$$\sum_{i=1}^n \vec{R}_i + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \vec{f}_{ij} \right) = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i$$

Como todas las fuerzas internas del sistema son, dos a dos, colineales, opuestas y de igual módulo, su suma será nula y la ecuación anterior se reduce a

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{R}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i \quad (1)$$

Esta ecuación nos indica que la resultante \vec{R} del sistema exterior de fuerzas aplicadas que se ejercen sobre el sistema de partículas es igual a la resultante de los vectores inercia $m\vec{a}$ de las partículas del sistema. A la cantidad $m\vec{a}$ se le llama, a veces, fuerza de inercia; ahora bien, como no es ni una fuerza de contacto ni una fuerza gravitatoria (peso), muchos evitan utilizar la palabra fuerza para designar al vector inercia $m\vec{a}$.

Si consideramos el centro de masa del sistema de puntos materiales, podemos escribir esta última ecuación de otra forma. El centro de masa del sistema es el punto G definido por el vector de posición \vec{r}_G que satisface la relación

$$\vec{r}_G = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{m} \quad (2)$$

donde

$$m = \sum_{i=1}^n m_i$$

es la masa total del sistema de puntos materiales. Derivando (2) respecto al tiempo, tenemos

$$\begin{aligned} m\dot{\vec{r}}_G &= \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i \\ m\ddot{\vec{r}}_G &= \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i \end{aligned}$$

que podemos escribir como

$$m\vec{a}_G = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i \quad (3)$$

Combinando las ecuaciones (1) y (3), tenemos

$$\vec{R} = m\vec{a}_G \quad (4)$$

Las componentes de esta ecuación vectorial nos dan

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_x &= \vec{R}_x = m\vec{a}_{Gx} \\ \sum \vec{F}_y &= \vec{R}_y = m\vec{a}_{Gy} \\ \sum \vec{F}_z &= \vec{R}_z = m\vec{a}_{Gz} \end{aligned} \quad (5)$$

Las ecuaciones (4) y (5) constituyen expresiones matemáticas del "principio del movimiento del centro de masa" de un sistema de puntos materiales. Las ecuaciones (5) para un sistema de puntos materiales son formalmente iguales a la ecuación correspondiente para un punto material único. Esta correspondencia nos indica que un sistema de puntos materiales se puede tratar como un punto material único, situado en el centro de masa G , supuesta concentrada en él toda la masa del sistema, si se supone que se aplica una fuerza igual a la resultante \vec{R} cuya línea de acción pase por G . De hecho, todo cuerpo puede ser considerado como punto material al aplicar la ecuación (5). Sin embargo, en general, la recta soporte de la fuerza resultante R no pasará por el centro de masa del sistema y la resultante consistirá en una fuerza resultante \vec{R} que pase por el centro de masa G y un par de momento resultante \vec{M} .

15.3. DINÁMICA DE UN SÓLIDO RÍGIDO

Podemos considerar que un cuerpo rígido es un conjunto de puntos materiales; por tanto, en el caso de un cuerpo rígido, podremos utilizar las relaciones desarrolladas en el apartado anterior para el movimiento de un sistema de puntos materiales. En este apartado vamos a aplicar muchas veces la ecuación (4) que relaciona la resultante \vec{R} de las fuerzas aplicadas exteriormente con la aceleración \vec{a}_G del centro de masa G en el caso particular en que la recta soporte de la resultante \vec{R} pase por el centro de masa G del sistema. En el caso más general en que la resultante del sistema de fuerzas exteriores consista en una fuerza resultante \vec{R} que pase por el centro de masa G más un par de momento \vec{M} , el cuerpo experimentará rotación y traslación y se necesitarán ecuaciones adicionales para relacionar los momentos de las fuerzas exteriores con el movimiento angular del cuerpo.

Ecuaciones del movimiento plano

Las leyes de Newton sólo son aplicables al movimiento (traslación) de un punto material; por tanto, no son adecuadas para describir el movimiento completo de un cuerpo rígido, el cual puede ser de traslación y de rotación. En este apartado, vamos a extender las leyes de Newton para que cubran el movimiento plano de un cuerpo rígido. Más adelante, extenderemos aún más las leyes de Newton para que cubran el caso general del movimiento tridimensional de un cuerpo rígido. Estas leyes (para el movimiento plano o para el tridimensional) proporcionan ecuaciones diferenciales que relacionan el movimiento acelerado lineal y angular del cuerpo con las fuerzas y momentos que lo originan. Dichas ecuaciones pueden utilizarse para determinar

1. Las aceleraciones instantáneas ocasionadas por fuerzas y momentos conocidos, o
2. Las fuerzas y momentos que se necesitan para originar un movimiento prefijado.

Anteriormente se desarrolló el "principio del movimiento del centro de masa". Como un cuerpo rígido se puede considerar como un conjunto de puntos materiales que mantienen invariables sus distancias mutuas, el movimiento del centro de masa G de un cuerpo rígido vendrá dado por la ecuación (4)

$$\vec{R} = m\vec{a}_G$$

donde

\vec{R} es la resultante de las fuerzas que se ejercen sobre el cuerpo en un instante dado.

m es la masa del cuerpo.

\vec{a}_G es la aceleración lineal instantánea del centro de masa del cuerpo rígido en la dirección de la fuerza resultante \vec{R} .

Esta ecuación vectorial se puede escribir en forma escalar según las tres ecuaciones correspondientes a sus componentes:

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_x &= \vec{R}_x = m\vec{a}_{Gx} \\ \sum \vec{F}_y &= \vec{R}_y = m\vec{a}_{Gy} \\ \sum \vec{F}_z &= \vec{R}_z = m\vec{a}_{Gz} \end{aligned}$$

Como la ecuación (4) se obtuvo sumando fuerzas, simplemente, no se tiene ninguna información acerca de la situación de la recta soporte de la fuerza resultante \vec{R} . El centro de masa G de un cuerpo rígido se mueve (traslada) como si dicho cuerpo fuese un punto material de masa m sometido a la fuerza resultante \vec{R} . El movimiento real de la mayoría de los cuerpos rígidos consiste en la superposición de la traslación originada por la fuerza resultante \vec{R} y la rotación debida al momento de esta fuerza cuando su recta soporte no pasa por el centro de masa G del cuerpo.

Consideremos el cuerpo rígido de forma arbitraria representado en la figura 15.2-a.

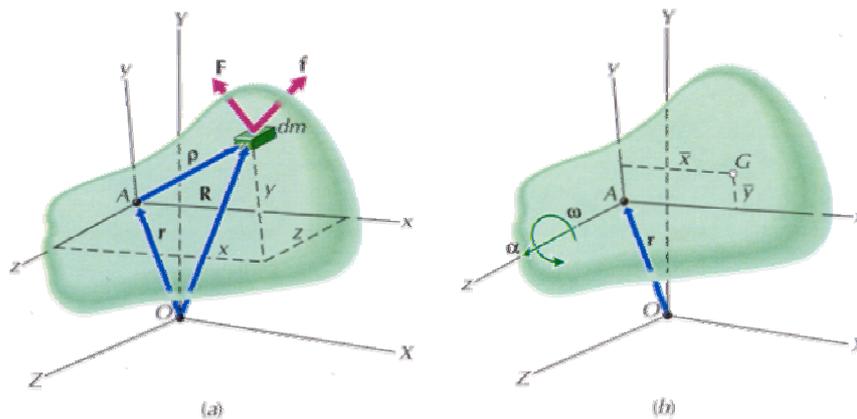


Figura 15.2. Sistema de fuerzas sobre un sólido rígido.

El sistema de coordenadas XYZ está fijo en el espacio. El sistema de coordenadas xyz es solidario al cuerpo en el punto A. El desplazamiento de un elemento de masa dm respecto al punto A viene dado por el vector $\vec{\rho}$ y respecto al origen O del sistema de coordenadas XYZ viene dado por el vector \vec{R} . El desplazamiento del punto A respecto al origen O del sistema XYZ lo da el vector \vec{r} .

Las resultantes de las fuerzas exteriores e interiores que se ejercen sobre el elemento de masa dm son \vec{F} y \vec{f} , respectivamente. El momento respecto al punto A de las fuerzas \vec{F} y \vec{f} es

$$d\vec{M}_A = \vec{\rho} \times (\vec{F} + \vec{f})$$

Pero, según la segunda ley de Newton,

$$\vec{F} + \vec{f} = dm \cdot \vec{a}_{dm} = dm \cdot \ddot{\vec{R}}$$

Así pues, de las dos ecuaciones anteriores, se deduce que

$$d\vec{M}_A = \vec{\rho} \times (\vec{F} + \vec{f}) = (\vec{\rho} \times \vec{a}_{dm}) \cdot dm$$

La aceleración \vec{a}_{dm} de un cuerpo rígido en movimiento plano o en movimiento tridimensional cualquiera puede escribirse en la forma

$$\vec{a}_{dm} = \vec{a}_A + (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho}) + [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})]$$

Sustituyendo esta última ecuación en la anterior e integrando, tenemos

$$\vec{M}_A = \int_m (\vec{\rho} \times \vec{a}_A) \cdot dm + \int_m [\vec{\rho} \times (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho})] \cdot dm + \int_m \{\vec{\rho} \times [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})]\} \cdot dm$$

El movimiento plano de un cuerpo rígido lo definimos diciendo que es un movimiento en el cual todos los elementos del cuerpo se mueven en planos paralelos. Al plano paralelo que contiene el centro de masa G del cuerpo le llamamos "plano del movimiento". Así pues, según se ve en la figura 15.2-b, los vectores velocidad angular $\vec{\omega}$ y aceleración angular $\vec{\alpha}$ serán paralelos entre sí y perpendiculares al plano del movimiento.

Si tomamos el sistema de coordenadas xyz de manera que el movimiento sea paralelo al plano xy, será $\vec{a}_{Az} = \omega_x = \omega_y = 0$. La velocidad angular del cuerpo será $\omega_z = \omega$ y la aceleración angular será $\dot{\omega}_z = \alpha$. Para el movimiento en el plano xy, los diferentes términos que aparecen en esta última ecuación, cuando el punto A está situado en el plano del movimiento, se evalúan de la manera siguiente:

$$\vec{\rho} \times \vec{a}_A = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ a_{Ax} & a_{Ay} & 0 \end{vmatrix} = -z \cdot a_{Ay} \cdot \vec{i} + z \cdot a_{Ax} \cdot \vec{j} + (x \cdot a_{Ay} - y \cdot a_{Ax}) \cdot \vec{k}$$

$$\dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \alpha \\ x & y & z \end{vmatrix} = -y \cdot \alpha \cdot \vec{i} + x \cdot \alpha \cdot \vec{j}$$

Análogamente

$$\vec{\rho} \times (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho}) = -x \cdot z \cdot \alpha \cdot \vec{i} - y \cdot z \cdot \alpha \cdot \vec{j} + (x^2 + y^2) \cdot \alpha \cdot \vec{k}$$

$$\vec{\omega} \times \vec{\rho} = -y \cdot \omega \cdot \vec{i} + x \cdot \omega \cdot \vec{j}$$

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) = -x \cdot \omega^2 \cdot \vec{i} - y \cdot \omega^2 \cdot \vec{j}$$

$$\vec{\rho} \times [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})] = -y \cdot z \cdot \omega^2 \cdot \vec{i} - z \cdot x \cdot \omega^2 \cdot \vec{j}$$

Consideremos ahora las componentes cartesianas del momento \vec{M}_A .

$$\begin{aligned} \vec{M}_A &= M_{Ax} \cdot \vec{i} + M_{Ay} \cdot \vec{j} + M_{Az} \cdot \vec{k} = \\ &= \int_m (\vec{\rho} \times \vec{a}_A) \cdot dm + \int_m [\vec{\rho} \times (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho})] \cdot dm + \int_m \{\vec{\rho} \times [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})]\} \cdot dm \end{aligned}$$

Sustituyendo las ecuaciones anteriores en esta última ecuación tenemos las siguientes expresiones generales de las tres componentes del momento en el punto A:

$$\begin{aligned} M_{Ax} &= -a_{Ay} \cdot \int_m z \cdot dm - \alpha \cdot \int_m z \cdot x \cdot dm + \omega^2 \cdot \int_m y \cdot z \cdot dm \\ M_{Ay} &= a_{Ax} \cdot \int_m z \cdot dm - \alpha \cdot \int_m y \cdot z \cdot dm + \omega^2 \cdot \int_m z \cdot x \cdot dm \\ M_{Az} &= a_{Ay} \cdot \int_m x \cdot dm - a_{Ax} \cdot \int_m y \cdot dm + \alpha \cdot \int_m (x^2 + y^2) \cdot dm \end{aligned}$$

Las integrales de la forma $\int_m x \cdot dm$ son las expresiones de los momentos primeros que suelen estudiarse en detalle en la mayoría de los cursos de estática. Las integrales de la forma $\int_m x^2 \cdot dm$ y $\int_m x \cdot y \cdot dm$ representan las propiedades inerciales del cuerpo rígido y reciben el nombre de momentos de inercia y productos de inercia, respectivamente.

Los momentos primeros, momento de inercia y productos de inercia que figuran en las ecuaciones anteriores son

$$\begin{aligned} \int_m x \cdot dm &= \bar{x} \cdot m \\ \int_m y \cdot dm &= \bar{y} \cdot m \\ \int_m z \cdot dm &= \bar{z} \cdot m \\ \int_m x \cdot z \cdot dm &= I_{Azx} \\ \int_m y \cdot z \cdot dm &= I_{Ayz} \\ \int_m (x^2 + y^2) \cdot dm &= I_{Az} \end{aligned}$$

Las tres componentes del momento en el punto A, escritas en función de los momentos primeros y los momentos y productos de inercia quedan en la forma

$$\begin{aligned}
M_{Ax} &= -\alpha \cdot I_{Azx} + \omega^2 \cdot I_{Ayz} \\
M_{Ay} &= -\alpha \cdot I_{Ayz} + \omega^2 \cdot I_{Azx} \\
M_{Az} &= a_{Ay} \cdot \bar{x} \cdot m - a_{Ax} \cdot \bar{y} \cdot m + \alpha \cdot I_{Az}
\end{aligned} \tag{6}$$

Este sistema de ecuaciones relaciona los momentos de las fuerzas exteriores que se ejercen sobre el cuerpo rígido con las velocidades angulares y las propiedades inerciales del cuerpo. Los momentos de las fuerzas y los momentos y productos de inercia lo son respecto a los ejes xyz que pasan por el punto A y están fijos en el cuerpo. En el caso en que dichos ejes no estuvieran fijos en el cuerpo, los momentos y productos de inercia serían funciones del tiempo. Las ecuaciones muestran claramente cómo depende el momento respecto a un eje dado de la velocidad angular ω en torno al eje z. Dicho de otro modo, las ecuaciones muestran que pueden ser necesarios los momentos M_{Ax} y M_{Ay} para mantener el movimiento plano en torno al eje z.

En la mayoría de los problemas dinámicos referentes al movimiento plano, se pueden simplificar considerablemente estas ecuaciones. Cuando el cuerpo sea simétrico respecto al plano del movimiento, los términos producto de inercia se anulan ($I_{Ayz} = I_{Azx} = 0$) y las ecuaciones anteriores se reducen a

Por último, tomando el origen del sistema de coordenadas xyz en el centro de masa G del cuerpo $x = y = 0$ y las ecuaciones 16-4 se reducen a

$$\begin{aligned}
M_{Ax} &= 0 \\
M_{Ay} &= 0 \\
M_{Az} &= a_{Ay} \cdot \bar{x} \cdot m - a_{Ax} \cdot \bar{y} \cdot m + \alpha \cdot I_{Az}
\end{aligned} \tag{7}$$

Por último, tomando el origen del sistema de coordenadas xyz en el centro de masa G del cuerpo $\bar{x} = \bar{y} = 0$ las ecuaciones se reducen a

$$\begin{aligned}
M_{Gx} &= 0 \\
M_{Gy} &= 0 \\
M_{Gz} &= \alpha \cdot I_{Gz}
\end{aligned} \tag{8}$$

Las ecuaciones (6) a (8) junto con las ecuaciones (5) proporcionan las relaciones necesarias para resolver una amplia variedad de problemas de movimiento plano.

Movimiento tridimensional de un cuerpo rígido

Como ya se ha visto, el momento \vec{M}_A respecto a un punto arbitrario A sometido a un sistema de fuerzas exteriores, viene dado por la ecuación

$$\vec{M}_A = \int_m (\vec{\rho} \times \vec{a}_A) \cdot dm + \int_m [\vec{\rho} \times (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho})] \cdot dm + \int_m \{ \vec{\rho} \times [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})] \} \cdot dm$$

En el movimiento tridimensional, los diferentes términos que aparecen en la ecuación a son

$$\vec{\rho} \times \vec{a}_A = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ a_{Ax} & a_{Ay} & a_{Az} \end{vmatrix} = (y \cdot a_{Az} - z \cdot a_{Ay}) \cdot \vec{i} + (z \cdot a_{Ax} - x \cdot a_{Az}) \cdot \vec{j} + (x \cdot a_{Ay} - y \cdot a_{Ax}) \cdot \vec{k}$$

$$\dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dot{\omega}_x & \dot{\omega}_y & \dot{\omega}_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (z \cdot \dot{\omega}_y - y \cdot \dot{\omega}_z) \cdot \vec{i} + (x \cdot \dot{\omega}_z - z \cdot \dot{\omega}_x) \cdot \vec{j} + (y \cdot \dot{\omega}_x - x \cdot \dot{\omega}_y) \cdot \vec{k}$$

Análogamente

$$\begin{aligned} \vec{\rho} \times (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho}) &= (y^2 \cdot \dot{\omega}_x - x \cdot y \cdot \dot{\omega}_y - x \cdot z \cdot \dot{\omega}_z + z^2 \cdot \dot{\omega}_x) \cdot \vec{i} + \\ &\quad + (z^2 \cdot \dot{\omega}_y - y \cdot z \cdot \dot{\omega}_z - x \cdot y \cdot \dot{\omega}_x + x^2 \cdot \dot{\omega}_y) \cdot \vec{j} + \\ &\quad + (x^2 \cdot \dot{\omega}_z - x \cdot z \cdot \dot{\omega}_x - y \cdot z \cdot \dot{\omega}_y + y^2 \cdot \dot{\omega}_z) \cdot \vec{k} \\ \vec{\omega} \times \vec{\rho} &= (z \cdot \omega_y - y \cdot \omega_z) \cdot \vec{i} + (x \cdot \omega_z - z \cdot \omega_x) \cdot \vec{j} + (y \cdot \omega_x - x \cdot \omega_y) \cdot \vec{k} \\ \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) &= (y \cdot \omega_x \cdot \omega_y - x \cdot \omega_y^2 - x \cdot \omega_z^2 + z \cdot \omega_x \cdot \omega_z) \cdot \vec{i} + \\ &\quad + (z \cdot \omega_y \cdot \omega_z - y \cdot \omega_z^2 - y \cdot \omega_x^2 + x \cdot \omega_x \cdot \omega_y) \cdot \vec{j} + \\ &\quad + (x \cdot \omega_z \cdot \omega_x - z \cdot \omega_x^2 - z \cdot \omega_y^2 + y \cdot \omega_y \cdot \omega_z) \cdot \vec{k} \\ \vec{\rho} \times [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})] &= \\ &= (x \cdot y \cdot \omega_z \cdot \omega_x - y \cdot z \cdot \omega_y^2 + y^2 \cdot \omega_y \cdot \omega_z - z^2 \cdot \omega_y \cdot \omega_z + y \cdot z \cdot \omega_z^2 - x \cdot z \cdot \omega_x \cdot \omega_y) \cdot \vec{i} + \\ &\quad + (y \cdot z \cdot \omega_x \cdot \omega_y - x \cdot z \cdot \omega_z^2 + z^2 \cdot \omega_z \cdot \omega_x - x^2 \cdot \omega_z \cdot \omega_x + z \cdot x \cdot \omega_x^2 - y \cdot x \cdot \omega_y \cdot \omega_z) \cdot \vec{j} + \\ &\quad + (z \cdot x \cdot \omega_y \cdot \omega_z - x \cdot y \cdot \omega_x^2 + x^2 \cdot \omega_x \cdot \omega_y - y^2 \cdot \omega_x \cdot \omega_y + x \cdot y \cdot \omega_y^2 - z \cdot y \cdot \omega_z \cdot \omega_x) \cdot \vec{k} \end{aligned}$$

Si se quiere escribir el momento \vec{M}_A en forma vectorial cartesiana, las componentes escalares M_{Ax} , M_{Ay} y M_{Az} se obtendrán de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \vec{M}_A &= M_{Ax} \cdot \vec{i} + M_{Ay} \cdot \vec{j} + M_{Az} \cdot \vec{k} = \\ &= \int_m (\vec{\rho} \times \vec{a}_A) \cdot dm + \int_m [\vec{\rho} \times (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho})] \cdot dm + \int_m \{ \vec{\rho} \times [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})] \} \cdot dm \end{aligned}$$

Aplicando estas últimas igualdades en la primera ecuación tenemos

$$\begin{aligned}
M_{Ax} = & a_{Az} \cdot \int_m y \cdot dm - a_{Ay} \cdot \int_m z \cdot dm + \\
& + \dot{\omega}_x \cdot \int_m y^2 \cdot dm - \dot{\omega}_y \cdot \int_m x \cdot y \cdot dm - \dot{\omega}_z \cdot \int_m z \cdot x \cdot dm + \dot{\omega}_x \cdot \int_m z^2 \cdot dm + \\
& + \omega_z \cdot \omega_x \cdot \int_m x \cdot y \cdot dm - \omega_y^2 \cdot \int_m y \cdot z \cdot dm + \omega_y \cdot \omega_z \cdot \int_m y^2 \cdot dm - \\
& - \omega_y \cdot \omega_z \cdot \int_m z^2 \cdot dm + \omega_z^2 \cdot \int_m y \cdot z \cdot dm - \omega_x \cdot \omega_y \cdot \int_m z \cdot x \cdot dm
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{Ay} = & a_{Ax} \cdot \int_m z \cdot dm - a_{Az} \cdot \int_m x \cdot dm + \\
& + \dot{\omega}_y \cdot \int_m z^2 \cdot dm - \dot{\omega}_z \cdot \int_m y \cdot z \cdot dm - \dot{\omega}_x \cdot \int_m x \cdot y \cdot dm + \dot{\omega}_y \cdot \int_m x^2 \cdot dm + \\
& + \omega_x \cdot \omega_y \cdot \int_m y \cdot z \cdot dm - \omega_z^2 \cdot \int_m z \cdot x \cdot dm + \omega_z \cdot \omega_x \cdot \int_m z^2 \cdot dm \\
& - \omega_z \cdot \omega_x \cdot \int_m x^2 \cdot dm + \omega_x^2 \cdot \int_m z \cdot x \cdot dm - \omega_y \cdot \omega_z \cdot \int_m x \cdot y \cdot dm
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{Az} = & a_{Ay} \cdot \int_m x \cdot dm - a_{Ax} \cdot \int_m y \cdot dm + \\
& + \dot{\omega}_z \cdot \int_m x^2 \cdot dm - \dot{\omega}_x \cdot \int_m x \cdot z \cdot dm - \dot{\omega}_y \cdot \int_m y \cdot z \cdot dm + \dot{\omega}_z \cdot \int_m y^2 \cdot dm + \\
& + \omega_y \cdot \omega_z \cdot \int_m z \cdot x \cdot dm - \omega_x^2 \cdot \int_m x \cdot y \cdot dm + \omega_x \cdot \omega_y \cdot \int_m x^2 \cdot dm - \\
& - \omega_x \cdot \omega_y \cdot \int_m y^2 \cdot dm + \omega_y^2 \cdot \int_m x \cdot y \cdot dm - \omega_z \cdot \omega_x \cdot \int_m y \cdot z \cdot dm
\end{aligned}$$

Cuando se escriben estas ecuaciones en función de los momentos primeros, momentos de inercia y productos de inercia, quedan en la forma

$$\begin{aligned}
M_{Ax} = & a_{Az} \cdot \bar{y} \cdot m - a_{Ay} \cdot \bar{z} \cdot m + I_{Ax} \cdot \dot{\omega}_x - (I_{Ay} - I_{Az}) \cdot \omega_y \cdot \omega_z + \\
& + I_{Axy} \cdot (\omega_z \cdot \omega_x - \dot{\omega}_y) - I_{Ayz} \cdot (\omega_y^2 - \omega_z^2) - I_{Azx} \cdot (\omega_x \cdot \omega_y + \dot{\omega}_z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{Ay} = & a_{Ax} \cdot \bar{z} \cdot m - a_{Az} \cdot \bar{x} \cdot m + I_{Ay} \cdot \dot{\omega}_y - (I_{Az} - I_{Ax}) \cdot \omega_z \cdot \omega_x + \\
& + I_{Ayz} \cdot (\omega_x \cdot \omega_y - \dot{\omega}_z) - I_{Azx} \cdot (\omega_z^2 - \omega_x^2) - I_{Axy} \cdot (\omega_y \cdot \omega_z + \dot{\omega}_x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{Az} = & a_{Ay} \cdot \bar{x} \cdot m - a_{Ax} \cdot \bar{y} \cdot m + I_{Az} \cdot \dot{\omega}_z - (I_{Ax} - I_{Ay}) \cdot \omega_x \cdot \omega_y + \\
& + I_{Azx} \cdot (\omega_y \cdot \omega_z - \dot{\omega}_x) - I_{Axy} \cdot (\omega_x^2 - \omega_y^2) - I_{Ayz} \cdot (\omega_z \cdot \omega_x + \dot{\omega}_y)
\end{aligned}$$

En la mayoría de los problemas dinámicos interesa tener una relación instantánea entre momentos y aceleraciones. Se obtiene entonces una gran simplificación si se toma el sistema de coordenadas xyz de manera que coincida con los ejes principales que pasan por el centro de masa G del cuerpo en el instante deseado. Con el origen en el centro de masa

$$\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = 0$$

con lo que las ecuaciones quedan reducidas a

$$\begin{aligned}
 M_{Gx} &= I_{Gx} \cdot \dot{\omega}_x - (I_{Gy} - I_{Gz}) \cdot \omega_y \cdot \omega_z + I_{Gxy} \cdot (\omega_z \cdot \omega_x - \dot{\omega}_y) - \\
 &\quad - I_{Gyz} \cdot (\omega_y^2 - \omega_z^2) - I_{Gzx} \cdot (\omega_x \cdot \omega_y + \dot{\omega}_z) \\
 M_{Gy} &= I_{Gy} \cdot \dot{\omega}_y - (I_{Gz} - I_{Gx}) \cdot \omega_z \cdot \omega_x + I_{Gyz} \cdot (\omega_x \cdot \omega_y - \dot{\omega}_z) - \\
 &\quad - I_{Gzx} \cdot (\omega_z^2 - \omega_x^2) - I_{Gxy} \cdot (\omega_y \cdot \omega_z + \dot{\omega}_x) \\
 M_{Gz} &= I_{Gz} \cdot \dot{\omega}_z - (I_{Gx} - I_{Gy}) \cdot \omega_x \cdot \omega_y + I_{Gzx} \cdot (\omega_y \cdot \omega_z - \dot{\omega}_x) - \\
 &\quad - I_{Gxy} \cdot (\omega_x^2 - \omega_y^2) - I_{Gyz} \cdot (\omega_z \cdot \omega_x + \dot{\omega}_y)
 \end{aligned}$$

La expresión anterior puede escribirse en forma matricial como sigue:

$$\vec{M}_G = J_G \cdot \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times (J_G \cdot \vec{\omega}) \quad (9)$$

donde la matriz J recibe el nombre de tensor de inercia, y viene dado por

$$J_G = \begin{bmatrix} I_{Gx} & -I_{Gxy} & -I_{Gxz} \\ -I_{Gyx} & I_{Gy} & -I_{Gyz} \\ -I_{Gzx} & -I_{Gzy} & I_{Gz} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Si además el sistema de referencia coincide con los ejes principales

$$I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$$

Y las ecuaciones se reducen a

$$\begin{aligned}
 M_{Gx} &= I_{Gx} \cdot \dot{\omega}_x - (I_{Gy} - I_{Gz}) \cdot \omega_y \cdot \omega_z \\
 M_{Gy} &= I_{Gy} \cdot \dot{\omega}_y - (I_{Gz} - I_{Gx}) \cdot \omega_z \cdot \omega_x \\
 M_{Gz} &= I_{Gz} \cdot \dot{\omega}_z - (I_{Gx} - I_{Gy}) \cdot \omega_x \cdot \omega_y
 \end{aligned} \quad (11)$$

Estas últimas ecuaciones se conocen por el nombre de ecuaciones de Euler.

Las ecuaciones de Euler sólo son válidas instantáneamente. Si fuese necesario integrar las aceleraciones para obtener las velocidades, deberán establecerse expresiones generales para los momentos de las fuerzas y los momentos de inercia. Estos momentos de inercia sólo serán constantes cuando los cuerpos sean muy simétricos.

Las ecuaciones (5) junto con las (11) proporcionan las relaciones necesarias para resolver diversos problemas de movimiento tridimensional. Así,

$$\begin{aligned}
 m \cdot a_{Gx} &= \sum F_x \\
 m \cdot a_{Gy} &= \sum F_y \\
 m \cdot a_{Gz} &= \sum F_z \\
 I_{Gx} \cdot \dot{\omega}_x - (I_{Gy} - I_{Gz}) \cdot \omega_y \cdot \omega_z &= \sum M_{Gx} \\
 I_{Gy} \cdot \dot{\omega}_y - (I_{Gz} - I_{Gx}) \cdot \omega_z \cdot \omega_x &= \sum M_{Gy} \\
 I_{Gz} \cdot \dot{\omega}_z - (I_{Gx} - I_{Gy}) \cdot \omega_x \cdot \omega_y &= \sum M_{Gz}
 \end{aligned} \tag{12}$$

15.4. DINÁMICA DE UN SISTEMA FORMADO POR SÓLIDOS RÍGIDOS SIN RESTRICCIONES CINEMÁTICAS

Planteamiento de las ecuaciones del movimiento

Un sistema multicuerpo puede considerarse como un conjunto de cuerpos individuales conectados entre sí mediante juntas cinemáticas y/o elementos de fuerza. Si no existen juntas cinemáticas en el sistema, se dice que el sistema no está restringido, mientras que en el caso de existir al menos una junta cinemática diremos que se trata de un sistema de cuerpos restringidos.

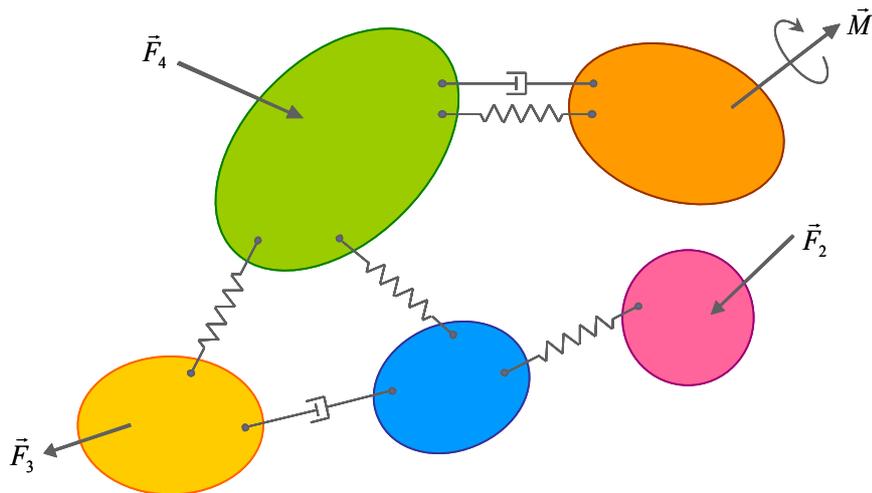


Figura 15.3 Sistema multicuerpo sin restricciones cinemáticas.

En el caso de sistemas no restringidos, bastará con aplicar las ecuaciones (4) y (9) a cada uno de los n cuerpos que lo componen.

$$\left. \begin{aligned}
 m_i \vec{a}_{iG} &= \vec{R}_i \\
 J_{iG} \cdot \dot{\vec{\omega}}_i + \vec{\omega}_i \times (J_{iG} \cdot \vec{\omega}_i) &= \vec{M}_{iG}
 \end{aligned} \right\} \quad ,, \quad i = 1, \dots, n \tag{13}$$

Las fuerzas y momentos resultantes que aparecen en el segundo término de estas ecuaciones representan la acción combinada de fuerzas y pares externos conocidos, así como de las fuerzas gravitatorias y las ejercidas por elementos elásticos como resortes, amortiguadores y actuadores.

A continuación veremos de qué manera puede introducirse la acción de las citadas fuerzas en la formulación de las ecuaciones dinámicas del movimiento.

Fuerzas aplicadas

Fuerza gravitatoria

La acción de la gravedad sobre cada cuerpo del sistema, \vec{F}_{ig} , vendrá dada por una fuerza vertical en sentido descendente, aplicada sobre el centro de masas del cuerpo correspondiente, y de módulo igual al peso de dicho cuerpo.

$$\vec{F}_{ig} = -m \cdot g \cdot \vec{k}$$

Fuerzas y momentos externos

El sistema de fuerzas y momentos puros aplicados sobre cada cuerpo puede sustituirse por un sistema equivalente constituido por una fuerza resultante, $\vec{R}_{i\text{ext}}$, aplicada sobre el centro de gravedad, más un momento $\vec{M}_{iG\text{ext}}$ que es la suma de los momentos libres más los momentos de las fuerzas externas respecto al centro de masas.

$$\vec{R}_{i\text{ext}} = \left[\sum_j \vec{F}_{j\text{ext}} \right]_i$$

$$\vec{M}_{iG\text{ext}} = \left[\sum_j \vec{M}_{j\text{ext}} + \sum_j \vec{r}_j \times \vec{F}_{j\text{ext}} \right]_i$$

siendo \vec{r}_j el vector de posición del punto de aplicación de la fuerza externa $\vec{F}_{j\text{ext}}$ respecto al sistema de referencia con origen en el centro de gravedad, G.

Elementos de fuerza

□ Resortes:

Los resortes de traslación son los elementos de fuerza más utilizados en los sistemas mecánicos.

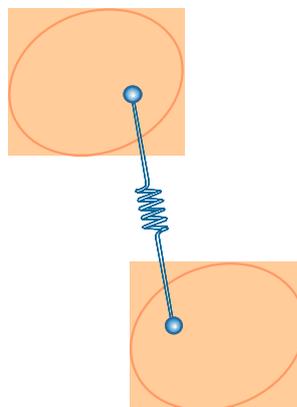


Figura 15.4. Resorte.

La acción de un resorte da lugar a la aparición de sendas fuerzas en los puntos de anclaje, con la misma línea de acción, el mismo módulo y sentidos opuestos. Naturalmente, la dirección de dichas fuerzas es la que une los ambos puntos de anclaje, situados en dos cuerpos distintos del sistema, y el módulo es igual al producto de la constante de rigidez del resorte, k , por el alargamiento que este ha experimentado, Δl . En el caso de que el muelle esté traccionado, las fuerzas que aparecen tratarán de acercar entre sí los dos cuerpos, mientras que si está comprimido intentarán alejarlos.

Según esto, podremos expresar las fuerzas debidas a la acción del resorte anclado entre dos cuerpos i y j como:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{i \text{ resorte}} &= k \cdot (l - l_0) \cdot \vec{u} \\ \vec{F}_{j \text{ resorte}} &= -k \cdot (l - l_0) \cdot \vec{u}\end{aligned}$$

siendo l_0 la longitud inicial del resorte, l su longitud actual, k el coeficiente de rigidez y \vec{u} un vector unitario en la dirección que une ambos puntos de anclaje.

□ Amortiguadores

El comportamiento de los amortiguadores es similar al de los resortes, sólo que dan lugar a la aparición de fuerzas que se oponen a la velocidad relativa entre sus extremos, y no al desplazamiento relativo entre los mismos.

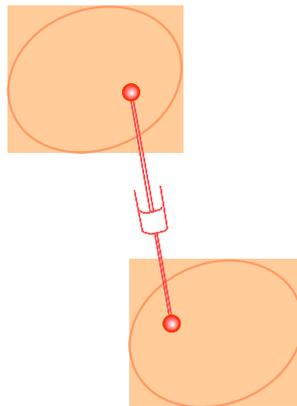


Figura 15.5. Amortiguador.

En este caso se tiene que:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{i \text{ amortiguador}} &= c \cdot \dot{l} \cdot \vec{u} \\ \vec{F}_{j \text{ amortiguador}} &= -c \cdot \dot{l} \cdot \vec{u}\end{aligned}$$

□ Actuadores

Los actuadores proporcionan una pareja de fuerzas, que puede ser constante o dependiente del tiempo, sobre los dos cuerpos a los que están anclados. Como en el caso de los elementos de fuerza anteriores, estas fuerzas comparten la misma línea de acción, tienen el mismo módulo pero sentidos opuestos.

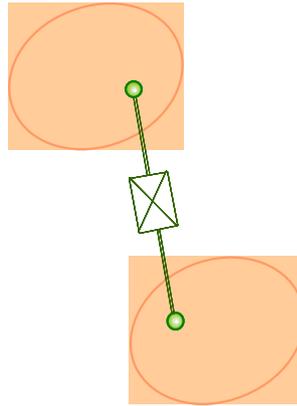


Figura 15.6. Actuador.

Ejemplos

A continuación veremos un par de ejemplos que permitirán ver de un modo más claro los conceptos que se han introducido con anterioridad. Comenzaremos planteando un caso sencillo de un grado de libertad.

Sistema con un grado de libertad

En la figura 15.7 se muestra una masa sometida a la aceleración de la gravedad y soportada por un muelle y un amortiguador viscoso colocados en paralelo. Si se aísla la masa y se aplican sobre ella los esfuerzos que en el sistema real ejercen el muelle y el amortiguador sobre la masa, al plantear la segunda ley de Newton se obtiene la ecuación que define el comportamiento dinámico del sistema.

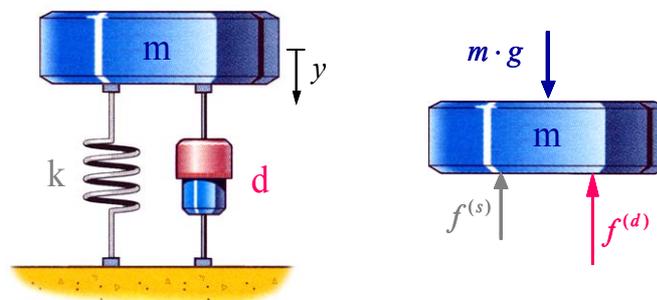


Figura 15.7. Masa suspendida por un resorte y un amortiguador.

Como se observa en la figura 15.7, el único movimiento posible es el desplazamiento vertical, y la expresión de la segunda ley de Newton en esa dirección es:

$$m \cdot \ddot{y} = -f^{(s)} - f^{(d)} + m \cdot g \quad (14)$$

siendo:

mg = Peso de la masa.

$f^{(s)}$ = Fuerza ejercida por el resorte.

$f^{(d)}$ = Fuerza ejercida por el amortiguador.

Esta ecuación indica que la suma de los esfuerzos que actúan en dirección vertical provocan la aceleración \ddot{x} de la masa. Por otra parte, como el resorte y el amortiguador se oponen al movimiento de la masa, los esfuerzos realizados por estos elementos son de signo negativo.

Como recordará el lector, la fuerza producida por un resorte depende de la rigidez del mismo, k , así como del desplazamiento al que está sometido. Por tanto,

$$f^{(s)} = k \cdot (y - y^0)$$

y suponiendo que el desplazamiento inicial, y^0 es nulo, queda:

$$f^{(s)} = k \cdot y \quad (15)$$

En cuanto a la fuerza ejercida por un amortiguador viscoso, se cumple que esta es igual al producto del coeficiente de amortiguación, d , por la velocidad de variación su longitud, y que no es otra que \dot{y} .

$$f^{(d)} = d \cdot \dot{y} \quad (16)$$

Sustituyendo (15) y (16) en (14), se obtiene la ecuación de la dinámica para este sistema con un grado de libertad.

$$m \cdot \ddot{y} = -k \cdot y - d \cdot \dot{y} + m \cdot g$$

y dejando en el segundo miembro solamente el término que representa al peso, se tiene:

$$m \cdot \ddot{y} + d \cdot \dot{y} + k \cdot y = m \cdot g \quad (17)$$

La ecuación (17) es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, ya que en ella aparece la variable 'y' junto con sus dos primeras derivadas.

Simular el comportamiento dinámico de este sistema por ordenador consiste en plantear y resolver la ecuación diferencial que define su comportamiento, y generar una serie de salidas gráficas que muestren la evolución del sistema en el tiempo, así como una animación del movimiento de la masa. De esta forma, el usuario puede analizar con facilidad el comportamiento del sistema, así como la influencia que podrían tener en el mismo la variación de las características de los elementos que lo componen.

Veamos a continuación cómo resolvería el ordenador este ejemplo. En primer lugar, es necesario asignar valores a los parámetros del sistema; es decir, es necesario cuantificar los valores de m , k y d . Sean, por ejemplo:

$$\begin{aligned} m &= 250 \text{ kg} \\ k &= 10\,000 \text{ N/m} \\ d &= 1\,500 \text{ Ns/m} \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación (17) se obtiene:

$$250 \cdot \ddot{y} + 1500 \cdot \dot{y} + 10000 \cdot y = 250 \cdot 9.8$$

y despejando la aceleración, queda:

$$\ddot{y} = \frac{250 \cdot 9.8 - 1500 \cdot \dot{y} - 10000 \cdot y}{250} \quad (18)$$

Para resolver esta ecuación diferencial es necesario utilizar un método específico para la integración de ecuaciones diferenciales. El más sencillo y elemental de estos métodos numéricos es el método de Euler, que en síntesis consiste en considerar que, supuesta conocida la velocidad en un instante t , el valor de la velocidad un intervalo de tiempo después es igual a la velocidad anterior más el incremento de velocidad experimentado en el tiempo transcurrido. Dicho incremento de velocidad puede considerarse igual al producto de la aceleración obtenida para el instante anterior, que se considera constante en todo el intervalo, por el tiempo transcurrido.

Una vez conocida la velocidad, puede considerarse que el desplazamiento es igual al desplazamiento anterior más el incremento del desplazamiento, que puede expresarse como el producto de la velocidad por el intervalo de tiempo. Como antes, se considera que la velocidad permanece constante en todo el intervalo, tomándose para ella el valor que se acaba de calcular.

Después de calcular la velocidad y el desplazamiento, puede obtenerse la aceleración por simple sustitución.

Evidentemente, el planteamiento descrito es válido para cualquier instante excepto para el inicial, ya que para él no se dispone de información referente a la aceleración que se tenía un cierto intervalo de tiempo antes. Para poder resolver la ecuación diferencial en el instante inicial, es decir, cuando el tiempo es igual a cero, es necesario conocer los valores del desplazamiento y^0 y la velocidad \dot{y}^0 para $t=0$; a estos valores se les denomina condiciones iniciales del problema.

Veamos la aplicación concreta de este método al ejemplo que se está resolviendo. Supongamos que para $t=0$ se tiene:

$$\begin{aligned}y^0 &= 0 \\ \dot{y}^0 &= 0\end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (18) se obtiene la aceleración correspondiente al instante inicial

$$\ddot{y}^0 = \frac{250 \cdot 9.8 - 1500 \cdot 0 - 10000 \cdot 0}{250} = 9.8m/s^2$$

Una vez hallado el valor de la aceleración en el instante inicial, ya puede aplicarse el método de Euler para obtener la velocidad y el desplazamiento que se tendrán después de que haya transcurrido un tiempo h . Denominando y^h e \dot{y}^h al desplazamiento y la velocidad para $t=h$, puede escribirse

$$\dot{y}^h = \dot{y}^0 + \ddot{y}^0 \cdot h \quad (19)$$

Obsérvese que la aplicación de esta ecuación implica que se está considerando que la aceleración permanece constante a lo largo del intervalo de tiempo h .

En cuanto se refiere al desplazamiento, también se supone que la velocidad permanece constante en el intervalo h , y por tanto:

$$y^h = y^0 + \dot{y}^0 \cdot h \quad (20)$$

Para obtener y^h e \dot{y}^h es necesario escoger un valor para el intervalo h durante el que, como se ha señalado, se va a considerar que tanto la velocidad como la aceleración permanecen constantes. Como realmente ninguna de las dos permanece constante durante ningún intervalo de tiempo, para

no cometer un error importante en la resolución del problema es preciso elegir un intervalo h bastante reducido.

Tomemos, por ejemplo, $h=0.01s$. Operando se tiene:

$$\dot{y}^h = 0 + 9.8 \cdot 0.01 = 0.098m/s$$

$$y^h = 0 + 0.098 \cdot 0.01 = 0.00098 m$$

Como $h=0.01s$, la velocidad y el desplazamiento cuando el tiempo transcurrido es $0.01s$ pueden expresarse como:

$$\dot{y}^{(0.01)} = \dot{y}(t = 0.01) = 0.098m/s$$

$$y^{(0.01)} = y(t = 0.01) = 0.00098 m$$

Para seguir resolviendo la ecuación diferencial (18) se comienza otra vez el proceso de cálculo para un nuevo paso de integración h . Como se trata de la segunda vez que se realiza el cálculo, el tiempo al final del mismo es:

$$t = 2 \cdot h = 2 \cdot 0.01 = 0.02s$$

En este caso se utilizan como condiciones iniciales los valores de y e \dot{y} correspondientes al instante $t=0.01$, y por tanto el valor de la aceleración para ese mismo instante es:

$$\ddot{y}^{(0.01)} = \frac{250 \cdot 9.8 \cdot 1500 \cdot \dot{y}^{(0.01)} \cdot 10000 \cdot y^{(0.01)}}{250}$$

Y sustituyendo $y^{(0.01)}$ e $\dot{y}^{(0.01)}$ por su valor se obtiene

$$\ddot{y}^{(0.01)} = 9.1532 m/s$$

Aplicando las expresiones (19) y (20) se calculan $y^{(0.02)}$ e $\dot{y}^{(0.02)}$:

$$\dot{y}^{(0.02)} = \dot{y}^{(0.01)} + \ddot{y}^{(0.01)} \cdot h$$

$$y^{(0.02)} = y^{(0.01)} + \dot{y}^{(0.01)} \cdot h$$

Y sustituyendo valores se obtiene:

$$\dot{y}^{(0.02)} = 0.1895 m/s$$

$$y^{(0.02)} = 0.002875 m$$

Para calcular en el siguiente paso de integración se vuelve a repetir el proceso. Ahora se obtendrá el valor de las incógnitas para:

$$t = 3 \cdot h = 3 \cdot 0.01 = 0.03 s$$

Esquemáticamente, la resolución de la ecuación diferencial se ha realizado de la siguiente manera:

1. Obtención de la ecuación diferencial

$$\ddot{y} = \frac{250 \cdot 9.8 - 1500 \cdot \dot{y} - 10000 \cdot y}{250} \quad (21)$$

2. Elección de las condiciones iniciales (valores de y e \dot{y} para $t=0$).

$$\text{Para } t = 0 \quad \begin{cases} y^0 = 0 \\ \dot{y}^0 = 0 \end{cases}$$

3. Elección del paso de integración h (intervalo de tiempo durante el que y e \dot{y} se consideran constantes).

$$h = 0.01 \text{ s}$$

4. Cálculo de \ddot{y}^0 , aplicando la ecuación (21) con $y=y^0$ e $\dot{y} = \dot{y}^0$.

5. Obtención de $y(0.01)$ e $\dot{y}^{(0.01)}$ aplicando las expresiones

$$\begin{aligned} \dot{y}^{(0.01)} &= \dot{y}^0 + \ddot{y}^0 \cdot h \\ y^{(0.01)} &= y^0 + \dot{y}^{(0.01)} \cdot h \end{aligned}$$

6. Se toman $y(0.01)$ e $\dot{y}^{(0.01)}$ como condiciones iniciales para el siguiente paso de integración.

7. Cálculo de $\ddot{y}^{(0.01)}$, aplicando la ecuación (21) con $y=y(0.01)$ e $\dot{y} = \dot{y}^{(0.01)}$.

8. Obtención de $y(0.02)$ e $\dot{y}^{(0.02)}$ aplicando las expresiones

$$\begin{aligned} \dot{y}^{(0.02)} &= \dot{y}^{(0.01)} + \ddot{y}^{(0.01)} \cdot h \\ y^{(0.02)} &= y^{(0.01)} + \dot{y}^{(0.02)} \cdot h \end{aligned}$$

9. Se toman $y(0.02)$ e $\dot{y}^{(0.02)}$ como condiciones iniciales para el siguiente paso de integración.

10. Cálculo de $\ddot{y}^{(0.02)}$, aplicando la ecuación (21) con $y=y(0.02)$ e $\dot{y} = \dot{y}^{(0.02)}$.

11.

12.

Los pasos de cálculo se irán repitiendo n veces, hasta que el instante de cálculo llegue al valor en el que el usuario desea finalizar el estudio, siendo:

$$t_{final} = n \cdot h \Rightarrow n = \frac{t_{final}}{h}$$

Suponiendo que $t_{final}=10$ s, se tiene:

$$n = \frac{10}{0.01} = 1000$$

Es decir, para calcular el comportamiento del sistema durante 10 segundos, con el paso de integración, h , que se ha escogido se necesitan 1000 pasos de cálculo.

Según esto, cuanto más pequeño sea el paso de integración mayor será el tiempo de cómputo que emplee el ordenador, ya que tendrá que realizar muchos más cálculos. Por tanto, a la hora de escoger el paso de integración conviene buscar una solución de compromiso entre precisión y rapidez de cálculo.

Si el ejemplo planteado se resolviera de forma analítica (sin emplear algoritmos de cálculo numérico), se obtendrían como resultado las expresiones de la aceleración, velocidad y desplazamiento en función del tiempo, las cuales podrían representarse en forma de gráficas. Sin embargo, al aplicar un método numérico para resolver la ecuación diferencial, no se obtienen las curvas de las respuestas, sino su valor para unos instantes concretos de tiempo.

En la figura 15.8 se muestra el resultado que se obtendría al calcular la aceleración de la masa m de forma analítica. En ella puede observarse como existe continuidad en la respuesta.

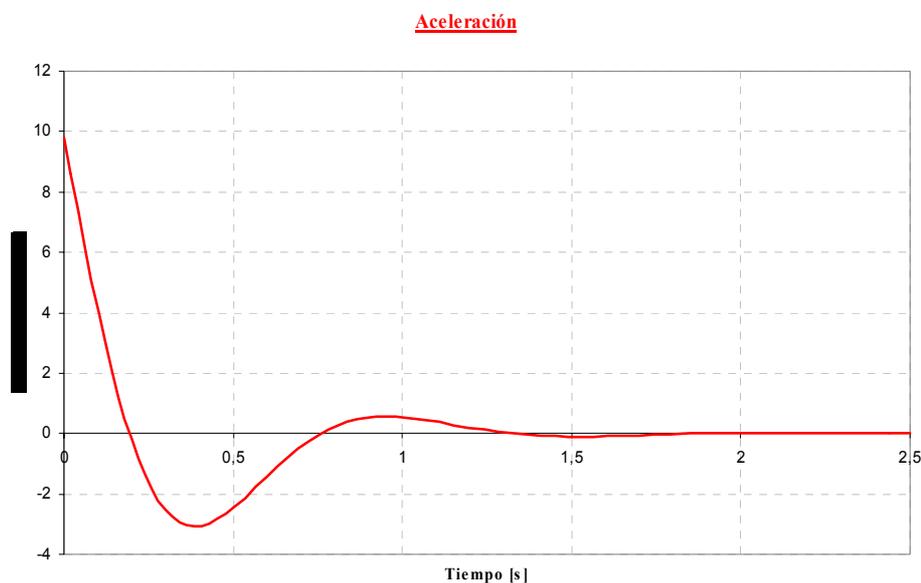


Figura 15.8. Aceleración de la masa m , calculada analíticamente.

Si el sistema se resuelve por ordenador, es necesario emplear un algoritmo de cálculo numérico, y en este caso la respuesta obtenida para la aceleración tendría una representación gráfica como la mostrada en la figura 15.9. Efectivamente, ahora sólo se conoce el valor de la aceleración para determinados instantes de tiempo, en concreto para cada paso de integración.

A la vista de la figura 15.9 puede apreciarse cómo el paso de integración determina los instantes para los cuales se calcula el comportamiento del sistema.

El método de Euler utilizado en la resolución de este ejemplo necesita pasos de integración muy reducidos para evitar que los errores cometidos en la obtención de las respuestas sean demasiado altos. Por este motivo, en los programas de simulación se utilizan métodos más evolucionados que con pasos de integración mayores conducen a resultados más precisos y que, por tanto, requieren un menor tiempo de cálculo por parte del ordenador.

Bastaría que el lector meditara un poco en el proceso de integración del método de Euler, para darse cuenta que los errores que comete son muy importantes. El hecho de haber utilizado aquí el método de Euler se debe simplemente a que es el más sencillo, por lo que se ha escogido para que el

lector se introduzca en el mundo de los métodos numéricos necesario para analizar por ordenador la dinámica de los sistemas mecánicos.

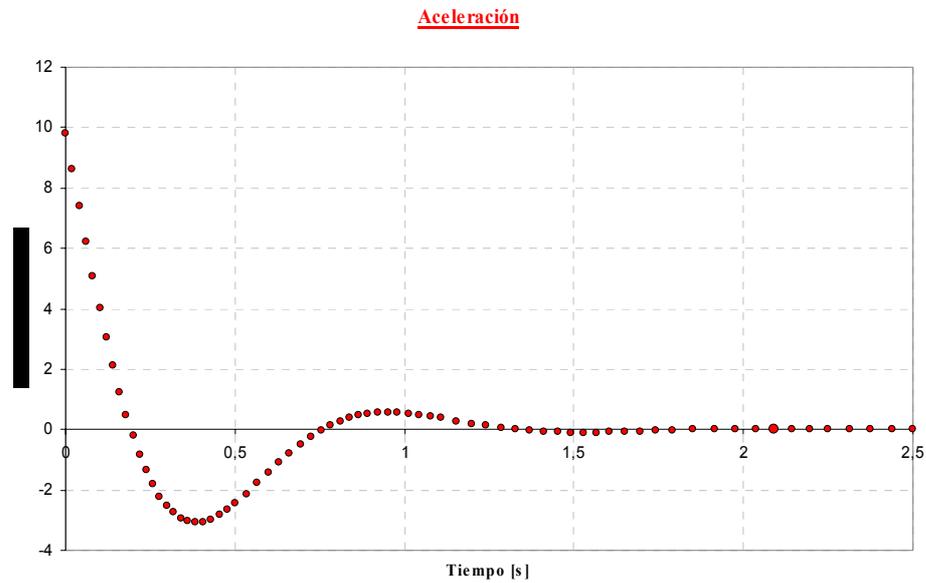


Figura 15.9. Aceleración de la masa m , calculada mediante la utilización de un método numérico.

Una vez simulado por ordenador el comportamiento del sistema, utilizando algún programa desarrollado a tal efecto, se pueden solicitar las diferentes respuestas del modelo.

En la figura 15.10 se muestra la curva que se obtiene cuando se pide la aceleración de la masa suspendida.

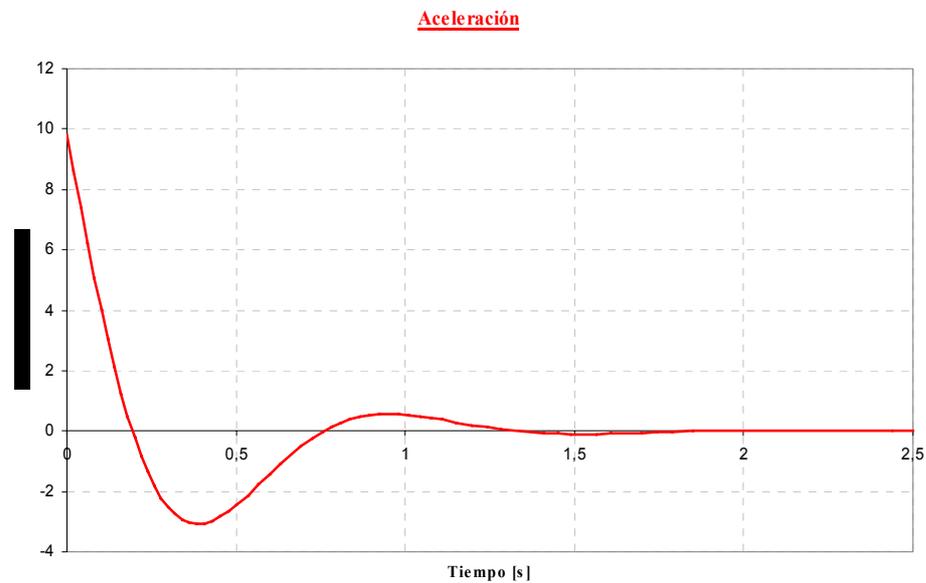


Figura 15.10. Aceleración de la masa suspendida, en m/s^2 .

Lo primero que llama la atención en esta figura es el hecho de que el ordenador presente una respuesta continua, en lugar de una sucesión de puntos, como se señalaba en la figura 15.9. En efecto,

el ordenador utiliza un algoritmo de cálculo numérico para resolver la ecuación diferencial, y en realidad obtiene una sucesión de puntos, tal como se indicaba en el apartado anterior; sin embargo, al mostrar los resultados una mediante líneas el espacio vacío que hay entre ellos. Por este motivo las respuestas que se muestran presentan continuidad.

Además de la aceleración, en la simulación de un sistema mecánico pueden obtenerse también la velocidad y desplazamiento de la masa, así como otras variables del sistema. En el caso concreto del ejemplo que se está estudiando, es importante analizar la carga sobre el suelo, o bien la reacción de este al resorte y al amortiguador.

Una ventaja importante de la simulación por ordenador consiste en que el ingeniero puede ver en la pantalla el movimiento real del sistema. En la figura 15.11 se muestra un esquema del movimiento que se visualizaría.

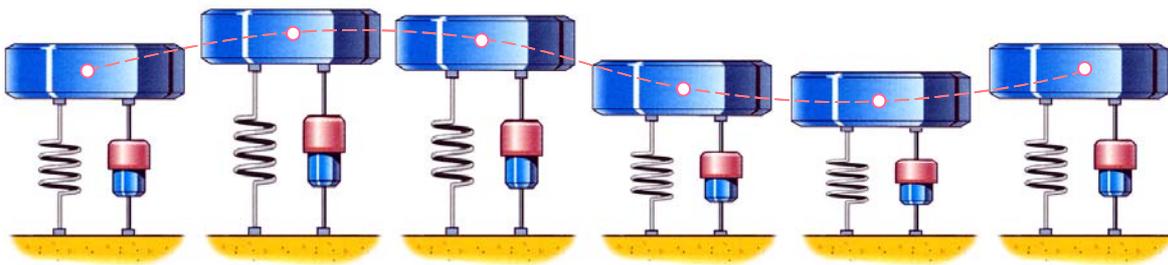


Figura 15.11. Caída y oscilación de la masa hasta que se alcanza la deflexión estática.

Sistema con dos grados de libertad

Otro ejemplo sencillo es el correspondiente a un modelo de dos grados de libertad, como el mostrado en la figura 15.12. Se trata de un sistema formado por dos masas, suspendidas una encima de otra por medio de un conjunto resorte-amortiguador para la masa superior, y solamente con un muelle para la inferior.

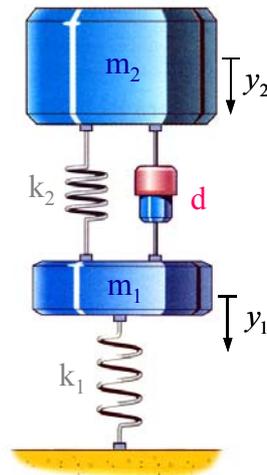


Figura 15.12. modelo de 2 g.d.l.

Para hallar las ecuaciones diferenciales que definen el comportamiento del modelo, basta con plantear sobre cada masa el equilibrio de los esfuerzos aplicados sobre ella. Así, sobre la masa m_2 (figura 15.13) actúan la fuerza del resorte k_2 , la del amortiguador d y el peso propio m_2g .

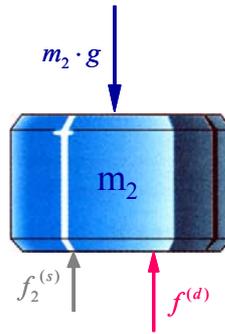


Figura 15.13. Fuerzas que actúan sobre la masa m_2 .

El resorte de rigidez k_2 ejerce una fuerza que depende del acortamiento $(y_2 - y_1)$ entre sus extremos, y por tanto:

$$\text{Fuerza Resorte}_2 = k_2 \cdot (y_2 - y_1)$$

En cuanto se refiere al amortiguador, la fuerza que ejerce depende de su coeficiente de amortiguación, d , y de la velocidad relativa entre sus extremos, $(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)$. Por lo tanto

$$\text{Fuerza Amortiguador} = d \cdot (\dot{y}_2 - \dot{y}_1)$$

Sumando los esfuerzos que actúan sobre la masa m_2 e igualando su resultante al producto de la masa por su aceleración, es decir, aplicando la segunda ley de Newton, se obtiene la ecuación diferencial del movimiento para esta masa:

$$m_2 \cdot \ddot{y}_2 = -k_2 \cdot (y_2 - y_1) - d \cdot (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + m_2 \cdot g$$

Pasando al primer miembro los términos que contienen a las variables, se obtiene:

$$m_2 \cdot \ddot{y}_2 + d \cdot (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k_2 \cdot (y_2 - y_1) = m_2 \cdot g$$

que es la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden que define el movimiento vertical de la masa m_2 .

El mismo planteamiento puede hacerse con la masa m_1 (figura 15.14), sobre la que actúan las fuerzas de los resortes k_2 y k_1 , así como el amortiguador d , y el peso propio $m_1 \cdot g$.

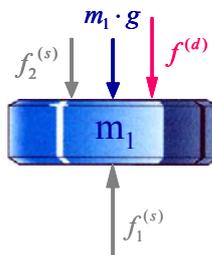


Figura 15.14. Fuerzas que actúan sobre la masa m_1 .

Aplicando a esta masa la segunda ley de Newton se obtiene la ecuación diferencial del movimiento:

$$m_1 \cdot \ddot{y}_1 = k_2 \cdot (y_2 - y_1) + d \cdot (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + m_1 \cdot g - k_1 \cdot y_1$$

o bien, pasando al lado izquierdo los términos que contienen a las variables:

$$m_1 \cdot \ddot{y}_1 - d \cdot (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - k_2 \cdot (y_2 - y_1) + k_1 \cdot y_1 = m_1 \cdot g$$

La simulación de sistemas mecánicos por ordenador no sólo tiene el objeto de resolver las ecuaciones diferenciales del modelo, sino también de plantearlas. Efectivamente, los programas de ordenador desarrollados para la simulación de sistemas mecánicos plantean ellos mismos las ecuaciones diferenciales del sistema que se quiera estudiar, y posteriormente las resuelven y presentan como resultado la evolución de las variables en función del tiempo, e incluso muestran en la pantalla del ordenador una animación del sistema moviéndose.

15.5. DINÁMICA DE SISTEMAS MULTICUERPO CON RESTRICCIONES CINEMÁTICAS

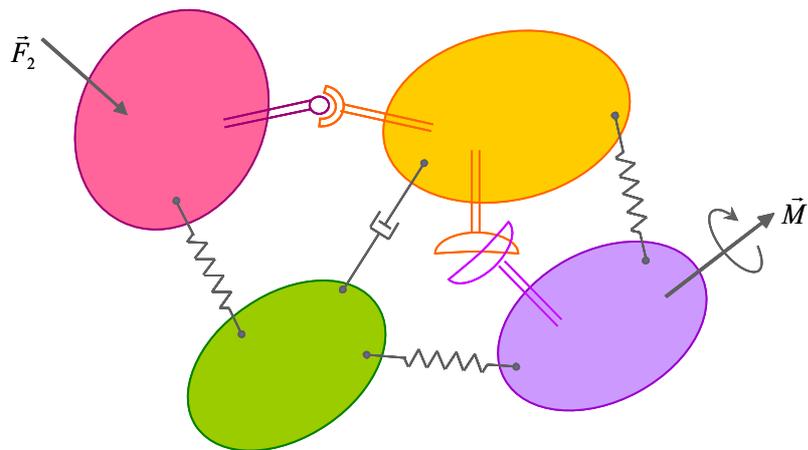


Figura 15.15. Sistema multicuerpo con restricciones cinemáticas.

Diagramas de cuerpo libre

Una de las técnicas analíticas más poderosas de la mecánica consiste en aislar o liberar una porción de un sistema en nuestra imaginación, a fin de estudiar el comportamiento de una de sus partes. Cuando se separa dicha parte, el efecto original del resto del sistema sobre ella se reemplaza por las fuerzas y momentos que actuarían necesariamente en las interfaces de la porción aislada y la eliminada. Y aunque estas fuerzas pueden ser efectos internos ejercidos en todo el sistema, son efectos externos cuando se aplican a la parte aislada. Al subsistema aislado que se produce, junto con todas las fuerzas y momentos atribuibles a efectos externos y a las reacciones con el sistema principal se le denomina diagrama de cuerpo libre.

En el caso de los sistemas multicuerpo, se puede simplificar su análisis dinámico de manera apreciable aislando cada uno de los cuerpos que lo componen, y analizándolos mediante el uso de diagramas de cuerpo libre. Cuando todos los elementos han recibido este tratamiento, pueden reunirse los resultados del análisis realizado para generar información concerniente al comportamiento del sistema total.

Fuerzas de reacción en las juntas

Si en la evolución de un sistema multicuerpo dos elementos contiguos tratan de desplazarse uno respecto a otro en la dirección de alguno de los grados de libertad restringidos por la junta que los une, aparecerán sobre ellos sendas fuerzas de reacción, iguales y de sentido contrario, cuya línea de

acción pasará por la junta y tendrá la misma dirección que el desplazamiento impedido. De igual modo, en el caso de que el movimiento restringido sea un giro, en lugar de dos fuerzas aparecerán dos pares de reacción en la junta.

En consecuencia, en un sistema multicuerpo se producirán tantas fuerzas y pares de reacción como grados de libertad impedidos. Así, por ejemplo, en cada uno de los cuerpos ligados por una junta de revolución plana aparecerá una fuerza de reacción con dos componentes situadas en el plano de la junta, mientras que si este es de traslación las reacciones correspondientes serán una fuerza contenida en el plano de la junta y perpendicular al eje de la misma, y un par perpendicular al citado plano.

Recordemos que, si bien estas reacciones se anulan entre sí dos a dos y no influyen en el valor de la fuerza y par resultantes del sistema multicuerpo, sí afectan al equilibrio dinámico de cada uno de los cuerpos, por lo que deben ser tenidas en cuenta al establecer sus correspondientes ecuaciones de equilibrio.

Ecuaciones del movimiento en dinámica plana

Dado un cuerpo que se mueve en el plano sin ninguna restricción, y por lo tanto con tres grados de libertad, sus dos ecuaciones de traslación y la rotación presentan el siguiente aspecto:

$$\begin{aligned} m_i \ddot{x}_i &= f_{(x)i} \\ m_i \ddot{y}_i &= f_{(y)i} \\ j_{\zeta\zeta} \ddot{\varphi}_i &= n_i \end{aligned}$$

O en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} m & & \\ & m & \\ & & \mu \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} f_{(x)} \\ f_{(y)} \\ n \end{bmatrix}_i$$

Donde, por simplicidad, el momento de inercia polar $j_{\zeta\zeta}$ del cuerpo se denomina μ .

Estas ecuaciones indican que los esfuerzos ejercidos sobre el cuerpo en la dirección x, se gastan en acelerar la masa m_i del cuerpo en esa dirección. Así mismo, los esfuerzos en la dirección y aceleran a la masa m_i del cuerpo en esta misma dirección, y por último los momentos aceleran angularmente al cuerpo.

Las ecuaciones anteriores pueden expresarse también en forma compacta como:

$$M_i \ddot{q}_i = g_i$$

Donde:

$$\begin{aligned} M_i &= \text{diag} [m, m, \mu]_i \\ q_i &= [x, y, \varphi]_i^T \\ g_i &= [f_{(x)}, f_{(y)}, n]_i^T \end{aligned}$$

Para sistemas formados por b cuerpos sin restricciones, las ecuaciones anteriores se repiten b veces, quedando el sistema:

$$M \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{g}$$

Donde:

$$\begin{aligned} M &= \text{diag} [M_1, M_2, \dots, M_b] \\ \mathbf{q} &= [q_1^T, q_2^T, \dots, q_b^T]^T \\ \mathbf{g} &= [\mathbf{g}_1^T, \mathbf{g}_2^T, \dots, \mathbf{g}_b^T]^T \end{aligned}$$

Si el sistema está formado por b cuerpos ligados entre sí, las ecuaciones del movimiento pueden ser escritas como:

$$M \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{g} + \mathbf{g}^{(c)}$$

Donde $\mathbf{g}^{(c)}$ es el vector de las fuerzas de reacción en las ligaduras, que tiene que estar expresado en el mismo sistema de coordenadas que el vector \mathbf{q} . Es conocido que $\mathbf{g}^{(c)}$ puede expresarse como:

$$\mathbf{g}^{(c)} = \Phi_q^T \lambda$$

Donde λ es un vector de multiplicadores, conocido como vector de multiplicadores de Lagrange, y Φ_q^T es la traspuesta de la matriz jacobiana.

Sustituyendo, se tiene como ecuación definitiva:

$$M \ddot{\mathbf{q}} - \Phi_q^T \lambda = \mathbf{g}$$

Que junto con las ecuaciones de restricción

$$\Phi = 0$$

Constituye el sistema de ecuaciones del movimiento para un sistema de cuerpos con restricciones.

Vector de fuerzas

En este apartado se van a estudiar las diferentes fuerzas que pueden constituir el vector \mathbf{g} . Este vector está formado por los vectores de fuerzas que actúan sobre todos los cuerpos del sistema.

$$\mathbf{g} = [\mathbf{g}_1^T, \mathbf{g}_2^T, \dots, \mathbf{g}_b^T]^T$$

Y el vector de fuerzas correspondiente a un elemento i, \mathbf{g}_i , contiene todas las fuerzas y momentos que actúan sobre dicho cuerpo.

$$\mathbf{g}_i = [\mathbf{f}_{(x)}, \mathbf{f}_{(y)}, n]_i^T$$

Fuerza gravitatoria

La figura 15.16 muestra un cuerpo sobre el que está actuando la fuerza de gravedad en la dirección y negativa. Lógicamente, la dirección y sentido sobre los que actúa dicha fuerza dependerán de cuál sea el sistema de referencia global que se haya elegido.

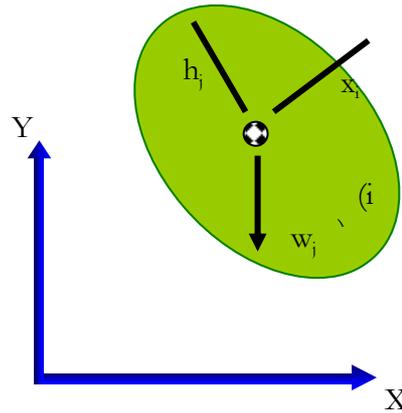


Figura 15.16. Fuerza gravitatoria.

En este caso, si w_i es el peso del elemento i , la contribución de esta fuerza viene representada por el vector:

$$g_i^{(gravidad)} = [0, -w, 0]_i^T$$

Momento de una fuerza

Se considera una fuerza \vec{f}_i que actúa sobre un punto P_i en una dirección conocida (figura 15.17). Esta fuerza tiene dos componentes: $f_{(x)i}$ y $f_{(y)i}$.

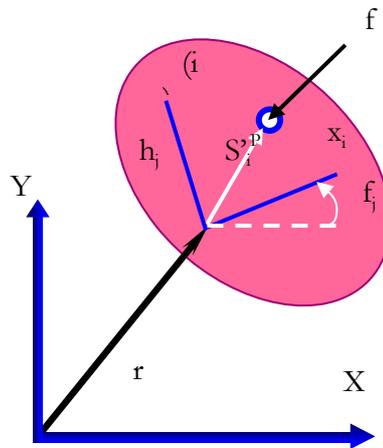


Figura 15.17. Fuerza que genera un momento.

Si se conocen las coordenadas locales de P_i :

$$s_i^P = [\xi^P, \eta^P]_i^T$$

entonces pueden determinarse las componentes del vector:

$$s_i^P = A_i s_i^P$$

y el momento de \vec{f}_i respecto al origen del sistema local ligado al cuerpo i es el producto vectorial de $\vec{s}_i^P \times \vec{f}_i$. Por lo tanto:

$$n_i = \tilde{s}_i^P f_i$$

Y efectuando el producto:

$$\begin{aligned} n_i &= s_{(y)i}^P f_{(x)i} + s_{(x)i}^P f_{(y)i} = \\ &= -(\xi_i^P \text{sen } \varphi_i + \eta_i^P \text{cos } \varphi_i) f_{(x)i} + (\xi_i^P \text{cos } \varphi_i - \eta_i^P \text{sen } \varphi_i) f_{(y)i} \end{aligned}$$

La contribución de la fuerza \vec{f}_i al vector de fuerzas del elemento es:

$$g_i = [f_{(x)}, f_{(y)}, n]_i^T$$

Actuador de traslación

Un actuador proporciona una pareja de fuerzas, constantes o dependientes del tiempo, que actúan sobre dos cuerpos sin imponer ninguna restricción cinemática. Ambas fuerzas tienen la misma línea de acción, pero sentidos opuestos.

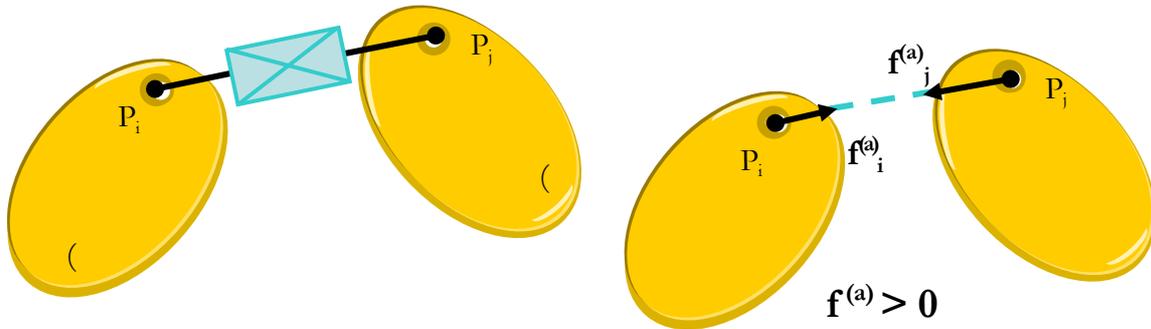


Figura 15.18. Actuador aplicado entre dos cuerpos.

En la figura 15.18. se muestra un actuador que actúa entre los cuerpos i y j , en los puntos de anclaje P_i y P_j .

El vector \vec{l} que conecta los puntos P_i y P_j , tal y como se muestra en la figura 15.19., se define como:

$$l = r_j + A_j s_j^P - r_i - A_i s_i^P$$

La magnitud de este vector es:

$$|l| = (l^T l)^{1/2}$$

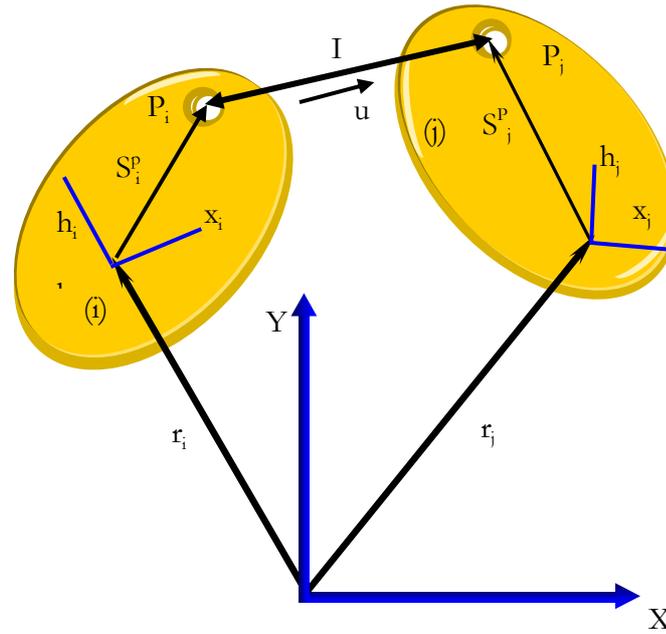


Figura 15.19. Vector unitario en la dirección del actuador.

Para determinar las fuerzas $\vec{f}_i^{(a)}$ y $\vec{f}_j^{(a)}$ aplicadas sobre los elementos i y j , se define un vector unitario \vec{u} tal que:

$$\vec{u} = \frac{l}{|l|}$$

Este vector tiene la misma dirección y sentido que $\vec{f}_i^{(a)}$ en el caso de tracción, y que $\vec{f}_j^{(a)}$ en el de compresión. Por tanto, en base al vector \vec{u} , pueden expresarse las fuerzas ejercidas por el actuador como:

$$\begin{aligned} f_i^{(a)} &= |f^{(a)}| \vec{u} \\ f_j^{(a)} &= -|f^{(a)}| \vec{u} \end{aligned}$$

Resorte

En la figura 15.20 se muestra un resorte situado entre los puntos P_i y P_j de los cuerpos i y j . La fuerza de este resorte viene dada por:

$$f^{(s)} = k(l - l^0)$$

donde k es la rigidez del resorte, l^0 la longitud inicial, y l la longitud después de la deformación.

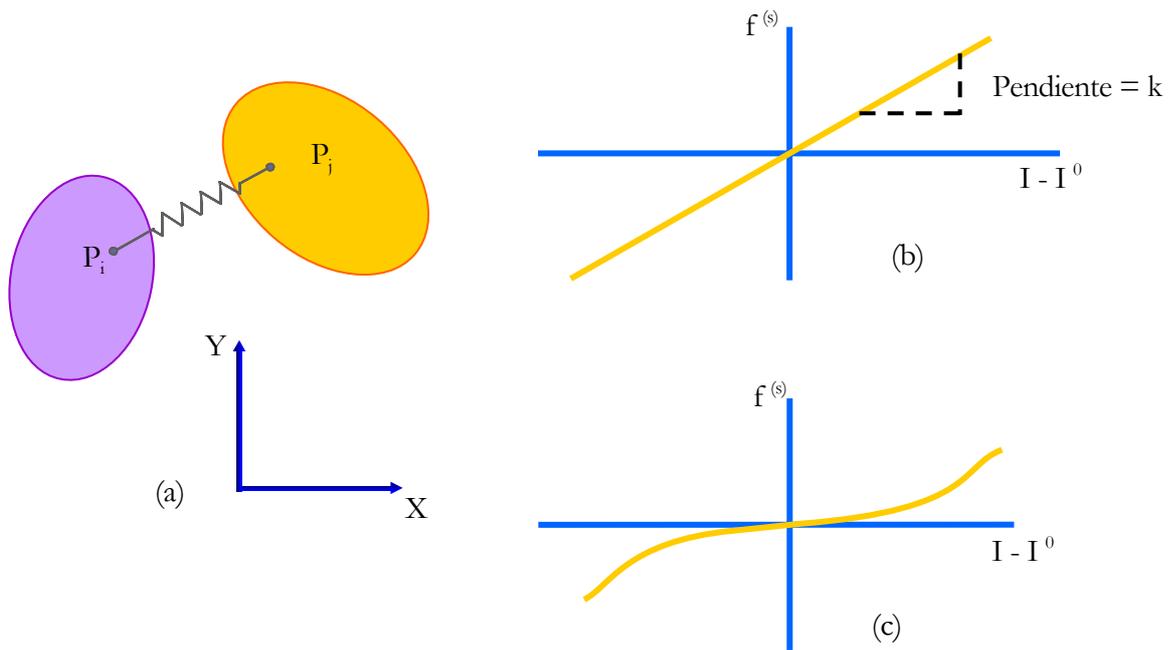


Figura 15.20. (a) Resorte. (b) Comportamiento lineal. (c) Comportamiento no lineal.

Para la fuerza del resorte, se toma como un criterio de signos similar al del actuador (positivo en tracción y negativo en compresión), por lo que las fuerzas que el muelle ejerce sobre los elementos \$i\$ y \$j\$ son:

$$f_i^{(s)} = |f^{(s)}| \mathbf{u}$$

$$f_j^{(s)} = -|f^{(s)}| \mathbf{u}$$

siendo \mathbf{u} un vector unitario definido en la misma dirección y sentido que el vector \mathbf{l} que une \$P_i\$ y \$P_j\$.

Amortiguador

Dado un amortiguador situado entre dos cuerpos \$i\$ y \$j\$, tal como se muestra en la figura 15.21, puede obtenerse la fuerza de este a partir de la ecuación:

$$f^{(d)} = d \dot{l}$$

Donde \$d\$ es el coeficiente de amortiguación y \$\dot{l}\$ es la velocidad de variación de la longitud del amortiguador, \$l\$. Dicha velocidad puede obtenerse derivando respecto al tiempo la ecuación:

$$|l| = (\mathbf{l}^T \mathbf{l})^{1/2}$$

Quedando:

$$\dot{l} = \frac{\mathbf{l}^T \dot{\mathbf{l}}}{|l|}$$

Para calcular el valor de la expresión anterior es preciso conocer el vector \dot{l} , que puede obtenerse sin más que derivar la ecuación:

$$l = r_j + A_j s_j^P - r_i - A_i s_i^P$$

Teniéndose que:

$$\dot{l} = \dot{r}_j + \dot{\phi}_j B_j s_j^P - \dot{r}_i - \dot{\phi}_i B_i s_i^P$$

Siendo:

$$B_k = \begin{bmatrix} -\text{sen } \varphi & -\text{cos } \varphi \\ \text{cos } \varphi & -\text{sen } \varphi \end{bmatrix}_k, \quad \text{,, } k = i, j$$

En cuanto al criterio de signos, la fuerza del amortiguador se considera positiva si $\dot{l} > 0$ y negativa en caso contrario.

Si se define un vector unitario \vec{u} a lo largo del vector \vec{l} que une los puntos P_i y P_j , pueden expresarse las fuerzas que el amortiguador ejerce sobre los cuerpos i y j como:

$$f_i^{(d)} = |f^{(d)}| u$$

$$f_j^{(d)} = -|f^{(d)}| u$$

Fuerzas de reacción debidas a las ligaduras

Las fuerzas de reacción que se producen en las ligaduras pueden expresarse en términos de la matriz jacobiana de las ecuaciones de restricción y del vector de multiplicadores de Lagrange.

$$g^{(c)} = \Phi_q^T \lambda$$

Junta de revolución

Dados dos cuerpos i y j conectados mediante una junta de revolución, tal como se muestra en la figura 15.21., las ecuaciones del movimiento para dichos cuerpos son:

$$M_i \ddot{q}_i - \Phi_{qi}^T \lambda = g_i \tag{a}$$

$$M_j \ddot{q}_j - \Phi_{qj}^T \lambda = g_j \tag{b}$$

Empleando la matriz jacobiana correspondiente a la junta de revolución, puede escribirse la ecuación (a) en forma expandida:

	$\partial / \partial x_i$	$\partial / \partial y_i$	$\partial / \partial \varphi_i$	$\partial / \partial x_j$	$\partial / \partial y_j$	$\partial / \partial \varphi_j$
$\Phi_1^{(r,2)}$	1	0	$-(y_j^P - y_i)$	-1	0	$(y_j^P - y_j)$
$\Phi_2^{(r,2)}$	0	1	$(x_i^P - x_i)$	0	-1	$-(x_j^P - x_j)$

Matriz jacobiana para un par cinemático de revolución.

$$\begin{bmatrix} m & & \\ & m & \\ & & \mu \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix}_i - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -(y_i^P - y_i) & (x_i^P - x_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{(x)} \\ f_{(y)} \\ n \end{bmatrix}_i$$

Como el sistema de ecuaciones de restricción correspondiente a este tipo de junta está formado por dos ecuaciones algebraicas, el vector λ tiene dos componentes.

Las ecuaciones anteriores pueden escribirse también como:

$$\begin{aligned} m_i \ddot{x}_i &= f_{(x)i} + \lambda_1 \\ m_i \ddot{y}_i &= f_{(y)i} + \lambda_2 \\ \mu_i \ddot{\phi}_i &= n_i - (y_i^P - y_i) \lambda_1 + (x_i^P - x_i) \lambda_2 \end{aligned}$$

La ecuación del movimiento para el cuerpo j puede ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} m & & \\ & m & \\ & & \mu \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix}_j - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ (y_j^P - y_j) & -(x_j^P - x_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{(x)} \\ f_{(y)} \\ n \end{bmatrix}_j$$

O bien:

$$\begin{aligned} m_j \ddot{x}_j &= f_{(x)j} - \lambda_1 \\ m_j \ddot{y}_j &= f_{(y)j} - \lambda_2 \\ \mu_j \ddot{\phi}_j &= n_j + (y_j^P - y_j) \lambda_1 - (x_j^P - x_j) \lambda_2 \end{aligned}$$

En la figura 15.21. se muestran dos cuerpos i y j unidos mediante una junta de revolución. Además de las posibles fuerzas $f_{(x)}$ y $f_{(y)}$ existen otras fuerzas λ_1 actuando en la dirección x y λ_2 en la dirección y. Estas fuerzas son las reacciones en la articulación, y actúan tanto en P_i como en P_j .

En el caso del cuerpo i, λ_1 genera un momento negativo de valor $(y_i^P - y_i) \lambda_1$ mientras que λ_2 genera un momento positivo de valor $(x_i^P - x_i) \lambda_2$.

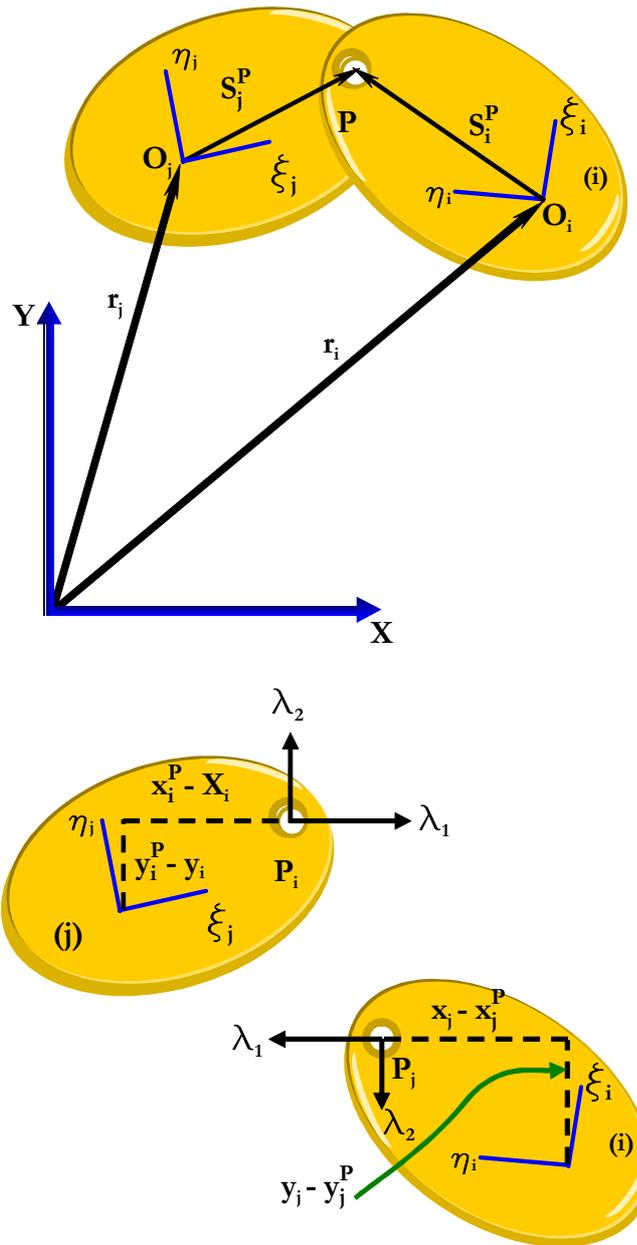


Figura 15.21. Junta de revolución.

Hay que hacer notar que con el planteamiento hecho hasta aquí, un sistema con tres grados de libertad y por lo tanto con tres ecuaciones, tiene cinco variables ya que a los grados de libertad hay que sumarle los dos multiplicadores de Lagrange.

Las otras dos ecuaciones se obtendrán de las relaciones cinemáticas de aceleración.

Para un sistema mecánico sin restricciones, se tenía que las ecuaciones del movimiento eran:

$$M \ddot{q} = g$$

En un sistema mecánico con ligaduras, las ecuaciones de restricción vienen dadas por

$$\Phi = 0$$

Y las correspondientes ecuaciones de velocidad y aceleración son, respectivamente

$$\Phi_q \dot{q} = 0$$

$$\Phi_q \ddot{q} - \gamma = 0$$

Siendo Φ_q la matriz jacobiana de las ecuaciones de restricción respecto del vector de coordenadas \mathbf{q} , y por lo tanto en un sistema de ligaduras las ecuaciones del movimiento serán:

$$M \ddot{q} - \Phi_q^T \lambda = \mathbf{g}$$

$$\Phi_q \ddot{q} - \gamma = 0$$

Que expresadas en forma matricial son:

$$\begin{bmatrix} M & \Phi_q^T \\ \Phi_q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ \gamma \end{bmatrix}$$

Planteamiento de las ecuaciones del movimiento en sistemas multicuerpo con estructura de árbol

Coordenadas cartesianas

Para ver más claramente cómo influyen estas reacciones en el comportamiento dinámico de un sistema multicuerpo, formularemos las ecuaciones del movimiento correspondientes a un péndulo doble, como el representado en la figura 15.22, cuyas ecuaciones cinemáticas obtuvimos ya en el capítulo anterior.

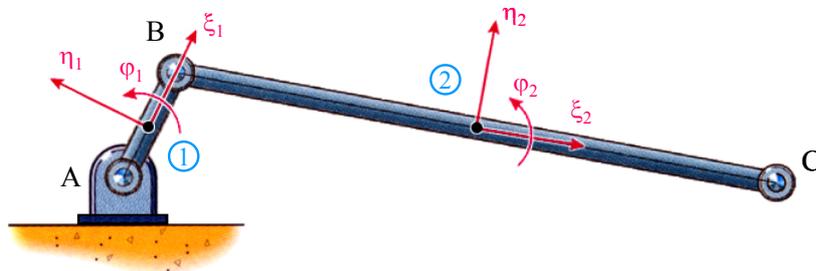


Figura 15.22. Péndulo doble.

Iniciaremos la formulación de las ecuaciones dinámicas aislando cada una de las barras del péndulo, tal como se muestra en la figura 15.23.

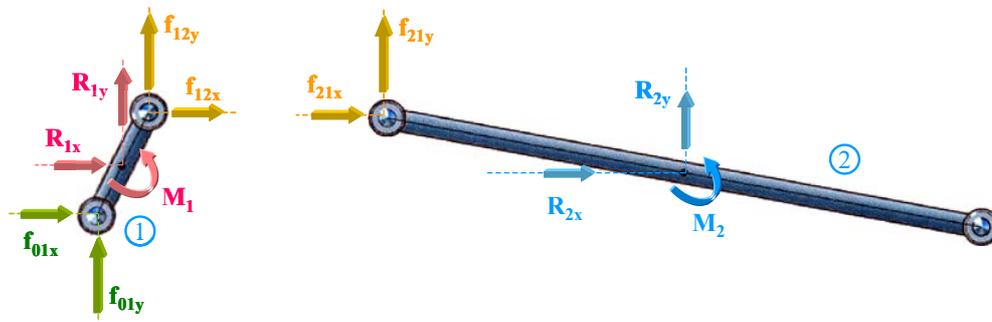


Figura 15.23. Diagramas de cuerpo libre de las barras 1 y 2.

Al plantear las ecuaciones dinámicas de Newton-Euler correspondientes a cada cuerpo, referiremos las ecuaciones del movimiento de giro al centro de gravedad de las barras, por lo que antes de comenzar con la formulación resulta conveniente obtener las expresiones de los momentos de todas las fuerzas respecto a dichos puntos.

El momento resultante en la barra 1 es:

$$M_{1z} + \frac{l_1}{2} \cdot \text{sen } \varphi_1 \cdot f_{01x} - \frac{l_1}{2} \cdot \text{cos } \varphi_1 \cdot f_{01y} - \frac{l_1}{2} \cdot \text{sen } \varphi_1 \cdot f_{12x} + \frac{l_1}{2} \cdot \text{cos } \varphi_1 \cdot f_{12y}$$

Y en la barra 2

$$M_{2z} + \frac{l_2}{2} \cdot \text{sen } \varphi_2 \cdot f_{21x} - \frac{l_2}{2} \cdot \text{cos } \varphi_2 \cdot f_{21y}$$

Según esto, las ecuaciones dinámicas del movimiento pueden expresarse como

$$\left. \begin{aligned} m_1 \cdot \ddot{x}_1 &= R_{1x} + f_{01x} + f_{12x} \\ m_1 \cdot \ddot{y}_1 &= R_{1y} + f_{01y} + f_{12y} \\ I_{1z} \cdot \ddot{\varphi}_1 &= M_{1z} + \frac{l_1}{2} \cdot \text{sen } \varphi_1 \cdot f_{01x} - \frac{l_1}{2} \cdot \text{cos } \varphi_1 \cdot f_{01y} - \frac{l_1}{2} \cdot \text{sen } \varphi_1 \cdot f_{12x} + \frac{l_1}{2} \cdot \text{cos } \varphi_1 \cdot f_{12y} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$$\left. \begin{aligned} m_2 \cdot \ddot{x}_2 &= R_{2x} + f_{21x} \\ m_2 \cdot \ddot{y}_2 &= R_{2y} + f_{21y} \\ I_{2z} \cdot \ddot{\varphi}_2 &= M_{2z} + \frac{l_2}{2} \cdot \text{sen } \varphi_2 \cdot f_{21x} - \frac{l_2}{2} \cdot \text{cos } \varphi_2 \cdot f_{21y} \end{aligned} \right\}$$

Y teniendo en cuenta que, por el principio de acción y reacción,

$$\begin{aligned} f_{21x} &= -f_{12x} \\ f_{21y} &= -f_{12y} \end{aligned}$$

podemos escribir las ecuaciones del cuerpo 2 como

$$\left. \begin{aligned} m_2 \cdot \ddot{x}_2 &= R_{2x} - f_{12x} \\ m_2 \cdot \ddot{y}_2 &= R_{2y} - f_{12y} \\ I_{2z} \cdot \ddot{\varphi}_2 &= M_{2z} - \frac{l_2}{2} \cdot \text{sen } \varphi_2 \cdot f_{12x} + \frac{l_2}{2} \cdot \text{cos } \varphi_2 \cdot f_{12y} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

A las ecuaciones dinámicas (22) y (23) es preciso añadir las ecuaciones de restricción cinemática que definen las limitaciones de movimiento impuestas por las juntas, y que en el caso del péndulo doble, tal como vimos en el capítulo anterior, son

$$\left. \begin{aligned} x_1 - \frac{l_1}{2} \cdot \cos \varphi_1 &= 0 \\ y_1 - \frac{l_1}{2} \cdot \text{sen } \varphi_1 &= 0 \\ x_1 - x_2 + \frac{l_1}{2} \cdot \cos \varphi_1 + \frac{l_2}{2} \cdot \cos \varphi_2 &= 0 \\ y_1 - y_2 + \frac{l_1}{2} \cdot \text{sen } \varphi_1 + \frac{l_2}{2} \cdot \text{sen } \varphi_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Como puede comprobarse, en total tenemos un sistema de 10 ecuaciones algebraico-diferenciales con 10 incógnitas ($x_1, y_1, \varphi_1, x_2, y_2, \varphi_2, f_{01x}, f_{01y}, f_{12x}, f_{12y}$).

La resolución de este sistema proporciona la información suficiente para determinar la posición, velocidad y aceleración de cualquier punto del sistema en cualquier instante de tiempo, así como el valor de las fuerzas de reacción en las juntas.

En sistemas multicuerpo con estructura de árbol, los cuerpos situados en el extremo de las ramas están conectados al resto del sistema por una única junta. Como consecuencia, es posible establecer el equilibrio dinámico de fuerzas para dichos cuerpos y expresar la fuerza y/o par de reacción de dicha junta en función de las fuerzas de inercia, que son proporcionales a la aceleración. Como estas fuerzas y momentos son iguales y de sentido opuesto a los que aparecen en el elemento adyacente, es posible sustituir las expresiones obtenidas, de modo que en sus correspondientes ecuaciones dinámicas sólo aparecerán las reacciones en la otra junta que, nuevamente, podrán expresarse en función de las fuerzas de inercia. De este modo, recorriendo el árbol cinemático desde los extremos de las ramas hacia la raíz podremos eliminar las incógnitas asociadas con las reacciones en las juntas.

Así pues, para el elemento 2 del doble péndulo tendremos:

$$\begin{aligned} m_2 \cdot \ddot{x}_2 &= R_{2x} + f_{21x} \Rightarrow f_{21x} = m_2 \cdot \ddot{x}_2 - R_{2x} \\ m_2 \cdot \ddot{y}_2 &= R_{2y} + f_{21y} \Rightarrow f_{21y} = m_2 \cdot \ddot{y}_2 - R_{2y} \end{aligned}$$

Y como

$$\begin{aligned} f_{21x} &= -f_{12x} \Rightarrow f_{12x} = R_{2x} - m_2 \cdot \ddot{x}_2 \\ f_{21y} &= -f_{12y} \Rightarrow f_{12y} = R_{2y} - m_2 \cdot \ddot{y}_2 \end{aligned} \quad (25)$$

Al sustituir estas expresiones en las dos primeras ecuaciones dinámicas del movimiento correspondientes a la barra 1, quedará:

$$\begin{aligned} m_1 \cdot \ddot{x}_1 &= R_{1x} + f_{01x} + R_{2x} - m_2 \cdot \ddot{x}_2 \\ m_1 \cdot \ddot{y}_1 &= R_{1y} + f_{01y} + R_{2y} - m_2 \cdot \ddot{y}_2 \end{aligned}$$

de donde podemos despejar las fuerzas de reacción en la otra junta:

$$\begin{aligned} f_{01x} &= (m_1 \cdot \ddot{x}_1 + m_2 \cdot \ddot{x}_2) - (R_{1x} + R_{2x}) \\ f_{01y} &= (m_1 \cdot \ddot{y}_1 + m_2 \cdot \ddot{y}_2) - (R_{1y} + R_{2y}) \end{aligned} \quad (26)$$

Sustituyendo las expresiones de estas fuerzas en las ecuaciones dinámicas restantes, que son precisamente las correspondientes al movimiento angular de ambas barras, se llega a:

$$\begin{aligned}
I_{1z} \cdot \ddot{\varphi}_1 &= M_{1z} + \frac{l_1}{2} \cdot \text{sen } \varphi_1 \cdot [(m_1 \cdot \ddot{x}_1 + m_2 \cdot \ddot{x}_2) - (R_{1x} + R_{2x})] - \\
&\quad - \frac{l_1}{2} \cdot \text{cos } \varphi_1 \cdot [(m_1 \cdot \ddot{y}_1 + m_2 \cdot \ddot{y}_2) - (R_{1y} + R_{2y})] - \\
&\quad - \frac{l_1}{2} \cdot \text{sen } \varphi_1 \cdot (R_{2x} - m_2 \cdot \ddot{x}_2) + \frac{l_1}{2} \cdot \text{cos } \varphi_1 \cdot (R_{2y} - m_2 \cdot \ddot{y}_2)
\end{aligned}$$

$$I_{2z} \cdot \ddot{\varphi}_2 = M_{2z} - \frac{l_2}{2} \cdot \text{sen } \varphi_2 \cdot (R_{2x} - m_2 \cdot \ddot{x}_2) + \frac{l_2}{2} \cdot \text{cos } \varphi_2 \cdot (R_{2y} - m_2 \cdot \ddot{y}_2)$$

Simplificando, queda:

$$\begin{aligned}
I_{1z} \cdot \ddot{\varphi}_1 &= M_{1z} + \frac{l_1}{2} \cdot \text{sen } \varphi_1 \cdot [(m_1 \cdot \ddot{x}_1 + 2m_2 \cdot \ddot{x}_2) - (R_{1x} + 2R_{2x})] - \\
&\quad - \frac{l_1}{2} \cdot \text{cos } \varphi_1 \cdot [(m_1 \cdot \ddot{y}_1 + 2m_2 \cdot \ddot{y}_2) - (R_{1y} + 2R_{2y})] \\
I_{2z} \cdot \ddot{\varphi}_2 &= M_{2z} - \frac{l_2}{2} \cdot \text{sen } \varphi_2 \cdot (R_{2x} - m_2 \cdot \ddot{x}_2) + \frac{l_2}{2} \cdot \text{cos } \varphi_2 \cdot (R_{2y} - m_2 \cdot \ddot{y}_2)
\end{aligned}$$

Y el sistema de ecuaciones del movimiento, tras haber eliminado las fuerzas de reacción en las juntas, queda reducido a:

$$\left. \begin{aligned}
I_{1z} \cdot \ddot{\varphi}_1 - \frac{l_1}{2} \cdot \text{sen } \varphi_1 \cdot (m_1 \cdot \ddot{x}_1 + 2m_2 \cdot \ddot{x}_2) + \frac{l_1}{2} \cdot \text{cos } \varphi_1 \cdot (m_1 \cdot \ddot{y}_1 + 2m_2 \cdot \ddot{y}_2) &= \\
= M_{1z} - \frac{l_1}{2} \cdot \text{sen } \varphi_1 \cdot (R_{1x} + 2R_{2x}) + \frac{l_1}{2} \cdot \text{cos } \varphi_1 \cdot (R_{1y} + 2R_{2y}) & \\
I_{2z} \cdot \ddot{\varphi}_2 - \frac{l_2}{2} \cdot \text{sen } \varphi_2 \cdot (m_2 \cdot \ddot{x}_2) + \frac{l_2}{2} \cdot \text{cos } \varphi_2 \cdot (m_2 \cdot \ddot{y}_2) &= \\
= M_{2z} - \frac{l_2}{2} \cdot \text{sen } \varphi_2 \cdot R_{2x} + \frac{l_2}{2} \cdot \text{cos } \varphi_2 \cdot R_{2y} & \\
x_1 - \frac{l_1}{2} \cdot \text{cos } \varphi_1 &= 0 \\
y_1 - \frac{l_1}{2} \cdot \text{sen } \varphi_1 &= 0 \\
x_1 - x_2 + \frac{l_1}{2} \cdot \text{cos } \varphi_1 + \frac{l_2}{2} \cdot \text{cos } \varphi_2 &= 0 \\
y_1 - y_2 + \frac{l_1}{2} \cdot \text{sen } \varphi_1 + \frac{l_2}{2} \cdot \text{sen } \varphi_2 &= 0
\end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Ahora tenemos un sistema formado por 6 ecuaciones algebraico-diferenciales con 6 incógnitas $(x_1, y_1, \varphi_1, x_2, y_2, \varphi_2)$, frente a las 10 que teníamos antes.

Sin embargo, para realizar de forma sistemática la eliminación de fuerzas de restricción como incógnitas del problema, es preciso tener en cuenta la topología del sistema multicuerpo que se esté analizando. En general, los programas de análisis dinámico basados en coordenadas cartesianas no requieren este tipo de información, por lo que no suele llevarse a cabo este tipo de eliminación de variables, dando lugar a sistemas de ecuaciones de mayor tamaño, pero más sencillos de formular.

No obstante, podremos considerar la eliminación de las fuerzas de reacción como un paso intermedio para la formulación de las ecuaciones dinámicas del movimiento en coordenadas relativas, ya que las herramientas de simulación basadas en este tipo de coordenadas sí que necesitan almacenar la información referente a la topología del sistema.

Coordenadas relativas

Partiremos de las ecuaciones diferenciales obtenidas en el apartado anterior, y haremos uso de las relaciones existentes entre las coordenadas globales y relativas para este modelo.

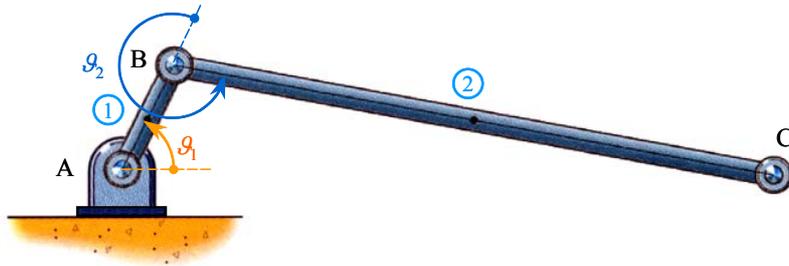


Figura 15.24. Coordenadas relativas que definen la posición del péndulo doble.

A la vista de la figura 15.25, podremos establecer las relaciones existentes entre las coordenadas cartesianas que definen la posición de la barra 1 y las correspondientes coordenadas relativas.

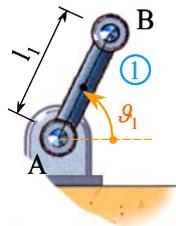


Figura 15.25. Barra 1.

$$\vec{r}_1 = \frac{\overline{AB}}{2} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} l_1 \cdot \cos \vartheta_1 \\ l_1 \cdot \text{sen } \vartheta_1 \end{bmatrix} \\ \varphi_1 &= \vartheta_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{l_1}{2} \cdot \cos \vartheta_1 \\ y_1 &= \frac{l_1}{2} \cdot \text{sen } \vartheta_1 \\ \varphi_1 &= \vartheta_1 \end{aligned} \right\} (28)$$

De igual modo, a partir de la figura 15.26 pueden deducirse las relaciones correspondientes a las coordenadas cartesianas que posicionan la barra 2.

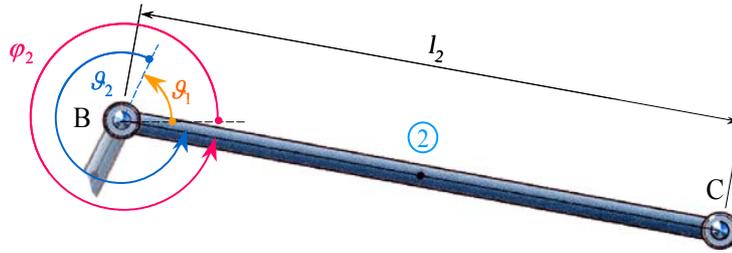


Figura 15.26. Barra 2.

$$\vec{r}_2 = \overline{AB} + \frac{BC}{2} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cdot \cos \vartheta_1 \\ l_1 \cdot \text{sen } \vartheta_1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} l_2 \cdot \cos \varphi_2 \\ l_2 \cdot \text{sen } \varphi_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\varphi_2 = \vartheta_1 + \vartheta_2$$

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= l_1 \cdot \cos \vartheta_1 + \frac{l_2}{2} \cdot \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) \\ \Rightarrow y_2 &= l_1 \cdot \text{sen } \vartheta_1 + \frac{l_2}{2} \cdot \text{sen}(\vartheta_1 + \vartheta_2) \\ \varphi_2 &= \vartheta_1 + \vartheta_2 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Derivando estas expresiones respecto al tiempo,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{l_1}{2} \cdot \dot{\vartheta}_1 \cdot \text{sen } \vartheta_1 \\ \dot{y}_1 &= \frac{l_1}{2} \cdot \dot{\vartheta}_1 \cdot \cos \vartheta_1 \\ \dot{\varphi}_1 &= \dot{\vartheta}_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\frac{l_1}{2} \cdot \ddot{\vartheta}_1 \cdot \text{sen } \vartheta_1 - \frac{l_1}{2} \cdot \dot{\vartheta}_1^2 \cdot \cos \vartheta_1 \\ \ddot{y}_1 &= \frac{l_1}{2} \cdot \ddot{\vartheta}_1 \cdot \cos \vartheta_1 - \frac{l_1}{2} \cdot \dot{\vartheta}_1^2 \cdot \text{sen } \vartheta_1 \\ \ddot{\varphi}_1 &= \ddot{\vartheta}_1 \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= -l_1 \cdot \dot{\vartheta}_1 \cdot \text{sen } \vartheta_1 - \frac{l_2}{2} \cdot (\dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2) \cdot \text{sen}(\vartheta_1 + \vartheta_2) \\ \dot{y}_2 &= l_1 \cdot \dot{\vartheta}_1 \cdot \cos \vartheta_1 + \frac{l_2}{2} \cdot (\dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2) \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) \\ \dot{\varphi}_2 &= \dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_2 &= -l_1 \cdot \ddot{\vartheta}_1 \cdot \text{sen } \vartheta_1 - l_1 \cdot \dot{\vartheta}_1^2 \cdot \text{cos } \vartheta_1 - \frac{l_2}{2} \cdot (\ddot{\vartheta}_1 + \ddot{\vartheta}_2) \cdot \text{sen}(\vartheta_1 + \vartheta_2) - \frac{l_2}{2} \cdot (\dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2)^2 \cdot \text{cos}(\vartheta_1 + \vartheta_2) \\
\ddot{y}_2 &= l_1 \cdot \ddot{\vartheta}_1 \cdot \text{cos } \vartheta_1 - l_1 \cdot \dot{\vartheta}_1^2 \cdot \text{sen } \vartheta_1 + \frac{l_2}{2} \cdot (\ddot{\vartheta}_1 + \ddot{\vartheta}_2) \text{cos}(\vartheta_1 + \vartheta_2) - \frac{l_2}{2} \cdot (\dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2)^2 \text{sen}(\vartheta_1 + \vartheta_2) \\
\ddot{\varphi}_2 &= \ddot{\vartheta}_1 + \ddot{\vartheta}_2
\end{aligned} \quad (31)$$

Recordemos que las ecuaciones dinámicas de ambos cuerpos habían quedado reducidas a las expresiones,

$$\left. \begin{aligned}
I_{1z} \cdot \ddot{\varphi}_1 - \frac{l_1}{2} \cdot \text{sen } \varphi_1 \cdot (m_1 \cdot \ddot{x}_1 + 2m_2 \cdot \ddot{x}_2) + \frac{l_1}{2} \cdot \text{cos } \varphi_1 \cdot (m_1 \cdot \ddot{y}_1 + 2m_2 \cdot \ddot{y}_2) &= \\
= M_{1z} - \frac{l_1}{2} \cdot \text{sen } \varphi_1 \cdot (R_{1x} + 2R_{2x}) + \frac{l_1}{2} \cdot \text{cos } \varphi_1 \cdot (R_{1y} + 2R_{2y}) & \\
I_{2z} \cdot \ddot{\varphi}_2 - \frac{l_2}{2} \cdot \text{sen } \varphi_2 \cdot (m_2 \cdot \ddot{x}_2) + \frac{l_2}{2} \cdot \text{cos } \varphi_2 \cdot (m_2 \cdot \ddot{y}_2) &= \\
= M_{2z} - \frac{l_2}{2} \cdot \text{sen } \varphi_2 \cdot R_{2x} + \frac{l_2}{2} \cdot \text{cos } \varphi_2 \cdot R_{2y} &
\end{aligned} \right\}$$

Finalmente, al sustituir en estas ecuaciones las igualdades (28), (29), (30) y (31), que relacionan las variables $\varphi_1, \varphi_2, \ddot{x}_1, \ddot{y}_1, \ddot{\varphi}_1, \ddot{x}_2, \ddot{y}_2, \ddot{\varphi}_2$ con $\vartheta_1, \vartheta_2, \dot{\vartheta}_1, \dot{\vartheta}_2, \ddot{\vartheta}_1, \ddot{\vartheta}_2$, obtendremos dos ecuaciones de la forma:

$$\left. \begin{aligned}
f_1(\vartheta_1, \vartheta_2, \dot{\vartheta}_1, \dot{\vartheta}_2, \ddot{\vartheta}_1, \ddot{\vartheta}_2) &= 0 \\
f_2(\vartheta_1, \vartheta_2, \dot{\vartheta}_1, \dot{\vartheta}_2, \ddot{\vartheta}_1, \ddot{\vartheta}_2) &= 0
\end{aligned} \right\} \quad (32)$$

que constituyen un sistema de 2 ecuaciones diferenciales puras con dos incógnitas (ϑ_1, ϑ_2). Nótese que en esta ocasión no es preciso añadir ninguna ecuación algebraica, ya que las dos variables del problema, ϑ_1 y ϑ_2 , son independientes, por lo que no existe ninguna restricción geométrica que las relacione entre sí.

A la vista de las ecuaciones puede apreciarse que, si bien la expresión de las ecuaciones es más complicada, su número se ha reducido considerablemente, pasando de 10 a tan sólo 2. Además, al no existir relaciones cinemáticas de restricción, el sistema no tiene ninguna ecuación algebraica. Esto permite resolverlo mediante métodos numéricos propios de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, que están más desarrollados y son más eficientes que los correspondientes a ecuaciones algebraico-diferenciales. Todo ello hace que la eficiencia numérica sea considerablemente superior al trabajar con coordenadas relativas, lo que reduce de manera notable los tiempos de cálculo, tanto más cuanto mayor sea la complejidad del sistema multicuerpo que se esté estudiando.

Si revisamos el proceso seguido para la formulación de las ecuaciones del movimiento, observaremos que partimos de las ecuaciones dinámicas correspondientes a cada uno de los cuerpos del sistema que, en coordenadas cartesianas, dan lugar a tantas ecuaciones escalares como el número de grados de libertad de todos esos cuerpos, considerados como sólidos libres. A continuación eliminamos del sistema todas las fuerzas de restricción que, como ya apuntamos, tienen tantas componentes cartesianas como grados de libertad restringidos por las juntas, por lo que el número de ecuaciones eliminadas coincide con el de variables dependientes que aparecen en la formulación inicial. De este modo, el número total de ecuaciones diferenciales es igual al de variables independientes del problema, que es independiente del tipo de coordenadas utilizado, dado que coincide siempre con el número total de grados de libertad del sistema multicuerpo.

En el caso de seguir trabajando con coordenadas cartesianas, es preciso añadir a las ecuaciones diferenciales las ecuaciones de restricción geométrica, cuyo número es igual a los grados de libertad restringidos por las juntas, lo que iguala el número de ecuaciones con el número de incógnitas.

Por el contrario, al trabajar con coordenadas relativas, todas las variables que definen la posición de un sistema multicuerpo con estructura de árbol son independientes, por lo que no existe ninguna relación geométrica entre ellas, y no es preciso añadir ninguna ecuación algebraica adicional.

De todo esto se deduce que el comportamiento dinámico de los sistemas multicuerpo con estructura de árbol queda caracterizado por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden cuyo número es igual al de grados de libertad del sistema e igual también, como es lógico, al número de variables utilizadas para definir la posición del sistema.

Planteamiento de las ecuaciones del movimiento en sistemas multicuerpo con cadenas cinemáticas cerradas

Coordenadas cartesianas

Cuando se trabaja con coordenadas cartesianas, la formulación de las ecuaciones dinámicas del movimiento para sistemas multicuerpo con cadenas cerradas no difiere en nada de lo anteriormente explicado, ya que es totalmente independiente de la topología del sistema que se esté analizando.

Coordenadas relativas

En el caso de utilizar coordenadas relativas, ya no resulta posible eliminar de la formulación las fuerzas de restricción en la forma que se hizo antes, puesto que ninguno de los eslabones que forman el bucle cerrado está unido al resto por una única junta.

Existen diversas técnicas que permiten salvar este inconveniente. Una de las más utilizadas consiste en “abrir” todos los lazos cinemáticos del sistema multicuerpo mediante la “eliminación” de una cualquiera de sus juntas. De este modo, el sistema pasa a tener estructura de árbol, y puede formularse las ecuaciones dinámicas del movimiento en la forma que ya indicamos en el apartado anterior.

Sin embargo, las ecuaciones así obtenidas no responden al comportamiento real del sistema, puesto que no satisfacen las restricciones de movimiento impuestas por las juntas que se han “eliminado”. Para subsanar este problema, volveremos a “cerrar” las cadenas cinemáticas, sin más que imponer el cumplimiento de las correspondientes restricciones geométricas mediante la incorporación de sendas ecuaciones de restricción geométricas, iguales en número a los grados de libertad impedidos por las juntas de cierre.

En consecuencia, existirán tantas ecuaciones diferenciales como grados totales de libertad correspondientes al sistema “abierto”, y tantas ecuaciones algebraicas como grados de libertad restringidos por las juntas de “cierre”, de lo que se deduce que el número total de ecuaciones podrá variar en función de la junta que se escoja para “abrir” el sistema.

Según esto, una junta que permite n grados de libertad, contribuirá con n ecuaciones diferenciales de segundo orden si no es elegida como junta de “cierre”, y con $(6-n)$ ecuaciones algebraicas en caso de serlo. En consecuencia, conviene escoger como junta de “cierre” aquella que permita mayor número de grados de libertad de movimiento relativo, ya que se evitará la formulación de sus correspondientes ecuaciones diferenciales, y el número de ecuaciones algebraicas será menor que el correspondiente a cualquier otra junta.

15.6. OBTENCIÓN DEL NÚMERO MÍNIMO DE ECUACIONES

Se ha visto que el conjunto de ecuaciones dinámicas que definen el movimiento de un sistema mecánico con restricciones con n coordenadas, m grados de libertad y $n-m$ ecuaciones de restricción, responde a las ecuaciones siguientes:

$$M \ddot{q} - \Phi_q^T \lambda = g \quad (33)$$

$$\Phi = 0 \quad (34)$$

$$\Phi_q \dot{q} = 0 \quad (35)$$

$$\Phi_q \ddot{q} - \gamma = 0 \quad (36)$$

El conjunto \dot{q} de n velocidades, puede descomponerse en dos subconjuntos \dot{q}_I y \dot{q}_D respectivamente de m velocidades independientes, asociadas a los grados de libertad y de $n-m$ velocidades dependientes, de forma que:

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_I \\ \dot{q}_D \end{bmatrix} \quad (37)$$

Por lo tanto, la ecuación (34) se transforma en :

$$\Phi_q \begin{bmatrix} \dot{q}_I \\ \dot{q}_D \end{bmatrix} = 0 \quad (38)$$

es decir, el conjunto de n velocidades \dot{q} puede expresarse como una combinación lineal de las n velocidades independientes \dot{q}_I de la forma siguiente:

$$\dot{q} = S \dot{q}_I \quad (39)$$

Derivando (39) se tiene:

$$\ddot{q} = S \ddot{q}_I + \dot{S} \dot{q}_I \quad (40)$$

Sustituyendo (40) en (33) y (39) en (35) se tiene:

$$M (S \ddot{q}_I + \dot{S} \dot{q}_I) - \Phi_q^T \lambda = g \quad (41)$$

$$\Phi_q S \dot{q}_I = 0 \quad (42)$$

como \dot{q}_I es el conjunto de velocidades independientes, $\dot{q}_I \neq 0$, por lo que:

$$\Phi_q S = 0 \quad (43)$$

$$S^T \Phi_q^T = 0 \quad (44)$$

Premultiplicando (41) por S^T se tiene:

$$S^T M S \ddot{q}_I + S^T M \dot{S} \dot{q}_I - S^T \Phi_q^T \lambda = S^T g \quad (45)$$

y dado que $S^T \Phi_q^T = 0$, se tiene:

$$S^T M S \ddot{q}_1 + S^T M \dot{S} \dot{q}_1 = S^T g$$

$$S^T M S \ddot{q}_1 = S^T g - S^T M \dot{S} \dot{q}_1 \quad (46)$$

Si $\dot{S} = 0$, se tiene:

$$S^T M S \ddot{q}_1 = S^T g \quad (47)$$

La formulación anterior es válida para mecanismos de cadena abierta.

Para mecanismos de cadena cerrada se debe proceder como aparece en el ejemplo 2 siguiente.

Ejemplo 1. Péndulo simple

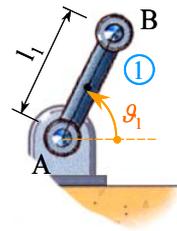


Figura 15.27. Péndulo simple.

$$\vec{r}_A = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & -\text{sen } \varphi_1 \\ \text{sen } \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} l_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - \frac{1}{2} l_1 \cos \varphi_1 \\ y_1 - \frac{1}{2} l_1 \sin \varphi_1 \end{bmatrix}$$

Ecuaciones de restricción:

$$\vec{r}_A = 0$$

$$\phi_1 = x_1 - \frac{1}{2} l_1 \cos \varphi_1 = 0$$

$$\phi_2 = y_1 - \frac{1}{2} l_1 \sin \varphi_1 = 0$$

Derivando, para obtener la matriz jacobiana:

$$\dot{\phi}_1 = \dot{x}_1 + \dot{\varphi}_1 \frac{1}{2} l_1 \sin \varphi_1 = 0$$

$$\dot{\phi}_2 = \dot{y}_1 - \dot{\varphi}_1 \frac{1}{2} l_1 \cos \varphi_1 = 0$$

de donde:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} l_1 \sin \varphi_1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} l_1 \cos \varphi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{\varphi}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y:

$$\Phi_q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2}l_1 \sin \varphi_1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}l_1 \cos \varphi_1 \end{bmatrix}$$

Si se elige $\dot{\varphi}_1$ como velocidad independiente se tiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{\varphi}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}l_1 \sin \varphi_1 \\ \frac{1}{2}l_1 \cos \varphi_1 \\ 1 \end{bmatrix} [\dot{\varphi}_1] \quad S = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}l_1 \sin \varphi_1 \\ \frac{1}{2}l_1 \cos \varphi_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si escribimos las ecuaciones dinámicas:

$$\begin{bmatrix} m & & \\ & m & \\ & & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{\varphi}_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{2}l_1 \sin \varphi_1 & -\frac{1}{2}l_1 \cos \varphi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{bmatrix}$$

Premultiplicando por S^T :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}l_1 \sin \varphi_1 & \frac{1}{2}l_1 \cos \varphi_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & & \\ & m & \\ & & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{\varphi}_1 \end{bmatrix} - \\ & \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}l_1 \sin \varphi_1 & \frac{1}{2}l_1 \cos \varphi_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{2}l_1 \sin \varphi_1 & -\frac{1}{2}l_1 \cos \varphi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}l_1 \sin \varphi_1 & \frac{1}{2}l_1 \cos \varphi_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}l_1 \sin \varphi_1 m & \frac{1}{2}l_1 \cos \varphi_1 m & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{\varphi}_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}mgl_1 \cos \varphi_1 \end{bmatrix}$$

Derivando:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{\varphi}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}l_1 \sin \varphi_1 \\ \frac{1}{2}l_1 \cos \varphi_1 \\ 1 \end{bmatrix} [\dot{\varphi}_1] \quad \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{\varphi}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}l_1 \sin \varphi_1 \\ \frac{1}{2}l_1 \cos \varphi_1 \\ 1 \end{bmatrix} [\ddot{\varphi}_1] + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}l_1 \cos \varphi_1 \\ -\frac{1}{2}l_1 \sin \varphi_1 \\ 0 \end{bmatrix} [\dot{\varphi}_1^2]$$

Por lo que:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}ml_1 \sin \varphi_1 & \frac{1}{2}ml_1 \cos \varphi_1 & J \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}l_1 \sin \varphi_1 \\ \frac{1}{2}l_1 \cos \varphi_1 \\ 1 \end{bmatrix} [\ddot{\varphi}_1] + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}l_1 \cos \varphi_1 \\ -\frac{1}{2}l_1 \sin \varphi_1 \\ 0 \end{bmatrix} [\dot{\varphi}_1^2] \right\} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}mgl_1 \cos \varphi_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{1}{2}l_1 \sin \varphi_1\right)^2 m + \left(\frac{1}{2}l_1 \cos \varphi_1\right)^2 m + J \right] [\ddot{\varphi}_1] + \\ & + \left[\left(-\frac{1}{2}ml_1 \sin \varphi_1\right)\left(-\frac{1}{2}l_1 \cos \varphi_1\right) + \left(\frac{1}{2}l_1 \cos \varphi_1\right)\left(-\frac{1}{2}ml_1 \sin \varphi_1\right) \right] [\dot{\varphi}_1^2] = \\ & = -\frac{1}{2}mgl_1 \cos \varphi_1 \end{aligned}$$

$$\left[\frac{1}{4}ml_1^2 + J \right] \ddot{\varphi}_1 = -\frac{1}{2}mgl_1 \cos \varphi_1$$

Ejemplo 2. Mecanismo Biela-Manivela

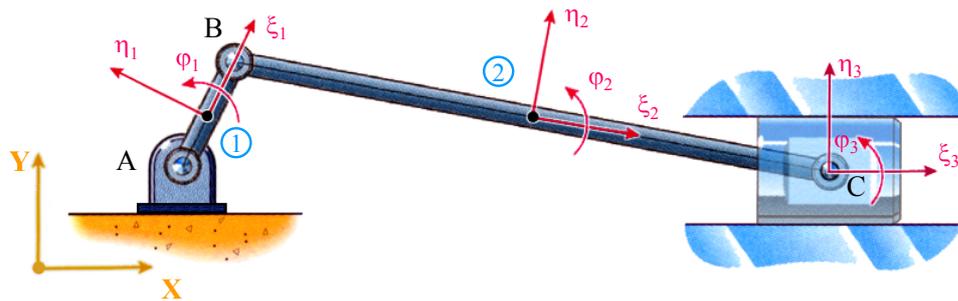


Figura 15.28. Mecanismo Biela-Manivela.

Según se vio en el ejemplo 2 del capítulo 11, se tendrán las siguientes ecuaciones de restricción:
Planteamiento de las ecuaciones de restricción simples

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &\equiv x_1 = 0 \\ \Phi_2 &\equiv y_1 = 0 \\ \Phi_3 &\equiv \varphi_1 = 0 \end{aligned} \right\}$$

Planteamiento de las ecuaciones de restricción correspondientes a cada junta

$$\left. \begin{aligned} \Phi_4 &\equiv x_1 - x_2 + \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2 = 0 \\ \Phi_5 &\equiv y_1 - y_2 + \frac{l_2}{2} \sen \varphi_2 = 0 \end{aligned} \right\} \text{ Junta n.º 1.}$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi_6 &\equiv (x_4 - x_1) \sen \varphi_1 - (y_4 - y_1) \cos \varphi_1 = 0 \\ \Phi_7 &\equiv \varphi_1 - \varphi_4 = 0 \end{aligned} \right\} \text{ Junta n.º 2.}$$

$$\square \text{ Junta n.}^\circ 3. \left. \begin{array}{l} \Phi_8 \equiv x_2 + \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2 - x_3 + \frac{l_3}{2} \cos \varphi_3 = 0 \\ \Phi_9 \equiv y_2 + \frac{l_2}{2} \operatorname{sen} \varphi_2 - y_3 + \frac{l_3}{2} \operatorname{sen} \varphi_3 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\square \text{ Junta n.}^\circ 4. \left. \begin{array}{l} \Phi_{10} \equiv x_3 + \frac{l_3}{2} \cos \varphi_3 - x_4 = 0 \\ \Phi_{11} \equiv y_3 + \frac{l_3}{2} \operatorname{sen} \varphi_3 - y_4 = 0 \end{array} \right\}$$

Sustituyendo los valores de las restricciones simples, se tiene:

$$\Phi_1 \equiv x_1 = 0$$

$$\Phi_2 \equiv y_1 = 0$$

$$\Phi_3 \equiv \varphi_1 = 0$$

$$\Phi_4 \equiv x_1 - x_2 + \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2 = 0$$

$$\Phi_5 \equiv y_1 - y_2 + \frac{l_2}{2} \operatorname{sen} \varphi_2 = 0$$

$$\Phi_6 \equiv (x_4 - x_1) \operatorname{sen} \varphi_1 - (y_4 - y_1) \cos \varphi_1 = 0$$

$$\Phi_7 \equiv \varphi_1 - \varphi_4 = 0$$

$$\Phi_8 \equiv x_2 + \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2 - x_3 + \frac{l_3}{2} \cos \varphi_3 = 0$$

$$\Phi_9 \equiv y_2 + \frac{l_2}{2} \operatorname{sen} \varphi_2 - y_3 + \frac{l_3}{2} \operatorname{sen} \varphi_3 = 0$$

$$\Phi_{10} \equiv x_3 + \frac{l_3}{2} \cos \varphi_3 - x_4 = 0$$

$$\Phi_{11} \equiv y_3 + \frac{l_3}{2} \operatorname{sen} \varphi_3 - y_4 = 0$$

$$\Phi_4 \equiv -x_2 + \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2 = 0$$

$$\Phi_5 \equiv -y_2 + \frac{l_2}{2} \operatorname{sen} \varphi_2 = 0$$

$$\Phi_6 \equiv y_4 = 0$$

$$\Phi_7 \equiv \varphi_4 = 0$$

$$\Phi_8 \equiv x_2 + \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2 - x_3 + \frac{l_3}{2} \cos \varphi_3 = 0$$

$$\Phi_9 \equiv y_2 + \frac{l_2}{2} \operatorname{sen} \varphi_2 - y_3 + \frac{l_3}{2} \operatorname{sen} \varphi_3 = 0$$

$$\Phi_{10} \equiv x_3 + \frac{l_3}{2} \cos \varphi_3 - x_4 = 0$$

$$\Phi_{11} \equiv y_3 + \frac{l_3}{2} \operatorname{sen} \varphi_3 - y_4 = 0$$

y simplificando aún más

$$\Phi_4 \equiv -x_2 + \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2 = 0$$

$$\Phi_5 \equiv -y_2 + \frac{l_2}{2} \operatorname{sen} \varphi_2 = 0$$

$$\Phi_8 \equiv x_2 + \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2 - x_3 + \frac{l_3}{2} \cos \varphi_3 = 0$$

$$\Phi_9 \equiv y_2 + \frac{l_2}{2} \operatorname{sen} \varphi_2 - y_3 + \frac{l_3}{2} \operatorname{sen} \varphi_3 = 0$$

$$\Phi_{10} \equiv x_3 + \frac{l_3}{2} \cos \varphi_3 - x_4 = 0$$

$$\Phi_{11} \equiv y_3 + \frac{l_3}{2} \operatorname{sen} \varphi_3 = 0$$

Derivando, para obtener la matriz jacobiana:

$$\begin{aligned}
-\dot{x}_2 - \dot{\varphi}_2 \frac{l_2}{2} \operatorname{sen} \varphi_2 &= 0 \\
-\dot{y}_2 + \dot{\varphi}_2 \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2 &= 0 \\
\dot{x}_2 - \dot{\varphi}_2 \frac{l_2}{2} \operatorname{sen} \varphi_2 - \dot{x}_3 - \dot{\varphi}_3 \frac{l_3}{2} \operatorname{sen} \varphi_3 &= 0 \\
\dot{y}_2 + \dot{\varphi}_2 \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2 - \dot{y}_3 + \dot{\varphi}_3 \frac{l_3}{2} \cos \varphi_3 &= 0 \\
\dot{x}_3 - \dot{\varphi}_3 \frac{l_3}{2} \operatorname{sen} \varphi_3 - \dot{x}_4 &= 0 \\
\dot{y}_3 + \dot{\varphi}_3 \frac{l_3}{2} \cos \varphi_3 &= 0
\end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{bmatrix}
-1 & 0 & -\frac{l_2}{2} \operatorname{sen} \varphi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & -\frac{l_2}{2} \operatorname{sen} \varphi_2 & -1 & 0 & -\frac{l_3}{2} \operatorname{sen} \varphi_3 & 0 \\
0 & 1 & \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2 & 0 & -1 & \frac{l_3}{2} \cos \varphi_3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{l_3}{2} \operatorname{sen} \varphi_3 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{l_3}{2} \cos \varphi_3 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\dot{x}_2 \\
\dot{y}_2 \\
\dot{\varphi}_2 \\
\dot{x}_3 \\
\dot{y}_3 \\
\dot{\varphi}_3 \\
\dot{x}_4
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0
\end{bmatrix}$$

y:

$$\Phi_q = \begin{bmatrix}
-1 & 0 & -\frac{l_2}{2} \operatorname{sen} \varphi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & -\frac{l_2}{2} \operatorname{sen} \varphi_2 & -1 & 0 & -\frac{l_3}{2} \operatorname{sen} \varphi_3 & 0 \\
0 & 1 & \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2 & 0 & -1 & \frac{l_3}{2} \cos \varphi_3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{l_3}{2} \operatorname{sen} \varphi_3 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{l_3}{2} \cos \varphi_3 & 0
\end{bmatrix}$$

Si se elige $\dot{\varphi}_2$ como velocidad independiente se tiene:

$$- \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{l_2}{2} \operatorname{sen} \varphi_2 & \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2 & -\frac{l_2}{2} \operatorname{sen} \varphi_2 & \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{l_3}{2} \operatorname{sen} \varphi_3 & \frac{l_3}{2} \cos \varphi_3 & \frac{l_3}{2} \cos \varphi_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -m_2 g \\ 0 \\ -m_3 g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Premultiplicando por S^T :

$$\begin{bmatrix} -\frac{l_2}{2} \operatorname{sen} \varphi_2 & \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2 & 1 & -l_2 \operatorname{sen} \varphi_2 + \frac{l_2}{2} \operatorname{sen} \varphi_3 \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_3} & \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2 & -\frac{l_2 \cos \varphi_2}{l_3 \cos \varphi_3} & -l_2 \operatorname{sen} \varphi_2 + l_2 \operatorname{sen} \varphi_3 \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_3} \end{bmatrix} \begin{matrix} m_2 \\ J_2 \\ m_3 \\ m_3 \\ J_3 \\ m_4 \end{matrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{y}_3 \\ \ddot{\varphi}_3 \\ \ddot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -m_2 g \\ 0 \\ -m_3 g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De donde:

$$\begin{bmatrix} \left(-\frac{l_2}{2} \operatorname{sen} \varphi_2\right) m_2 & \left(\frac{l_2}{2} \cos \varphi_2\right) m_2 & J_2 & \left(-l_2 \operatorname{sen} \varphi_2 + \frac{l_2}{2} \operatorname{sen} \varphi_3 \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_3}\right) m_3 & \left(\frac{l_2}{2} \cos \varphi_2\right) m_3 & \left(-\frac{l_2 \cos \varphi_2}{l_3 \cos \varphi_3}\right) J_3 & \left(-l_2 \operatorname{sen} \varphi_2 + l_2 \operatorname{sen} \varphi_3 \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_3}\right) m_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{y}_3 \\ \ddot{\varphi}_3 \\ \ddot{x}_4 \end{bmatrix} = -m_2 g \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2 - m_3 g \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2$$

Derivando:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{\varphi}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{l_2}{2} \operatorname{sen} \varphi_2 \\ \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2 \\ 1 \\ -l_2 \operatorname{sen} \varphi_2 + \frac{l_2}{2} \operatorname{sen} \varphi_3 \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_3} \\ \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2 \\ -\frac{l_2 \cos \varphi_2}{l_3 \cos \varphi_3} \\ -l_2 \operatorname{sen} \varphi_2 + l_2 \operatorname{sen} \varphi_3 \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_3} \end{bmatrix} \dot{\varphi}_2$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{y}_3 \\ \ddot{\varphi}_3 \\ \ddot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{l_2}{2} \operatorname{sen} \varphi_2 \\ \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2 \\ 1 \\ -l_2 \operatorname{sen} \varphi_2 + \frac{l_2}{2} \operatorname{sen} \varphi_3 \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_3} \\ \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2 \\ -\frac{l_2 \cos \varphi_2}{l_3 \cos \varphi_3} \\ -l_2 \operatorname{sen} \varphi_2 + l_2 \operatorname{sen} \varphi_3 \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_3} \end{bmatrix} \ddot{\varphi}_2 + \begin{bmatrix} -\frac{l_2}{2} \cos \varphi_2 \\ -\frac{l_2}{2} \operatorname{sen} \varphi_2 \\ 1 \\ -\frac{l_2}{2} \cos \varphi_2 - \frac{l_2}{2} \operatorname{sen} \varphi_3 \frac{\cos \varphi_3 \operatorname{sen} \varphi_2 + \cos \varphi_2 \operatorname{sen} \varphi_3}{\cos^2 \varphi_3} \\ -\frac{l_2}{2} \operatorname{sen} \varphi_2 \\ \frac{l_2 (\cos \varphi_3 \operatorname{sen} \varphi_2 + \cos \varphi_2 \operatorname{sen} \varphi_3)}{l_3 \cos^2 \varphi_3} \\ -l_2 \operatorname{sen} \varphi_3 \frac{\cos \varphi_3 \operatorname{sen} \varphi_2 + \cos \varphi_2 \operatorname{sen} \varphi_3}{\cos^2 \varphi_3} \end{bmatrix} \dot{\varphi}_2^2$$

Por lo que:

$$\left[\frac{l_2^2}{4} \operatorname{sen}^2 \varphi_2 m_2 + \frac{l_2^2}{4} \cos^2 \varphi_2 m_2 + J_2 + \left(-l_2 \operatorname{sen} \varphi_2 + \frac{l_2}{2} \operatorname{sen} \varphi_3 \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_3} \right)^2 m_3 + \left(\frac{l_2}{2} \cos \varphi_2 \right)^2 m_3 + \left(\frac{l_2 \cos \varphi_2}{l_3 \cos \varphi_3} \right)^2 J_3 + \left(-l_2 \operatorname{sen} \varphi_2 + l_2 \operatorname{sen} \varphi_3 \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_3} \right)^2 m_4 \right] \ddot{\varphi}_2 =$$

$$= -m_2 g \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2 - m_3 g \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2$$

$$\left[\frac{l_2^2}{4} m_2 + J_2 + \frac{l_2^2}{4} m_3 + \frac{l_2^2}{4} \operatorname{sen}^2 \varphi_3 \frac{\cos^2 \varphi_2}{\cos^2 \varphi_3} m_3 - l_2^2 \operatorname{sen} \varphi_2 \operatorname{sen} \varphi_3 \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_3} m_3 + \left(\frac{l_2 \cos \varphi_2}{l_3 \cos \varphi_3} \right)^2 J_3 + \left(-l_2 \operatorname{sen} \varphi_2 + l_2 \operatorname{sen} \varphi_3 \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_3} \right)^2 m_4 \right] \ddot{\varphi}_2 =$$

$$= -m_2 g \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2 - m_3 g \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2$$

15.7. DETERMINACIÓN DE LA POSICIÓN DE EQUILIBRIO ESTÁTICO

El análisis dinámico de sistemas multicuerpo suele realizarse siempre a partir de una posición de equilibrio estático. Sin embargo, en el caso de grandes sistemas no resulta fácil asignar valores iniciales correctos a las coordenadas que definen la posición de cada cuerpo, por lo que habitualmente es necesario llevar a cabo un análisis estático del mecanismo.

Esto puede conseguirse a partir de las ecuaciones dinámicas del movimiento, sin más que igualar a cero los valores de las velocidades y aceleraciones, con lo que el problema quedará reducido a la resolución de un conjunto de ecuaciones algebraicas no lineales, cuyas incógnitas son las coordenadas que definen la posición de cada uno de los cuerpos que constituyen el sistema mecánico que se está estudiando.

Referencias

13. William F. Riley, Leroy D. Sturges, “Ingeniería Mecánica: Dinámica”. Ed. Reverté, S.A., 1996.
14. P. E. Nikravesh, “Computer-Aided Analysis of Mechanical Systems”, Prentice-Hall, Inc., 1988.
15. C.Vera, B. Suárez, “Fundamentos Teóricos de la Simulación de Sistemas Mecánicos I”, U.N.E.D.
16. J. E. Shigley, Ch. R. Mischke, “Diseño en ingeniería mecánica”, McGraw-Hill, 1991.
17. P. E. Nikravesh, J. A. C. Ambrosio, “Systematic Construction of Equations of Motion for Rigid-Flexible Multibody Systems Containing Open and Closed Kinematic Loops”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 32, pp. 1749- 1766, 1991.
18. T.J. Chalko, “Dynamics 436-402”, The University of Melbourne, 2000.
19. rne, 2000.