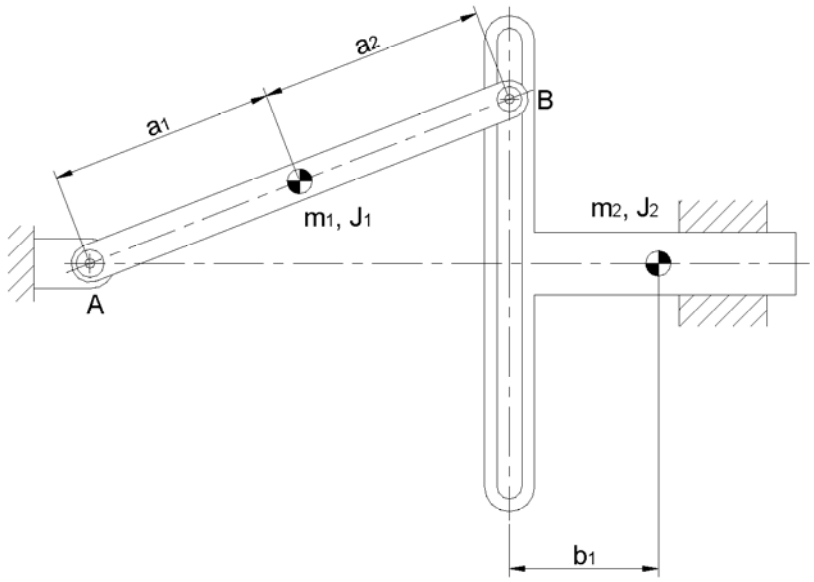
EJERCICIO 1



Para el mecanismo de la figura se pide:

Determinar justificadamente el número de grados de libertad del sistema, especificando los eslabones y el número y tipo de pares cinemáticos.

Determinar las ecuaciones de restricción del sistema.

Determinar la matriz Jacobiana del sistema

Determinar las ecuaciones dinámicas del sistema

SOLUCIÓN

Determinación de los grados de libertad:

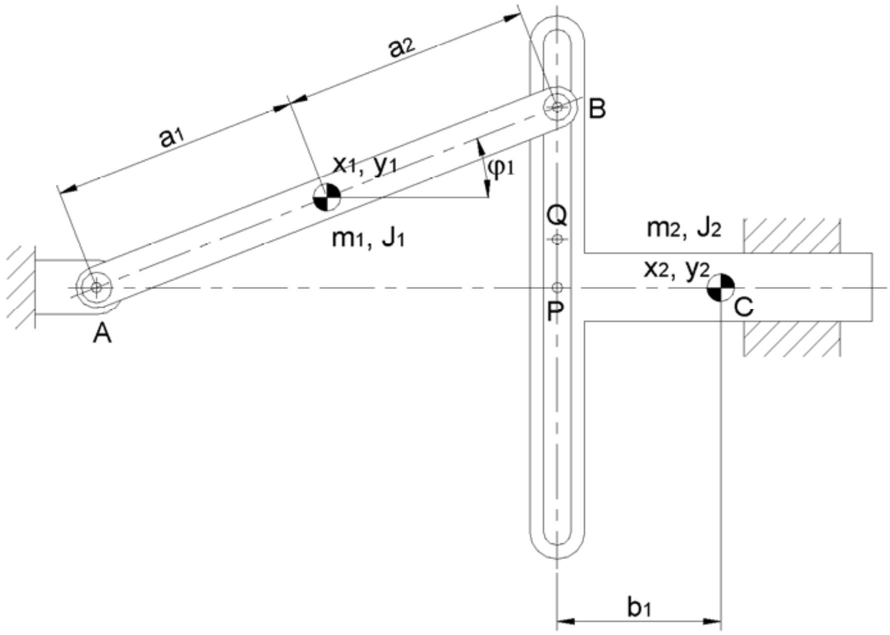
3 Eslabones :1, 2 y 0	9 coordenadas
Un cuerpo fijo (0). 3 restricciones simples	3 ec. rest,
Un par de revolución (A)	2 ec. rest.
Un par de traslación-rotación (B)	1 ec. rest.
Un par de traslación (C)	2 ec. rest.
TOTAL	1 g.d.l.

Coordenadas de los cuerpos:

Cuerpo 1 : $[x_1 \quad y_1 \quad \varphi_1]^T$

Cuerpo 2 : $[x_2 \quad y_2 \quad \varphi_2]^T$

Cuerpo 0 : $[x_0 \quad y_0 \quad \varphi_0]^T$



Vectores de posición de los puntos implicados:

Punto A

$$\vec{r}_1^{\,A} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & -sen\varphi_1 \\ sen\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - a_1\cos\varphi_1 \\ y_1 - a_1 sen\varphi_1 \end{bmatrix}$$

Punto B

$$\vec{r}_1^{\,B} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & -sen\varphi_1 \\ sen\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + a_2\cos\varphi_1 \\ y_1 + a_2 sen\varphi_1 \end{bmatrix}$$

Punto C

$$\vec{r}_2^{\,C} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & -sen\varphi_1 \\ sen\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Punto P

$$\vec{r}_2^{\,P} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & -sen\varphi_2 \\ sen\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - b_1\cos\varphi_2 \\ y_2 - b_1 sen\varphi_2 \end{bmatrix}$$

Punto Q

$$\vec{r}_2^{\,Q} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & -sen\varphi_2 \\ sen\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - b_1\cos\varphi_2 - sen\varphi_2 \\ y_2 - b_1 sen\varphi_2 + \cos\varphi_2 \end{bmatrix}$$

Restricciones:

Restricciones simples:

$$x_0 = 0$$

$$y_0 = 0$$

$$\varphi_0 = 0$$

Par de revolución A:

$$\vec{r}_1^{\,A} = 0$$

$$\begin{cases} x_1 - a_1 \cos\varphi_1 = 0 \\ y_1 - a_1 sen\varphi_1 = 0 \end{cases}$$

Par traslación-revolución B:

$$\vec{BP} // \vec{QP} = 0$$

$$\vec{BP} = \begin{bmatrix} x_2 - b_1 \cos\varphi_2 - x_1 - a_2 \cos\varphi_1 \\ y_2 - b_1 sen\varphi_2 - y_1 - a_2 sen\varphi_1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{QP} = \begin{bmatrix} -sen\varphi_2 \\ \cos\varphi_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{BP} \times \vec{QP} = 0$$

$$(x_2 - b_1 \cos\varphi_2 - x_1 - a_2 \cos\varphi_1) \times (\cos\varphi_2) - (y_2 - b_1 sen\varphi_2 - y_1 - a_2 sen\varphi_1) \times (-sen\varphi_2) = 0$$

Par de traslación C:

$$\vec{u} // \vec{OC} = 0$$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{OC} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{OC} = 0 \qquad 1 \times y_2 - 0 \times x_2 = 0 \qquad y_2 = 0$$

$$\varphi_2 - \varphi_3 = 0 \qquad \varphi_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_2 = 0$$

$$\begin{cases} y_2 = 0 \\ \varphi_2 = 0 \end{cases}$$

Ecuaciones de restricción:

Operando con las ecuaciones anteriores y eliminando las que resultan valores nulos resulta:

$$x_1 - a_1 \cos\varphi_1 = 0$$
$$y_1 - a_1 sen\varphi_1 = 0$$
$$x_2 - b_1 - x_1 - a_2 \cos\varphi_1 = 0$$

Jacobiana

	$\frac{\partial}{\partial x_1}$	$\frac{\partial}{\partial y_1}$	$\frac{\partial}{\partial \varphi_1}$	$\frac{\partial}{\partial x_2}$
ϕ_1	1	0	$a_1 sen\varphi_1$	0
ϕ_2	0	1	$-a_1 \cos\varphi_1$	0
ϕ_3	-1	0	$a_2 sen\varphi_1$	1

Ecuaciones dinámicas

$$\begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & m_1 & & \\ & & J_1 & \\ & & & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ a_1 sen\varphi_1 & -a_1 \cos\varphi_1 & a_2 sen\varphi_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{AX} \\ F_{AY} \\ F_{BY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M \\ 0 \end{bmatrix}$$

Compactación de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{\varphi}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 sen\varphi_1 \\ a_1 \cos\varphi_1 \\ 1 \\ -(a_1 + a_2) sen\varphi_1 \end{bmatrix} \dot{\varphi}_1$$

$$\begin{bmatrix} -a_1 sen\varphi_1 & a_1 \cos\varphi_1 & 1 & -(a_1 + a_2) sen\varphi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & m_1 & & \\ & & J_1 & \\ & & & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} -a_1 sen\varphi_1 & a_1 \cos\varphi_1 & 1 & -(a_1 + a_2) sen\varphi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ a_1 sen\varphi_1 & -a_1 \cos\varphi_1 & a_2 sen\varphi_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{AX} \\ F_{AY} \\ F_{BY} \end{bmatrix} =$$

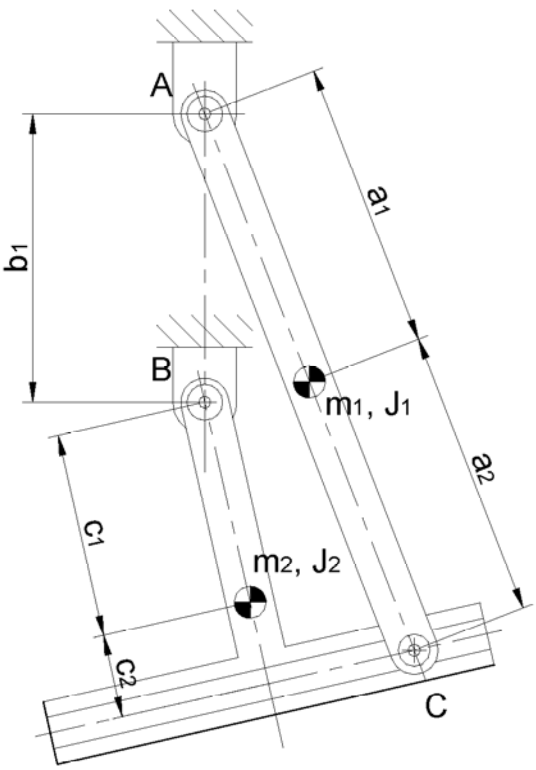
$$= \begin{bmatrix} -a_1 sen\varphi_1 & a_1 \cos\varphi_1 & 1 & -(a_1 + a_2) sen\varphi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -m_1 a_1 sen\varphi_1 & m_1 a_1 \cos\varphi_1 & J_1 & -m_2 (a_1 + a_2) sen\varphi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{AX} \\ F_{AY} \\ F_{BY} \end{bmatrix} = M$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 sen\varphi_1 \\ a_1 \cos\varphi_1 \\ 1 \\ -(a_1 + a_2) sen\varphi_1 \end{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 + \begin{bmatrix} -a_1 \cos\varphi_1 \\ -a_1 sen\varphi_1 \\ 0 \\ -(a_1 + a_2) \cos\varphi_1 \end{bmatrix} \dot{\varphi}_1^{\ 2}$$

$$\left(m_1 a_1^{\ 2} sen^2\varphi_1 + m_1 a_1^{\ 2} \cos^2\varphi_1 + J_1 + m_2 (a_1 + a_2)^2 sen^2\varphi_1 \right) \ \ddot{\varphi}_1 + \left(m_2 (a_1 + a_2)^2 sen\varphi_1 \cos\varphi_1 \right) \ \dot{\varphi}_1^{\ 2} = M$$

EJERCICIO 2



Para el mecanismo de la figura se pide:

1. Determinar las ecuaciones de restricción del sistema.
2. Determinar la matriz Jacobiana del sistema
3. Determinar las ecuaciones dinámicas del sistema

SOLUCIÓN

Determinación de los grados de libertad:

3 Eslabones :1, 2 y 0	9 coordenadas
Un cuerpo fijo (0). 3 restricciones simples	3 ec. rest,
Un par de revolución (A)	2 ec. rest.
Un par de revolución (B)	2 ec. rest.
Un par de traslación-rotación (C)	1 ec. rest.
TOTAL	1 g.d.l.

Coordenadas de los cuerpos:

Cuerpo 1 : $\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & \varphi_1 \end{bmatrix}^T$

Cuerpo 2 : $\begin{bmatrix} x_2 & y_2 & \varphi_2 \end{bmatrix}^T$

Cuerpo 0 : $\begin{bmatrix} x_0 & y_0 & \varphi_0 \end{bmatrix}^T$

Vectores de posición de los puntos implicados:

Punto A

$$\vec{r}_0^{\,A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_1^{\,A} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Punto B

$$\vec{r}_0^{\,B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -b_1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_2^{\,B} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ c_1 \end{bmatrix}$$

Punto C

$$\vec{r}_1^{\,C} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Restricciones:

Restricciones simples:

$$x_0 = 0$$
$$y_0 = 0$$
$$\varphi_0 = 0$$

Par de revolución A:

$$\vec{r}_O^{\,A} = \vec{r}_1^{\,A}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - a_1 \cos\varphi_1 = 0 \\ y_1 - a_1 \sin\varphi_1 = 0 \end{cases}$$

Par de revolución B:

$$\vec{r}_O^{\,B} = \vec{r}_2^{\,B}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -b_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_2 - c_1 \sin\varphi_2 = 0 \\ y_2 + c_1 \cos\varphi_2 + b_1 = 0 \end{cases}$$

Par traslación-revolución C:

$$\vec{u}_2 \,//\, \overrightarrow{DC}$$

$$\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{DC} = \vec{r}_1^{\,C} - \vec{r}_2^{\,D}$$

$$\vec{r}_1^{\,C} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + a_2\cos\varphi_1 \\ y_1 + a_2\sin\varphi_1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_2^{\,D} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 + c_2\sin\varphi_2 \\ y_2 - c_2\cos\varphi_2 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{DC} = \begin{bmatrix} x_1 + a_2\cos\varphi_1 - x_2 - c_2\sin\varphi_2 \\ y_1 + a_2\sin\varphi_1 - y_2 + c_2\cos\varphi_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}_2 \times \overrightarrow{DC} = 0$$

$$(y_1 + a_2\sin\varphi_1 - y_2 + c_2\cos\varphi_2)\cos\varphi_2 - (x_1 + a_2\cos\varphi_1 - x_2 - c_2\sin\varphi_2)\sin\varphi_2 = 0$$

$$(y_1 - y_2)\cos\varphi_2 + a_2\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + c_2\cos^2\varphi_2 - (x_1 - x_2)\sin\varphi_2 - a_2\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + c_2\sin^2\varphi_2 = 0$$

$$(y_1 - y_2)\cos\varphi_2 - (x_1 - x_2)\sin\varphi_2 + c_2 + a_2\sin(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$$

Ecuaciones de restricción:

Operando con las ecuaciones anteriores y eliminando las que resultan valores nulos resulta:

$$x_1 - a_1\cos\varphi_1 = 0$$

$$y_1 - a_1\sin\varphi_1 = 0$$

$$x_2 - c_1\sin\varphi_2 = 0$$

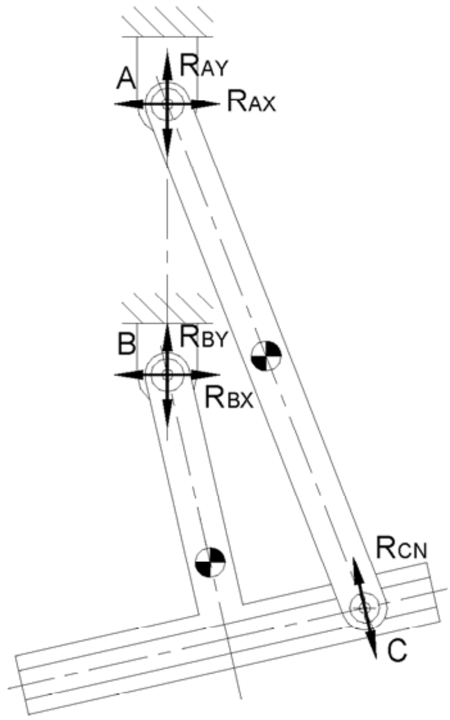
$$y_2 + c_1\cos\varphi_2 + b_1 = 0$$

$$(y_1 - y_2)\cos\varphi_2 - (x_1 - x_2)\sin\varphi_2 + c_2 + a_2\sin(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$$

Jacobiana

	$\frac{\partial}{\partial x_1}$	$\frac{\partial}{\partial y_1}$	$\frac{\partial}{\partial \varphi_1}$	$\frac{\partial}{\partial x_2}$	$\frac{\partial}{\partial y_2}$	$\frac{\partial}{\partial \varphi_2}$
ϕ_1	1		$a_1\sin\varphi_1$			
ϕ_2		1	$-a_1\cos\varphi_1$			
ϕ_3				1		$-c_1\cos\varphi_2$
ϕ_4					1	$-c_1\sin\varphi_1$
ϕ_5	$-\sin\varphi_2$	$\cos\varphi_2$	$a_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)$	$\sin\varphi_2$	$-\cos\varphi_2$	$-(y_1-y_2)\sin\varphi_2-(x_1-x_2)\cos\varphi_2-a_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)$

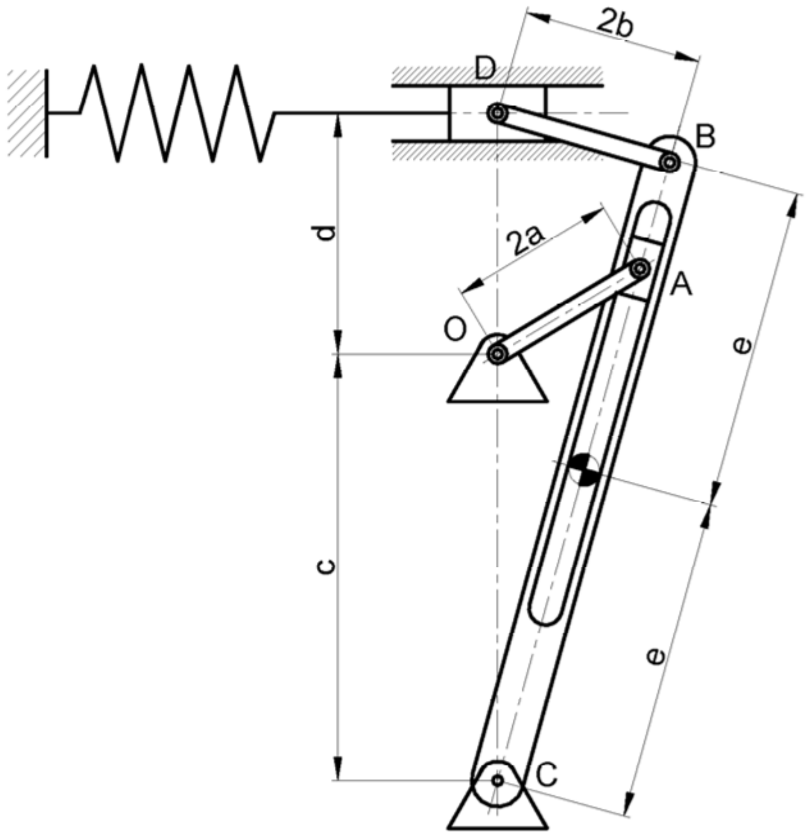
Ecuaciones dinámicas



$$\phi_q = \begin{bmatrix} 1 & & a_1 \sin\varphi_1 & & & \\ & 1 & -a_1 \cos\varphi_1 & & & \\ & & & 1 & & -c_1 \cos\varphi_2 \\ & & & & 1 & -c_1 \sin\varphi_1 \\ -\sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 & a_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) & \sin\varphi_2 & -\cos\varphi_2 & -(y_1 - y_2)\sin\varphi_2 - (x_1 - x_2)\cos\varphi_2 - a_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & & & & & \\ & m_1 & & & & \\ & & J_1 & & & \\ & & & m_2 & & \\ & & & & m_2 & \\ & & & & & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} - \phi_q{}^T \begin{bmatrix} R_{AX} \\ R_{AY} \\ R_{BX} \\ R_{BY} \\ R_{CN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1X} \\ F_{1Y} \\ M_1 \\ F_{2X} \\ F_{2Y} \\ M_2 \end{bmatrix}$$

EJERCICIO 3



Para el mecanismo de la figura, considerando movimiento en el plano horizontal, se pide:

Determinar justificadamente el número de grados de libertad del sistema, especificando el número y tipo de pares cinemáticos.

Determinar las ecuaciones de restricción del sistema.

Obtener la expresión de la velocidad del punto D considerando como restricción motriz el giro del brazo OA.

Determinar las ecuaciones dinámicas del sistema

SOLUCIÓN

Determinación de los grados de libertad:

4 Eslabones :0, 1 (O-A), 2 (C-B) y 3 (B-D)	12 coordenadas
Un cuerpo fijo (0). 3 restricciones simples	3 ec. rest,
Tres pares de revolución (O, C, B)	3x2 ec. rest.
Dos pares de traslación-rotación (A-D)	2x1 ec. rest.
TOTAL	1 g.d.l.

Restricciones:

Restricciones simples:

$$x_0 = 0$$
$$y_0 = 0$$
$$\varphi_0 = 0$$

Las barras OA y DB se suponen con masa y cdg en su punto medio

Par de revolución O:

$$\vec{r}_O^{\,O} = \vec{r}_O^{\,1}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a \\ 0 \end{bmatrix}$$

Par de revolución C:

$$\vec{r}_C^{\,O} = \vec{r}_C^{\,2}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e \\ 0 \end{bmatrix}$$

Par de revolución B:

$$\vec{r}_B^{\,3} = \vec{r}_B^{\,2}$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_3 & -\sin\varphi_3 \\ \sin\varphi_3 & \cos\varphi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ 0 \end{bmatrix}$$

Par traslación-revolución A:

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 \end{bmatrix} \times \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\} = \vec{0}$$

Par traslación-revolución D:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \left\{ \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_3 & -\sin\varphi_3 \\ \sin\varphi_3 & \cos\varphi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ d \end{bmatrix} \right\} = \vec{0}$$

Operando con las ecuaciones anteriores resulta:

$$\begin{cases} x_1 - a\cos\varphi_1 = 0 \\ y_1 - a\sin\varphi_1 = 0 \\ x_2 - e\cos\varphi_2 = 0 \\ y_2 - e\sin\varphi_2 = 0 \\ x_3 + b\cos\varphi_3 - x_2 - e\cos\varphi_2 = 0 \\ y_3 + b\sin\varphi_3 - y_2 - e\sin\varphi_2 = 0 \\ \cos\varphi_2 (y_1 + a\sin\varphi_1 - y_2) - \sin\varphi_2 (x_1 + a\cos\varphi_1 - x_2) = 0 \\ y_3 - b\sin\varphi_3 - d = 0 \end{cases}$$

Restricción motriz:

$$\varphi_1 - \omega t = 0$$

Jacobiana

$$J = \begin{array}{c|ccccccccc} & \partial/\partial x_1 & \partial/\partial y_1 & \partial/\partial \varphi_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial y_2 & \partial/\partial \varphi_2 & \partial/\partial x_3 & \partial/\partial y_3 & \partial/\partial \varphi_3 \\ \hline \phi_1 & 1 & & a\sin\varphi_1 & & & & & & \\ \phi_2 & & 1 & -a\cos\varphi_1 & & & & & & \\ \phi_3 & & & & 1 & & e\sin\varphi_2 & & & \\ \phi_4 & & & & & 1 & -e\cos\varphi_2 & & & \\ \phi_5 & & & & -1 & & e\sin\varphi_2 & 1 & & -b\sin\varphi_3 \\ \phi_6 & & & & & -1 & -e\cos\varphi_2 & & 1 & b\cos\varphi_3 \\ \phi_7 & -\sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 & \partial\phi_7/\partial\varphi_1 & \sin\varphi_2 & -\cos\varphi_2 & \partial\phi_7/\partial\varphi_2 & & & \\ \phi_8 & & & & & & & & 1 & -b\cos\varphi_3 \\ \phi_9 & & & 1 & & & & & & \end{array}$$

$$\partial\phi_7/\partial\varphi_1 = a\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + a\sin\varphi_1\sin\varphi_2 = a\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\partial\phi_7/\partial\varphi_2 = -\sin\varphi_2 (y_1 + a\sin\varphi_1 - y_2) - \cos\varphi_2 (x_1 + a\cos\varphi_1 - x_2) =$$

$$= (y_2 - y_1)\sin\varphi_2 + (x_2 - x_1)\cos\varphi_2 - a\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Velocidad del punto D

Se debe resolver el sistema de ecuaciones:

$$J\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{y}_1\\ \dot{\varphi}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{y}_2\\ \dot{\varphi}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{y}_3\\ \dot{\varphi}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\ \omega\end{bmatrix}$$

de donde:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{y}_1\\ \dot{\varphi}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{y}_2\\ \dot{\varphi}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{y}_3\\ \dot{\varphi}_3\end{bmatrix}=J^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\ \omega\end{bmatrix}$$

por lo que:

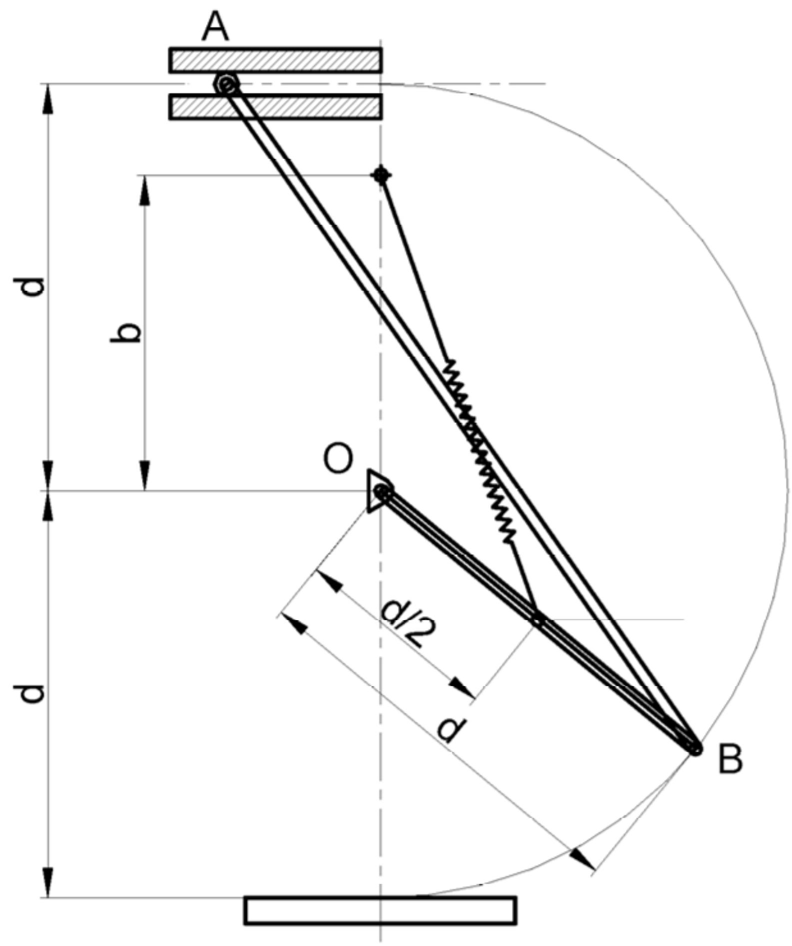
$$x_D = x_3 - b\cos\varphi_3$$
$$u_D = \dot{x}_3 + b\,\dot{\varphi}_3\sin\varphi_3$$

Ecuaciones dinámicas

Como fuerzas exteriores actúan el par aplicado en φ_1 y el muelle aplicado en D, que produce una fuerza horizontal y un momento sobre la barra DB

$$\begin{bmatrix}m_1 &&&&&&&& \\ & m_1 &&&&&&& \\ && J_1 &&&&&& \\ &&& m_2 &&&&& \\ &&&& m_2 &&&& \\ &&&&& J_2 &&& \\ &&&&&& m_3 && \\ &&&&&&& m_3 & \\ &&&&&&&& J_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{y}_1\\ \ddot{\varphi}_1\\ \ddot{x}_2\\ \ddot{y}_2\\ \ddot{\varphi}_2\\ \ddot{x}_3\\ \ddot{y}_3\\ \ddot{\varphi}_3\end{bmatrix}-\left[J_{[8x9]}\right]^T\begin{bmatrix}R_{OX}\\ R_{OY}\\ R_{CX}\\ R_{CY}\\ R_{BX}\\ R_{BY}\\ R_A\\ R_D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\M\\0\\0\\0\\-K(x_3-b\cos\varphi_3-l_0)\\0\\K(x_3-b\cos\varphi_3-l_0)b\sin\varphi_3\end{bmatrix}$$

EJERCICIO 4



La puerta uniforme AB de un garaje, representada en sección en la figura, tiene una masa M y está equipada con un mecanismo de resorte como el indicado. El brazo OB tiene masa m y la esquina superior de la puerta puede deslizar libremente en dirección horizontal mediante un rodillo.

El muelle está anclado al punto medio del brazo OB y a un punto situado a d/2 sobre la vertical de O. En la posición superior del brazo OB, la fuerza del resorte es nula.

Se pide:

Determinar las ecuaciones de restricción del sistema.

Obtener la expresión de la velocidad del punto A considerando como restricción motriz el giro del brazo OB.

Determinar las ecuaciones dinámicas del sistema

SOLUCIÓN

Determinación de los grados de libertad:

3 Eslabones : 0 (cuerpo fijo), 1 (O-B) y 2 (A-B)	9 coordenadas
Un cuerpo fijo (0). 3 restricciones simples	3 ec. rest,
Dos pares de revolución (O, B)	2x2 ec. rest.
Un par de traslación-rotación (A)	1 ec. rest.
TOTAL	1 g.d.l.

Restricciones:

Restricciones simples:

$$x_0 = 0$$
$$y_0 = 0$$
$$\varphi_0 = 0$$

Las barras OB y AB se suponen con masa y cdg en su punto medio

Par de revolución O:

$$\vec{r}_O^{\,O} = \vec{r}_O^{\,1}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -d/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Par de revolución B:

$$\vec{r}_B^{\,1} = \vec{r}_B^{\,2}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ 0 \end{bmatrix}$$

Par traslación-revolución A:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \left\{ \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -d \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ d \end{bmatrix} \right\} = \vec{0}$$

Operando con las ecuaciones anteriores resulta:

$$\begin{cases} x_1 - d/2\cos\varphi_1 = 0 \\ y_1 - d/2\sin\varphi_1 = 0 \\ x_1 + d/2\cos\varphi_1 - x_2 - d\cos\varphi_2 = 0 \\ y_1 + d/2\sin\varphi_1 - y_2 - d\sin\varphi_2 = 0 \\ y_2 - d\sin\varphi_2 - d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - d/2\cos\varphi_1 = 0 \\ y_1 - d/2\sin\varphi_1 = 0 \\ x_1 + d/2\cos\varphi_1 - x_2 - d\cos\varphi_2 = 0 \\ y_1 + d/2\sin\varphi_1 - y_2 - d\sin\varphi_2 = 0 \\ y_2 - d\sin\varphi_2 - d = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = d/2\cos\varphi_1$$
$$y_1 = d/2\sin\varphi_1$$
$$\sin\varphi_2 = \frac{\sin\varphi_1}{2}$$
$$x_2 = d\cos\varphi_1 - d\cos\varphi_2$$
$$y_2 = d\sin\varphi_1 - d\sin\varphi_2 = d/2\cdot\sin\varphi_1$$

Restricción motriz:

$$\varphi_1 - \omega t = 0$$

Jacobiana

$$J = \begin{array}{c|cccccc} & \partial/\partial x_1 & \partial/\partial y_1 & \partial/\partial\varphi_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial y_2 & \partial/\partial\varphi_2 \\ \hline \phi_1 & 1 & & d/2\sin\varphi_1 & & & \\ \phi_2 & & 1 & -d/2\cos\varphi_1 & & & \\ \phi_3 & 1 & & -d/2\sin\varphi_1 & -1 & & d\sin\varphi_2 \\ \phi_4 & & 1 & d/2\cos\varphi_1 & & -1 & -d\cos\varphi_2 \\ \phi_5 & & & & & 1 & -d\cos\varphi_2 \\ \phi_6 & & & 1 & & & \end{array}$$

Velocidad del punto A

Se debe resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & d/2\sin\varphi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -d/2\cos\varphi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -d/2\sin\varphi_1 & -1 & 0 & d\sin\varphi_2 \\ 0 & 1 & d/2\cos\varphi_1 & 0 & -1 & -d\cos\varphi_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -d\cos\varphi_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{\varphi}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{\varphi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}$$

de donde:

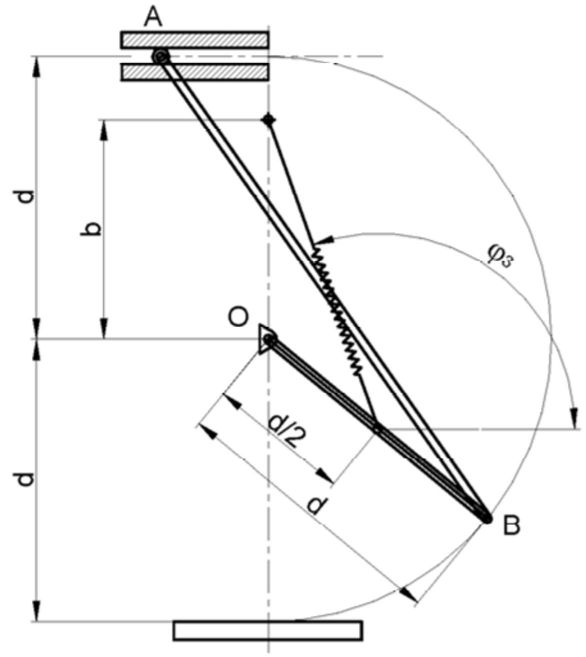
$$\dot{x}_1 = -d/2\cdot\sin\varphi_1\cdot\omega$$
$$\dot{y}_1 = d/2\cdot\cos\varphi_1\cdot\omega$$
$$\dot{\varphi}_1 = \omega$$
$$\dot{x}_2 = \frac{d\cdot\sin(\varphi_1-\varphi_2)\cdot\omega}{2\cdot\cos\varphi_2}$$
$$\dot{y}_2 = d/2\cdot\cos\varphi_1\cdot\omega$$
$$\dot{\varphi}_2 = \frac{\cos\varphi_1\cdot\omega}{2\cdot\cos\varphi_2}$$

por lo que:

$$x_A = x_2 - d\cos\varphi_2$$
$$v_A = \dot{x}_A = \dot{x}_2 + d\dot{\varphi}_2\sin\varphi_2 = \frac{d\cdot\sin(\varphi_1-\varphi_2)\cdot\omega}{2\cdot\cos\varphi_2} + \frac{d\cdot\cos\varphi_1\sin\varphi_2\cdot\omega}{2\cdot\cos\varphi_2}$$

Ecuaciones dinámicas

Como fuerzas exteriores actúan el par aplicado en φ_1 y el muelle aplicado en B, que produce una fuerza en la dirección OB y no produce momento sobre la barra DB porque el muelle está anclado en el centro de gravedad.



$$\begin{bmatrix} m_1 &&&&& \\ & m_1 &&&& \\ && J_1 &&& \\ &&& m_2 && \\ &&&& m_2 & \\ &&&&& J_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{v}_1 \\ \dot{\omega}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{\omega}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & \\ d/2\sin\varphi_1 & -d/2\cos\varphi_1 & -d/2\sin\varphi_1 & d/2\cos\varphi_1 & \\ & & -1 & & \\ & & & -1 & 1 \\ & & d\sin\varphi_2 & -d\cos\varphi_2 & -d\cos\varphi_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{0X} \\ F_{0Y} \\ F_{BX} \\ F_{BY} \\ F_{AY} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -Kl\cos\varphi_3 \\ -Kl\sin\varphi_3 - m_1 g \\ M \\ 0 \\ -m_2 g \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$l = \sqrt{x_2^2 + (y_2 - b)^2} - (b - d/2)$$

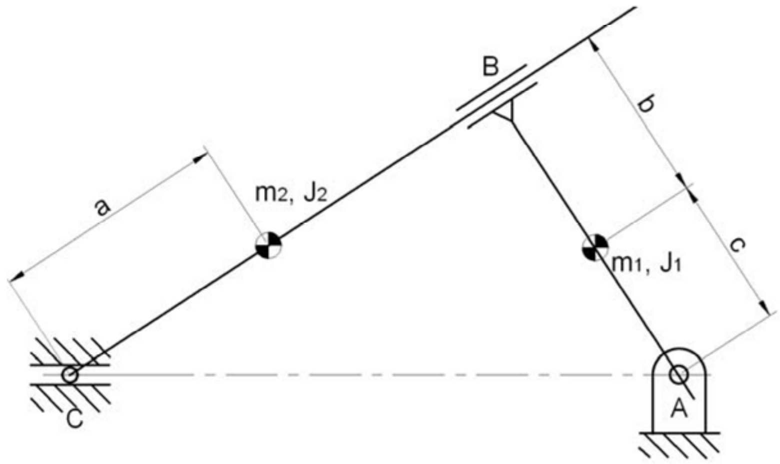
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \omega_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \omega_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - d/2\cos\varphi_1 = 0 \\ y_1 - d/2\sin\varphi_1 = 0 \\ x_1 + d/2\cos\varphi_1 - x_2 - d\cos\varphi_2 = 0 \\ y_1 + d/2\sin\varphi_1 - y_2 - d\sin\varphi_2 = 0 \\ y_2 - d\sin\varphi_2 - d = 0 \end{cases}$$

EJERCICIO 5

Para el mecanismo de la figura, se pide:

- Determinar las ecuaciones de restricción del sistema.
- Obtener la expresión de la velocidad del punto C considerando como restricción motriz el giro del brazo AB.
- Determinar las ecuaciones dinámicas del sistema.



SOLUCIÓN

- **Determinación de los grados de libertad:**

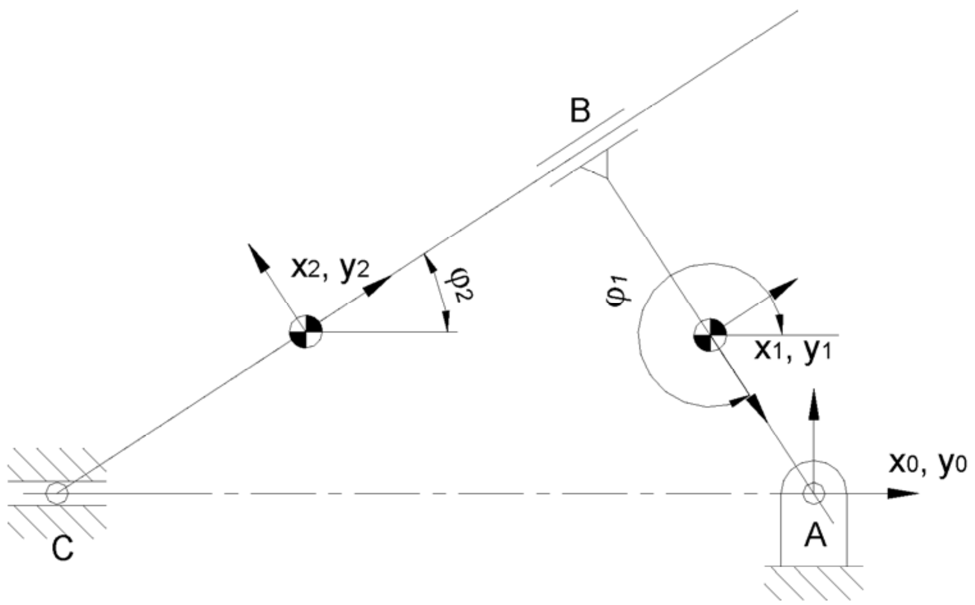
3 Eslabones :1, 2 y 0	9 coordenadas
Un cuerpo fijo (0). 3 restricciones simples	3 ec. rest,
Un par de revolución (A)	2 ec. rest.
Un par de traslación (B)	2 ec. rest.
Un par de revolución-traslación (C)	1 ec. rest.
TOTAL	1 g.d.l.

- **Coordenadas de los cuerpos:**

Cuerpo 1 : $[x_1 \quad y_1 \quad \varphi_1]^T$

Cuerpo 2 : $[x_2 \quad y_2 \quad \varphi_2]^T$

Cuerpo 0 : $[x_0 \quad y_0 \quad \varphi_0]^T$



- **Vectores de posición de los puntos implicados:**

Cuerpo 0:

Punto A: $\vec{r}_0^{\,A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Cuerpo 1:

Punto A: $\vec{r}_1^{\,A} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + c\cos\varphi_1 \\ y_1 + c\sin\varphi_1 \end{bmatrix}$

Punto B: $\vec{r}_1^{\,B} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - b\cos\varphi_1 \\ y_1 - b\sin\varphi_1 \end{bmatrix}$

Cuerpo 2:

Punto C: $\vec{r}_2^{\,C} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - a\cos\varphi_2 \\ y_2 - a\sin\varphi_2 \end{bmatrix}$

- **Restricciones:**

Restricciones simples:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ \varphi_0 = 0 \end{cases}$$

Par de revolución A:

$$\vec{r}_1^{\,A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 + c\cos\varphi_1 = 0 \\ y_1 + c\sin\varphi_1 = 0 \end{cases}$$

Par de traslación B:

$$\begin{cases} \varphi_1 - \varphi_2 - 3\pi/2 = 0 \\ \vec{u}_2 // \overrightarrow{X_2B_1} \Rightarrow \overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{X_2B_1} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{X_2B_1} = \begin{bmatrix} x_1 - b\cos\varphi_1 - x_2 \\ y_1 - b\sin\varphi_1 - y_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \varphi_1 - \varphi_2 - 3\pi/2 = 0 \\ \cos\varphi_2(y_1 - b\sin\varphi_1 - y_2) - \sin\varphi_2(x_1 - b\cos\varphi_1 - x_2) = 0 \end{cases}$$

Par de revolución - traslación C:

$$\vec{u}_0 // \overrightarrow{CA} \Rightarrow \vec{u}_0 \times \overrightarrow{CA} = \vec{0}$$

$$\vec{u}_0 = \begin{bmatrix} \cos\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\varphi_0 = 0} \vec{u}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{CA} = \vec{r}_2^{\,C} - \vec{r}_0^{\,A} = \begin{bmatrix} x_2 - a\cos\varphi_2 \\ y_2 - a\sin\varphi_2 \end{bmatrix}$$

$$\cos\varphi_0(y_2 - a\sin\varphi_2) - \sin\varphi_0(x_2 - a\cos\varphi_2) = 0$$

- **Ecuaciones de restricción:**

Operando con las ecuaciones anteriores y simplificando resulta:

$$\begin{cases} x_1 + c\cos\varphi_1 = 0 \\ y_1 + c\sin\varphi_1 = 0 \\ \varphi_1 - \varphi_2 - 3\pi/2 = 0 \\ \cos\varphi_2(y_1 - b\sin\varphi_1 - y_2) - \sin\varphi_2(x_1 - b\cos\varphi_1 - x_2) = 0 \\ y_2 - a\sin\varphi_2 = 0 \end{cases}$$

Operando aún más las ecuaciones anteriores resulta:

$$\begin{cases} x_1 + c\cos\varphi_1 = 0 \\ y_1 + c\sin\varphi_1 = 0 \\ \varphi_1 - \varphi_2 - 3\pi/2 = 0 \\ -\sin\varphi_1 \cdot (y_1 - y_2) - \cos\varphi_1 \cdot (x_1 - x_2) - b \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \\ \qquad \xrightarrow{(\varphi_1 - \varphi_2 = 3\pi/2)} -\sin\varphi_1 \cdot (y_1 - y_2) - \cos\varphi_1 \cdot (x_1 - x_2) + b = 0 \\ y_2 - a \cdot \cos\varphi_1 = 0 \end{cases}$$

Restricción motriz:

$$\varphi_1 - \omega t = 0$$

- **Jacobiana**

$$
J = \begin{array}{c|cccccc}
 & \partial/\partial x_1 & \partial/\partial y_1 & \partial/\partial \varphi_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial y_2 & \partial/\partial \varphi_2 \\
\hline
\phi_1 & 1 & & -c\cdot\sin\varphi_1 & & & \\
\phi_2 & & 1 & c\cdot\cos\varphi_1 & & & \\
\phi_3 & & & 1 & & & -1 \\
\phi_4 & -\cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & (*) & \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 & \\
\phi_5 & & & a\cdot\sin\varphi_1 & & 1 & \\
\phi_6 & & & 1 & & &
\end{array}
$$

(*) $\rightarrow\ -\cos\varphi_1\cdot(y_1 - y_2) + \sin\varphi_1\cdot(x_1 - x_2)$

- **Velocidad del punto C**

Se debe resolver el sistema de ecuaciones:

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & -c\cdot\sin\varphi_1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & c\cdot\cos\varphi_1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
-\cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & -\cos\varphi_1\cdot(y_1 - y_2) + \sin\varphi_1\cdot(x_1 - x_2) & \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 & 0 \\
0 & 0 & a\cdot\sin\varphi_1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{\varphi}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{\varphi}_2 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}
$$

de donde:

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{\varphi}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{\varphi}_2 \end{bmatrix}
= J^{-1}\cdot
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{c}\cdot\sin\varphi_1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\mathrm{c}\cdot\cos\varphi_1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & \dfrac{\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1} & 0 & \dfrac{1}{\cos\varphi_1} & -\dfrac{\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1} & \dfrac{\cos\varphi_1\cdot(y_1 - y_2) - \sin\varphi_1\cdot(x_1 - x_2) + \mathrm{a}\cdot\sin^2\varphi_1}{\cos\varphi_1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\mathrm{a}\cdot\sin\varphi_1 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}
$$

por lo que:

$$
X_C = x_2 - a\cdot\cos\varphi_2 = x_2 - a\cdot\cos(\varphi_1 - 3\cdot\pi/2) = x_2 + a\cdot\sin\varphi_1
$$

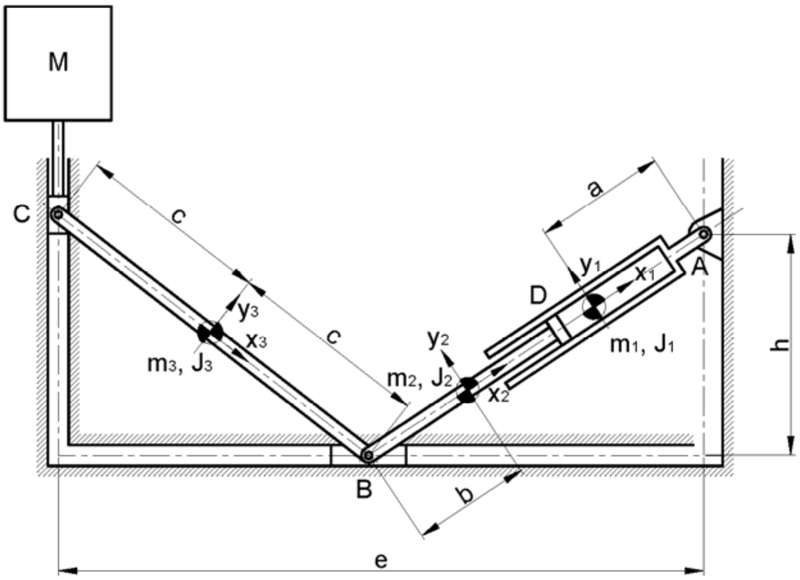
$$
U_C = \dot{x}_2 + a\cdot\dot{\varphi}_1\cdot\cos\varphi_1 = \left(\frac{\cos\varphi_1\cdot(y_1 - y_2) - \sin\varphi_1\cdot(x_1 - x_2) + \mathrm{a}\cdot\sin^2\varphi_1}{\cos\varphi_1}\right)\cdot\omega + a\cdot\omega\cdot\cos\varphi_1
$$

- **Ecuaciones dinámicas**

Como fuerzas exteriores actúan el par aplicado en φ_1, es decir "M".

$$\begin{bmatrix} m_1 & & & & & \\ & m_1 & & & & \\ & & J_1 & & & \\ & & & m_2 & & \\ & & & & m_2 & \\ & & & & & J_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + \left[J_{[5x6]} \right]^T \cdot \begin{bmatrix} F_{AX} \\ F_{AY} \\ M_B \\ F_{NB} \\ F_{NC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

EJERCICIO 6



El mecanismo elevador de la figura está formado por tres cuerpos. Los cuerpos 1 y 2 constituyen la camisa y el émbolo de un cilindro hidráulico de sección S y presión interior P. El cuerpo 1 está articulado a un punto fijo A. El cuerpo 2 está articulado al cuerpo 3 en el punto B. El punto B se mueve longitudinalmente según la dirección horizontal. El punto C, perteneciente al cuerpo 3, se mueve verticalmente.

Considerando como restricción motriz el desplazamiento entre los cuerpos 1 y 2, se pide:

- Determinar los grados de libertad y pares cinemáticos del sistema.
- Determinar las ecuaciones de restricción del sistema.
- Obtener la expresión de la velocidad del punto C.
- Determinar las ecuaciones dinámicas del sistema.

SOLUCIÓN

Determinación de los grados de libertad:

4 Eslabones : 0 cuerpo fijo, 1 (A-D), 2 (D-B) y 3 (B-C)	12 coordenadas
0: Cuerpo fijo	3 ec. rest.
A: Par de revolución entre 0 y 1	2 ec. rest.
D: Par de traslación entre 1 y 2	2 ec. rest.
B: Par de revolución entre 2 y 3	2 ec. rest.
B: Par de traslación-rotación entre 2 y 0	1 ec. rest.
C: Par de traslación-rotación entre 3 y 0	1 ec. rest.
TOTAL	1 g.d.l.

Restricciones:

Restricciones simples:

$$x_0 = 0$$
$$y_0 = 0$$
$$\varphi_0 = 0$$

Se considera el origen de coordenadas en el punto A

Par de revolución A:

$$\vec{r}_A^{\,O} = \vec{r}_A^{\,1}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + a\cos\varphi_1 = 0$$
$$y_1 + a\sin\varphi_1 = 0$$

Par traslación D:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

$$(x_2 - x_1)\sin\varphi_2 - (y_2 - y_1)\cos\varphi_2 = 0$$

Par de revolución B:

$$\vec{r}_B^{\,2} = \vec{r}_B^{\,3}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_3 & -\sin\varphi_3 \\ \sin\varphi_3 & \cos\varphi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_2 - b\cos\varphi_2 - x_3 - c\cos\varphi_3 = 0$$
$$y_2 - b\sin\varphi_2 - y_3 - c\sin\varphi_3 = 0$$

Par traslación-revolución B:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \left\{ \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -h \end{bmatrix} \right\} = \vec{0}$$

$$y_2 - b\sin\varphi_2 + h = 0$$

Par traslación-revolución C:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \left\{ \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_3 & -\sin\varphi_3 \\ \sin\varphi_3 & \cos\varphi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -e \\ -h \end{bmatrix} \right\} = \vec{0}$$

$$x_3 - c\cos\varphi_3 + e = 0$$

Agrupando las ecuaciones anteriores resulta:

$$
\begin{aligned}
& x_1 + a\cos\varphi_1 = 0 \\
& y_1 + a\sin\varphi_1 = 0 \\
& \varphi_1 - \varphi_2 = 0 \\
& (x_2 - x_1)\sin\varphi_2 - (y_2 - y_1)\cos\varphi_2 = 0 \\
& x_2 - b\cos\varphi_2 - x_3 - c\cos\varphi_3 = 0 \\
& y_2 - b\sin\varphi_2 - y_3 - c\sin\varphi_3 = 0 \\
& y_2 - b\sin\varphi_2 + h = 0 \\
& x_3 - c\cos\varphi_3 + e = 0
\end{aligned}
$$

Restricción motriz:

$$
(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - (d_0 + l(t))^2 = 0
$$

Jacobiana

$$
J = \begin{array}{c|ccccccccc}
 & \partial/\partial x_1 & \partial/\partial y_1 & \partial/\partial \varphi_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial y_2 & \partial/\partial \varphi_2 & \partial/\partial x_3 & \partial/\partial y_3 & \partial/\partial \varphi_3 \\
\hline
\phi_1 & 1 & 0 & -a\sin\varphi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\phi_2 & 0 & 1 & a\cos\varphi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\phi_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
\phi_4 & -\sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 & 0 & \sin\varphi_2 & -\cos\varphi_2 & (x_2 - x_1)\cos\varphi_2 + (y_2 - y_1)\sin\varphi_2 & 0 & 0 & 0 \\
\phi_5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b\sin\varphi_2 & -1 & 0 & c\sin\varphi_3 \\
\phi_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -b\cos\varphi_2 & 0 & -1 & -c\cos\varphi_3 \\
\phi_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -b\cos\varphi_2 & 0 & 0 & 0 \\
\phi_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & c\sin\varphi_3 \\
\hline
\phi_9 & 2(x_1 - x_2) & 2(y_1 - y_2) & 0 & -2(x_1 - x_2) & -2(y_1 - y_2) & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Velocidad del punto A

Se debe resolver el sistema de ecuaciones:

$$
J \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{\varphi}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{\varphi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2(d_0 + l(t))\dot{l}(t) \end{bmatrix}
$$

con:

$$
\begin{aligned}
& y_c = y_3 - c\sin\varphi_3 + h \\
& \dot{y}_c = \dot{y}_3 - c\dot{\varphi}_3\cos\varphi_3
\end{aligned}
$$

Ecuaciones dinámicas

Como fuerzas exteriores actúan la producida por la presión en el cilindro, los pesos de cada barra y la carga a elevar.

$$\begin{bmatrix} m_1 &&&&&&&& \\ & m_1 &&&&&&& \\ && J_1 &&&&&& \\ &&& m_2 &&&&& \\ &&&& m_2 &&&& \\ &&&&& J_2 &&& \\ &&&&&&&& \\ &&&&&&&& \\ &&&&&&&& \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{v}_1 \\ \dot{\omega}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{u}_3 \\ \dot{v}_3 \\ \dot{\omega}_3 \end{bmatrix} = \left[J_{8x9}\right]^T \cdot \begin{bmatrix} F_{AX} \\ F_{AY} \\ M_D \\ F_{DN} \\ F_{BX} \\ F_{BY} \\ F_{BN} \\ F_{CN} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} PS\cos\varphi_1 \\ -m_1 g + PS\sin\varphi_1 \\ \\ -PS\cos\varphi_2 \\ -m_2 g - PS\sin\varphi_2 \\ 0 \\ \\ -m_3 g - Mg \\ -Mg\cos\varphi_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \omega_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \omega_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \omega_3 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + a\cos\varphi_1 = 0$$
$$y_1 + a\sin\varphi_1 = 0$$
$$\varphi_1 - \varphi_2 = 0$$
$$(x_2 - x_1)\sin\varphi_2 - (y_2 - y_1)\cos\varphi_2 = 0$$
$$x_2 - b\cos\varphi_2 - x_3 - c\cos\varphi_3 = 0$$
$$y_2 - b\sin\varphi_2 - y_3 - c\sin\varphi_3 = 0$$
$$y_2 - b\sin\varphi_2 + h = 0$$
$$x_3 - c\cos\varphi_3 + e = 0$$