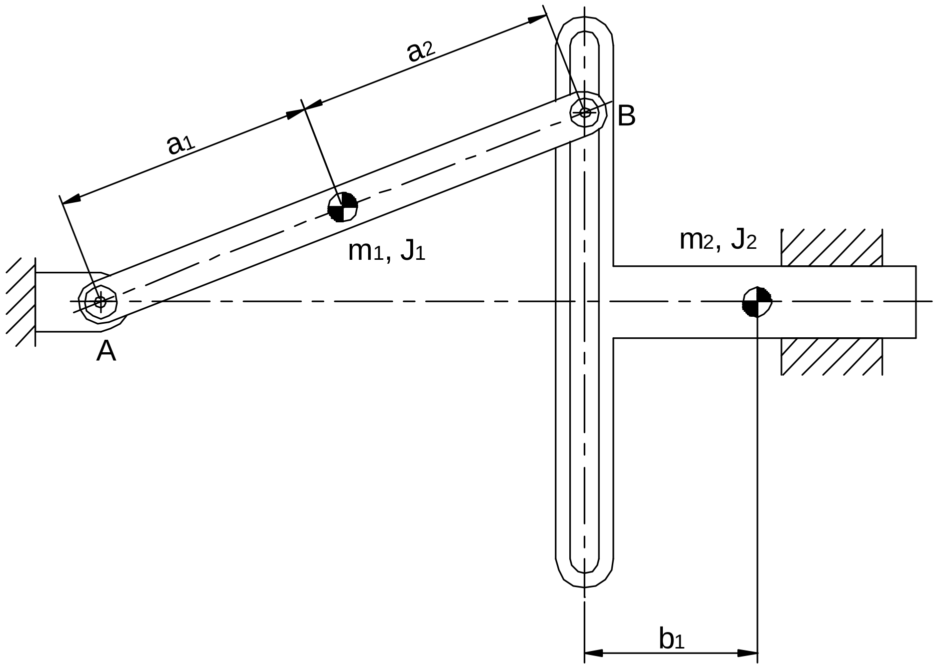
Ejercicio 1:



Determinación de los grados de libertad:

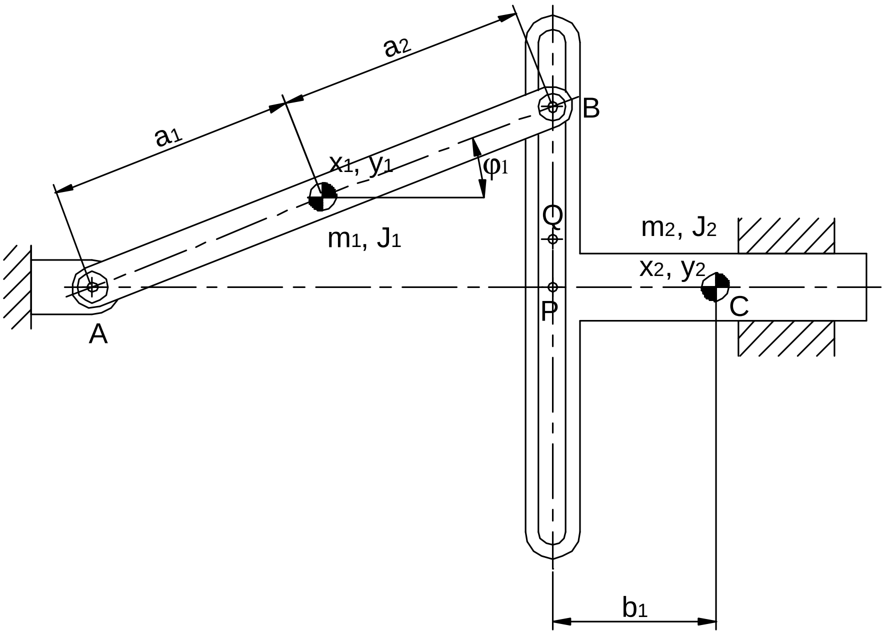
3 Eslabones :1, 2 y 0	9 coordenadas
Un cuerpo fijo (0). 3 restricciones simples	3 ec. rest,
Un par de revolución (A)	2 ec. rest.
Un par de traslación-rotación (B)	1 ec. rest.
Un par de traslación (C)	2 ec. rest.
TOTAL	1 g.d.l.

Coordenadas de los cuerpos:

Cuerpo 1 : $\left[x_1 \quad y_1 \quad j_1\right]^T$

Cuerpo 2 : $\left[x_2 \quad y_2 \quad j_2\right]^T$

Cuerpo 0 : $\left[x_0 \quad y_0 \quad j_0\right]^T$



Vectores de posición de los puntos implicados:

Punto A

$$\vec{r}_1^{\,A} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & -sen\varphi_1 \\ sen\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - a_1\cos\varphi_1 \\ y_1 - a_1 sen\varphi_1 \end{bmatrix}$$

Punto B

$$\vec{r}_1^{\,B} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & -sen\varphi_1 \\ sen\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + a_2\cos\varphi_1 \\ y_1 + a_2 sen\varphi_1 \end{bmatrix}$$

Punto C

$$\vec{r}_2^{\,C} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & -sen\varphi_1 \\ sen\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Punto P

$$\vec{r}_2^{\,P} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & -sen\varphi_2 \\ sen\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - b_1\cos\varphi_2 \\ y_2 - b_1 sen\varphi_2 \end{bmatrix}$$

Punto Q

$$\vec{r}_2^{\,Q} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & -sen\varphi_2 \\ sen\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - b_1\cos\varphi_2 - sen\varphi_2 \\ y_2 - b_1 sen\varphi_2 + \cos\varphi_2 \end{bmatrix}$$

Restricciones:

Restricciones simples:

$$x_0 = 0$$
$$y_0 = 0$$
$$j_0 = 0$$

Par de revolución A:

$$\vec{r}_1^{\,A} = 0$$
$$\begin{cases} x_1 - a_1 \cos j_1 = 0 \\ y_1 - a_1 sen j_1 = 0 \end{cases}$$

Par traslación-revolución B:

$$\overrightarrow{BP} // \overrightarrow{QP} = 0$$

$$\overrightarrow{BP} = \begin{bmatrix} x_2 - b_1 \cos j_2 - x_1 - a_2 \cos j_1 \\ y_2 - b_1 sen j_2 - y_1 - a_2 sen j_1 \end{bmatrix}$$
$$\overrightarrow{QP} = \begin{bmatrix} - sen j_2 \\ \cos j_2 \end{bmatrix}$$
$$\overrightarrow{BP} \times \overrightarrow{QP} = 0$$
$$(x_2 - b_1 \cos j_2 - x_1 - a_2 \cos j_1) \times (\cos j_2) - (y_2 - b_1 sen j_2 - y_1 - a_2 sen j_1) \times (- sen j_2) = 0$$

Par de traslación C:

$$\vec{u} // \overrightarrow{OC} = 0$$
$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{OC} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$
$$\vec{u} \times \overrightarrow{OC} = 0 \qquad 1 \times y_2 - 0 \times x_2 = 0 \qquad y_2 = 0$$
$$j_2 - j_3 = 0 \qquad j_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad j_2 = 0$$
$$\begin{cases} y_2 = 0 \\ j_2 = 0 \end{cases}$$

Ecuaciones de restricción:

Operando con las ecuaciones anteriores y eliminando las que resultan valores nulos resulta:

$$x_1 - a_1 \cos j_1 = 0$$

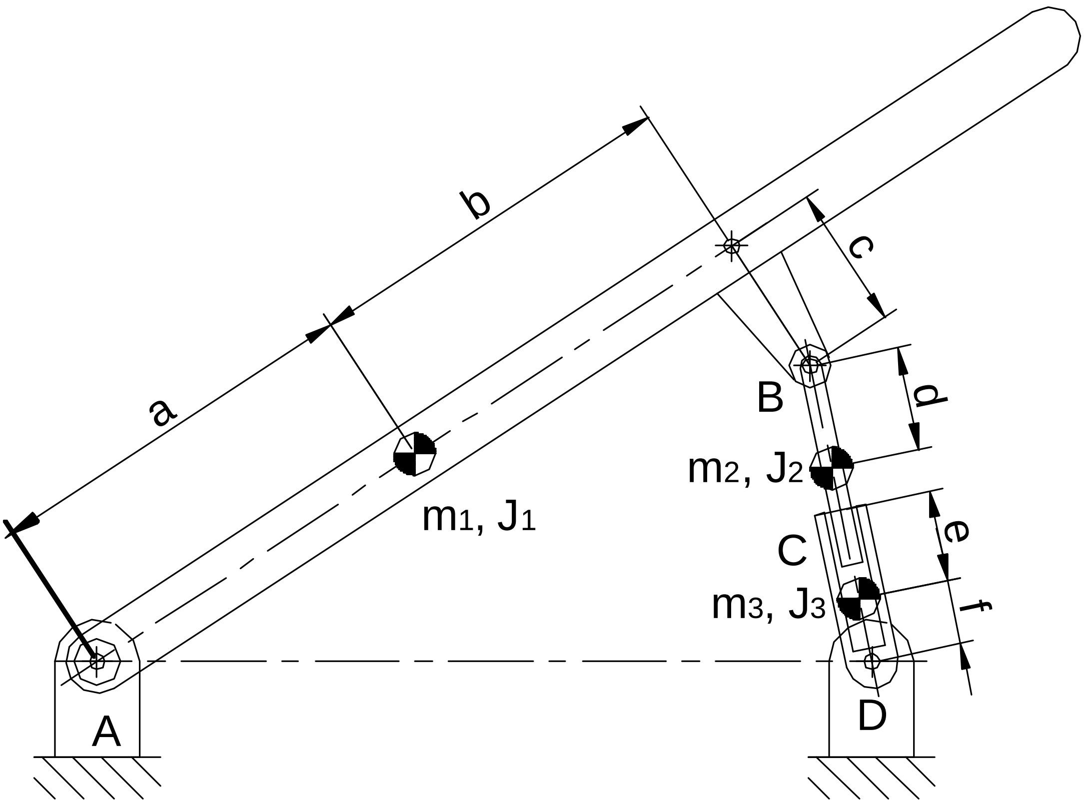
$$y_1 - a_1 sen j_1 = 0$$

$$x_2 - b_1 - x_1 - a_2 \cos j_1 = 0$$

Jacobiana

	$\frac{\partial}{\partial x_1}$	$\frac{\partial}{\partial y_1}$	$\frac{\partial}{\partial j_1}$	$\frac{\partial}{\partial x_2}$
f_1	1	0	$a_1 sen j_1$	0
f_2	0	1	$-a_1 \cos j_1$	0
f_3	-1	0	$a_2 sen j_1$	1

Ejercicio 2:



Determinación de los grados de libertad:

4 Eslabones :1, 2, 3 y 0	12 coordenadas
Un cuerpo fijo (0). 3 restricciones simples	3 ec. rest,
Tres pares de revolución (A, B y D)	3x2 ec. rest.
Un par de traslación (C)	2 ec. rest.
TOTAL	1 g.d.l.

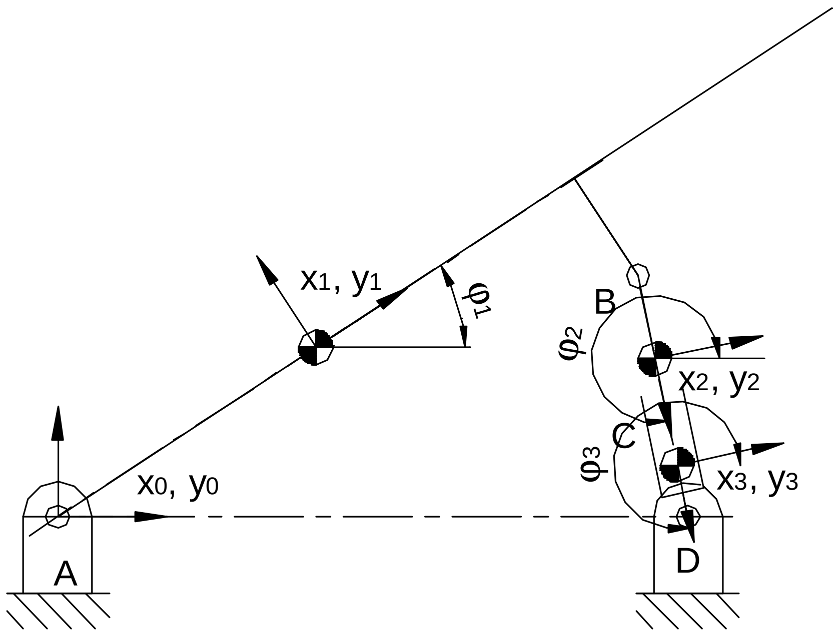
Coordenadas de los cuerpos:

Cuerpo 1 : $[x_1 \quad y_1 \quad j_1]^T$

Cuerpo 2 : $[x_2 \quad y_2 \quad j_2]^T$

Cuerpo 3 : $[x_3 \quad y_3 \quad j_3]^T$

Cuerpo 0 : $[x_0 \quad y_0 \quad j_0]^T$



Vectores de posición de los puntos implicados:

Cuerpo 0:

Punto A: $\vec{r}_0^{\,A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ Punto D: $\vec{r}_0^{\,D} = \begin{bmatrix} L \\ 0 \end{bmatrix}$

Cuerpo 1:

Punto A: $\vec{r}_1^{\,A} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - a\cos\varphi_1 \\ y_1 - a\sin\varphi_1 \end{bmatrix}$

Punto B: $\vec{r}_1^{\,B} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \\ -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + b\cos\varphi_1 + c\sin\varphi_1 \\ y_1 + b\sin\varphi_1 - c\cos\varphi_1 \end{bmatrix}$

Cuerpo 2:

Punto B: $\vec{r}_2^{\,B} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -d \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - d\cos\varphi_2 \\ y_2 - d\sin\varphi_2 \end{bmatrix}$

Cuerpo 3:

Punto C: $\vec{r}_3^{\,C} = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_3 & -\sin\varphi_3 \\ \sin\varphi_3 & \cos\varphi_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -e \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 - e\cos\varphi_3 \\ y_3 - e\sin\varphi_3 \end{bmatrix}$

Punto D: $\vec{r}_3^{\,D} = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_3 & -\sin\varphi_3 \\ \sin\varphi_3 & \cos\varphi_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 + f\cos\varphi_3 \\ y_3 + f\sin\varphi_3 \end{bmatrix}$

Restricciones:

Restricciones simples:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ j_0 = 0 \end{cases}$$

Par de revolución A:

$$\vec{r}_1^{\,A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 - a\cos j_1 = 0 \\ y_1 - a\sin j_1 = 0 \end{cases}$$

Par de revolución B:

$$\vec{r}_1^{\,B} = \vec{r}_2^{\,B} \qquad \begin{cases} x_1 + b\cos j_1 + c\sin j_1 - x_2 + d\cos j_2 = 0 \\ y_1 + b\sin j_1 - c\cos j_1 - y_2 + d\sin j_2 = 0 \end{cases}$$

Par de revolución D:

$$\vec{r}_3^{\,D} = \vec{r}_0^{\,D} \qquad \begin{cases} x_3 + f\cos j_3 - L = 0 \\ \quad y_3 + f\sin j_3 = 0 \end{cases}$$

Par de traslación C:

$$\begin{cases} j_2 = j_3 \\ \overrightarrow{DC} // \overrightarrow{CB} \end{cases}$$

$$\begin{cases} j_2 = j_3 \\ \overrightarrow{DC} // \overrightarrow{CB} \Rightarrow \overrightarrow{DC} \times \overrightarrow{CB} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{DC} = \vec{r}_3^{\,C} - \vec{r}_3^{\,D} = \begin{bmatrix} -e\cos j_3 - f\cos j_3 \\ -e\sin j_3 - f\sin j_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(e+f)\cos j_3 \\ -(e+f)\sin j_3 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{CB} = \vec{r}_2^{\,B} - \vec{r}_3^{\,C} = \begin{bmatrix} x_3 - e\cos j_3 - x_2 + d\cos j_2 \\ y_3 - e\sin j_3 - y_2 + d\sin j_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 - x_2 - e\cos j_3 + d\cos j_2 \\ y_3 - y_2 - e\sin j_3 + d\sin j_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} j_2 - j_3 = 0 \\ \cos j_3 (y_3 - y_2 - e\sin j_3 + d\sin j_2) - \sin j_3 (x_3 - x_2 - e\cos j_3 + d\cos j_2) = 0 \end{cases}$$

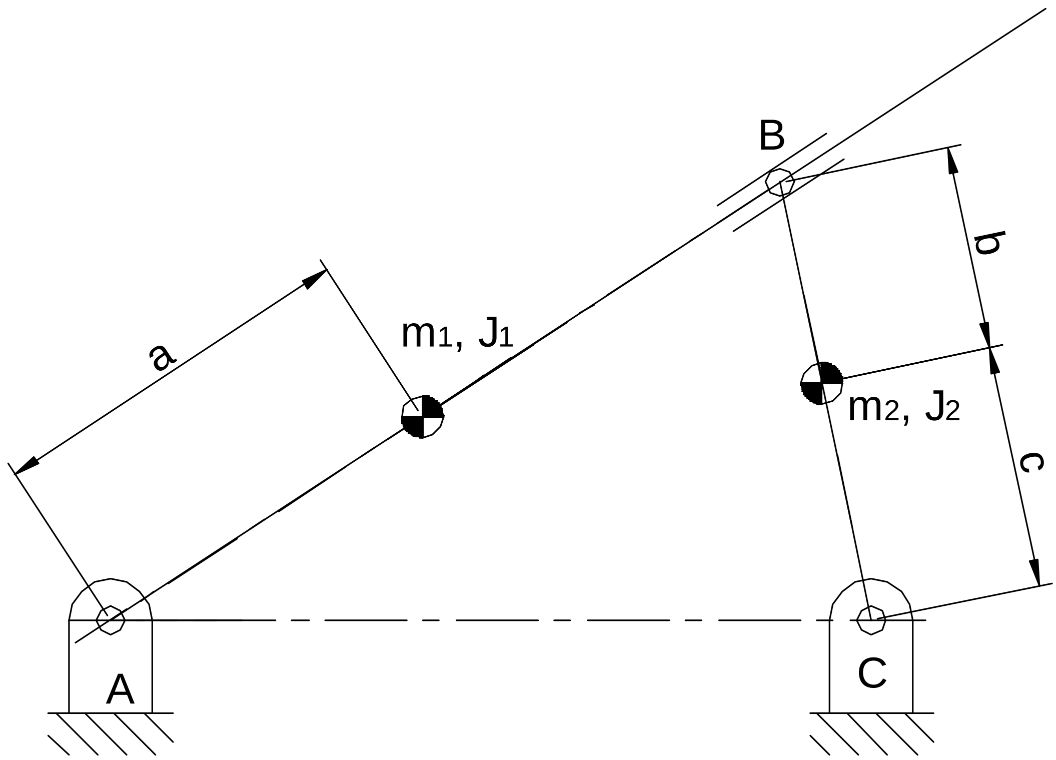
Ecuaciones de restricción:

Operando con las ecuaciones anteriores y simplificando resulta:

$$
\begin{aligned}
&x_0 = 0\\
&y_0 = 0\\
&j_0 = 0\\
&x_1 - a\cos j_1 = 0\\
&y_1 - a\sin j_1 = 0\\
&x_1 + b\cos j_1 + c\sin j_1 - x_2 + d\cos j_2 = 0\\
&y_1 + b\sin j_1 - c\cos j_1 - y_2 + d\sin j_2 = 0\\
&x_3 + f\cos j_3 - L = 0\\
&y_3 + f\sin j_3 = 0\\
&j_2 - j_3 = 0\\
&\cos j_3(y_3 - y_2 - e\sin j_3 + d\sin j_2) - \sin j_3(x_3 - x_2 - e\cos j_3 + d\cos j_2) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&x_1 - a\cos j_1 = 0\\
&y_1 - a\sin j_1 = 0\\
&x_1 + b\cos j_1 + c\sin j_1 - x_2 + d\cos j_2 = 0\\
&y_1 + b\sin j_1 - c\cos j_1 - y_2 + d\sin j_2 = 0\\
&x_3 + f\cos j_2 - L = 0\\
&y_3 + f\sin j_2 = 0\\
&\cos j_2(y_3 - y_2 - e\sin j_3 + d\sin j_2) - \sin j_2(x_3 - x_2 - e\cos j_3 + d\cos j_2) = 0
\end{aligned}
$$

Ejercicio 3:



Determinación de los grados de libertad:

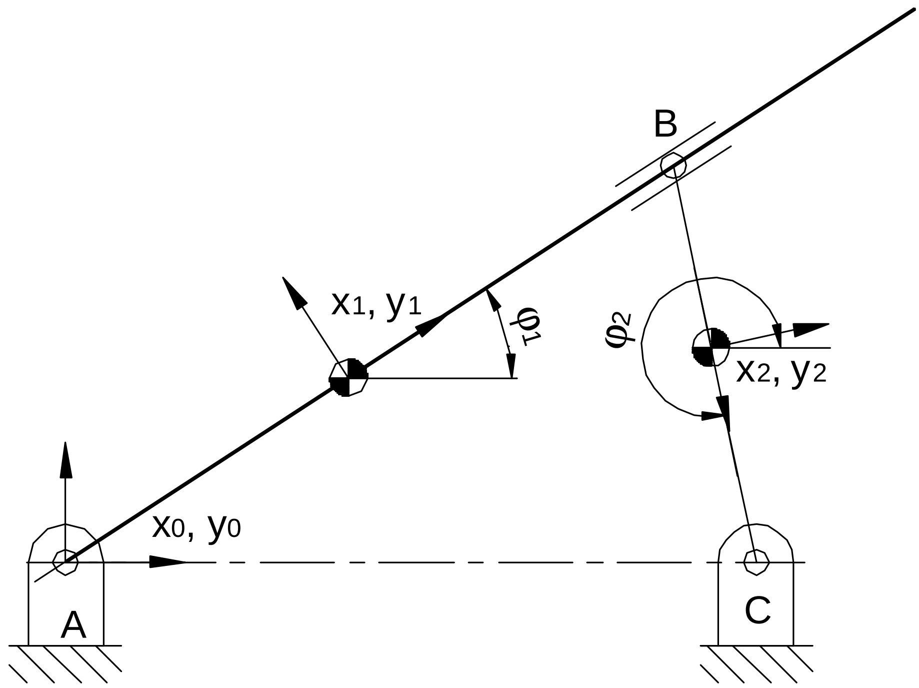
3 Eslabones :1, 2 y 0	9 coordenadas
Un cuerpo fijo (0). 3 restricciones simples	3 ec. rest,
Dos pares de revolución (A y C)	2x2 ec. rest.
Un par de revolución-traslación (B)	1 ec. rest.
TOTAL	1 g.d.l.

Coordenadas de los cuerpos:

Cuerpo 1 : $[x_1 \quad y_1 \quad j_1]^T$

Cuerpo 2 : $[x_2 \quad y_2 \quad j_2]^T$

Cuerpo 0 : $[x_0 \quad y_0 \quad j_0]^T$



Vectores de posición de los puntos implicados:

Cuerpo 0:

Punto A: $\vec{r}_0^{\,A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ Punto C: $\vec{r}_0^{\,C} = \begin{bmatrix} L \\ 0 \end{bmatrix}$

Cuerpo 1:

Punto A: $\vec{r}_1^{\,A} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos j_1 & -\sin j_1 \\ \sin j_1 & \cos j_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - a\cos j_1 \\ y_1 - a\sin j_1 \end{bmatrix}$

Cuerpo 2:

Punto B: $\vec{r}_2^{\,B} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos j_2 & -\sin j_2 \\ \sin j_2 & \cos j_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - b\cos j_2 \\ y_2 - b\sin j_2 \end{bmatrix}$

Punto C: $\vec{r}_2^{\,C} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos j_2 & -\sin j_2 \\ \sin j_2 & \cos j_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 + c\cos j_2 \\ y_2 + c\sin j_2 \end{bmatrix}$

Restricciones:

Restricciones simples:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ j_0 = 0 \end{cases}$$

Par de revolución A:

$$\vec{r}_1^{\,A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 - a\cos j_1 = 0 \\ y_1 - a\sin j_1 = 0 \end{cases}$$

Par de revolución C:

$$\vec{r}_2^{\,C} = \vec{r}_0^{\,C} \qquad \begin{cases} x_2 + c\cos j_2 - L = 0 \\ y_2 + c\sin j_2 = 0 \end{cases}$$

Par de revolución - traslación B:

$$\overrightarrow{u_1} // \overrightarrow{X_1 B} \Rightarrow \overrightarrow{u_1} \times \overrightarrow{X_1 B} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{u_1} = \begin{bmatrix} \cos j_1 \\ \sin j_1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{X_1 B} = \vec{r}_2^{\,B} - \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} x_2 - b\cos j_2 - x_1 \\ y_2 - b\sin j_2 - y_1 \end{bmatrix}$$

$$\cos j_1 (y_2 - y_1 - b\sin j_2) - \sin j_1 (x_2 - x_1 - b\cos j_2) = 0$$

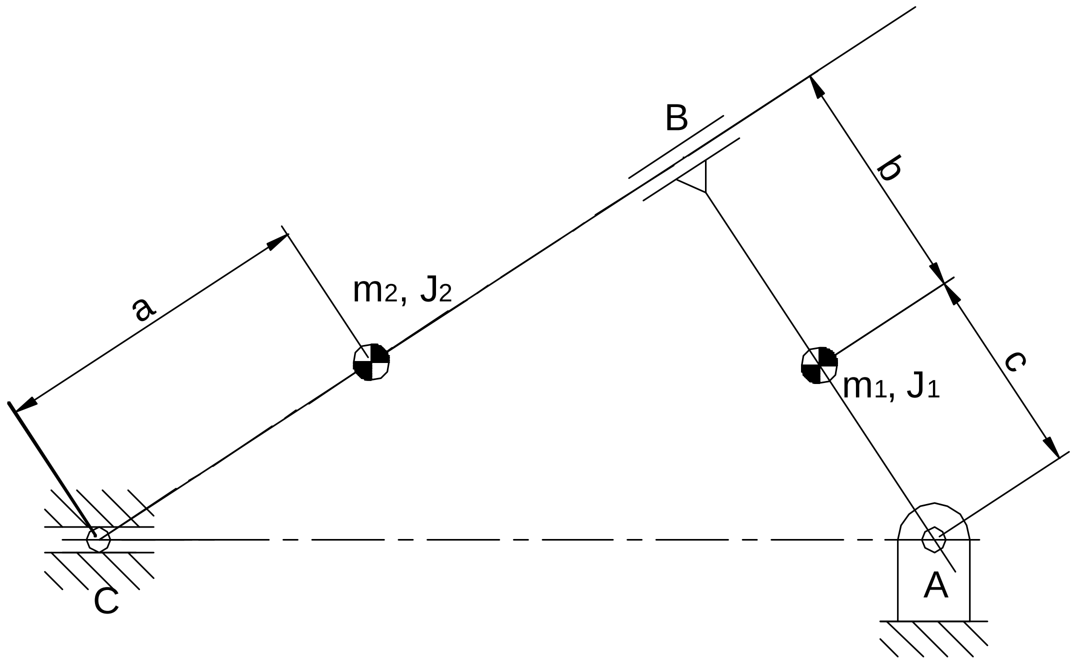
Ecuaciones de restricción:

Operando con las ecuaciones anteriores y simplificando resulta:

$$x_0 = 0$$
$$y_0 = 0$$
$$j_0 = 0$$
$$x_1 - a\cos j_1 = 0$$
$$y_1 - a\sin j_1 = 0$$
$$x_2 + c\cos j_2 - L = 0$$
$$y_2 + c\sin j_2 = 0$$
$$\cos j_1 (y_2 - y_1 - b\sin j_2) - \sin j_1 (x_2 - x_1 - b\cos j_2) = 0$$

$$x_1 - a\cos j_1 = 0$$
$$y_1 - a\sin j_1 = 0$$
$$x_2 + c\cos j_2 - L = 0$$
$$y_2 + c\sin j_2 = 0$$
$$\cos j_1 (y_2 - y_1 - b\sin j_2) - \sin j_1 (x_2 - x_1 - b\cos j_2) = 0$$

Ejercicio 4:



Determinación de los grados de libertad:

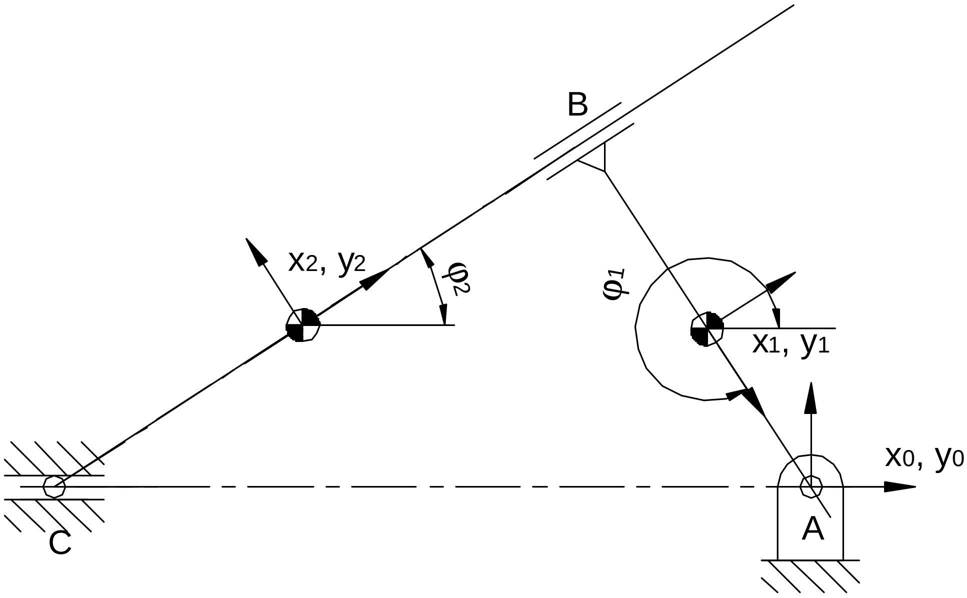
3 Eslabones :1, 2 y 0	9 coordenadas
Un cuerpo fijo (0). 3 restricciones simples	3 ec. rest,
Un par de revolución (A)	2 ec. rest.
Un par de traslación (B)	2 ec. rest.
Un par de revolución-traslación (C)	1 ec. rest.
TOTAL	1 g.d.l.

Coordenadas de los cuerpos:

Cuerpo 1 : $\left[x_1 \quad y_1 \quad j_1\right]^T$

Cuerpo 2 : $\left[x_2 \quad y_2 \quad j_2\right]^T$

Cuerpo 0 : $\left[x_0 \quad y_0 \quad j_0\right]^T$



Vectores de posición de los puntos implicados:

Cuerpo 0:

Punto A: $\vec{r}_0^{\,A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Cuerpo 1:

Punto A: $\vec{r}_1^{\,A} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos j_1 & -\sin j_1 \\ \sin j_1 & \cos j_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + c\cos j_1 \\ y_1 + c\sin j_1 \end{bmatrix}$

Punto B: $\vec{r}_1^{\,B} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos j_1 & -\sin j_1 \\ \sin j_1 & \cos j_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - b\cos j_1 \\ y_1 - b\sin j_1 \end{bmatrix}$

Cuerpo 2:

Punto C: $\vec{r}_2^{\,C} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos j_2 & -\sin j_2 \\ \sin j_2 & \cos j_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - a\cos j_2 \\ y_2 - a\sin j_2 \end{bmatrix}$

Restricciones:

Restricciones simples:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ j_0 = 0 \end{cases}$$

Par de revolución A:

$$\vec{r}_1^{\,A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 + c\cos\varphi_1 = 0 \\ y_1 + c\sin\varphi_1 = 0 \end{cases}$$

Par de traslación B:

$$\begin{cases} \varphi_1 - \varphi_2 - 3\pi/2 = 0 \\ \vec{u}_2 // \overrightarrow{X_2B_1} \Rightarrow \overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{X_2B_1} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{X_2B_1} = \begin{bmatrix} x_1 - b\cos\varphi_1 - x_2 \\ y_1 - b\sin\varphi_1 - y_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \varphi_1 - \varphi_2 - 3\pi/2 = 0 \\ \cos\varphi_2(y_1 - b\sin\varphi_1 - y_2) - \sin\varphi_2(x_1 - b\cos\varphi_1 - x_2) = 0 \end{cases}$$

Par de revolución - traslación C:

$$\vec{u}_0 // \overrightarrow{CA} \Rightarrow \vec{u}_0 \times \overrightarrow{CA} = \vec{0}$$

$$\vec{u}_0 = \begin{bmatrix} \cos\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{CA} = \vec{r}_2^{\,C} - \vec{r}_0^{\,A} = \begin{bmatrix} x_2 - a\cos\varphi_2 \\ y_2 - a\sin\varphi_2 \end{bmatrix}$$

$$\cos\varphi_0(y_2 - a\sin\varphi_2) - \sin\varphi_0(x_2 - a\cos\varphi_2) = 0$$

Ecuaciones de restricción:

Operando con las ecuaciones anteriores y simplificando resulta:

$$x_0 = 0$$
$$y_0 = 0$$
$$\varphi_0 = 0$$
$$x_1 + c\cos\varphi_1 = 0$$
$$y_1 + c\sin\varphi_1 = 0$$
$$\varphi_1 - \varphi_2 - 3\pi/2 = 0$$
$$\cos\varphi_2(y_1 - b\sin\varphi_1 - y_2) - \sin\varphi_2(x_1 - b\cos\varphi_1 - x_2) = 0$$
$$\cos\varphi_0(y_2 - a\sin\varphi_2) - \sin\varphi_0(x_2 - a\cos\varphi_2) = 0$$

$$
\begin{aligned}
&x_1 + c\cos j_1 = 0\\
&y_1 + c\sin j_1 = 0\\
&j_1 - j_2 - 3p/2 = 0\\
&\cos j_2 (y_1 - b\sin j_1 - y_2) - \sin j_2 (x_1 - b\cos j_1 - x_2) = 0\\
&y_2 - a\sin j_2 = 0
\end{aligned}
$$