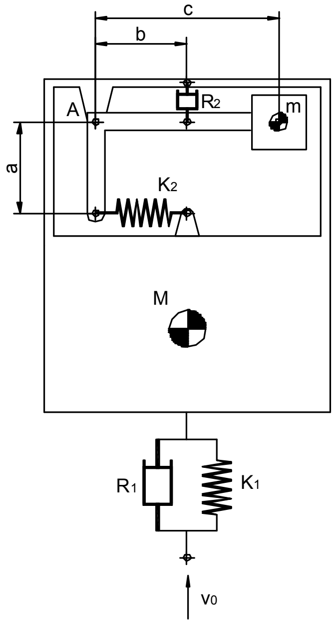


El modelo de la figura constituye un acelerómetro formado por un cuerpo de masa M que en su interior tiene un balancín que gira alrededor del punto A con una masa m concentrada en su extremo. El balancín está sujeto a la carcasa mediante un muelle y un amortiguador según puede verse.

Considerando que la masa M solo tiene movimiento vertical y que el balancín solamente realiza pequeños giros, se pide:

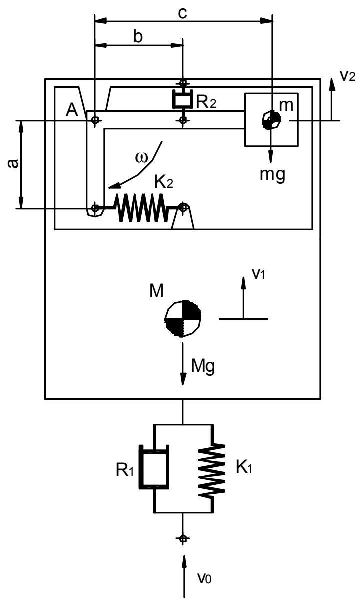
Modelo de bond graph del sistema, incluyendo causalidad, justificando y explicando el mismo.

Flujos y esfuerzos del sistema

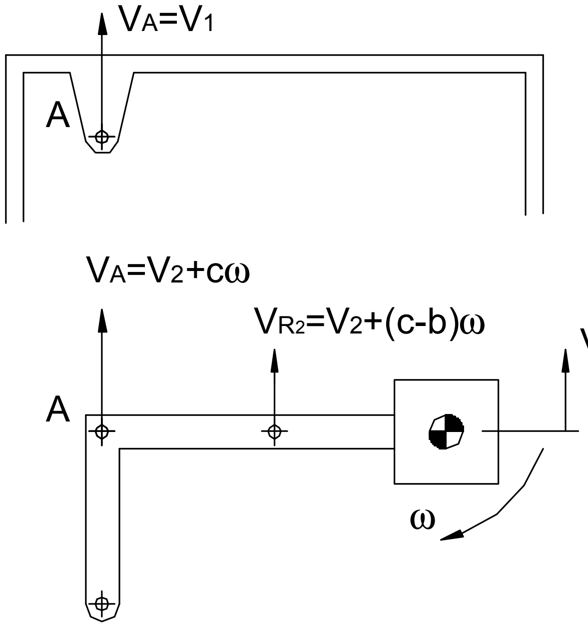
Ecuaciones dinámicas del sistema.

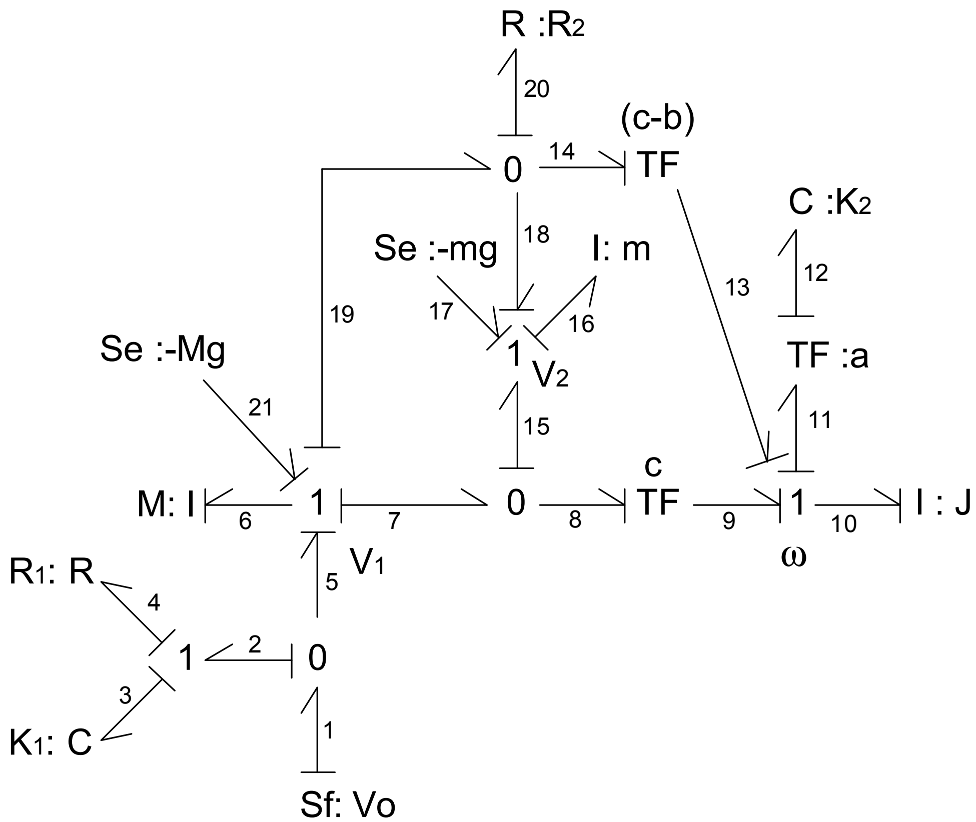
Solución A

Se consideran como coordenadas del sistema el movimiento vertical de la masa M (v_1), el movimiento vertical de la masa m (v_2) y el giro del balancín alrededor del punto A (ω). Actúan como fuerzas exteriores los pesos mg y Mg de las dos masas.



Modelo de bond graph





Bond	Flujos	Esfuerzos
1	v_0	$K_1 q_1 + R_1(v_0 - v_1)$
2	$v_0 - v_1$	$K_1 q_1 + R_1(v_0 - v_1)$
3	$v_0 - v_1$	$K_1 q_1$
4	$v_0 - v_1$	$R_1(v_0 - v_1)$
5	v_1	$K_1 q_1 + R_1(v_0 - v_1)$
6	v_1	$-Mg + K_1 q_1 + R_1(v_0 - v_1) - m\dot{v}_2 - mg + R_2 bw - R_2 bw =$ $-Mg + K_1 q_1 + R_1(v_0 - v_1) - m\dot{v}_2 - mg$
7	v_1	$m\dot{v}_2 + mg - R_2 bw$
8	cw	$m\dot{v}_2 + mg - R_2 bw$
9	w	$mc\dot{v}_2 + mcg - R_2 bcw$
10	w	$mc\dot{v}_2 + mcg - R_2 bcw + bR_2(c-b)w - aK_2 q_2 =$ $mc\dot{v}_2 + mcg - R_2 b^2 w - aK_2 q_2$
11	w	$aK_2 q_2$
12	aw	$K_2 q_2$
13	w	$-bR_2(b-c)w$
14	$(c-b)w$	$R_2 bw$
15	$v_1 - cw$	$m\dot{v}_2 + mg - R_2 bw$
16	$v_1 - cw$	$m\dot{v}_2$
17	$v_1 - cw$	$-mg$
18	$v_1 - cw$	$R_2 bw$
19	v_1	$R_2 bw$
20	$v_1 - v_1 + cw - (c-b)w = bw$	$R_2 bw$
21	v_1	$-Mg$

Ecuaciones dinámicas:

$$M\dot{v}_1 = -Mg + K_1 q_1 + R_1(v_0 - v_1) - m\dot{v}_2 - mg \qquad \dot{q}_1 = v_0 - v_1$$

$$J\dot{w} = mc\dot{v}_2 + mcg - R_2 b^2 w - aK_2 q_2 \qquad \dot{q}_2 = aw$$

$$v_1 = v_2 + cw$$

que reducidas resultan

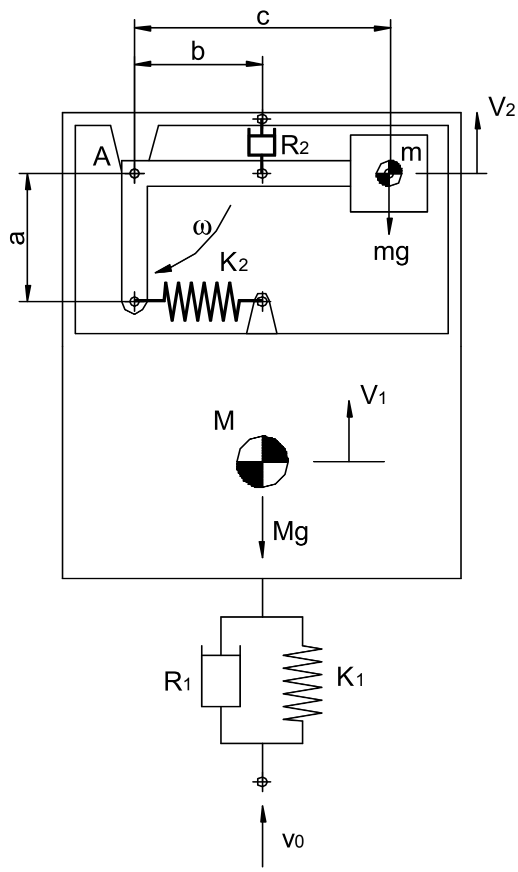
$$M\dot{v}_1 = -Mg + K_1 q_1 + R_1(v_0 - v_1) - m(\dot{v}_1 - c\dot{w}) - mg \Rightarrow (M+m)\dot{v}_1 - mc\dot{w} = -(M+m)g + K_1 q_1 + R_1(v_0 - v_1)$$

$$J\dot{w} = mc\dot{v}_2 + mcg - R_2 b^2 w - aK_2 q_2 \Rightarrow (J + mc^2)\dot{w} - mc\dot{v}_1 = mcg - R_2 b^2 w - aK_2 q_2$$

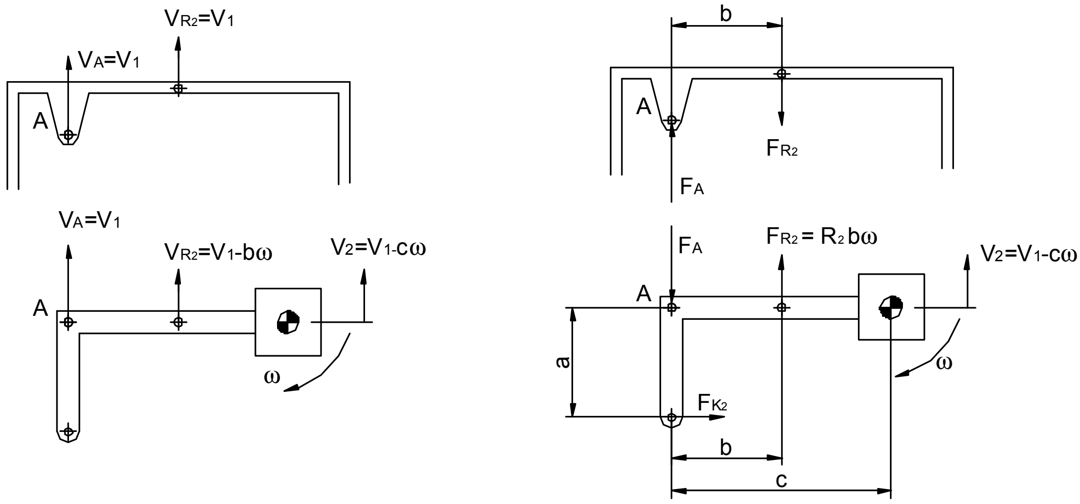
$$\dot{q}_1 = v_0 - v_1 \qquad \dot{q}_2 = aw$$

Solución B

Se consideran como grados de libertad el movimiento vertical de la masa M y el giro del balancín alrededor del punto A. Actúan como fuerzas exteriores los pesos mg y Mg de las dos masas.



Leyes físicas:



En las figuras anteriores pueden verse las ecuaciones de velocidades que de deben cumplir y los diagramas de sólido libre en la zona superior del cuerpo.

1. Equilibrio de fuerzas sobre el cuerpo de masa M:

$$\sum F = M\,\dot{v}_1$$

$$M\,\dot{v}_1 = Peso + Muelle\ K_1 + Amortig\ R_1 + F_A + Amortig\ R_2$$

$$Peso = -Mg$$

$$Muelle\ K_1 = K_1 q_1$$

$$Amortig\ R_1 = R_1(v_0 - v_1)$$

$$Amortig\ R_2 = -R_2 bw$$

$$F_A = R_2 bw - mg - m(\dot{v}_1 - c\,\dot{w})$$

$$M\,\dot{v}_1 = -Mg + K_1 q_1 + R_1(v_0 - v_1) - R_2 bw + R_2 bw - mg - m(\dot{v}_1 - c\,\dot{w})$$

$$(M+m)\,\dot{v}_1 = -(M+m)g + K_1 q_1 + R_1(v_0 - v_1) + mc\,\dot{w}$$

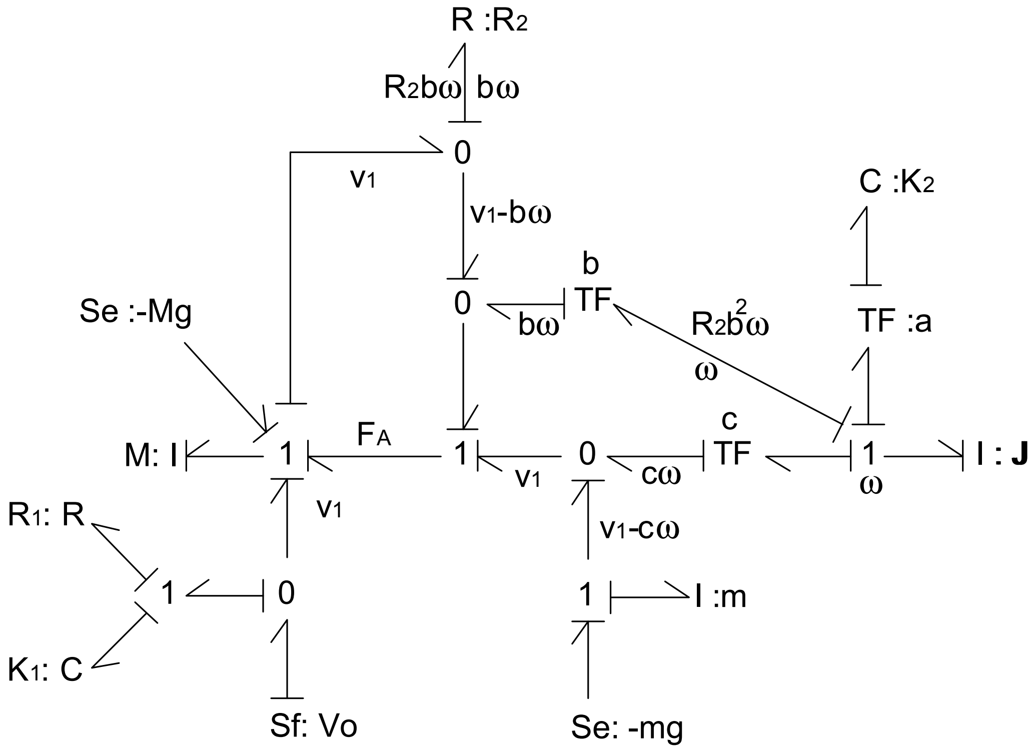
2. Equilibrio de momentos en el punto A:

$$\sum M_A = J\,\dot{w}$$

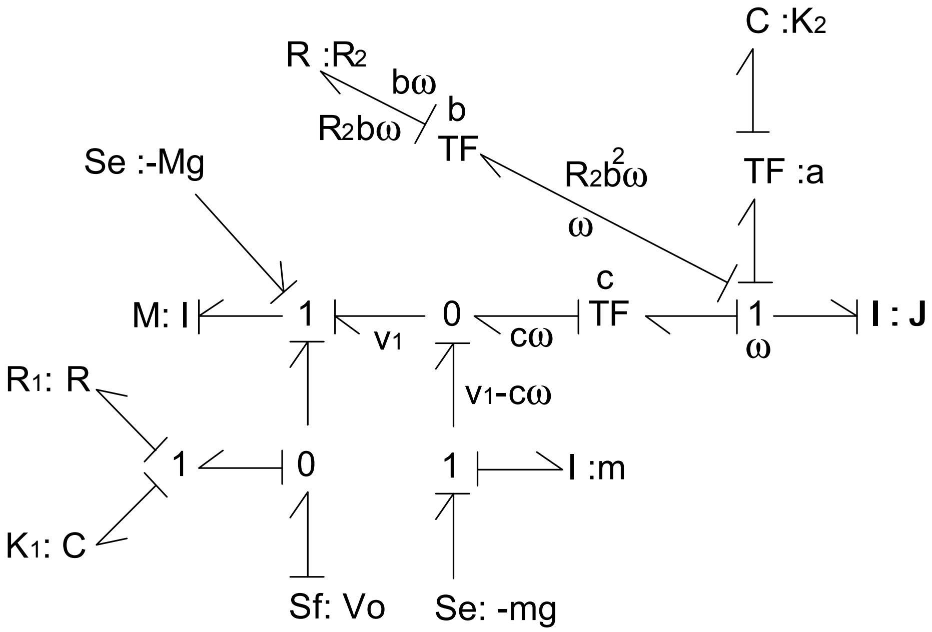
$$J\,\dot{w} = -a\,K_2 q_2 - bR_2 bw + cmg + cm(\dot{v}_1 - c\,\dot{w})$$

$$\left(J + mc^2\right)\dot{w} = -a\,K_2 q_2 - bR_2 bw + cmg + cm\,\dot{v}_1$$

Modelo de bond graph



El modelo puede simplificarse de la forma siguiente:



Las ecuaciones que definen este bond graph son las mismas que las obtenidas en el caso 1, es decir,

$$(M+m)\dot{v}_1 - mc\dot{w} = -(M+m)g + K_1 q_1 + R_1(v_0 - v_1)$$

$$(J + mc^2)\dot{w} - mc\dot{v}_1 = mcg - R_2 b^2 w - aK_2 q_2$$

$$\dot{q}_1 = v_0 - v_1$$

$$\dot{q}_2 = aw$$

Por último, la inercia con causalidad dependiente puede reducirse a una inercia matricial de la forma: