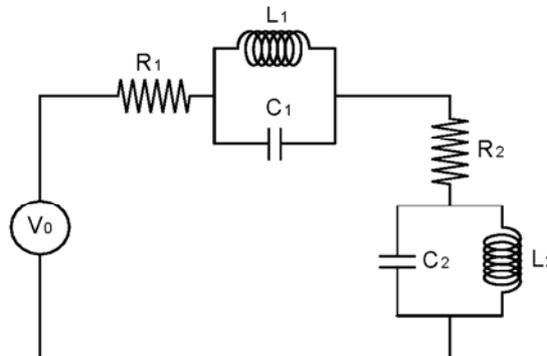


- Simulación en Ingeniería Mecánica -

EJERCICIO 1

El circuito eléctrico de la figura está formado por un conjunto de Resistencias, condensadores, bobinas y una fuente de tensión.



Para el sistema de la figura, se pide:

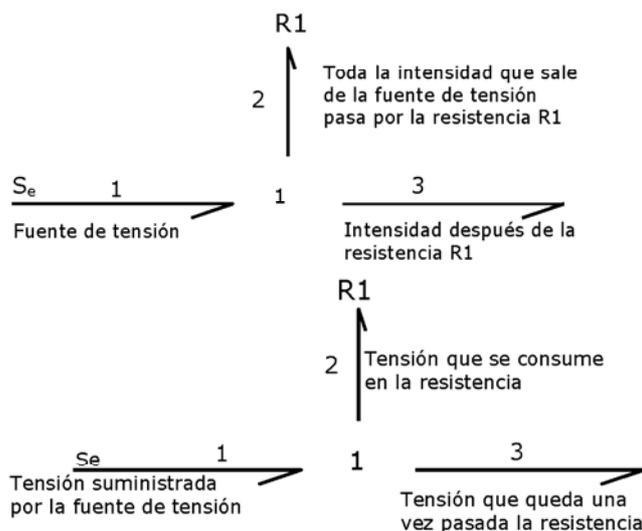
Modelo de bond graph del sistema, incluyendo causalidad, justificando y explicando el mismo.

Flujos y esfuerzos del sistema y ecuaciones dinámicas del sistema.

SOLUCIÓN

Se va a desarrollar el Bond-Graph del circuito por módulos:

Módulo 1: Resistencia R_1

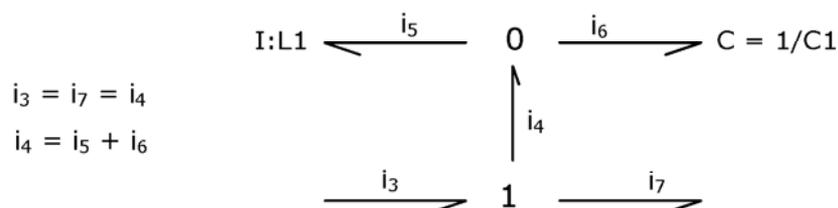
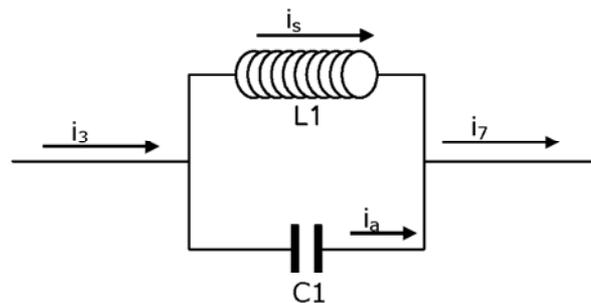
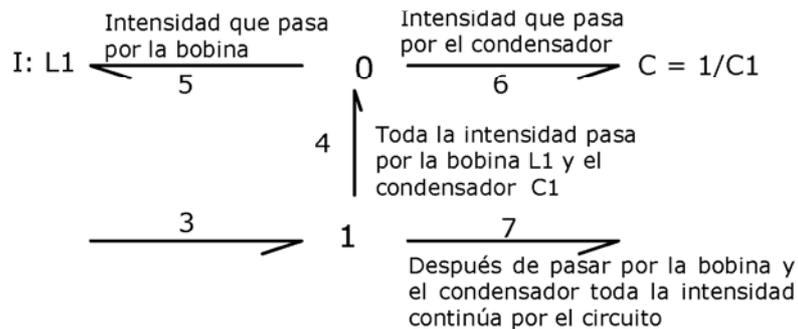


Toda la intensidad del circuito pasa por la resistencia R_1 , es decir, está en serie y por éste motivo la intensidad la que entra en la resistencia es la misma que la que sale de ella. En la resistencia R_1 hay una caída de tensión, de tal forma que después de ella la tensión es igual a la suministrada por la fuente menos la pérdida en la resistencia. Por estas razones, los bonds 1, 2 y 3 estarán en torno a una unión 1.

- Simulación en Ingeniería Mecánica -

Módulo 2: Conjunto L1- C1

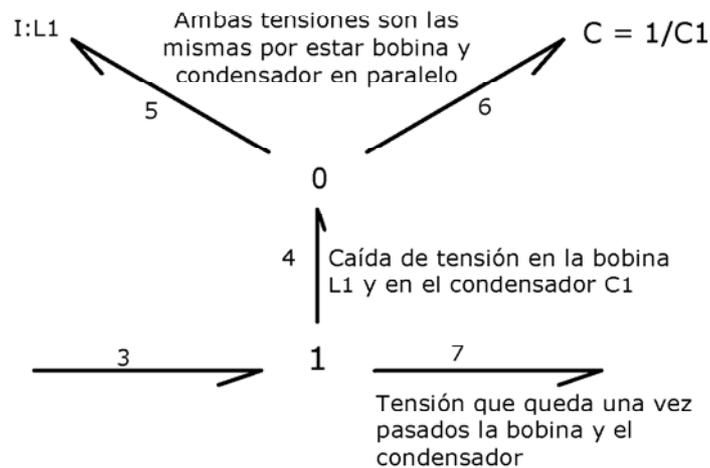
La bobina L_1 y el condensador C_1 están en paralelo entre ellos, pero en serie con el circuito, es decir, toda la intensidad que pasa por ellos vuelve a sumarse posteriormente y continúa por el circuito.



Como los bonds 3, 4, 7 están asociados a la misma intensidad, se encuentran en una unión 1.

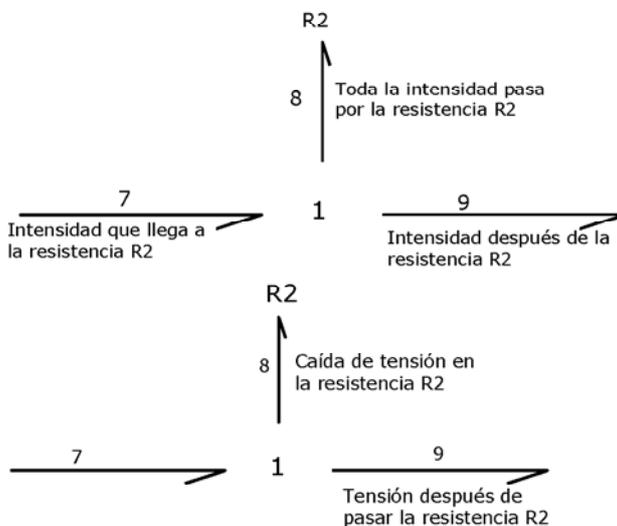
La intensidad que llega por el bond 4 se divide, posteriormente, en la que pasa por la bobina y la que se va por el condensador. Como se debe cumplir que $i_4 = i_5 + i_6$, los bonds 4, 5 y 6 estarán en torno a una unión 0.

- Simulación en Ingeniería Mecánica -

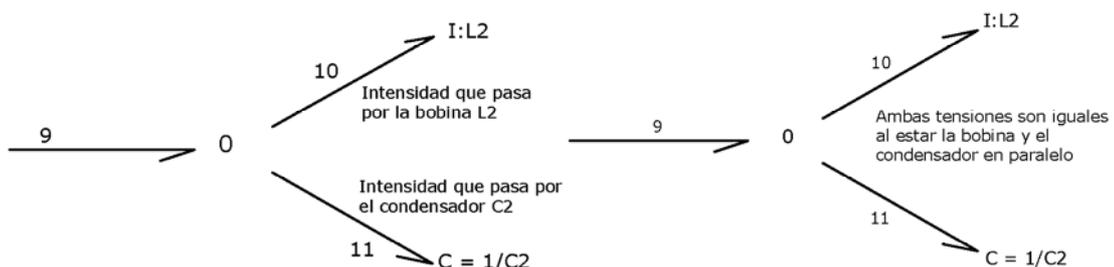


Como la bobina y el condensador están en paralelo tienen la misma tensión por lo que los bonds 4, 5 y 6 se encuentran en una unión 0. Como el paralelo bobina-condensador está en serie con el circuito, tras él la tensión es igual a la de entrada menos la pérdida en la bobina y el condensador. Los bonds 3, 4 y 7 están en una unión 1.

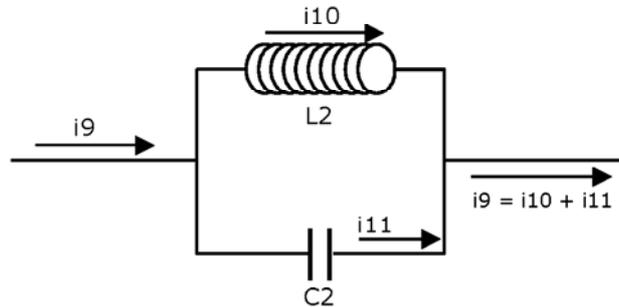
Módulo 3: Resistencia R2



Al igual que la otra resistencia, R_2 está en serie con el circuito y, por lo tanto, toda la intensidad pasa por ella. Como la resistencia R_2 está en serie con el circuito, después de ella la tensión es igual a la de entrada menos la caída en la resistencia. Por este motivo, los bonds 7, 8 y 9 están en una unión 1.

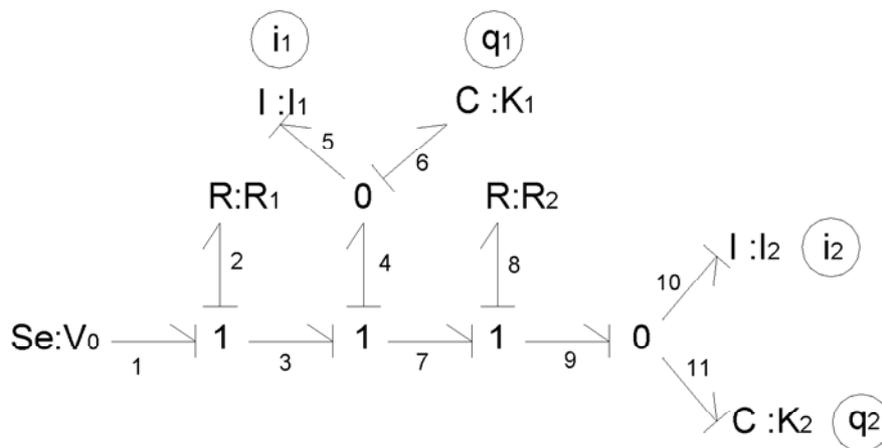


- Simulación en Ingeniería Mecánica -



La bobina L_2 y el condensador C_2 , se encuentran en paralelo y por lo tanto, la intensidad que llega después de la resistencia R_2 debe dividirse entre la bobina y el condensador. Debido a que la intensidad i_9 debe dividirse en dos ramas, los bonds 9, 10 y 11 se encuentran en una unión 0. Por último, como la bobina L_2 y el condensador de capacidad C_2 están en paralelo, la tensión es la misma en ambos elementos y en consecuencia los bonds 9, 10 y 11 están en una unión 0.

El bond graph completo del circuito se representa en la figura.



Flujos y esfuerzos:

Bond	Flujos	Esfuerzos
1	$i_2 + \dot{q}_2$	V_0
2	$i_2 + \dot{q}_2$	$R_1(i_2 + \dot{q}_2)$
3	$i_2 + \dot{q}_2$	$V_0 - R_1(i_2 + \dot{q}_2)$
4	$i_2 + \dot{q}_2$	q_1 / C_1
5	i_1	$L_1 \dot{i}_1 = q_1 / C_1$
6	$\dot{q}_1 = i_2 + \dot{q}_2 - i_1$	q_1 / C_1
7	$i_2 + \dot{q}_2$	$V_0 - R_1(i_2 + \dot{q}_2) - q_1 / C_1$
8	$i_2 + \dot{q}_2$	$R_2(i_2 + \dot{q}_2)$
9	$i_2 + \dot{q}_2$	$V_0 - R_1(i_2 + \dot{q}_2) - q_1 / C_1 - R_2(i_2 + \dot{q}_2)$

- Simulación en Ingeniería Mecánica -

10	i_2	$L_2 \dot{i}_2 = V_0 - R_1(i_2 + \dot{q}_2) - q_1 / C_1 - R_2(i_2 + \dot{q}_2)$
11	\dot{q}_2	$q_2 / C_2 = V_0 - R_1(i_2 + \dot{q}_2) - q_1 / C_1 - R_2(i_2 + \dot{q}_2)$

Ecuaciones:

en (6) $\dot{q}_1 = i_2 + \dot{q}_2 - i_1$

en (5) $L_1 \dot{i}_1 = q_1 / C_1$

en (10) $L_2 \dot{i}_2 = V_0 - R_1(i_2 + \dot{q}_2) - q_1 / C_1 - R_2(i_2 + \dot{q}_2)$

en (11) $q_2 / C_2 = V_0 - R_1(i_2 + \dot{q}_2) - q_1 / C_1 - R_2(i_2 + \dot{q}_2)$

Operando con ellas:

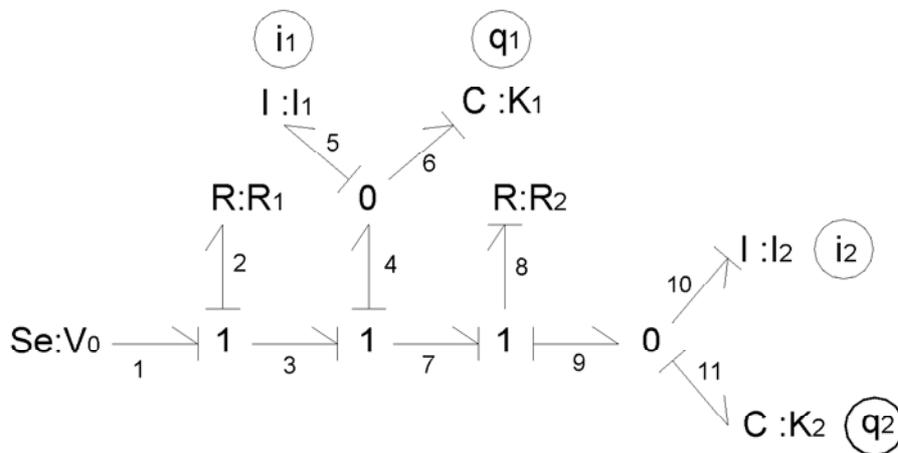
$$L_1 \dot{i}_1 = q_1 / C_1$$

$$L_2 \dot{i}_2 = q_2 / C_2$$

$$\dot{q}_1 = \frac{V_0 - q_1 / C_1 - q_2 / C_2}{R_1 + R_2} - i_1$$

$$\dot{q}_2 = \frac{V_0 - q_1 / C_1 - q_2 / C_2}{R_1 + R_2} - i_2$$

Se puede resolver también de otra forma:



Se establece el flujo en 8 (i) como variable adicional

Bond	Flujos	Esfuerzos
1	i	V_0
2	i	$R_1 i$
3	i	$V_0 - R_1 i$
4	i	q_1 / C_1
5	i_1	q_1 / C_1
6	$i - i_1$	q_1 / C_1

- Simulación en Ingeniería Mecánica -

7	i	$V_0 - R_1 i - q_1 / C_1$
8	i	$R_2 i = V_0 - R_1 i - q_1 / C_1 - q_2 / C_2$
9	i	q_2 / C_2
10	i_2	q_2 / C_2
11	$i - i_2$	q_2 / C_2

Ecuaciones dinámicas

en (5) $L_1 \dot{i}_1 = q_1 / C_1$

en (10) $L_2 \dot{i}_2 = q_2 / C_2$

en (6) $\dot{q}_1 = i - i_1$

en (11) $\dot{q}_2 = i - i_2$

en (8) $R_2 i = V_0 - R_1 i - q_1 / C_1 - q_2 / C_2$

operando con (8) despejando i resulta:

$$(R_1 + R_2) i = V_0 - q_1 / C_1 - q_2 / C_2$$

$$i = \frac{V_0 - q_1 / C_1 - q_2 / C_2}{R_1 + R_2}$$

de donde:

$$L_1 \dot{i}_1 = q_1 / C_1$$

$$L_2 \dot{i}_2 = q_2 / C_2$$

$$\dot{q}_1 = \frac{V_0 - q_1 / C_1 - q_2 / C_2}{R_1 + R_2} - i_1$$

$$\dot{q}_2 = \frac{V_0 - q_1 / C_1 - q_2 / C_2}{R_1 + R_2} - i_2$$

- Simulación en Ingeniería Mecánica -

grafo	Flujos	Esfuerzos
1	$i_{L1} + i_{L2}$	i_o
2	$i_{L1} + i_{L2}$	i_o
3	i_{L1}	i_o
4	$(C1 \cdot q_{K1})/R1$	i_o
5	$(C1 \cdot q_{K1})/R1$	$C1 \cdot q_{K1}$
6	$(C1 \cdot q_{K1})/R1$	$i_o - C1 \cdot q_{K1}$
7	$i_{L1} - (C1 \cdot q_{K1})/R1$	i_o
8	$i_{L1} - (C1 \cdot q_{K1})/R1$	$C1 \cdot q_{K1}$
9	$i_{L1} - (C1 \cdot q_{K1})/R1$	$i_o - C1 \cdot q_{K1}$
10	i_{L1}	$i_o - C1 \cdot q_{K1}$
11	$(C2 \cdot q_{K2})/R2$	$i_o - C1 \cdot q_{K1}$
12	$(C2 \cdot q_{K2})/R2$	$C2 \cdot q_{K2}$
13	$(C2 \cdot q_{K2})/R2$	$i_o - C1 \cdot q_{K1} - C2 \cdot q_{K2}$
14	$i_{L1} - (C2 \cdot q_{K2})/R2$	$i_o - C1 \cdot q_{K1}$
15	$i_{L1} - (C2 \cdot q_{K2})/R2$	$C2 \cdot q_{K2}$
16	$i_{L1} - (C2 \cdot q_{K2})/R2$	$i_o - C1 \cdot q_{K1} - C2 \cdot q_{K2}$
17	i_{L1}	$i_o - C1 \cdot q_{K1} - C2 \cdot q_{K2}$
18	i_{L1}	$i_o - C1 \cdot q_{K1} - C2 \cdot q_{K2}$
19	i_{L1}	\emptyset
20	i_{L2}	i_o
21	i_{L2}	$i_o - E_{23}$
22	i_{L2}	E_{23}
23	i_{L2}	E_{23}
24	i_{L2}	\emptyset
25	$-i_{L1}$	\emptyset
26	$i_{L1} + i_{L2}$	\emptyset

- Ecuaciones diferenciales:

- Bobina L1:

$$\frac{d}{dt} i_{L1}(t) = \frac{i_o - C1 \cdot q_{K1} - C2 \cdot q_{K2}}{L1}$$

- Bobina L2:

$$\frac{d}{dt} i_{L2}(t) = \frac{i_o - E_{23}}{L2}$$

- Simulación en Ingeniería Mecánica -

- Condensador C1:

$$\boxed{\frac{d}{dt} qK1(t) = iL1 - \frac{C1 \cdot qK1}{R1}}$$

- Condensador C2:

$$\boxed{\frac{d}{dt} qK2(t) = iL1 - \frac{C2 \cdot qK2}{R2}}$$

- Ecuación algebraica:

-Bobina L3:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d}{dt} iL3(t) = \frac{E23}{L3} \\ iL3(t) = iL2(t) \end{array} \right\} \boxed{E23 = L3 \left(\frac{d}{dt} iL2(t) \right)}$$

Si se trabaja la ecuación correspondiente a la bobina $L2$, introduciendo el valor de E_{23} , se obtiene un sistema únicamente de ecuaciones diferenciales en lugar de uno algebraico-diferencial.

$$\frac{d}{dt} iL2(t) = \frac{io - L3 \left(\frac{d}{dt} iL2(t) \right)}{L2} \rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} iL2(t) = \frac{io}{L2 + L3}}$$