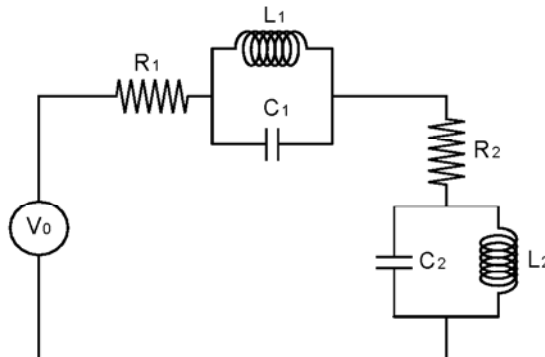


- Simulación en Ingeniería Mecánica -

EJERCICIO 1

El circuito eléctrico de la figura está formado por un conjunto de Resistencias, condensadores, bobinas y una fuente de tensión.



Para el sistema de la figura, se pide:

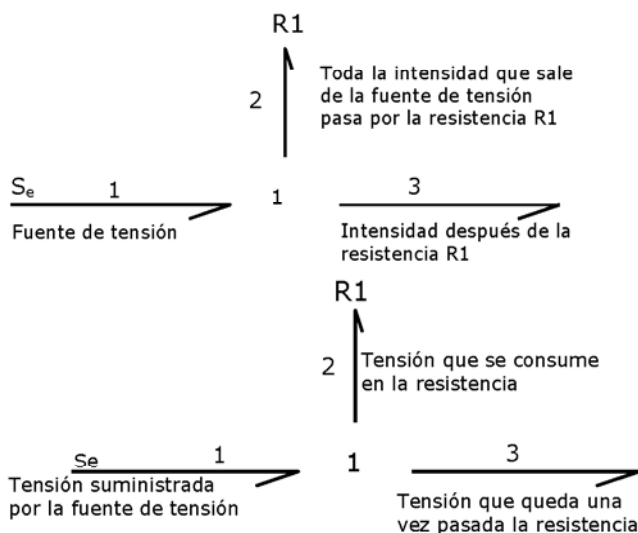
Modelo de bond graph del sistema, incluyendo causalidad, justificando y explicando el mismo.

Flujos y esfuerzos del sistema y ecuaciones dinámicas del sistema.

SOLUCIÓN

Se va a desarrollar el Bond-Graph del circuito por módulos:

Módulo 1: Resistencia R1

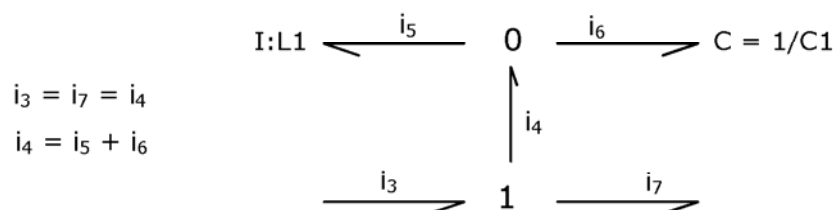
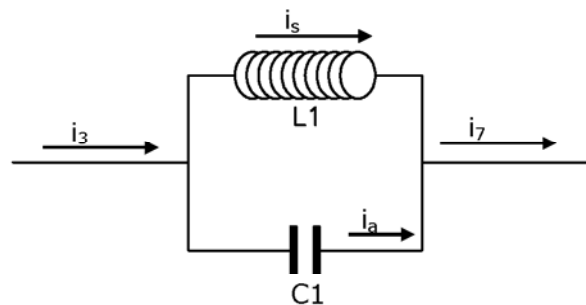
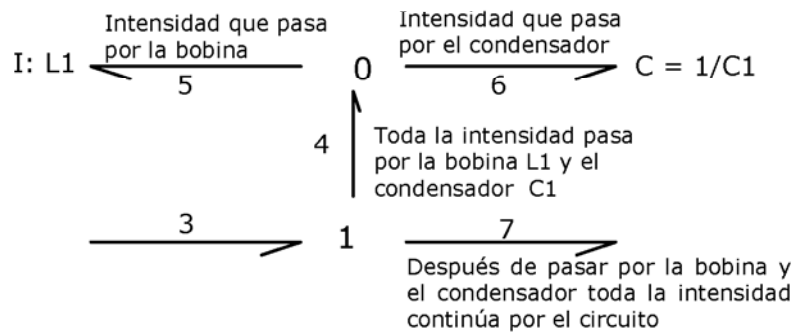


Toda la intensidad del circuito pasa por la resistencia R_1 , es decir, está en serie y por éste motivo la intensidad la que entra en la resistencia es la misma que la que sale de ella. En la resistencia R_1 hay una caída de tensión, de tal forma que después de ella la tensión es igual a la suministrada por la fuente menos la pérdida en la resistencia. Por estas razones, los bonds 1, 2 y 3 estarán en torno a una unión 1.

- Simulación en Ingeniería Mecánica -

Módulo 2: Conjunto L1- C1

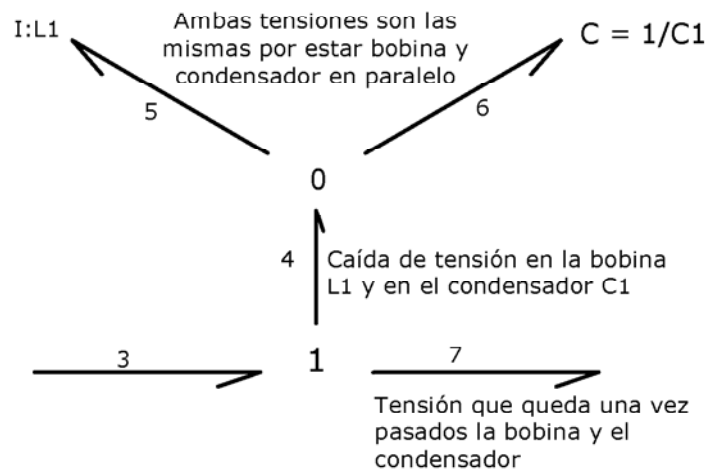
La bobina L_1 y el condensador C_1 están en paralelo entre ellos, pero en serie con el circuito, es decir, toda la intensidad que pasa por ellos vuelve a sumarse posteriormente y continúa por el circuito.



Como los bonds 3, 4, 7 están asociados a la misma intensidad, se encuentran en una unión 1.

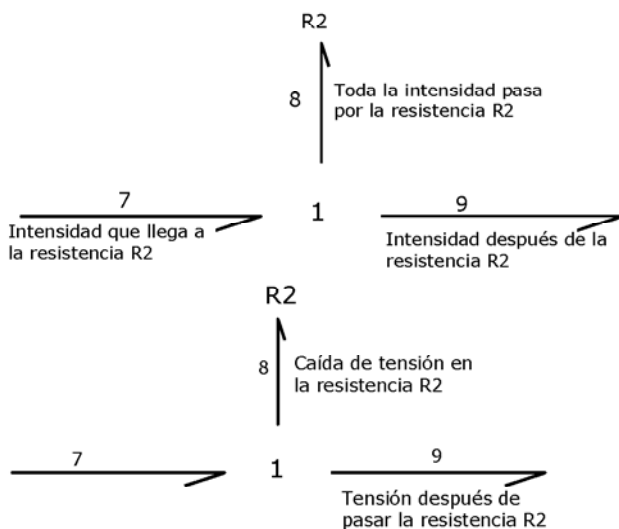
La intensidad que llega por el bond 4 se divide, posteriormente, en la que pasa por la bobina y la que se va por el condensador. Como se debe cumplir que $i_4 = i_5 + i_6$, los bonds 4, 5 y 6 estarán en torno a una unión 0.

- Simulación en Ingeniería Mecánica -

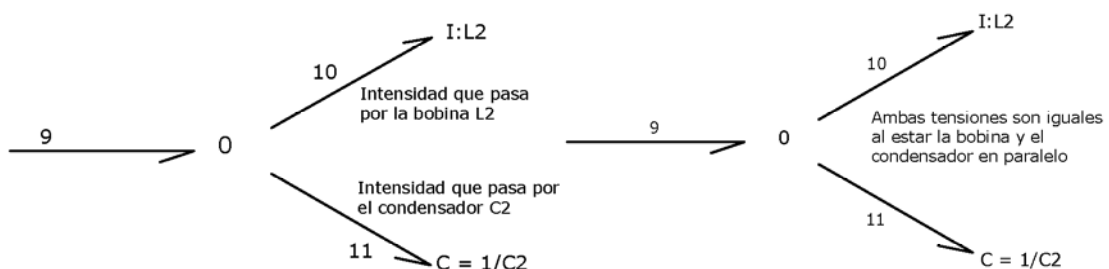


Como la bobina y el condensador están en paralelo tienen la misma tensión por lo que los bonds 4, 5 y 6 se encuentran en una unión 0. Como el paralelo bobina-condensador está en serie con el circuito, tras él la tensión es igual a la de entrada menos la perdida en la bobina y el condensador. Los bonds 3, 4 y 7 están en una unión 1.

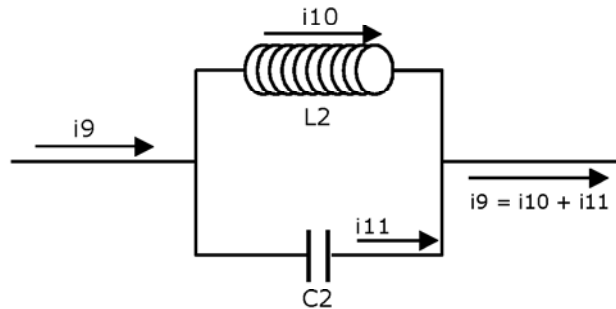
Módulo 3: Resistencia R2



Al igual que la otra resistencia, R_2 está en serie con el circuito y, por lo tanto, toda la intensidad pasa por ella. Como la resistencia R_2 está en serie con el circuito, después de ella la tensión es igual a la de entrada menos la caída en la resistencia. Por este motivo, los bonds 7, 8 y 9 están en una unión 1.

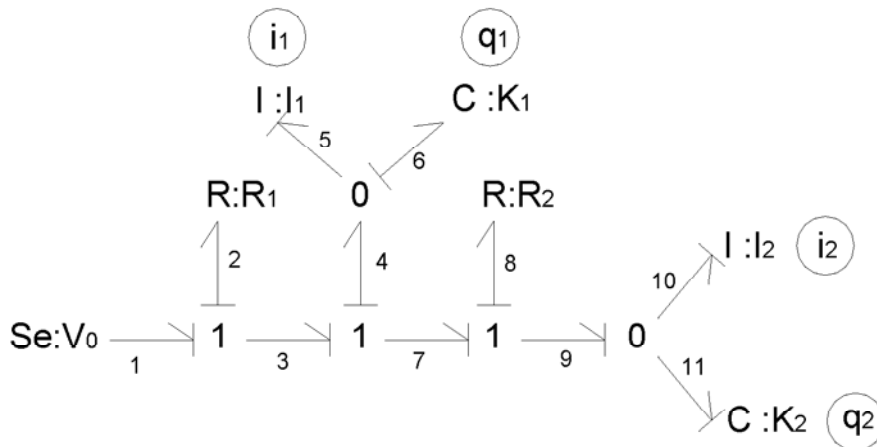


- Simulación en Ingeniería Mecánica -



La bobina L_2 y el condensador C_2 , se encuentran en paralelo y por lo tanto, la intensidad que llega después de la resistencia R_2 debe dividirse entre la bobina y el condensador. Debido a que la intensidad i_9 debe dividirse en dos ramas, los bonds 9, 10 y 11 se encuentran en una unión 0. Por último, como la bobina L_2 y el condensador de capacidad C_2 están en paralelo, la tensión es la misma en ambos elementos y en consecuencia los bonds 9, 10 y 11 están en una unión 0.

El bond graph completo del circuito se representa en la figura.



Flujos y esfuerzos:

| Bond | Flujos | Esfuerzos |
|------|-------------------------------------|---|
| 1 | $i_2 + \dot{q}_2$ | V_0 |
| 2 | $i_2 + \dot{q}_2$ | $R_1(i_2 + \dot{q}_2)$ |
| 3 | $i_2 + \dot{q}_2$ | $V_0 - R_1(i_2 + \dot{q}_2)$ |
| 4 | $i_2 + \dot{q}_2$ | q_1 / C_1 |
| 5 | i_1 | $L_1 \dot{i}_1 = q_1 / C_1$ |
| 6 | $\dot{q}_1 = i_2 + \dot{q}_2 - i_1$ | q_1 / C_1 |
| 7 | $i_2 + \dot{q}_2$ | $V_0 - R_1(i_2 + \dot{q}_2) - q_1 / C_1$ |
| 8 | $i_2 + \dot{q}_2$ | $R_2(i_2 + \dot{q}_2)$ |
| 9 | $i_2 + \dot{q}_2$ | $V_0 - R_1(i_2 + \dot{q}_2) - q_1 / C_1 - R_2(i_2 + \dot{q}_2)$ |

- Simulación en Ingeniería Mecánica -

| | | |
|----|-------------|---|
| 10 | i_2 | $L_2 \dot{i}_2 = V_0 - R_1(i_2 + \dot{q}_2) - q_1 / C_1 - R_2(i_2 + \dot{q}_2)$ |
| 11 | \dot{q}_2 | $q_2 / C_2 = V_0 - R_1(i_2 + \dot{q}_2) - q_1 / C_1 - R_2(i_2 + \dot{q}_2)$ |

Ecuaciones:

en (6) $\dot{q}_1 = i_2 + \dot{q}_2 - i_1$

en (5) $L_1 \dot{i}_1 = q_1 / C_1$

en (10) $L_2 \dot{i}_2 = V_0 - R_1(i_2 + \dot{q}_2) - q_1 / C_1 - R_2(i_2 + \dot{q}_2)$

en (11) $q_2 / C_2 = V_0 - R_1(i_2 + \dot{q}_2) - q_1 / C_1 - R_2(i_2 + \dot{q}_2)$

Operando con ellas:

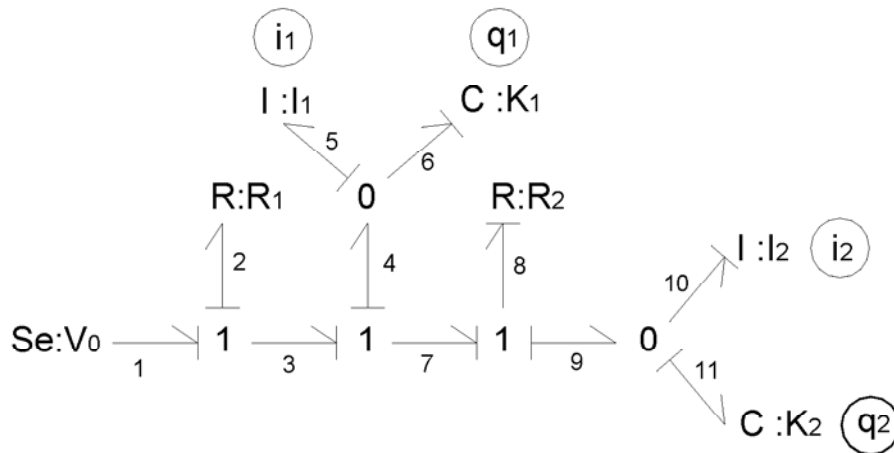
$$L_1 \dot{i}_1 = q_1 / C_1$$

$$L_2 \dot{i}_2 = q_2 / C_2$$

$$\dot{q}_1 = \frac{V_0 - q_1 / C_1 - q_2 / C_2}{R_1 + R_2} - i_1$$

$$\dot{q}_2 = \frac{V_0 - q_1 / C_1 - q_2 / C_2}{R_1 + R_2} - i_2$$

Se puede resolver también de otra forma:



Se establece el flujo en 8 (i) como variable adicional

| Bond | Flujos | Esfuerzos |
|------|-----------|---------------|
| 1 | i | V_0 |
| 2 | i | $R_1 i$ |
| 3 | i | $V_0 - R_1 i$ |
| 4 | i | q_1 / C_1 |
| 5 | i_1 | q_1 / C_1 |
| 6 | $i - i_1$ | q_1 / C_1 |

- Simulación en Ingeniería Mecánica -

| | | |
|----|-----------|---|
| 7 | i | $V_0 - R_1 i - q_1 / C_1$ |
| 8 | i | $R_2 i = V_0 - R_1 i - q_1 / C_1 - q_2 / C_2$ |
| 9 | i | q_2 / C_2 |
| 10 | i_2 | q_2 / C_2 |
| 11 | $i - i_2$ | q_2 / C_2 |

Ecuaciones dinámicas

en (5) $L_1 \dot{i}_1 = q_1 / C_1$

en (10) $L_2 \dot{i}_2 = q_2 / C_2$

en (6) $\dot{q}_1 = i - i_1$

en (11) $\dot{q}_2 = i - i_2$

en (8) $R_2 i = V_0 - R_1 i - q_1 / C_1 - q_2 / C_2$

operando con (8) despejando i resulta:

$$(R_1 + R_2) i = V_0 - q_1 / C_1 - q_2 / C_2$$

$$i = \frac{V_0 - q_1 / C_1 - q_2 / C_2}{R_1 + R_2}$$

de donde:

$$L_1 \dot{i}_1 = q_1 / C_1$$

$$L_2 \dot{i}_2 = q_2 / C_2$$

$$\dot{q}_1 = \frac{V_0 - q_1 / C_1 - q_2 / C_2}{R_1 + R_2} - i_1$$

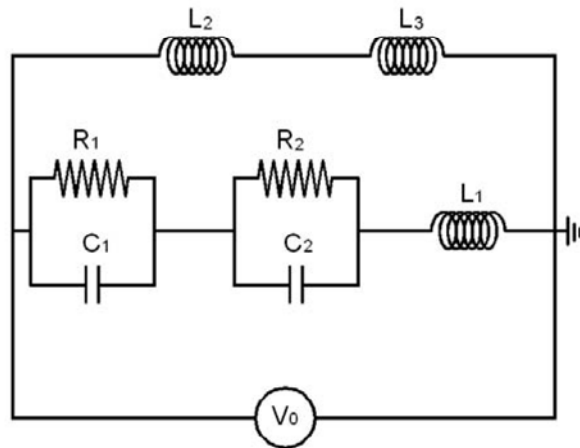
$$\dot{q}_2 = \frac{V_0 - q_1 / C_1 - q_2 / C_2}{R_1 + R_2} - i_2$$

- Simulación en Ingeniería Mecánica -

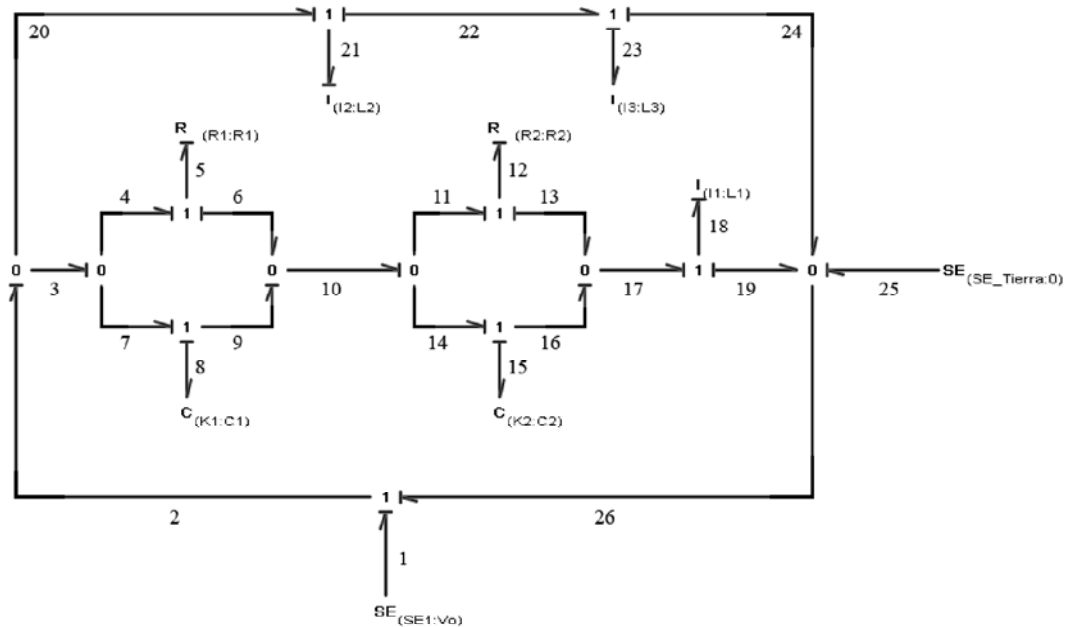
EJERCICIO 2

Para el sistema de la figura, se pide:

- Modelo de Bond-Graph del circuito eléctrico, incluyendo causalidad, justificando y explicando el mismo.
- Flujos y esfuerzos de cada uno de los grafos.
- Ecuaciones diferenciales y/o algebraicas del sistema.



SOLUCIÓN



Al observar la causalidad sobre el modelo resultante se observa cómo existen cuatro puertas con causalidad integral (L1, L2, C1 y C2) y una con causalidad diferencial (L3), por lo que existirán otras tantas ecuaciones diferenciales y algebraicas:

- Simulación en Ingeniería Mecánica -

| grafo | Flujos | Esfuerzos |
|--------------|---------------------------------|---|
| 1 | $i_{L1} + i_{L2}$ | i_o |
| 2 | $i_{L1} + i_{L2}$ | i_o |
| 3 | i_{L1} | i_o |
| 4 | $(C1 \cdot q_{K1})/R1$ | i_o |
| 5 | $(C1 \cdot q_{K1})/R1$ | $C1 \cdot q_{K1}$ |
| 6 | $(C1 \cdot q_{K1})/R1$ | $i_o - C1 \cdot q_{K1}$ |
| 7 | $i_{L1} - (C1 \cdot q_{K1})/R1$ | i_o |
| 8 | $i_{L1} - (C1 \cdot q_{K1})/R1$ | $C1 \cdot q_{K1}$ |
| 9 | $i_{L1} - (C1 \cdot q_{K1})/R1$ | $i_o - C1 \cdot q_{K1}$ |
| 10 | i_{L1} | $i_o - C1 \cdot q_{K1}$ |
| 11 | $(C2 \cdot q_{K2})/R2$ | $i_o - C1 \cdot q_{K1}$ |
| 12 | $(C2 \cdot q_{K2})/R2$ | $C2 \cdot q_{K2}$ |
| 13 | $(C2 \cdot q_{K2})/R2$ | $i_o - C1 \cdot q_{K1} - C2 \cdot q_{K2}$ |
| 14 | $i_{L1} - (C2 \cdot q_{K2})/R2$ | $i_o - C1 \cdot q_{K1}$ |
| 15 | $i_{L1} - (C2 \cdot q_{K2})/R2$ | $C2 \cdot q_{K2}$ |
| 16 | $i_{L1} - (C2 \cdot q_{K2})/R2$ | $i_o - C1 \cdot q_{K1} - C2 \cdot q_{K2}$ |
| 17 | i_{L1} | $i_o - C1 \cdot q_{K1} - C2 \cdot q_{K2}$ |
| 18 | i_{L1} | $i_o - C1 \cdot q_{K1} - C2 \cdot q_{K2}$ |
| 19 | i_{L1} | \emptyset |
| 20 | i_{L2} | i_o |
| 21 | i_{L2} | $i_o - E_{23}$ |
| 22 | i_{L2} | E_{23} |
| 23 | i_{L2} | E_{23} |
| 24 | i_{L2} | \emptyset |
| 25 | $-i_{L1}$ | \emptyset |
| 26 | $i_{L1} + i_{L2}$ | \emptyset |

- Ecuaciones diferenciales:

- Bobina L1:

$$\frac{d}{dt} i_{L1}(t) = \frac{i_o - C1 \cdot q_{K1} - C2 \cdot q_{K2}}{L1}$$

- Bobina L2:

$$\frac{d}{dt} i_{L2}(t) = \frac{i_o - E_{23}}{L2}$$

- Simulación en Ingeniería Mecánica -

- Condensador C1:

$$\boxed{\frac{d}{dt} qK1(t) = iL1 - \frac{C1 \cdot qK1}{R1}}$$

- Condensador C2:

$$\boxed{\frac{d}{dt} qK2(t) = iL1 - \frac{C2 \cdot qK2}{R2}}$$

- Ecuación algebraica:

-Bobina L3:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d}{dt} iL3(t) = \frac{E23}{L3} \\ iL3(t) = iL2(t) \end{array} \right\} \boxed{E23 = L3 \left(\frac{d}{dt} iL2(t) \right)}$$

Si se trabaja la ecuación correspondiente a la bobina $L2$, introduciendo el valor de E_{23} , se obtiene un sistema únicamente de ecuaciones diferenciales en lugar de uno algebraico-diferencial.

$$\frac{d}{dt} iL2(t) = \frac{io - L3 \left(\frac{d}{dt} iL2(t) \right)}{L2} \rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} iL2(t) = \frac{io}{L2 + L3}}$$