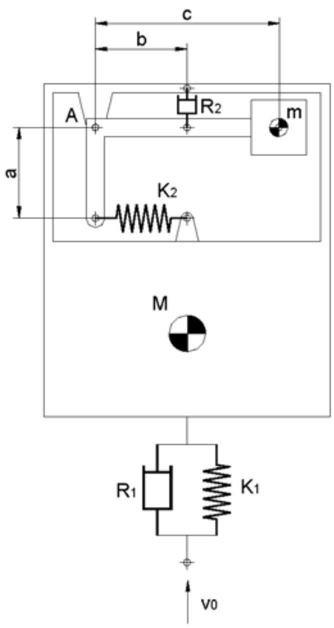
EJERCICIO 1



El modelo de la figura constituye un acelerómetro formado por un cuerpo de masa M que en su interior tiene un balancín que gira alrededor del punto A con una masa m concentrada en su extremo. El balancín está sujeto a la carcasa mediante un muelle y un amortiguador según puede verse.

Considerando que la masa M solo tiene movimiento vertical y que el balancín solamente realiza pequeños giros, se pide:

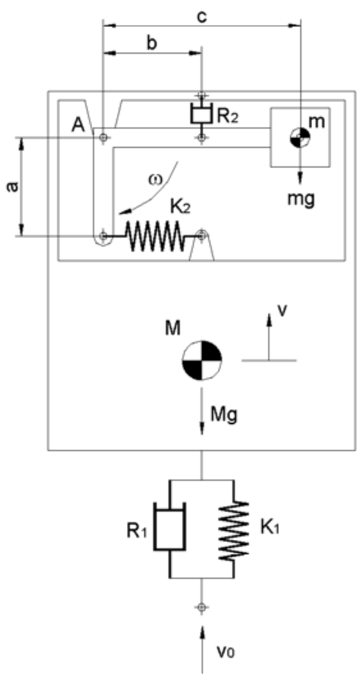
Modelo de bond graph del sistema, incluyendo causalidad, justificando y explicando el mismo.

Flujos y esfuerzos del sistema

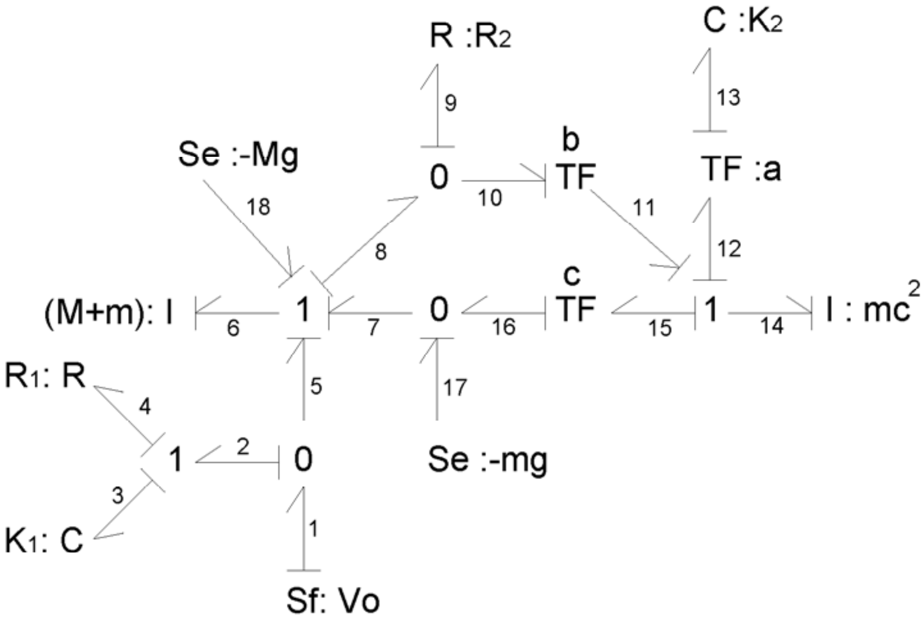
Ecuaciones dinámicas del sistema.

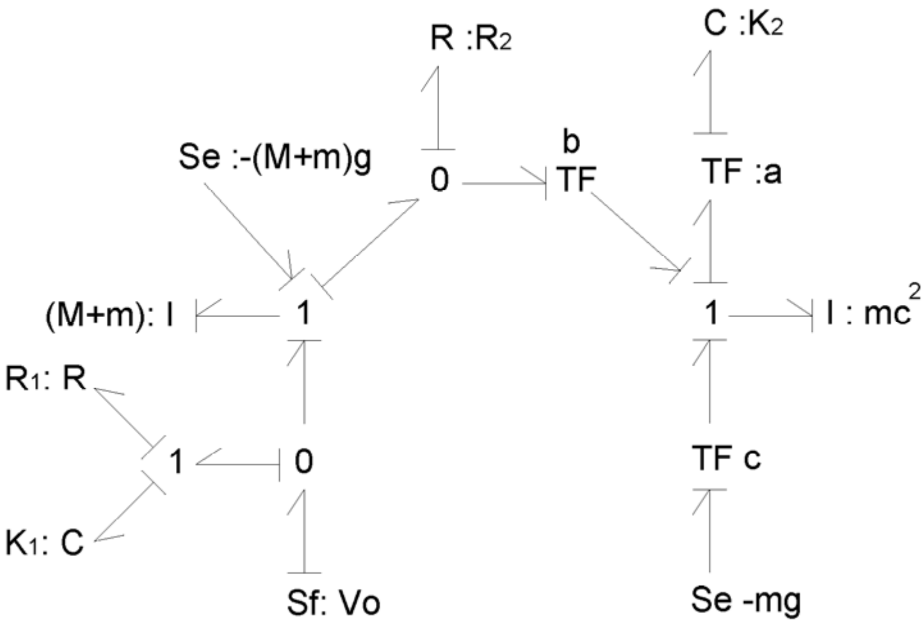
SOLUCIÓN

Se consideran como grados de libertad el movimiento vertical de la masa M y el giro del balancín alrededor del punto A. Actúan como fuerzas exteriores los pesos mg y Mg de las dos masas.



Posibles modelos de bond graph





Bond	Flujos	Esfuerzos
1	v_0	$R_1(v_0 - v) + K_1 q_1$
2	$v_0 - v$	$R_1(v_0 - v) + K_1 q_1$
3	$v_0 - v$	$K_1 q_1$
4	$v_0 - v$	$R_1(v_0 - v)$
5	v	$R_1(v_0 - v) + K_1 q_1$
6	v	$R_1(v_0 - v) + K_1 q_1 - mg - Mg - R_2(v - b\varpi)$
7	v	$-mg$
8	v	$R_2(v - b\varpi)$
9	$v - b\varpi$	$R_2(v - b\varpi)$
10	$b\varpi$	$R_2(v - b\varpi)$
11	ϖ	$bR_2(v - b\varpi)$
12	ϖ	$K_2 q_2$
13	$a\varpi$	$aK_2 q_2$
14	ϖ	$R_2(v - b\varpi) + cmg - aK_2 q_2$
15	ϖ	$-cmg$
16	$c\varpi$	$-mg$
17	$v - c\varpi$	$-mg$
18	v	$-Mg$

Ecuaciones dinámicas:

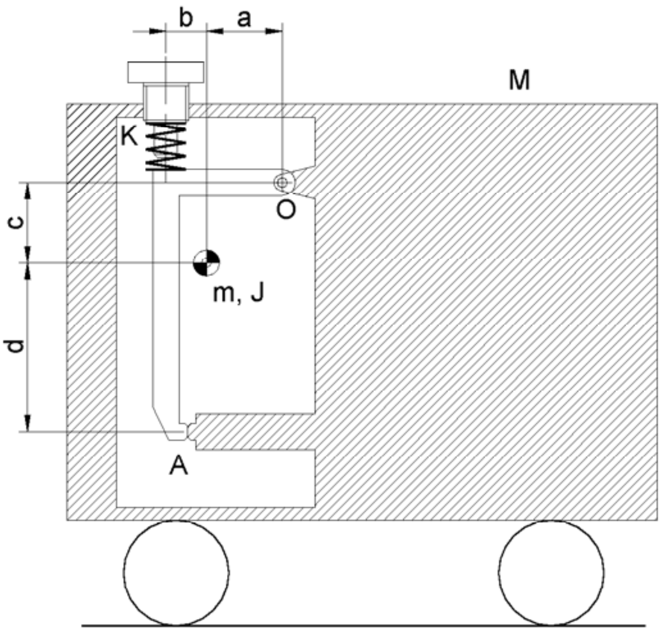
$$(M + m)\dot{v} = R_1(v_0 - v) + K_1 q_1 - mg - Mg - R_2(v - b\varpi)$$

$$mc^2\dot{\varpi} = R_2(v - b\varpi) + cmg - aK_2 q_2$$

$$\dot{q}_1 = v_0 - v$$

$$\dot{q}_2 = a\varpi$$

EJERCICIO 2



El modelo de la figura constituye el mecanismo de disparo de un airbag de un vehículo. Está formado por un brazo OA que pivota respecto de O. Un muelle de constante K mantiene el contacto entre el brazo y el soporte en el punto A. El airbag se dispara cuando por efecto de la deceleración de frenada se pierde contacto en A.

El brazo tiene masa m e inercia J respecto a su centro de gravedad.

Considerando que el vehículo solamente tiene movimiento longitudinal y que el brazo solamente realiza pequeños giros, se pide:

1. Modelo de bond graph del sistema, incluyendo causalidad, justificando y explicando el mismo.
2. Flujos y esfuerzos del sistema
3. Ecuaciones dinámicas del sistema.
4. Si m=0,250 Kg, b=2,5 cm, a=1,25 cm, c=2,5 cm y d=6,25cm y el muelle está calibrado de forma que ejerce una fuerza de 7,8N, ¿a qué deceleración se disparará el airbag?

SOLUCIÓN

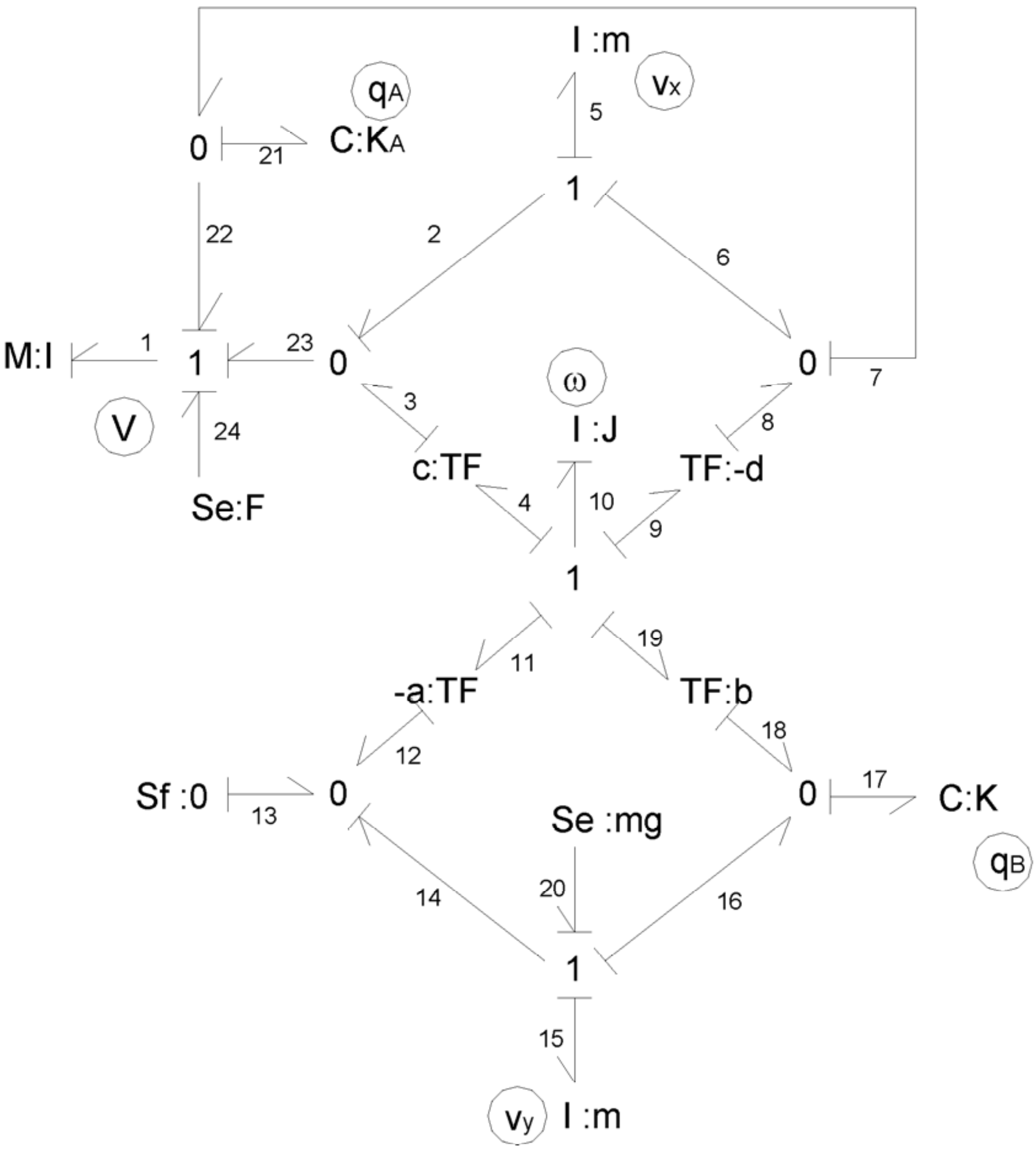
En O se cumple:
$$\begin{aligned} V &= v_x + c\omega \\ 0 &= v_y - a\omega \end{aligned}$$

En el muelle vertical se cumple: $V_{BY} = v_y + b\omega$

En A (extremo izquierdo del muelle) se cumple: $V_{AXi} = v_x - d\omega$

En A (extremo derecho del muelle) se cumple: $V_{AXd} = V$

Se puede construir el bond graph siguiente, que cumple con las ecuaciones anteriores:


I :m
vx
qA
0
21
C:KA
1
5
22
2
6
M:I
1
1
23
0
ω
0
7
V
24
3
I :J
8
c:TF
TF:-d
Se:F
4
10
9
1
11
19
-a:TF
TF:b
12
18
Sf :0
13
0
Se :mg
0
17
C:K
qB
14
20
16
1
15
vy
I :m

Flujos y esfuerzos:

Bond	Flujo	Esfuerzo
1	V	$\boxed{M\dot{V} = -m\dot{v}_x - K_A q_A + K_A q_A + F = -m\dot{v}_x + F}$
2	$V - c\omega$	$-m\dot{v}_x - K_A q_A$
3	$c\omega$	$-m\dot{v}_x - K_A q_A$
4	ω	$-c(m\dot{v}_x + K_A q_A)$
5	$\boxed{v_x = V - c\omega}$	$m\dot{v}_x$
6	$V - c\omega$	$K_A q_A$
7	$V - (c+d)\omega$	$K_A q_A$
8	$-d\omega$	$K_A q_A$
9	ω	$-dK_A q_A$
10	ω	$\boxed{J\dot{\omega} = dK_A q_A - bK_B q_B + c(m\dot{v}_x + K_A q_A) + a(-m\dot{v}_y + mg - K_B q_B)}$
11	ω	$-a(-m\dot{v}_y + mg - K_B q_B)$
12	$-a\omega$	$-m\dot{v}_y + mg - K_B q_B$
13	0	$-m\dot{v}_y + mg - K_B q_B$
14	$a\omega$	$-m\dot{v}_y + mg - K_B q_B$
15	$\boxed{v_y = a\omega}$	$m\dot{v}_y$
16	$a\omega$	$K_B q_B$
17	$\boxed{\dot{q}_B = (a+b)\omega}$	$K_B q_B$
18	$b\omega$	$K_B q_B$
19	ω	$bK_B q_B$
20	$a\omega$	mg
21	$\boxed{\dot{q}_A = -(c+d)\omega}$	$K_A q_A$
22	V	$K_A q_A$
23	V	$-m\dot{v}_x - K_A q_A$
24	V	F

Ecuaciones:

$$M\dot{V} = -m\dot{v}_x + F$$
$$J\dot{\omega} = dK_A q_A - bK_B q_B + c(m\dot{v}_x + K_A q_A) + a(-m\dot{v}_y + mg - K_B q_B)$$
$$\dot{q}_A = -(c+d)\omega$$
$$\dot{q}_B = (a+b)\omega$$
$$v_x = V - c\omega$$
$$v_y = a\omega$$

Sustituyendo las ecuaciones algebraicas:

$$
\begin{aligned}
&M\dot{V} = -m(\dot{V} - c\dot{\omega}) + F \\
&J\dot{\omega} = dK_A q_A - bK\ q_B + c\left(m\left(\dot{V} - c\dot{\omega}\right) + K_A q_A\right) + a\left(-ma\dot{\omega} + mg - K_B q_B\right) \\
&\dot{q}_A = -(c+d)\omega \\
&\dot{q}_B = (a+b)\omega
\end{aligned}
$$

Operando:

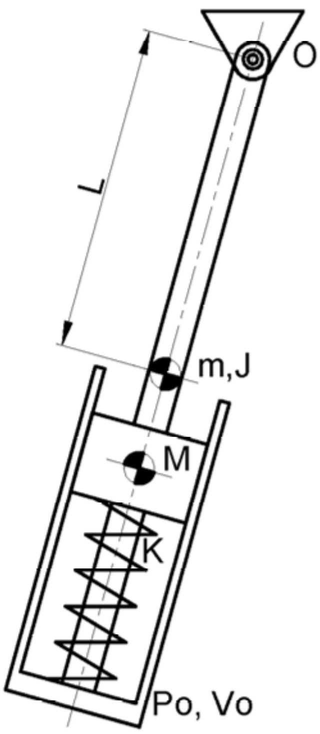
$$
\begin{aligned}
&\left(M + m\right)\dot{V} - mc\dot{\omega} = F \\
&-mc\dot{V} + \left(J + m\left(c^2 + a^2\right)\right)\dot{\omega} = \left(d + c\right)K_A q_A - \left(a + b\right)Kq_B + amg \\
&\dot{q}_A = -(c+d)\omega \\
&\dot{q}_B = (a+b)\omega
\end{aligned}
$$

Si m=0,250 Kg, b=2,5 cm, a=1,25 cm, c=2,5 cm y d=6,25cm y el muelle está calibrado de forma que ejerce una fuerza de 7,8N, ¿a qué deceleración se disparará el airbag?

$$
\begin{aligned}
&-0{,}250 \times 0{,}025\dot{V} + \left(J + m\left(c^2 + a^2\right)\right) \times 0 = \left(0{,}0625 + 0{,}025\right) \times 0 + \left(0{,}0125 + 0{,}025\right) \times 7{,}8 + \\
&+ 0{,}0125 \times 0{,}25 \times 9{,}8
\end{aligned}
$$

$$
\dot{V} = \frac{\left(0{,}0125 + 0{,}025\right) \times 7{,}8 + 0{,}0125 \times 0{,}25 \times 9{,}8}{-0{,}250 \times 0{,}025} = 51{,}7 \mathrm{m/s^2} = 5{,}3g
$$

EJERCICIO 3



El modelo de la figura constituye un péndulo de masa m e inercia J respecto a su centro de masas. Tiene acoplado un cilindro con un muelle en su interior de rigidez K y un gas a una presión Po que ocupa un volumen Vo cuando el péndulo está en reposo y en posición vertical. El pistón tiene una masa M.

Considerando grandes desplazamientos para el péndulo, determinar:

El modelo de bond graph del sistema, incluyendo causalidad, justificando y explicando el mismo.

Flujos y esfuerzos del sistema

Ecuaciones dinámicas del sistema.

SOLUCIÓN

Péndulo: Cuerpo rígido, con tres coordenadas u_1, v_1, ω_1 :

En O se debe cumplir que:

$$\vec{r}_O^{\,O} = \vec{r}_O^{\,1}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} + \omega_1 \begin{bmatrix} -\sin\varphi_1 & -\cos\varphi_1 \\ \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 - L\sin\varphi_1\omega_1 \\ v_1 + L\cos\varphi_1\omega_1 \end{bmatrix}$$

En la corredera se debe cumplir:

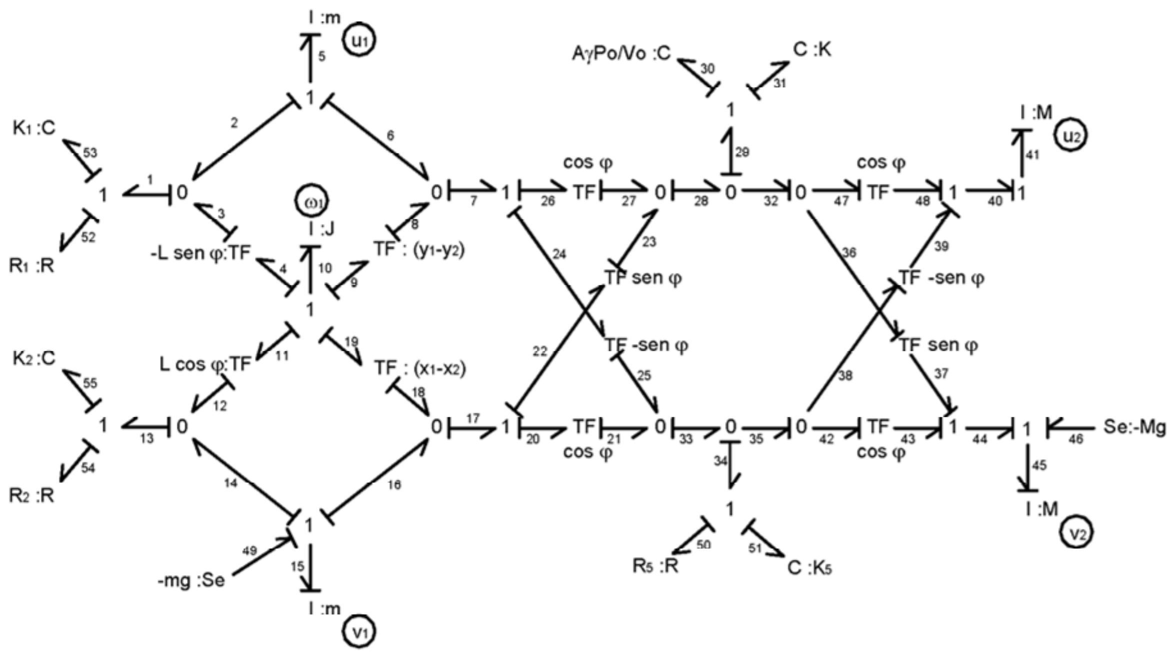
$$\varphi_1 = \varphi_2$$

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

$$(y_2 - y_1)\cos\varphi_1 - (x_2 - x_1)\sin\varphi_1 = 0$$

$$(v_2 - v_1)\cos\varphi_1 - (u_2 - u_1)\sin\varphi_1 - (y_2 - y_1)\sin\varphi_1\omega_1 - (x_2 - x_1)\cos\varphi_1\omega_1 = 0$$

Para desacoplar las ecuaciones se usan uniones semirrígidas. EL bond graph es el siguiente:



Bond	Flujos
1	$u_1 - L\omega_1 \sin\varphi_1$
2	u_1
3	$-L\omega_1 \sin\varphi_1$
4	ω_1
5	u_1
6	u_1
7	$u_1 + (y_1 - y_2)\omega_1$
8	$(y_1 - y_2)\omega_1$
9	ω_1
10	ω_1
11	ω_1
12	$L\omega_1 \cos\varphi_1$
13	$v_1 + L\omega_1 \cos\varphi_1$
14	v_1
15	v_1
16	v_1
17	$v_1 + (x_1 - x_2)\omega_1$
18	$(x_1 - x_2)\omega_1$
19	ω_1
20	$v_1 + (x_1 - x_2)\omega_1$
21	$\cos\varphi_1 v_1 + \cos\varphi_1 (x_1 - x_2)\omega_1$
22	$v_1 + (x_1 - x_2)\omega_1$
23	$\sin\varphi_1 v_1 + \sin\varphi_1 (x_1 - x_2)\omega_1$
24	$u_1 + (y_1 - y_2)\omega_1$
25	$-\sin\varphi_1 u_1 - \sin\varphi_1 (y_1 - y_2)\omega_1$
26	$u_1 + (y_1 - y_2)\omega_1$
27	$\cos\varphi_1 u_1 + \cos\varphi_1 (y_1 - y_2)\omega_1$
28	$\sin\varphi_1 v_1 + \sin\varphi_1 (x_1 - x_2)\omega_1 + \cos\varphi_1 u_1 + \cos\varphi_1 (y_1 - y_2)\omega_1$
29	$\cos\varphi_1 u_1 + \sin\varphi_1 v_1 + \sin\varphi_1 (x_1 - x_2)\omega_1 + \cos\varphi_1 (y_1 - y_2)\omega_1 - \cos\varphi_1 u_2 - \sin\varphi_1 v_2$
30	$\dot{q}_3 = \cos\varphi_1 u_1 + \sin\varphi_1 v_1 + \sin\varphi_1 (x_1 - x_2)\omega_1 + \cos\varphi_1 (y_1 - y_2)\omega_1 - \cos\varphi_1 u_2 - \sin\varphi_1 v_2$
31	$\dot{q}_4 = \cos\varphi_1 u_1 + \sin\varphi_1 v_1 + \sin\varphi_1 (x_1 - x_2)\omega_1 + \cos\varphi_1 (y_1 - y_2)\omega_1 - \cos\varphi_1 u_2 - \sin\varphi_1 v_2$
32	$\cos\varphi_1 u_2 + \sin\varphi_1 v_2$
33	$\cos\varphi_1 v_1 - \sin\varphi_1 u_1 + \cos\varphi_1 (x_1 - x_2)\omega_1 - \sin\varphi_1 (y_1 - y_2)\omega_1$
34	$\cos\varphi_1 v_1 - \sin\varphi_1 u_1 + \cos\varphi_1 (x_1 - x_2)\omega_1 - \sin\varphi_1 (y_1 - y_2)\omega_1 + \sin\varphi_1 u_2 - \cos\varphi_1 v_2$
35	$-\sin\varphi_1 u_2 + \cos\varphi_1 v_2$
36	$\sin\varphi_1 v_2$
37	v_2

Bond	Flujos
38	$-\sin\varphi_1 u_2$
39	u_2
40	u_2
41	u_2
42	$\cos\varphi_1 v_2$
43	v_2
44	v_2
45	v_2
46	v_2
47	$\cos\varphi_1 v_2$
48	u_2
49	v_1
50	$\cos\varphi_1 v_1 - \sin\varphi_1 u_1 + \cos\varphi_1 (x_1 - x_2)\omega_1 - \sin\varphi_1 (y_1 - y_2)\omega_1 + \sin\varphi_1 u_2 - \cos\varphi_1 v_2$
51	$\dot{q}_5 = \cos\varphi_1 v_1 - \sin\varphi_1 u_1 + \cos\varphi_1 (x_1 - x_2)\omega_1 - \sin\varphi_1 (y_1 - y_2)\omega_1 + \sin\varphi_1 u_2 - \cos\varphi_1 v_2$
52	$u_1 - L\omega_1 \sin\varphi_1$
53	$\dot{q}_1 = u_1 - L\omega_1 \sin\varphi_1$
54	$v_1 + L\omega_1 \cos\varphi_1$
55	$\dot{q}_2 = v_1 + L\omega_1 \cos\varphi_1$

Bond	Esfuerzos
1	$K_1 q_1 + R_1 f_1$
2	$K_1 q_1 + R_1 f_1$
3	$K_1 q_1 + R_1 f_1$
4	$-K_1 q_1 L \sin\varphi_1$
5	$m\dot{u}_1 = -K_1 q_1 - R_1 f_1 - \left(A\gamma P_0 / V_0 q_3 + K_4 q_4\right)\cos\varphi_1 + \sin\varphi_1 \left(K_5 q_5 + R_5 f_5\right)$
6	$\left(A\gamma P_0 / V_0 q_3 + K_4 q_4\right)\cos\varphi_1 - \sin\varphi_1 \left(K_5 q_5 + R_5 f_5\right)$
7	$\left(A\gamma P_0 / V_0 q_3 + K_4 q_4\right)\cos\varphi_1 - \sin\varphi_1 \left(K_5 q_5 + R_5 f_5\right)$
8	$\left(A\gamma P_0 / V_0 q_3 + K_4 q_4\right)\cos\varphi_1 - \sin\varphi_1 \left(K_5 q_5 + R_5 f_5\right)$
9	$\left(\left(A\gamma P_0 / V_0 q_3 + K_4 q_4\right)\cos\varphi_1 - \sin\varphi_1 \left(K_5 q_5 + R_5 f_5\right)\right)\left(y_1 - y_2\right)$
10	$J_1 \dot{\omega}_1 = \left(K_1 q_1 + R_1 f_1\right) L \sin\varphi_1 - \left(K_2 q_2 + R_2 f_2\right) L \cos\varphi_1$ $-\left(\left(A\gamma P_0 / V_0 q_3 + K_4 q_4\right)\cos\varphi_1 - \sin\varphi_1 \left(K_5 q_5 + R_5 f_5\right)\right)\left(y_1 - y_2\right) -$ $-\left(\left(A\gamma P_0 / V_0 q_3 + K_4 q_4\right)\sin\varphi_1 + \cos\varphi_1 \left(K_5 q_5 + R_5 f_5\right)\right)\left(x_1 - x_2\right)$
11	$\left(K_2 q_2 + R_2 f_2\right) L \cos\varphi_1$
12	$K_2 q_2 + R_2 f_2$
13	$K_2 q_2 + R_2 f_2$
14	$K_2 q_2 + R_2 f_2$
15	$m\dot{v}_1 = -\left(K_2 q_2 + R_2 f_2\right) - \left(A\gamma P_0 / V_0 q_3 + K_4 q_4\right)\sin\varphi_1 - \left(K_5 q_5 + R_5 f_5\right)\cos\varphi_1 - mg$
16	$\left(A\gamma P_0 / V_0 q_3 + K_4 q_4\right)\sin\varphi_1 + \left(K_5 q_5 + R_5 f_5\right)\cos\varphi_1$

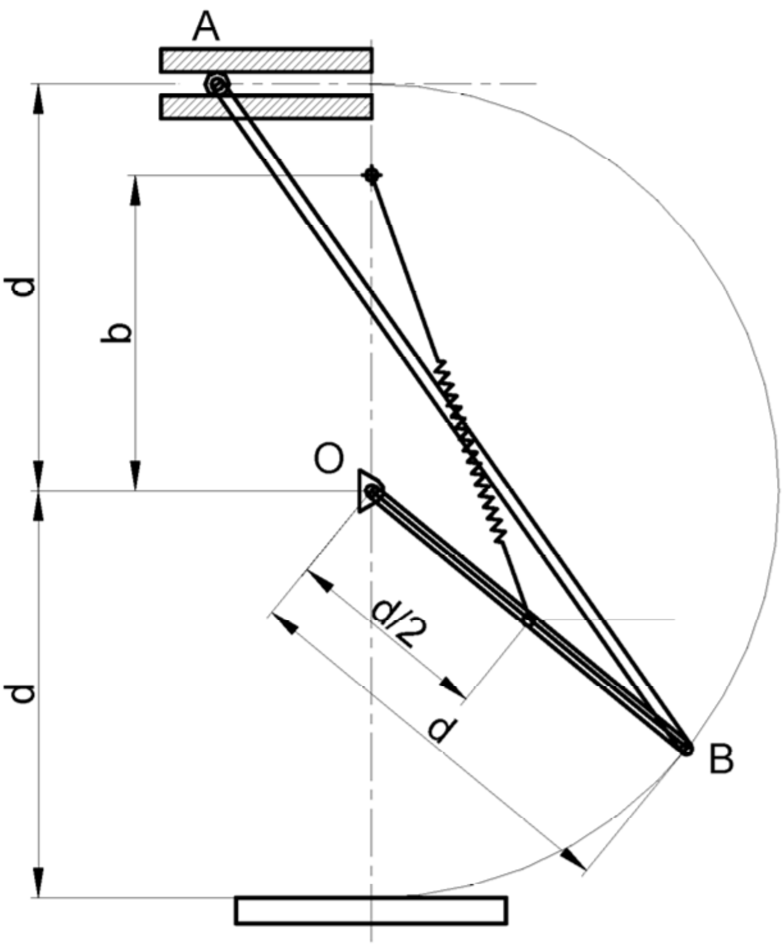
Bond	Esfuerzos
17	$(A\gamma P_0/V_0q_3+K_4q_4)\sin\varphi_1+(K_5q_5+R_5f_5)\cos\varphi_1$
18	$(A\gamma P_0/V_0q_3+K_4q_4)\sin\varphi_1+(K_5q_5+R_5f_5)\cos\varphi_1$
19	$((A\gamma P_0/V_0q_3+K_4q_4)\sin\varphi_1+(K_5q_5+R_5f_5)\cos\varphi_1)(x_1-x_2)$
20	$(K_5q_5+R_5f_5)\cos\varphi_1$
21	$(K_5q_5+R_5f_5)$
22	$(A\gamma P_0/V_0q_3+K_4q_4)\sin\varphi_1$
23	$A\gamma P_0/V_0q_3+K_4q_4$
24	$-\sin\varphi_1(K_5q_5+R_5f_5)$
25	$(K_5q_5+R_5f_5)$
26	$(A\gamma P_0/V_0q_3+K_4q_4)\cos\varphi_1$
27	$A\gamma P_0/V_0q_3+K_4q_4$
28	$A\gamma P_0/V_0q_3+K_4q_4$
29	$A\gamma P_0/V_0q_3+K_4q_4$
30	$A\gamma P_0/V_0q_3$
31	K_4q_4
32	$A\gamma P_0/V_0q_3+K_4q_4$
33	$(K_5q_5+R_5f_5)$
34	$(K_5q_5+R_5f_5)$
35	$(K_5q_5+R_5f_5)$
36	$A\gamma P_0/V_0q_3+K_4q_4$
37	$(A\gamma P_0/V_0q_3+K_4q_4)\sin\varphi_1$
38	$(K_5q_5+R_5f_5)$
39	$-(K_5q_5+R_5f_5)\sin\varphi_1$
40	$(A\gamma P_0/V_0q_3+K_4q_4)\cos\varphi_1-(K_5q_5+R_5f_5)\sin\varphi_1$
41	$M\dot{u}_2=(A\gamma P_0/V_0q_3+K_4q_4)\cos\varphi_1-(K_5q_5+R_5f_5)\sin\varphi_1$
42	$(K_5q_5+R_5f_5)$
43	$(K_5q_5+R_5f_5)\cos\varphi_1$
44	$(A\gamma P_0/V_0q_3+K_4q_4)\sin\varphi_1+(K_5q_5+R_5f_5)\cos\varphi_1$
45	$M\dot{v}_2=(A\gamma P_0/V_0q_3+K_4q_4)\sin\varphi_1+(K_5q_5+R_5f_5)\cos\varphi_1-Mg$
46	$-Mg$
47	$A\gamma P_0/V_0q_3+K_4q_4$
48	$(A\gamma P_0/V_0q_3+K_4q_4)\cos\varphi_1$
49	$-mg$
50	R_5f_5
51	K_5q_5
52	R_1f_1
53	K_1q_1

Bond	Esfuerzos
54	$R_2 f_2$
55	$K_2 q_2$

Ecuaciones dinámicas

$$
\begin{aligned}
&m\dot{u}_1 = -K_1 q_1 - R_1 f_1 - \left(A\gamma P_0 / V_0 q_3 + K_4 q_4\right)\cos\varphi_1 + \sin\varphi_1\left(K_5 q_5 + R_5 f_5\right) \\
&m\dot{v}_1 = -\left(K_2 q_2 + R_2 f_2\right) - \left(A\gamma P_0 / V_0 q_3 + K_4 q_4\right)\sin\varphi_1 - \left(K_5 q_5 + R_5 f_5\right)\cos\varphi_1 - mg \\
&J_1\dot{\omega}_1 = \left(K_1 q_1 + R_1 f_1\right)L\sin\varphi_1 - \left(K_2 q_2 + R_2 f_2\right)L\cos\varphi_1 \\
&-\left(\left(A\gamma P_0 / V_0 q_3 + K_4 q_4\right)\cos\varphi_1 - \sin\varphi_1\left(K_5 q_5 + R_5 f_5\right)\right)\left(y_1 - y_2\right) - \\
&-\left(\left(A\gamma P_0 / V_0 q_3 + K_4 q_4\right)\sin\varphi_1 + \cos\varphi_1\left(K_5 q_5 + R_5 f_5\right)\right)\left(x_1 - x_2\right) \\
&M\dot{u}_2 = \left(A\gamma P_0 / V_0 q_3 + K_4 q_4\right)\cos\varphi_1 - \left(K_5 q_5 + R_5 f_5\right)\sin\varphi_1 \\
&M\dot{v}_2 = \left(A\gamma P_0 / V_0 q_3 + K_4 q_4\right)\sin\varphi_1 + \left(K_5 q_5 + R_5 f_5\right)\cos\varphi_1 - Mg \\
&\dot{q}_1 = u_1 - L\omega_1\sin\varphi_1 \\
&\dot{q}_2 = v_1 + L\omega_1\cos\varphi_1 \\
&\dot{q}_3 = \cos\varphi_1 u_1 + \sin\varphi_1 v_1 + \sin\varphi_1(x_1 - x_2)\omega_1 + \cos\varphi_1(y_1 - y_2)\omega_1 - \cos\varphi_1 u_2 - \sin\varphi_1 v_2 \\
&\dot{q}_4 = \cos\varphi_1 u_1 + \sin\varphi_1 v_1 + \sin\varphi_1(x_1 - x_2)\omega_1 + \cos\varphi_1(y_1 - y_2)\omega_1 - \cos\varphi_1 u_2 - \sin\varphi_1 v_2 \\
&\dot{q}_5 = \cos\varphi_1 v_1 - \sin\varphi_1 u_1 + \cos\varphi_1(x_1 - x_2)\omega_1 - \sin\varphi_1(y_1 - y_2)\omega_1 + \sin\varphi_1 u_2 - \cos\varphi_1 v_2 \\
&\dot{x}_1 = u_1 \\
&\dot{y}_1 = v_1 \\
&\dot{\varphi}_1 = \omega_1 \\
&\dot{x}_2 = u_2 \\
&\dot{y}_2 = v_2
\end{aligned}
$$

EJERCICIO 4



La puerta uniforme AB de un garaje, representada en sección en la figura, tiene una masa M y está equipada con un mecanismo de resorte como el indicado. El brazo OB tiene masa m y la esquina superior de la puerta puede deslizar libremente en dirección horizontal mediante un rodillo.

El muelle está anclado al punto medio del brazo OB y a un punto situado a d/2 sobre la vertical de O. En la posición superior del brazo OB, la fuerza del resorte es nula.

Construir el modelo de bond graph del mecanismo de puerta de garaje , incluyendo causalidad, justificando y explicando el mismo.

Flujos y esfuerzos del sistema

Ecuaciones dinámicas del sistema.

SOLUCIÓN

Par de revolución O:

$$\vec{r}_O^{\,O} = \vec{r}_O^{\,1}$$

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1\\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-d/2\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}0 = x_1 - d/2\cos\varphi_1\\ 0 = y_1 - d/2\sin\varphi_1\end{cases}$$

$$\begin{cases}0 = u_1 + \omega_1 d/2\sin\varphi_1\\ 0 = y_1 - \omega_1 d/2\cos\varphi_1\end{cases}$$

Par de revolución B:

$$\vec{r}_B^{\,1} = \vec{r}_B^{\,2}$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1\\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d/2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2\\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}0 = x_1 + d/2\cos\varphi_1 - x_2 - d\cos\varphi_2\\ 0 = y_1 + d/2\sin\varphi_1 - y_2 - d\sin\varphi_2\end{cases}$$

$$\begin{cases}0 = u_1 - d/2\cdot\omega_1\sin\varphi_1 - u_2 + d\cdot\omega_2\sin\varphi_2\\ 0 = v_1 + d/2\cdot\omega_1\cos\varphi_1 - v_2 - d\cdot\omega_2\cos\varphi_2\end{cases}$$

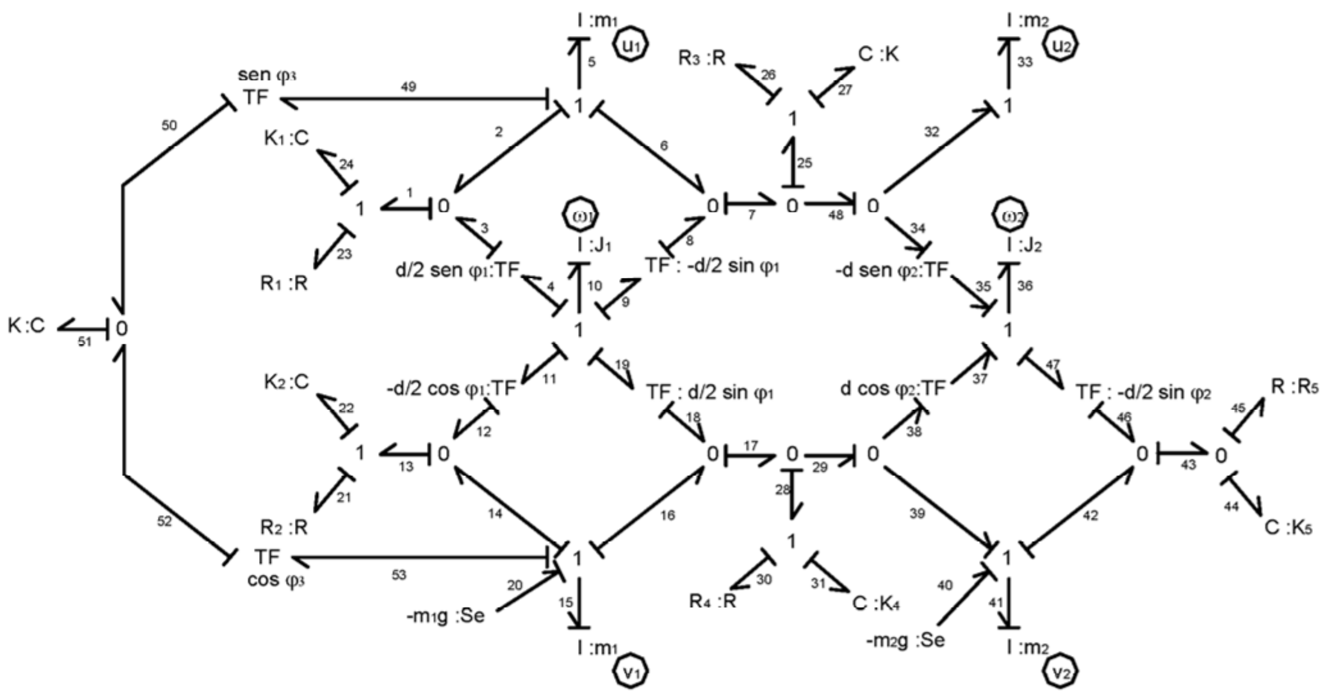
Par traslación-revolución A:

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \times \left\{\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2\\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-d\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\d\end{bmatrix}\right\} = \vec{0}$$

$$0 = y_2 - d\sin\varphi_2 - d$$

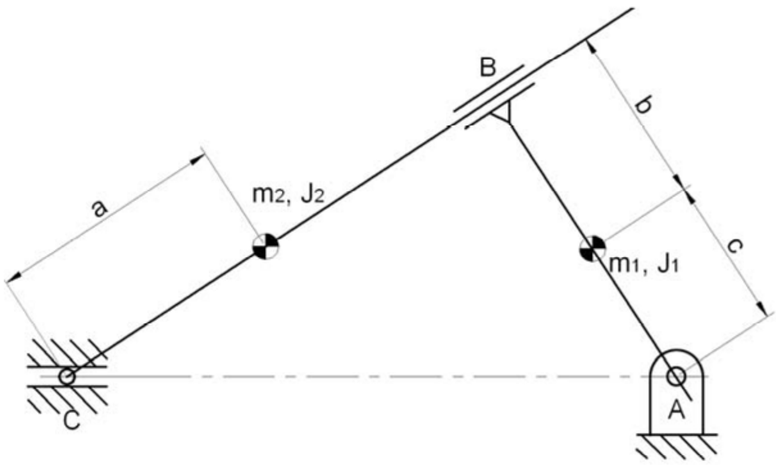
$$0 = v_2 - d\cdot\omega_2\cos\varphi_2$$

Para desacoplar las ecuaciones se usan uniones semirrígidas. EL bond graph es el siguiente:



EJERCICIO 5

Construir el modelo de Bond-Graph del mecanismo de la figura, incluyendo su causalidad y las justificaciones y explicaciones del mismo.



SOLUCIÓN

Par de revolución O:

$$\vec{r}_A^{\,O} = \vec{r}_A^{\,1}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 0 = x_1 + c\cdot\cos\varphi_1 \\ 0 = y_1 + c\cdot\sin\varphi_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = u_1 - \omega_1\cdot c\cdot\sin\varphi_1 \\ 0 = y_1 + \omega_1\cdot c\cdot\cos\varphi_1 \end{cases}$$

En la corredera en B se debe cumplir:

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 - b\cdot\cos\varphi_1 - x_2 \\ y_1 - b\cdot\sin\varphi_1 - y_2 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

$$\cos\varphi_2\cdot(y_1 - b\cdot\sin\varphi_1 - y_2) - \sin\varphi_2\cdot(x_1 - b\cdot\cos\varphi_1 - x_2) = 0$$

Derivando:

$$-\omega_2\cdot\sin\varphi_2\cdot(y_1 - b\cdot\sin\varphi_1 - y_2) + \cos\varphi_2\cdot(v_1 - b\cdot\omega_1\cdot\cos\varphi_1 - v_2) - \omega_2\cdot\cos\varphi_2\cdot(x_1 - b\cdot\cos\varphi_1 - x_2) - \sin\varphi_2\cdot(u_1 + b\cdot\omega_1\cdot\sin\varphi_1 - u_2) = 0$$

Agrupando términos:

$$\sin\varphi_2\cdot\left(u_2 - \omega_2\cdot(y_1 - b\cdot\sin\varphi_1 - y_2)\right) - \cos\varphi_2\cdot\left(v_2 + \omega_2\cdot(x_1 - b\cdot\cos\varphi_1 - x_2)\right) + \cos\varphi_2\cdot(v_1 - b\cdot\omega_1\cdot\cos\varphi_1) - \sin\varphi_2\cdot(u_1 + b\cdot\omega_1\cdot\sin\varphi_1) = 0$$

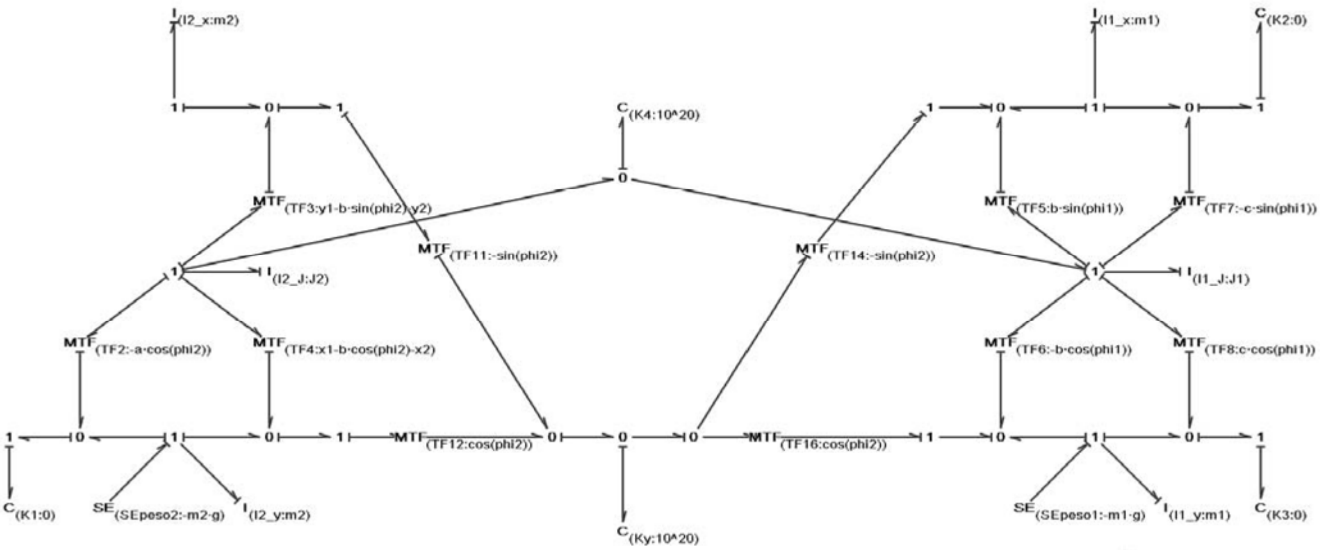
Par traslación-revolución C:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \left\{ \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \vec{0}$$

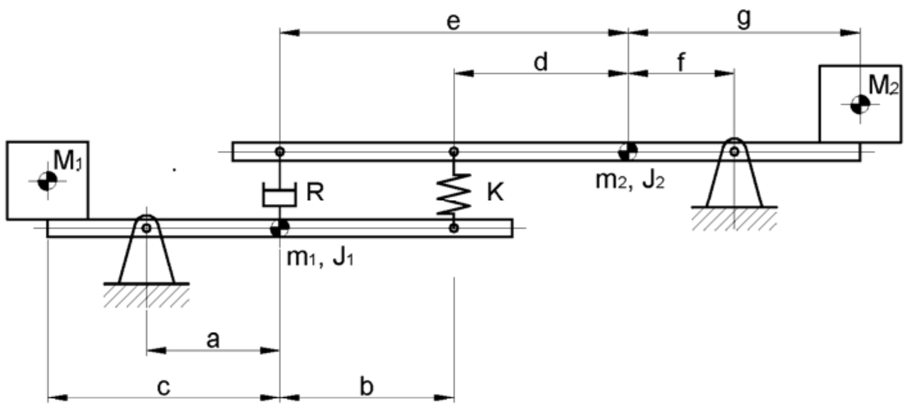
$$0 = y_2 - a \cdot \sin\varphi_2$$

$$0 = v_2 - a \cdot \omega_2 \cdot \cos\varphi_2$$

El Bond-Graph es el siguiente:



EJERCICIO 6

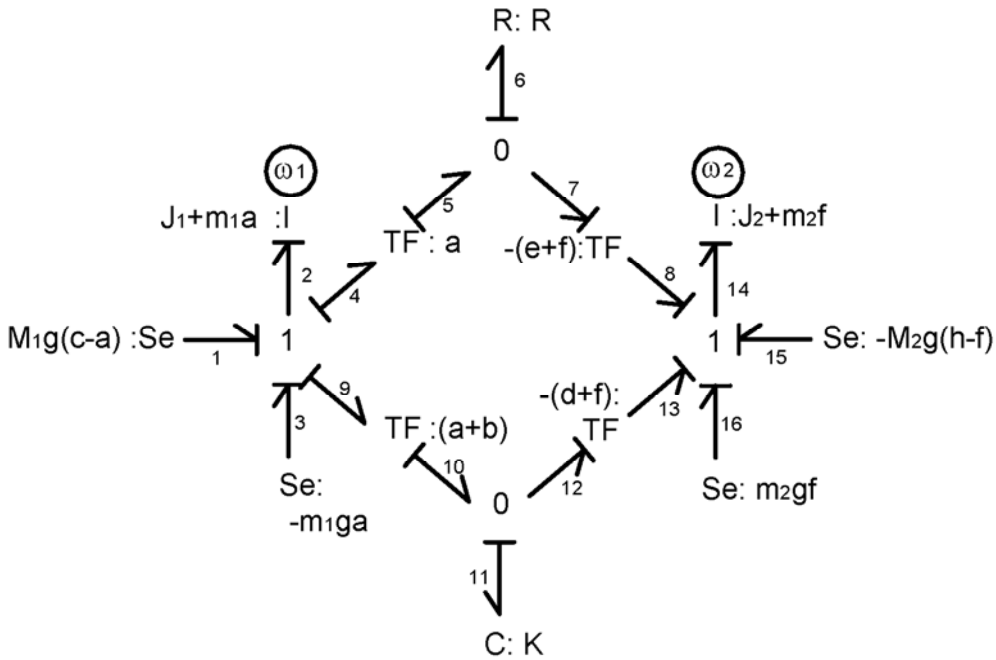


El mecanismo de la figura tiene dos barras articuladas en dos puntos fijos, con dos masas puntuales en los extremos. Considerando pequeños desplazamientos, se pide:

- Construir el modelo de bond graph del mecanismo de de la figura.
- Flujos y esfuerzos del sistema.
- Ecuaciones dinámicas del sistema.

SOLUCIÓN

Solución 1. Se considera el movimiento en función de los giros de las dos barras alrededor de sus respectivos puntos fijos.



Velocidades:

Extremo superior muelle: $-(d+f)\omega_2$

Extremo inferior muelle: $(a+b)\omega_1$

Extremo superior amortiguador: $-(e+f)\omega_2$

Extremo inferior amortiguador: $a\omega_1$

Flujos y esfuerzos:

Bond	Flujo	Esfuerzo
1	ω_1	$M_1 g(c-a)$
2	$\boxed{\omega_1}$	$M_1 g(c-a) - m_1 ga - Ra(a\omega_1 + (e+f)\omega_2) - (a+b)Kq_1$
3	ω_1	$-m_1 ga$
4	ω_1	$Ra(a\omega_1 + (e+f)\omega_2)$
5	$a\omega_1$	$R(a\omega_1 + (e+f)\omega_2)$
6	$a\omega_1 + (e+f)\omega_2$	$R(a\omega_1 + (e+f)\omega_2)$
7	$-(e+f)\omega_2$	$R(a\omega_1 + (e+f)\omega_2)$
8	ω_2	$-(e+f)R(a\omega_1 + (e+f)\omega_2)$
9	ω_1	$(a+b)Kq_1$
10	$(a+b)\omega_1$	Kq_1
11	$(a+b)\omega_1 + (d+f)\omega_2$	$\boxed{Kq_1}$
12	$-(d+f)\omega_2$	Kq_1
13	ω_2	$-(d+f)Kq_1$
14	$\boxed{\omega_2}$	$m_2 gf - M_2 g(h-f) - (e+f)R(a\omega_1 + (e+f)\omega_2) - (d+f)Kq_1$
15	ω_2	$-M_2 g(h-f)$
16	ω_2	$m_2 gf$

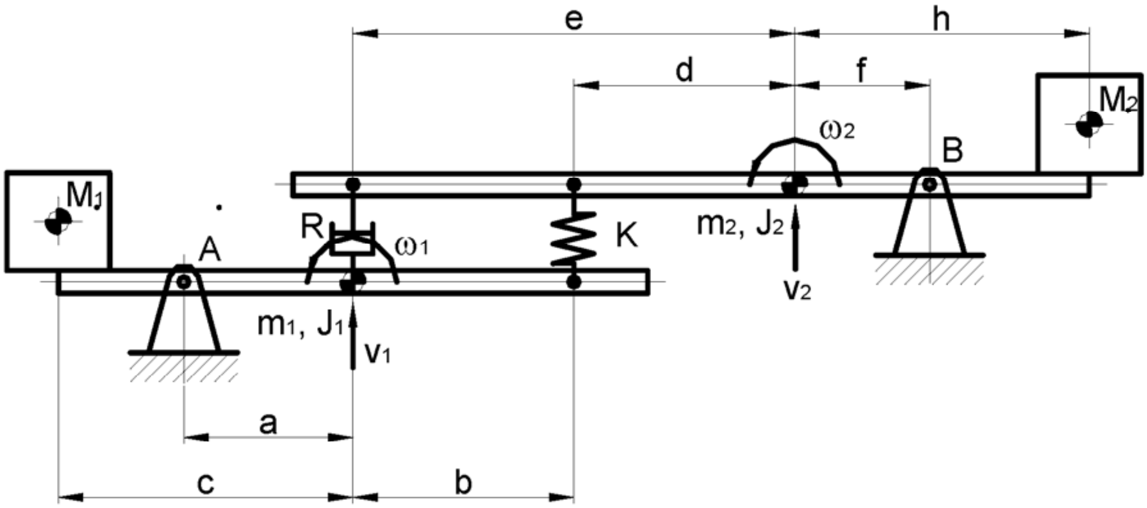
Ecuaciones:

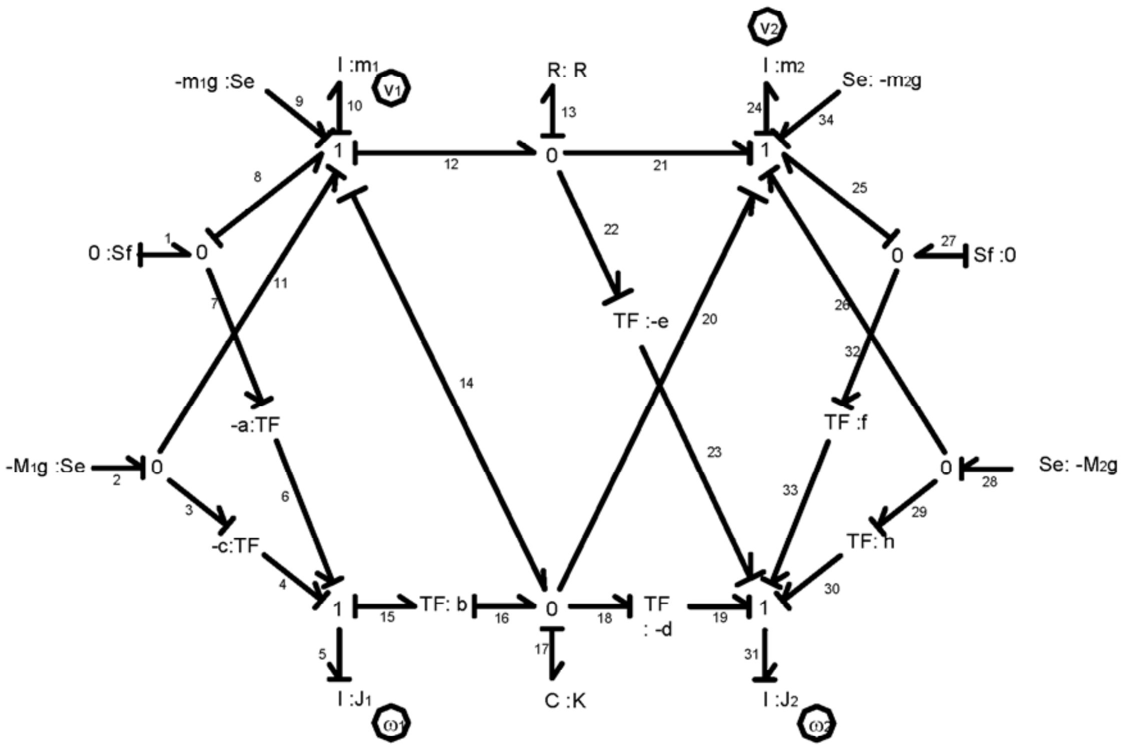
$$\left(J_1 + m_1 a^2\right)\dot{\omega}_1 = M_1 g(c-a) - m_1 ga - Ra(a\omega_1 + (e+f)\omega_2) - (a+b)Kq_1$$

$$\left(J_2 + m_2 f^2\right)\dot{\omega}_2 = m_2 gf - M_2 g(h-f) - (e+f)R(a\omega_1 + (e+f)\omega_2) - (d+f)Kq_1$$

$$\dot{q}_1 = (a+b)\omega_1 + (d+f)\omega_2$$

Solución 2. Se considera el movimiento en función de los desplazamientos verticales de los centros de gravedad y de los giros de las dos barras alrededor de sus respectivos centros de gravedad.





Velocidades:

Extremo superior muelle: $v_2 - d\omega_2$
Extremo inferior muelle: $v_1 + b\omega_1$
Extremo superior amortiguador: $v_2 - e\omega_2$
Extremo inferior amortiguador: v_1

Punto fijo A: $v_1 - a\omega_1 = 0$
Punto fijo A: $v_2 + f\omega_2 = 0$

Flujos y esfuerzos:

Bond	Flujo	Esfuerzo
1	0	$m_1g+M_1g+m_1\dot{v}_1+R(v_1-v_2+e\omega_2)+Kq_1$
2	$(a-c)\omega_1$	$-M_1g$
3	$-c\omega_1$	$-M_1g$
4	ω_1	cM_1g
5	$\boxed{\omega_1}$	$-am_1g+(c-a)M_1g-am_1\dot{v}_1-aR(v_1-v_2+e\omega_2)-(a+b)Kq_1$
6	ω_1	$-am_1g-aM_1g-am_1\dot{v}_1-aR(v_1-v_2+e\omega_2)-aKq_1$
7	$-a\omega_1$	$m_1g+M_1g+m_1\dot{v}_1+R(v_1-v_2+e\omega_2)+Kq_1$
8	$a\omega_1$	$m_1g+M_1g+m_1\dot{v}_1+R(v_1-v_2+e\omega_2)+Kq_1$
9	$a\omega_1$	$-m_1g$
10	$a\omega_1$	$\boxed{m_1\dot{v}_1}$
11	$a\omega_1$	$-M_1g$
12	$a\omega_1$	$R(v_1-v_2+e\omega_2)$
13	$v_1-v_2+e\omega_2$	$R(v_1-v_2+e\omega_2)$
14	$a\omega_1$	Kq_1
15	ω_1	bKq_1
16	$b\omega_1$	Kq_1
17	$v_1+b\omega_1-v_2+d\omega_2$	$\boxed{Kq_1}$
18	$-d\omega_2$	Kq_1
19	ω_2	$-dKq_1$
20	$-f\omega_2$	Kq_1
21	$-f\omega_2$	$R(v_1-v_2+e\omega_2)$
22	$-e\omega_2$	$R(v_1-v_2+e\omega_2)$
23	ω_2	$-eR(v_1-v_2+e\omega_2)$
24	$-f\omega_2$	$\boxed{m_2\dot{v}_2}$
25	$-f\omega_2$	$m_2g+M_2g+m_2\dot{v}_2-R(v_1-v_2+e\omega_2)-Kq_1$
26	$-f\omega_2$	$-M_2g$
27	0	$m_2g+M_2g+m_2\dot{v}_2-R(v_1-v_2+e\omega_2)-Kq_1$
28	$(h-f)\omega_2$	$-M_2g$
29	$h\omega_2$	$-m_2g-M_2g-m_2\dot{v}_2+R(v_1-v_2+e\omega_2)+Kq_1$
30	ω_2	$-hM_2g$
31	$\boxed{\omega_2}$	$fm_2g-(h-f)M_2g+fm_2\dot{v}_2-(e+f)R(v_1-v_2+e\omega_2)-(f+d)Kq_1$
32	$f\omega_2$	$m_2g+M_2g+m_2\dot{v}_2-R(v_1-v_2+e\omega_2)-Kq_1$
33	ω_2	$fm_2g+fM_2g+fm_2\dot{v}_2-fR(v_1-v_2+e\omega_2)-fKq_1$
34	$-f\omega_2$	$-m_2g$

Ecuaciones:

$$J_1\dot{\omega}_1=-am_1g+(c-a)M_1g-am_1\dot{v}_1-aR(v_1-v_2+e\omega_2)-(a+b)Kq_1$$

$$J_2\dot{\omega}_2=fm_2g-(h-f)M_2g+fm_2\dot{v}_2-(e+f)R(v_1-v_2+e\omega_2)-(f+d)Kq_1$$

$$\dot{q}_1=v_1+b\omega_1-v_2+d\omega_2$$

$$v_1=a\omega_1$$

$$v_2=-f\omega_2$$

Sustituyendo:

$v_1 = a\omega_1$ y $\dot{v}_1 = a\dot{\omega}_1$

$v_2 = -f\omega_2$ y $\dot{v}_2 = -f\dot{\omega}_2$

Resulta:

$$\left(J_1 + m_1 a^2\right)\dot{\omega}_1 = -am_1 g + (c-a)M_1 g - aR\left(a\omega_1 + f\omega_2 + e\omega_2\right) - (a+b)Kq_1$$

$$\left(J_2 + m_2 f^2\right)\dot{\omega}_2 = fm_2 g - (h-f)M_2 g - (e+f)R\left(a\omega_1 + f\omega_2 + e\omega_2\right) - (f+d)Kq_1$$

$$\dot{q}_1 = (a+b)\omega_1 + (f+d)\omega_2$$