

Introducción a la técnica de Bond-Graph

1.1 INTRODUCCIÓN

En un sistema físico cualquiera, la energía puede almacenarse, disiparse o intercambiarse. Cuando posteriormente se unen dos sistemas, aparecen distintos flujos de potencia entre ellos.

Mediante la técnica de Bond-Graph, el flujo de potencia entre los sistemas o incluso entre sus elementos se representa mediante una línea llamada Bond, representada en la figura 1.1. La punta de la flecha del Bond indica el sentido de transmisión de la potencia.



Figura 1.1

Por otra parte, la potencia instantánea, variable en el tiempo, es transmitida por un Bond particular y puede ser expresada como el producto de dos variables: el esfuerzo $e(t)$ y el flujo $f(t)$, siendo ambas también variables en función del tiempo.

$$Potencia = e(t) \cdot f(t)$$

Como se verá más adelante, el significado físico de las variables esfuerzo y flujo dependerá del dominio físico en que se encuadre el sistema en estudio. Por ejemplo, en el caso de la mecánica, $e(t)$ es la fuerza y $f(t)$ es la velocidad, cumpliéndose que:

$$Potencia = Esfuerzo \times Velocidad$$

En el Bond-Graph a las variables $e(t)$, $f(t)$ se las denomina variables del sistema y sus valores definen el Bond. En definitiva, cada Bond lleva dos valores asociados: esfuerzo y flujo, cuyo producto es la potencia.

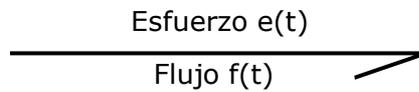


Figura 1.2

Además de las ya mencionadas, se utilizan dos variables más, denominadas variables energéticas o dinámicas. Estas dos variables son: el desplazamiento $q(t)$ y la integral del esfuerzo en el tiempo $P(t)$.

$$P(t) = \int^t e(t) \cdot dt$$

Según esto, en mecánica $P(t)$ es la cantidad de movimiento, por tanto se cumplirá que:

$$\frac{dP(t)}{dt} = e(t)$$

En cuanto al desplazamiento, se define como la integral del flujo en el tiempo.

$$q(t) = \int^t f(t) \cdot dt$$

O también:

$$\frac{dq(t)}{dt} = f(t)$$

Por otra parte, la energía transmitida por el Bond, $E(t)$ es la integral de la potencia en el tiempo, por lo que:

$$E(t) = \int^t Potencia \cdot dt = \int^t e(t) \cdot f(t) \cdot dt$$

Como se ha comentado anteriormente, las variables esfuerzo y flujo tienen un significado diferente en función del dominio físico al que pertenece el sistema en estudio. En la figura 1.3, puede verse el significado de estas variables en diferentes dominios de la Física.

<i>Sistema físico</i>	Esfuerzo <i>e</i>	Flujo <i>f</i>	Momento <i>p</i>	Desplazamiento <i>q</i>
Mecánica Traslación	Fuerza f (N)	Velocidad v (m/s)	Momento lineal P (N · s)	Desplazamiento X (m)
Mecánica Rotación	Par M (N · m)	Vel. Angular w (rad/s)	Momento angular H (N m · s)	Ángulo girado O (rad)
Hidráulica	Presión p (N/m ²)	Caudal Q (m ³ /s)	Momento P (n · s/m ²)	Volumen V (m ³)
Electricidad	Voltaje e (V)	Intensidad I (Amp)	Flujo F (v · s)	Carga Q (c)
Sistemas térmicos	Temperatura T (K)	Flujo calor q (w)		Calor (Q)
Acústica	Presión p (N/m ²)	Velocidad v (m ³ /s)	Momento P (N · s/m ²)	Volumen V (m ³)

Figura 1.3

1.2. ELEMENTOS BÁSICOS DE BOND-GRAPH

En los siguientes apartados se van a presentar un conjunto de elementos básicos que podrán ser usados para modelizar cada sistema. Estos elementos aparecen como componentes elementales del sistema representando su idealización matemática. Ejemplos claros de estos componentes son: resistencias, condensadores, masas resortes, tuberías, bombas hidráulicas, etc.

La técnica de Bond-Graph permite que, con la clasificación de variables presentada en el apartado anterior, sólo se necesite una pequeña cantidad de elementos para poder representar modelos de cualquier dominio físico.

Además, como se verá posteriormente, la notación de Bond-Graph permite visualizar el comportamiento del sistema más fácilmente que el conjunto de las ecuaciones de estado.

Puerta resistencia

Representará a aquellos elementos o situaciones donde haya una pérdida de energía. Un ejemplo claro es el de la resistencia eléctrica que al paso de una intensidad de corriente produce una caída de tensión.

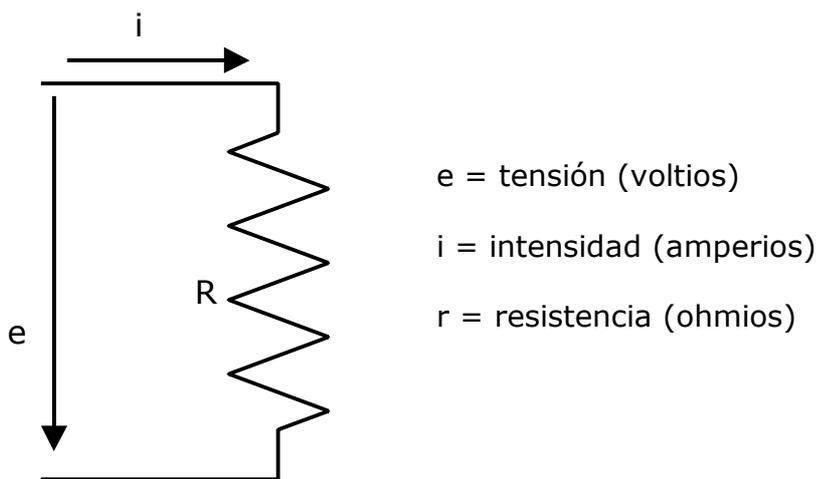


Figura 1.4

Este elemento se representaba en Bond-Graph mediante el siguiente grafo:

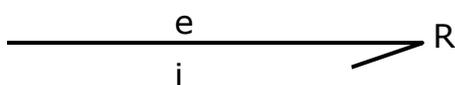


Figura 1.5

En él, el esfuerzo e (en este caso, tensión) y el flujo f (intensidad) están relacionados por la conocida expresión:

$$e = R \cdot i$$

En la representación mediante Bond-Graph, se dirá que el esfuerzo asociado a un grafo de puerta resistencia es igual al valor R que define la puerta por el flujo asociado al mismo grafo. Es decir, en estas puertas existe una relación entre el esfuerzo y el flujo del grafo, pudiendo ser esta relación lineal o no lineal.

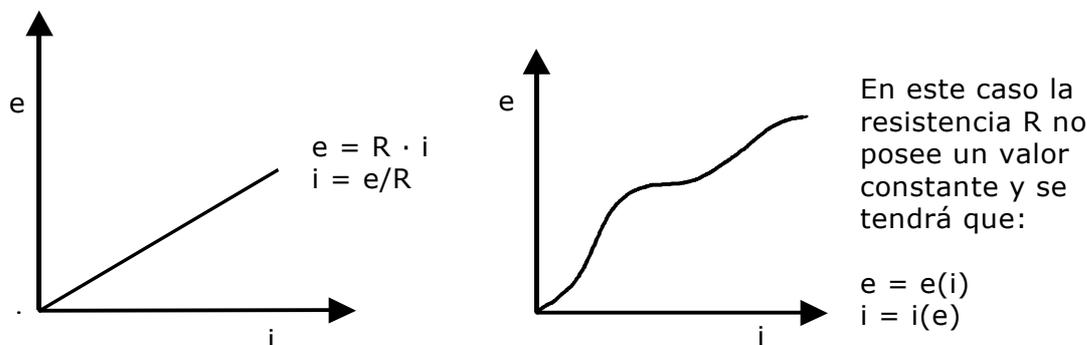


Figura 1.6

Al igual que en el caso de la resistencia eléctrica, toda pérdida de energía se representa en Bond-Graph mediante una puerta tipo resistencia.

Otro ejemplo claro lo constituye el amortiguador hidráulico. Este elemento opone una resistencia a su desplazamiento proporcional a la velocidad a la que se lo quiere desplazar.

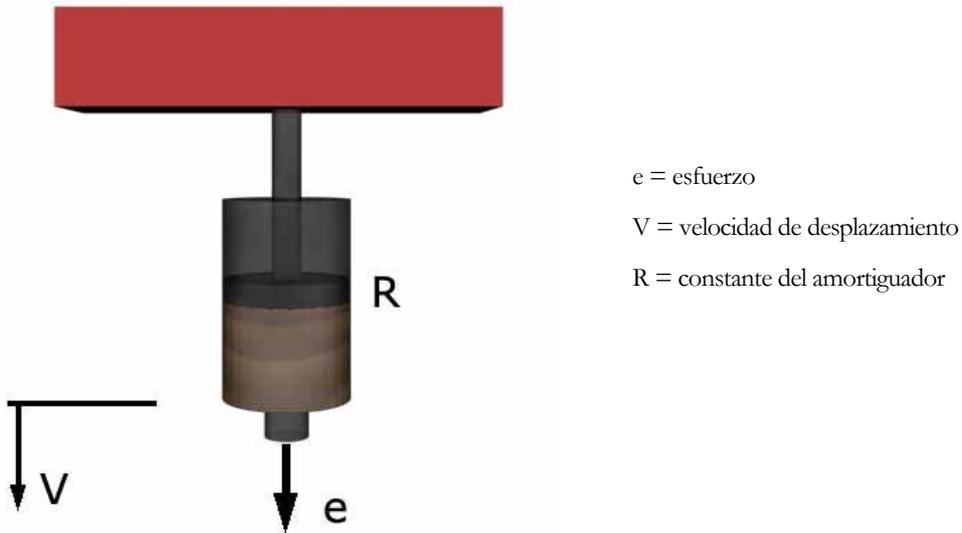


Figura 1.7

Si la característica R del amortiguador se considera constante, el esfuerzo necesario para desplazar el amortiguador viene dado por:

$$e = v \cdot R$$

En donde v es la diferencia de velocidad entre sus extremos.

Sin embargo, el amortiguador una vez que se ha desplazado no vuelve a su posición inicial, es decir, que ha habido una pérdida de energía. Uniendo esto al hecho de que existe una relación entre el esfuerzo y la velocidad, el amortiguador vendrá representado en Bond-Graph mediante una puerta resistencia.

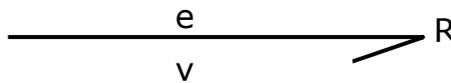


Figura 1.8

Cumpléndose que:

$$e = v \cdot R$$

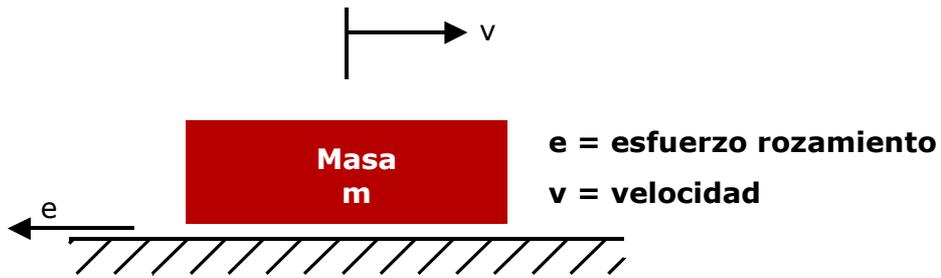
$$v = \frac{1}{R} \cdot e$$

En estas expresiones el valor de R puede ser constante o variable.

Otro ejemplo claro de pérdida de energía es el rozamiento mecánico de un sólido de masa m que se desplaza sobre un plano.

Se cumplirá que $e = v \cdot R$. Evidentemente, se está considerando que la fuerza de rozamiento depende de la velocidad de desplazamiento. En la realidad, las fuerzas de rozamiento dependen de la velocidad pero de una forma no lineal.

Otro elemento que se comporta como puerta resistencia es la pérdida de carga que se produce en una tubería. Hay que recordar que en este caso, las dos variables que acompañan el grafo son la presión y el caudal.



e = esfuerzo rozamiento
v = velocidad



Figura 1.9

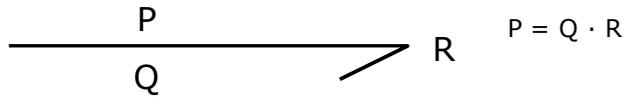
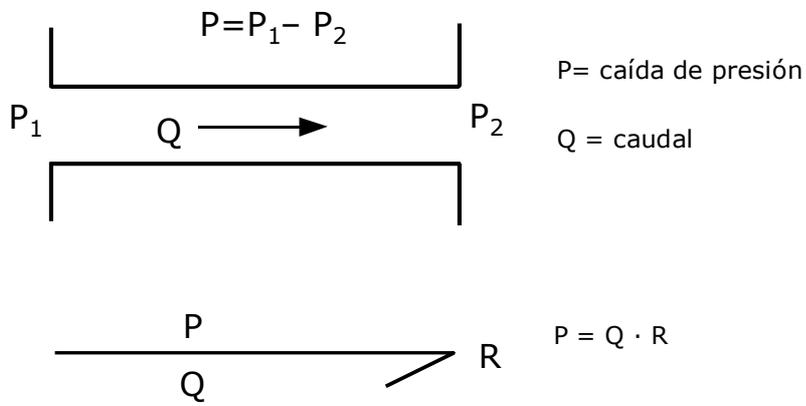


Figura 1.10

Puerta resorte

Se representa como puerta resorte todo elemento que es susceptible de almacenar energía y de devolverla íntegramente al sistema sin ninguna pérdida.

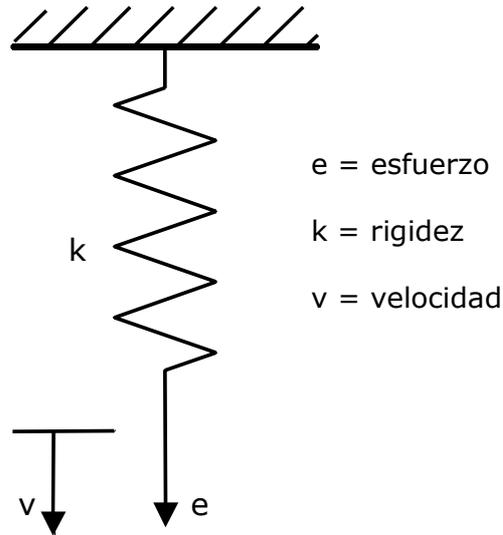


Figura 1.11

Dado un resorte ideal (sin pérdidas) se cumple que:

$$E = K \cdot x$$

En donde x representa el desplazamiento instantáneo generado por el movimiento del resorte. Si la rigidez K se considera constante, la relación entre el esfuerzo y el desplazamiento es lineal, como se indica en la figura 1.12.

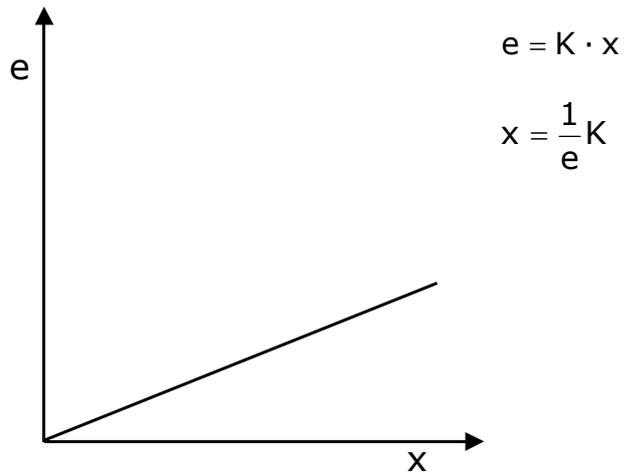


Figura 1.12

Si la rigidez K es variable, la relación entre el esfuerzo y el desplazamiento es no lineal (figura 1.13).

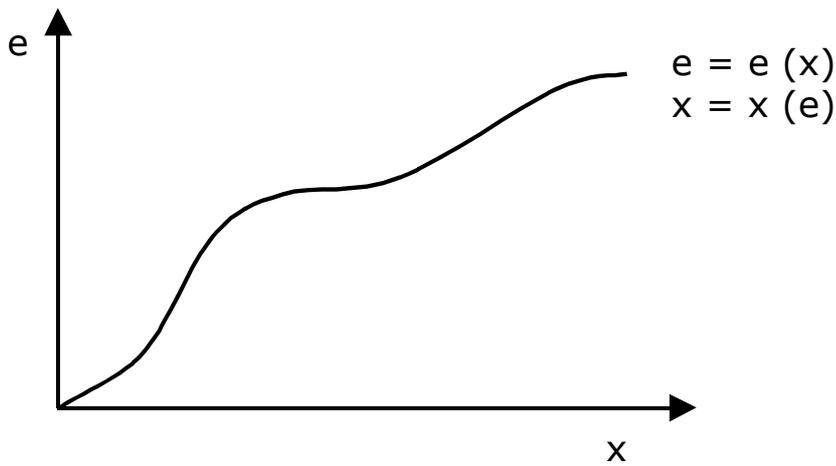


Figura 1.13

La representación de un resorte mediante Bond-Graph, es la indicada en la figura

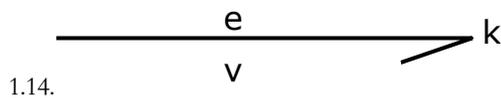


Figura 1.14

Ahora, contrariamente a la puerta resistencia, se relaciona el esfuerzo asociado al grafo con el desplazamiento originado. Teniendo en cuenta que el desplazamiento puede definirse como la integral de la velocidad en el tiempo, en las puertas resorte se cumplirá que:

$$e = K \cdot \int^t v \cdot dt$$

Si en lugar de la mecánica se pasa al campo de la hidráulica, puede considerarse como puerta resorte el acumulador hidroneumático. Este elemento está formado por un recipiente en donde se encuentran un gas comprimido y un volumen de aceite separados por una membrana de goma.

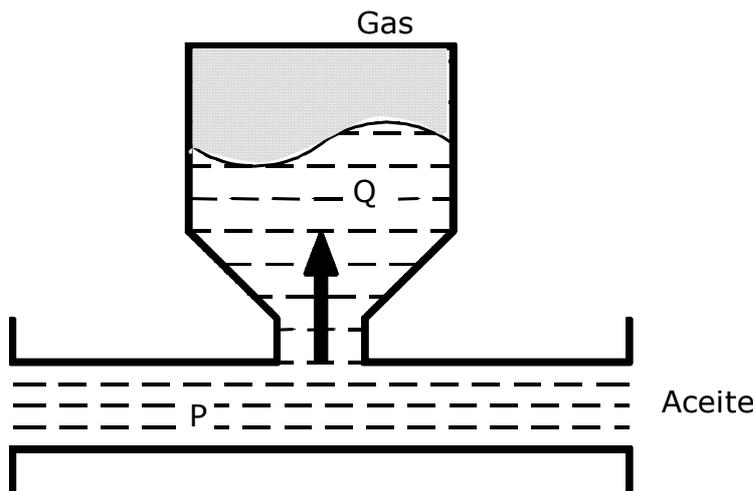


Figura 1.15

El acumulador hidroneumático funciona como un resorte y su representación en Bond-Graph es idéntica al resorte mecánico antes citado.



Figura 1.16

$$e = K \cdot \int^t f \cdot dt$$

En este caso, el esfuerzo representa el incremento de presión; y el flujo, el caudal de aceite, por tanto:

$$p = k \cdot \int^t Q \cdot dt$$

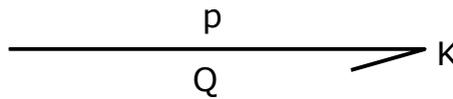


Figura 1.17

Otro fenómeno de acumulación de energía es el originado por el condensador en un circuito eléctrico.

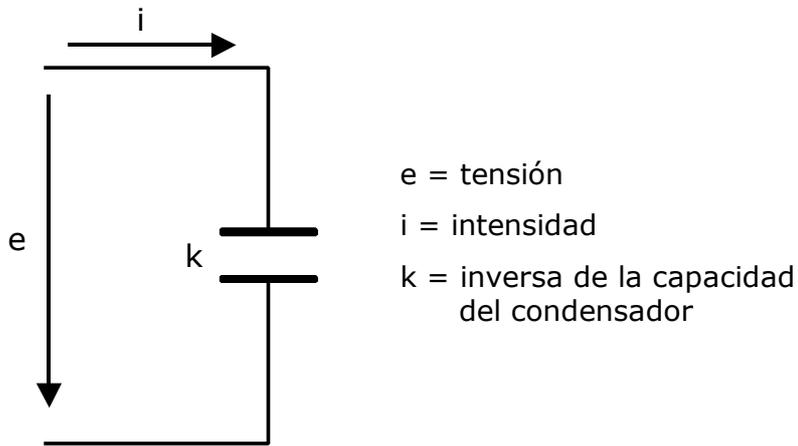


Figura 1.18

Se representará por:

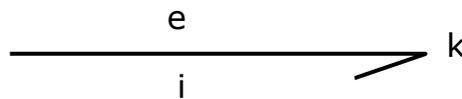


Figura 1.19

Denominando q a la carga y recordando que es igual a la integral de la intensidad en el tiempo, tenemos:

$$q = \int^t i \cdot dt$$

La ecuación característica del condensador será:

$$q = K \cdot \int^t i \cdot dt$$

Puerta inercia

Se representan mediante puertas inercia todos aquellos elementos o fenómenos en los que existe una relación matemática entre el flujo y la variable P, que se había definido como la integral del esfuerzo en el tiempo y que en mecánica es la cantidad de movimiento.

Como primer ejemplo, puede plantearse el caso de un móvil, de masa m, que se desplaza sin rozamiento a una velocidad v.

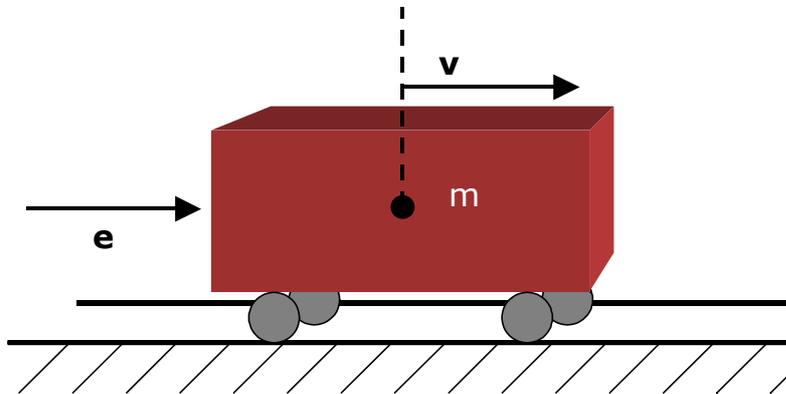


Figura 1.20

Se representará en Bond-Graph mediante:

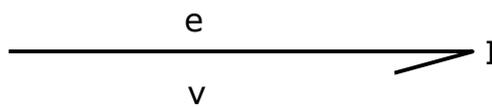


Figura 1.21

El valor asociado a I representa la masa del elemento, y P, el producto de esta masa por su velocidad. Se puede decir que:

$$P = m \cdot v \quad ; \quad I = m$$

$$v = \frac{1}{I} \cdot P$$

$$P = I \cdot v$$

Lo cual, como se indicaba anteriormente, determina una relación entre P y el flujo.

En general, podrá decirse que en toda puerta inercia se tiene el Bond-Graph indicado en la figura 1.22.

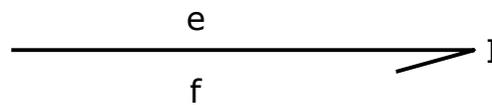


Figura 1.22

Para sistemas lineales, figura 1.23.

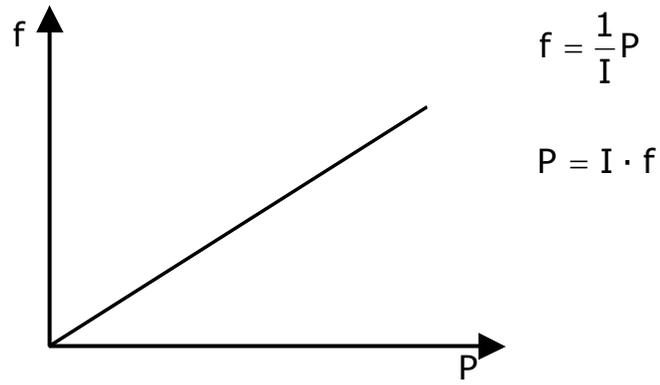


Figura 1.23

Y para no lineales, figura 1.24:

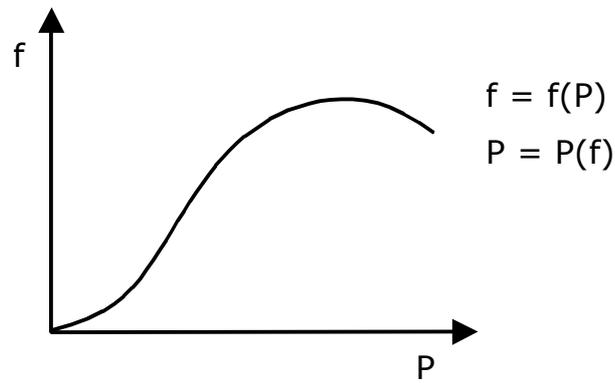


Figura 1.24

Otros ejemplos de puertas inercia son el giro de un cuerpo rígido y la inductancia eléctrica.

J: Momento de inercia polar.

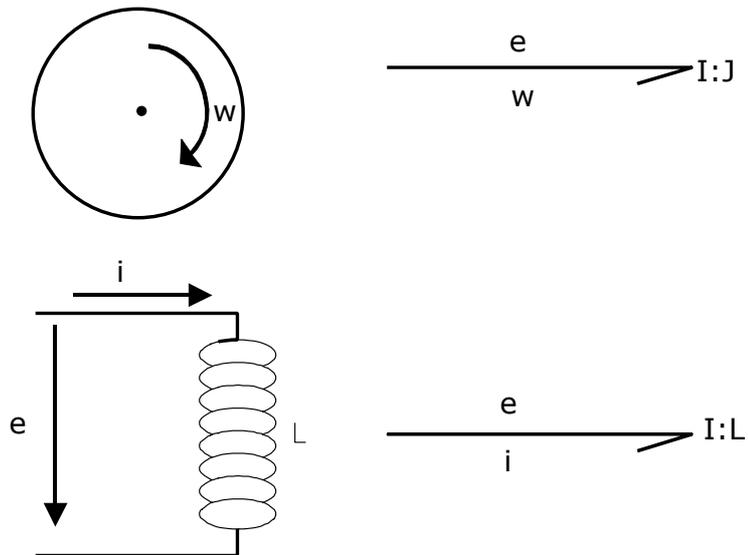


Figura 1.25

Nudos de unión

En aquellos puntos del sistema donde existen una o varias entradas de energía y una o varias salidas de ésta, se forma un nudo cuya característica fundamental es que en él se cumple el principio de conservación de la energía.

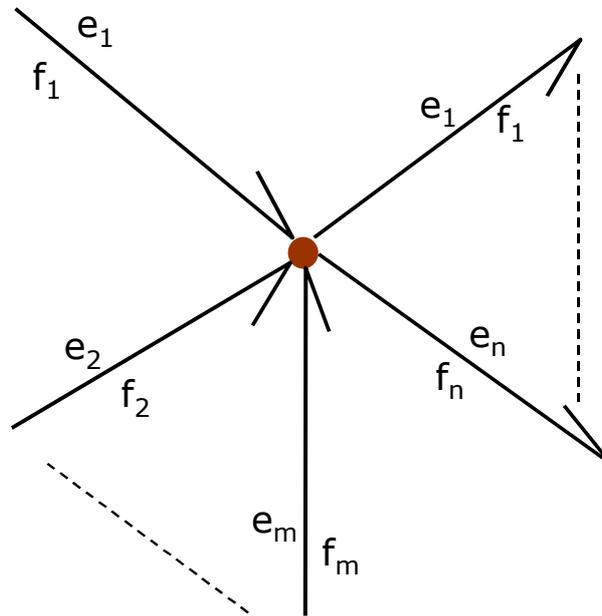


Figura 1.26

Debido al principio de conservación de energía se cumplirá que:

$$\sum_{i=1}^m e_i \cdot f_i = \sum_{j=1}^n e_j \cdot f_j$$

Es decir, la suma de los productos e y f asociados a cada grafo de entrada es igual a la suma de los productos de salida, lo que equivale a decir que no ha habido pérdida de energía en el nudo.

Por tanto, en los nudos se cumple que:

$$\sum (e \cdot f)_{entrada} = \sum (e \cdot f)_{salida}$$

Existen dos tipos de uniones que se denominan tipo 0 y tipo 1.

Nudo de unión 0

En este tipo de nudo todos los grafos que entran y salen del nudo llevan asociado el mismo esfuerzo.

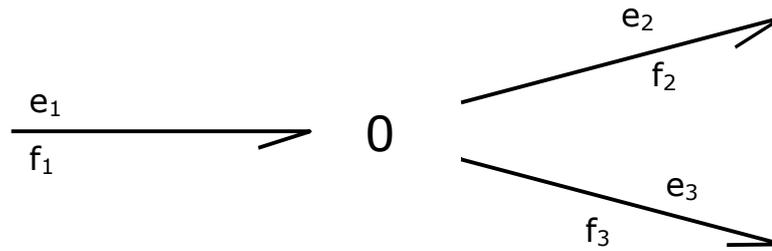


Figura 1.27

Por ser nudo 0 se cumple que:

$$e_1 = e_2 = e_3$$

Y debido a la conservación de energía, tenemos que:

$$e_1 \cdot f_1 = e_2 \cdot f_2 + e_3 \cdot f_3$$

En consecuencia:

$$e_1 \cdot f_1 = e_1 \cdot f_2 + e_1 \cdot f_3$$

$$e_1 \cdot f_1 = e_1 \cdot (f_2 + f_3)$$

$$f_1 = f_2 + f_3$$

Lo que significa que en los nudos tipo 0, la suma de los flujos de entrada es igual a la suma de los flujos de salida.

Nudo de unión 1

Al contrario que en el caso anterior, en los nudos de unión 1 se mantiene constante el flujo de los grafos que entran y salen de la unión.

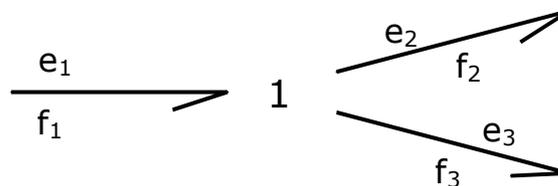


Figura 1.28

$$f_1 = f_2 = f_3$$

Por conservación de la energía:

$$e_1 \cdot f_1 = e_2 \cdot f_2 + e_3 \cdot f_3$$

$$e_1 \cdot f_1 = e_2 \cdot f_1 + e_3 \cdot f_1$$

$$e_1 = e_2 + e_3$$

Lo que significa que, en los nudos tipo 1 la suma de esfuerzos de entrada es igual a la suma de los esfuerzos de salida.

Elementos fuente

Los elementos fuente son aquellos que proporcionan potencia al sistema. Esta potencia puede ser suministrada mediante un flujo o un esfuerzo conocidos. Así pues, habrá dos tipos de fuentes, las de esfuerzo conocido y las de flujo conocido.

Fuentes de esfuerzo

Son aquellas que provocan una entrada de esfuerzo al sistema. Se representan por:

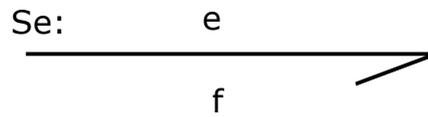


Figura 1.29

Como ejemplos físicos de estas fuentes de esfuerzo pueden mencionarse las fuerzas de excitación en sistemas mecánicos y los generadores de tensión en circuitos eléctricos.

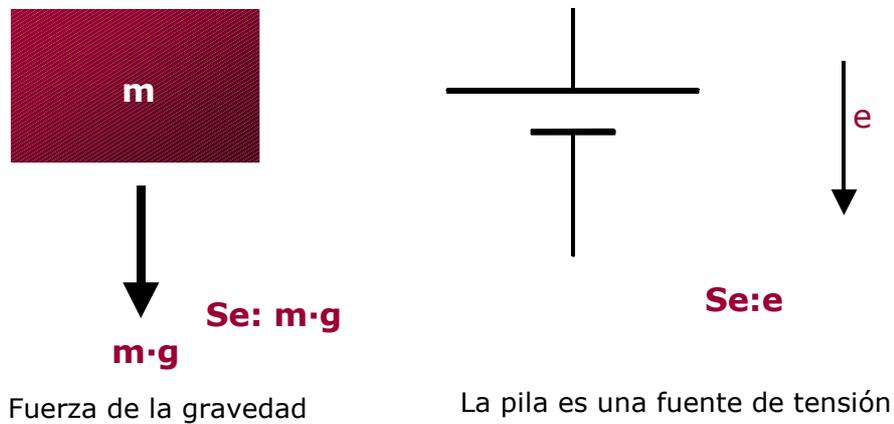


Figura 1.30

Fuentes de flujo

Son aquellas que suministran flujo al sistema. Se representan por:

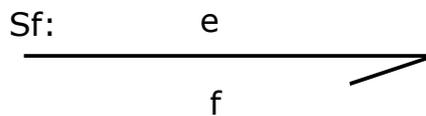
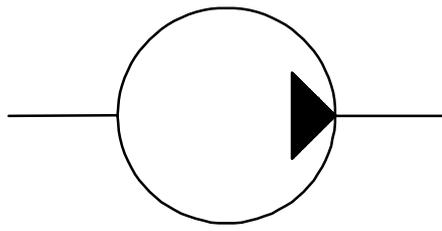


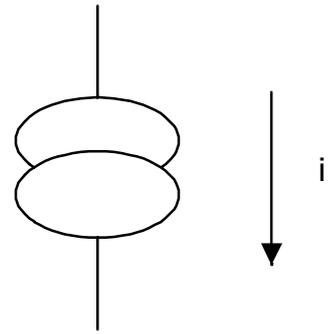
Figura 1.31

Como ejemplos físicos pueden indicarse las fuentes de intensidad en electricidad y las bombas hidráulicas que son fuentes de caudal realmente.



Bomba hidráulica

Sf:Q



Fuente de intensidad

Sf:i

Figura 1.32