

Desarrollo de las ecuaciones de estado

2.1 DESARROLLO DE LAS ECUACIONES DE ESTADO

Sea una masa m_1 apoyada sobre un resorte de rigidez k_1 , que es excitado en su extremo inferior a una velocidad conocida.

Para comenzar la realización del Bond-Graph, se parte del punto A en donde se aplica la excitación exterior de velocidad que es conocida y variable en el tiempo $v_0(t)$.

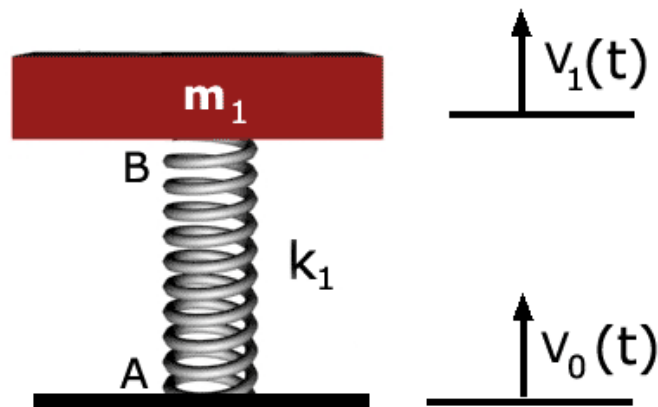


Figura 2.1

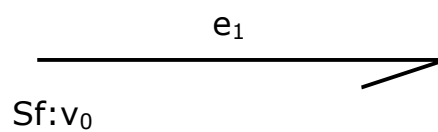


Figura 2.2

Sobre el punto A actúa una fuente de flujo conocida cuyo valor es $v_0(t)$.

Por otra parte, el grafo que representa esta fuente de flujo lleva asociado un esfuerzo e_1 , no conocido, que es la fuerza que se debe realizar en el punto A para que se desplace con la velocidad $v_0(t)$.

El muelle de rigidez k_1 está sometido a todo el esfuerzo e_1 y lo comunica íntegramente al punto B, es decir; tanto el muelle como el punto B están sometidos al mismo esfuerzo.

Por lo anteriormente expuesto, queda claro que el esfuerzo es el mismo en el punto A, en el muelle y en el punto B. Recordando ahora que los nudos en los que existía igualdad de esfuerzos eran del tipo 0, en la representación con Bond-Graph se tendrá:

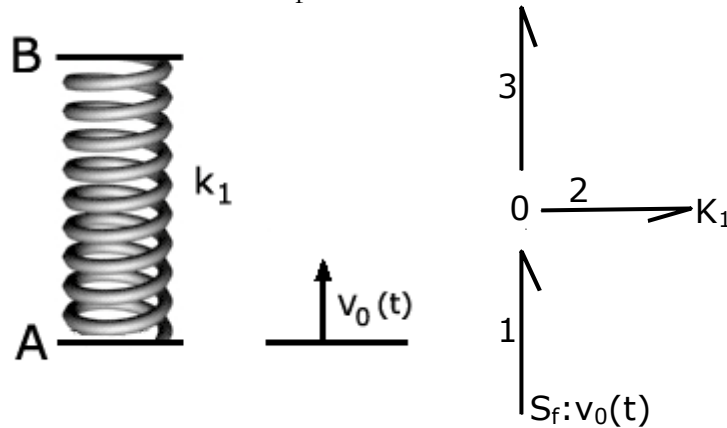


Figura 2.3

Grafo 1: Representa la excitación de velocidad conocida $v_0(t)$.

Grafo 2: Es el muelle.

Grafo 3: Tiene asociados el esfuerzo y la velocidad en el punto B.

En la figura 2.3 se observa cómo debido a que en el resorte existe el mismo esfuerzo que en el punto B, se ha empleado una unión 0.

Hay que recordar que cada grafo lleva asociados el esfuerzo y la velocidad del punto o elemento al que representa.

De esta forma, en el caso del muelle se tiene:

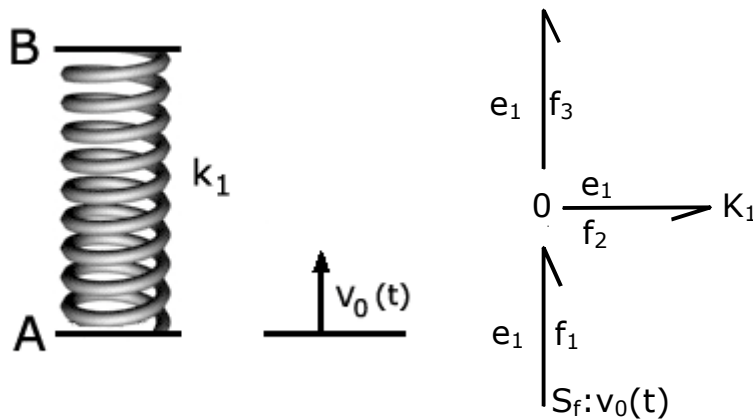


Figura 2.4

Continuando con el ejemplo propuesto, en el punto B está situada una masa de valor m_1 .

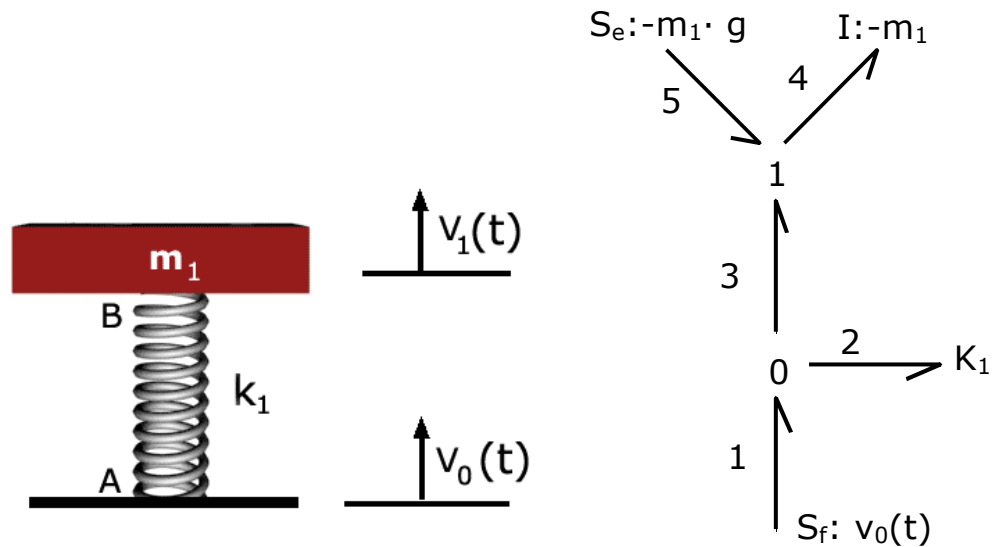


Figura 2.5

A los grafos 1, 2 y 3 ya definidos, se añaden ahora el 4, que representa la inercia de la masa, y el 5, que es una fuente de esfuerzos que corresponde al peso propio de la masa m_1 .

Tanto el grafo 4 como el 5 se unen mediante un nudo tipo 1, ya que ambos, el peso propio y la inercia de la masa, tienen la misma velocidad $v_1(t)$, variable en el tiempo.

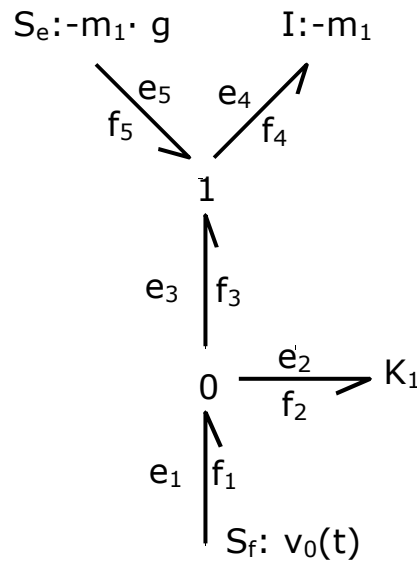


Figura 2.6

Una vez construido el Bond-Graph de un sistema se definen las variables independientes del mismo y todos los esfuerzos y flujos asociados a cada grafo.

Como variables independientes se toman la cantidad de movimiento asociado al grafo de la puerta de inercia y el desplazamiento entre los extremos del resorte. Sean P_1 y x_1 respectivamente.

Para hallar los esfuerzos y flujos asociados a cada grafo se comienza por los conocidos.

En este caso, se tiene:

$$f_1 = v_0(t) \quad \text{Por ser fuente de flujo conocida.}$$

$$f_4 = \frac{P_1}{m_1} \quad \text{Por ser la variable independiente elegida el momento } P_1, \text{ y por tratarse de una puerta de inercia.}$$

Como f_5 y f_3 están en la misma unión 1 que f_4 y recordando que todos los grafos entrantes y salientes de una unión 1 tenían igual flujo:

$$f_3 = f_4 \quad ; \quad f_5 = f_4$$

Por otra parte, en las uniones 0 se cumple que la suma de los flujos de entrada es igual a la suma de los flujos de salida.

En este caso:

$$f_1 = f_3 + f_2$$

Y como f_1 y f_3 ya son conocidos:

$$f_2 = f_1 - f_3$$

Y sustituyendo por los valores indicados anteriormente:

$$f_2 = v_0(t) - \frac{P_1}{m_1}$$

En mecánica, como se indicaba en el capítulo anterior, los esfuerzos se corresponden con las fuerzas y los flujos con las velocidades. Así, en este ejemplo, se tendrá que $f_4 = v_1(t)$ es la velocidad de la masa m_1 .

En resumen, se tiene:

$$\begin{aligned} f_1 &= v_0(t) \\ f_2 &= v_0(t) - \frac{P_1}{m_1} \\ f_3 &= \frac{P_1}{m_1} \\ f_4 &= \frac{P_1}{m_1} \\ f_5 &= \frac{P_1}{m_1} \end{aligned}$$

Una vez hallados los flujos de todos los grafos, se pasa a calcular los esfuerzos.

$$e_5 = -m \cdot g \quad \text{Por ser fuente de esfuerzo conocida.}$$

$e_2 = k_1 \cdot x_1$ Por haber tomado como variable independiente el desplazamiento x_1 y por tratarse de una puerta resorte.

Conocido e_2 , son también conocidos e_1 y e_3 ya que los tres son grafos entrantes y salientes de una unión 0 en donde, por definición, se cumple que todos los esfuerzos son iguales.

En las uniones 1 se cumple la igualdad de flujos y, por lo tanto, suma de esfuerzos entrantes es igual a la suma de esfuerzos salientes.

En este caso:

$$e_3 + e_5 = e_4$$

Y sustituyendo por los valores hallados:

$$e_4 = k_1 \cdot x_1 - m_1 \cdot g$$

En resumen, los esfuerzos del sistema analizado tienen los siguientes valores:

$$e_1 = k_1 \cdot x_1$$

$$e_2 = k_1 \cdot x_1$$

$$e_3 = k_1 \cdot x_1$$

$$e_4 = k_1 \cdot x_1 - m_1 \cdot g$$

$$e_5 = -m_1 \cdot g$$

Llegados a este punto, resulta un ejercicio muy interesante interpretar físicamente el significado de las ecuaciones planteadas, para hallar los esfuerzos y los flujos.

Cuando se trabaja con métodos gráficos puede aparecer la duda de si al emplearlos hay pérdida conceptual del fenómeno que se está estudiando. Con Bond-Graph no existe tal pérdida. Esto puede comprobarse al invertir el ejercicio y reconstruir el modelo partiendo únicamente de un diagrama de grafos. No obstante, es preferible avanzar un poco más en la técnica de Bond-Graph antes de plantear ejercicios inversos.

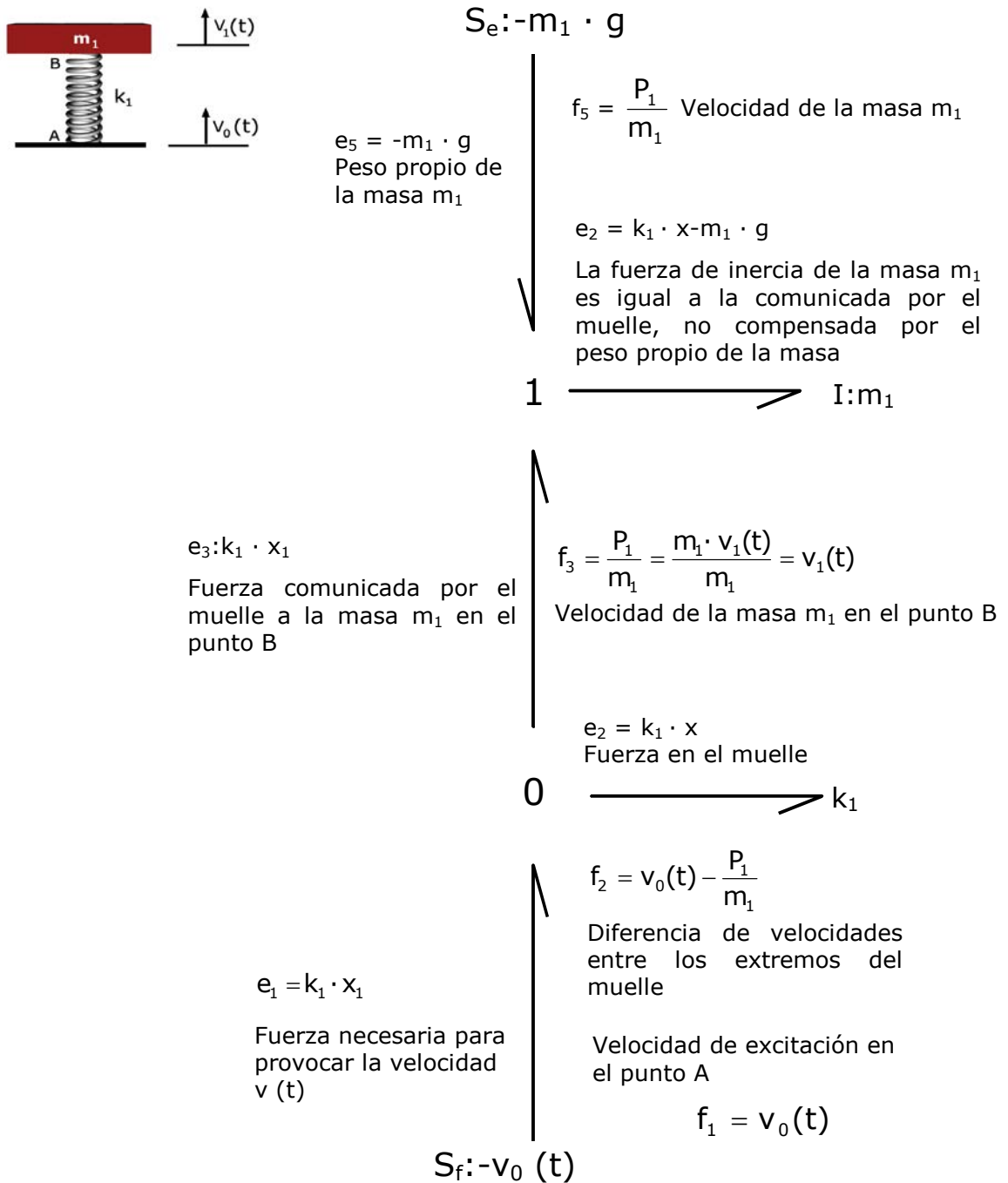


Figura 2.7

En la figura 2.8 se presenta un nuevo modelo de resorte y masa pero a diferencia del anterior, ahora se incluye un amortiguador de coeficiente R_1 .

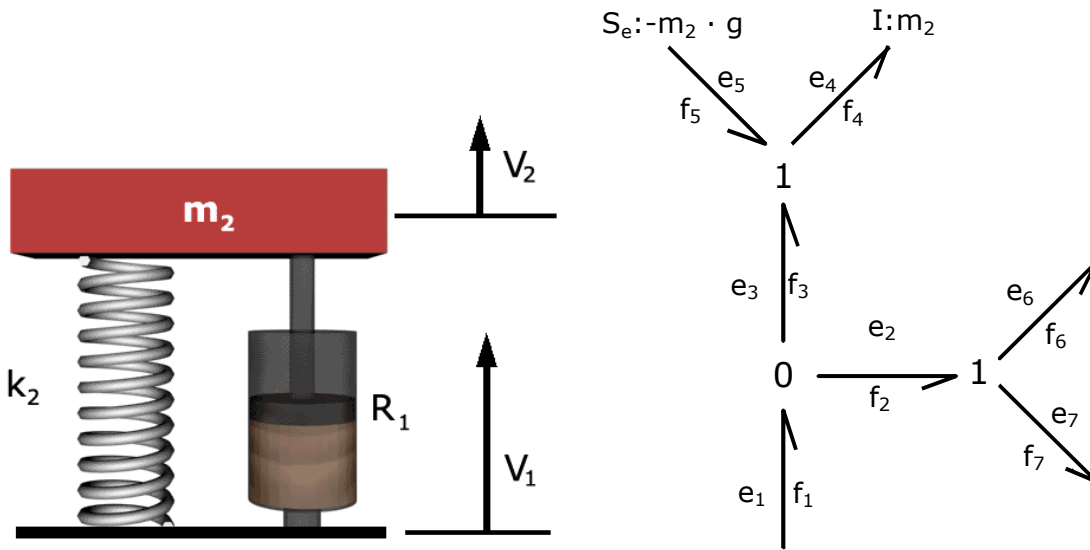


Figura 2.8

Como se observa en la figura, el planteamiento mediante Bond-Graph es bastante similar al caso anterior.

Comenzando el modelo por su parte inferior, sabemos la velocidad a la que se mueven los puntos inferiores del resorte y del amortiguador que es v_1 . Por este motivo, el comienzo del Bond-Graph no es ni más ni menos que una fuente de flujo cuyo valor es la velocidad v_1 .

El grafo que representa esta fuente de flujo tiene, en consecuencia, una velocidad conocida y producirá un esfuerzo e_1 desconocido por el momento.

Los extremos inferiores del muelle y del amortiguador están sometidos a este esfuerzo e_1 , pero también lo están los extremos superiores, es decir, existe el mismo esfuerzo en el binomio muelle-amortiguador que en los puntos extremos de ellos. Por ello, esta parte del modelo tiene que ser representada mediante una unión tipo 0.

El esfuerzo comunicado al muelle-amortiguador se dividirá en dos partes, la correspondiente al muelle y la del amortiguador. Se trata pues, de una suma de esfuerzos (lo cual se representaba mediante uniones tipo 1).

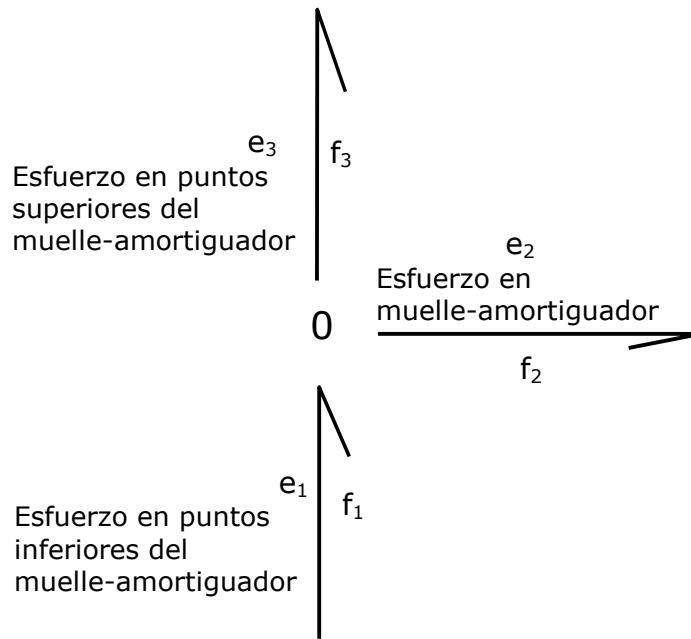


Figura 2.9

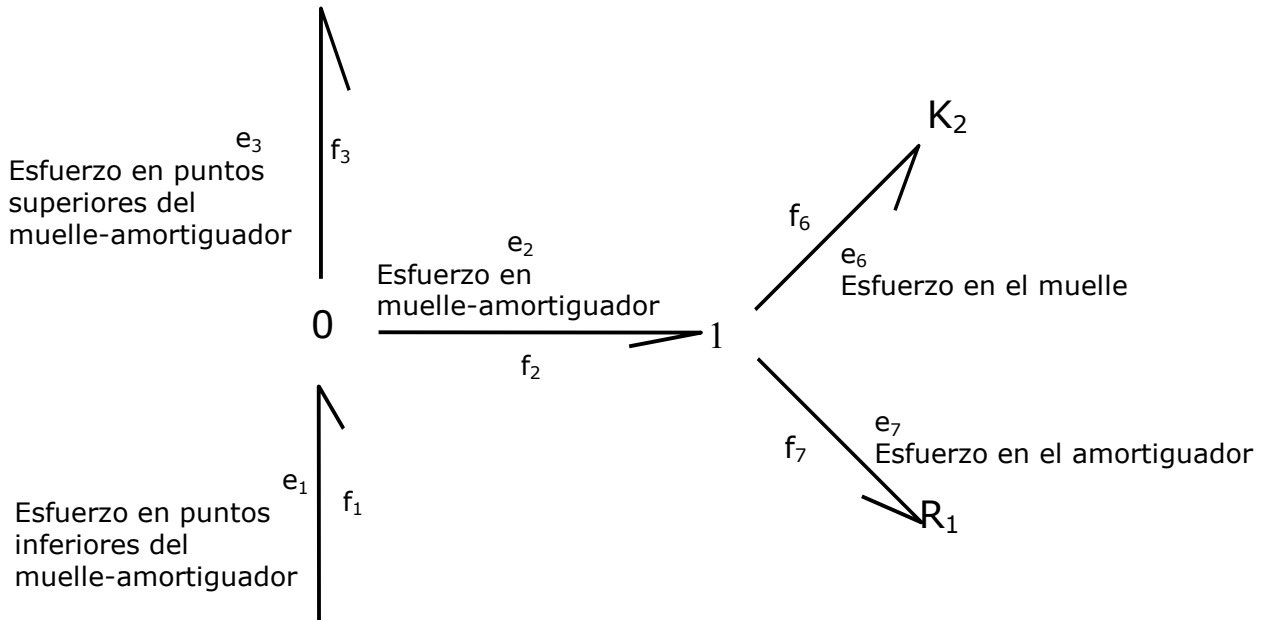


Figura 2.10

Esta unión 1 puede explicarse también observando que en los puntos inferiores, tanto el muelle como el amortiguador se desplazan a la misma velocidad.

Llegando a la masa m_2 es necesario vencer su inercia y al mismo tiempo su peso propio, por lo que existirá otra unión 1 donde se sumarán estos esfuerzos con los comunicados por el conjunto muelle-amortiguador.

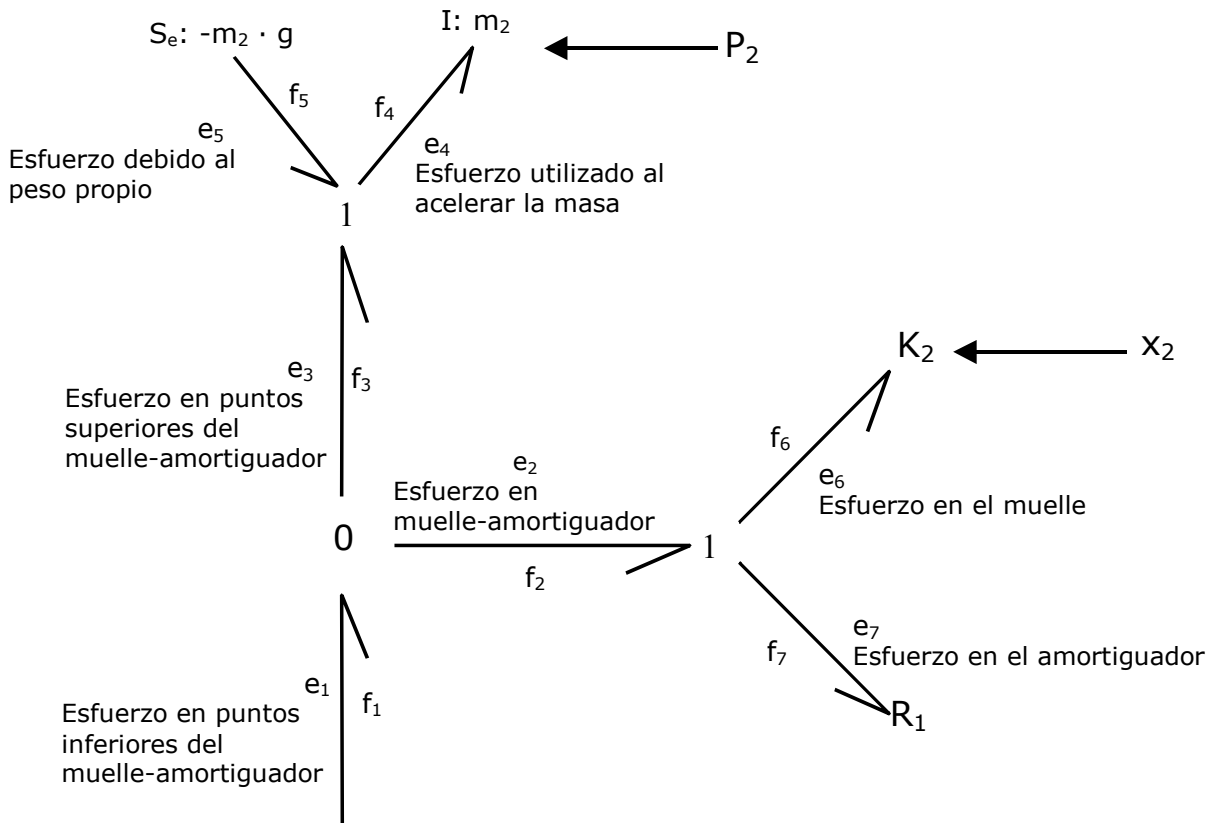


Figura 2.11

El siguiente paso consiste en determinar las variables independientes del sistema que, como se indicaba en el ejemplo anterior, se asociarán a las puertas inercia y resorte, eligiendo la cantidad de movimiento en el primer caso y el desplazamiento en el segundo. Sea P_2 la cantidad de movimiento y x_2 el desplazamiento, tal y como se indica en la figura 2.11.

Como última etapa de las planteadas hasta ahora queda hallar el esfuerzo y el flujo de cada grafo. Comenzando por los flujos:

$$f_4 = \frac{P_2}{m_2} \quad \text{Por ser } P_2 \text{ variable independiente elegida y tratarse de una puerta inercia.}$$

$$f_1 = v_1 \quad f_1 = v_1 \quad \text{Por ser fuente de flujo conocida.}$$

$$f_5 = f_4 \quad \text{Por ser grafos de una unión 1.}$$

$$f_3 = f_4 \quad \text{Por ser grafos de una unión 1.}$$

$$f_2 = f_1 - f_3 \quad \text{Por ser grafos de unión 0, en donde la suma de flujos de entrada es igual a la suma de flujos de salida.}$$

$$f_2 = v_1 - \frac{P_2}{m_2} \quad \text{Sustituyendo } f_1 \text{ y } f_3 \text{ por los valores hallados.}$$

$$f_6 = f_2 \quad \text{Por ser grafos de una unión 1.}$$

$$f_7 = f_2 \quad \text{Por ser grafos de una unión 1.}$$

En lo que se refiere a los esfuerzos:

$$e_5 = -m_2 \cdot g \quad \text{Por ser fuente de esfuerzo.}$$

$$e_6 = k_2 \cdot x_2 \quad \text{Por ser variable independiente elegida y tratarse de un puerta resorte.}$$

$$e_7 = f_7 \cdot R_1 \quad \text{Por tratarse de una puerta resistencia.}$$

$$e_7 = \left(v_1 - \frac{P_2}{m_2}\right) \cdot R_1$$

Sustituyendo f_7 por el valor hallado anteriormente.

$$e_2 = e_6 + e_7$$

Por ser grafos pertenecientes a una unión 1.

$$e_2 = k_2 \cdot x_2 + \left(v_1 - \frac{P_2}{m_2}\right) \cdot R_1$$

Sustituyendo e_6 y e_7 por sus valores.

$$e_3 = e_2$$

Por ser grafos pertenecientes a una unión 0.

$$e_1 = e_2$$

Por ser grafos pertenecientes a una unión 0.

$$e_4 = e_3 + e_5$$

Por ser grafos pertenecientes a una unión 1.

$$e_4 = k_2 \cdot x_2 + \left(v_1 - \frac{P_2}{m_2}\right) \cdot R_1 - m_2 \cdot g$$

Sustituyendo e_3 y e_5 por sus valores hallados.

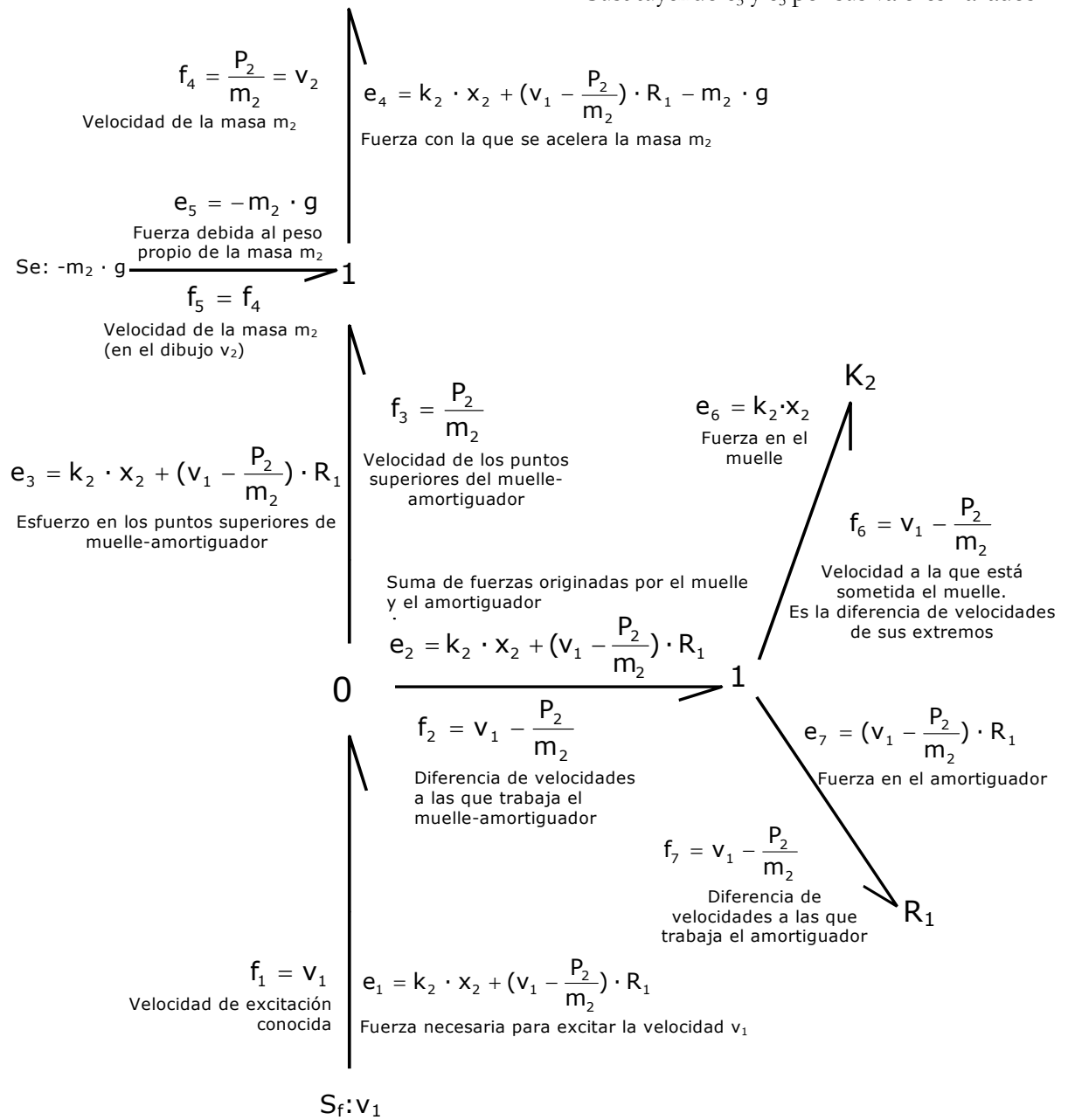


Figura 2.12

Una vez definidos los flujos y esfuerzos asociados a cada grafo resulta muy interesante interpretar físicamente cada uno de los resultados. Esta tarea sirve también para demostrar que con la técnica de Bond-Graph se obtienen representaciones gráficas en las que no hay pérdida conceptual de lo que sucede en el modelo.

Veamos ahora cómo se resuelve un modelo formado por la suma de los dos ejemplos mostrados anteriormente.

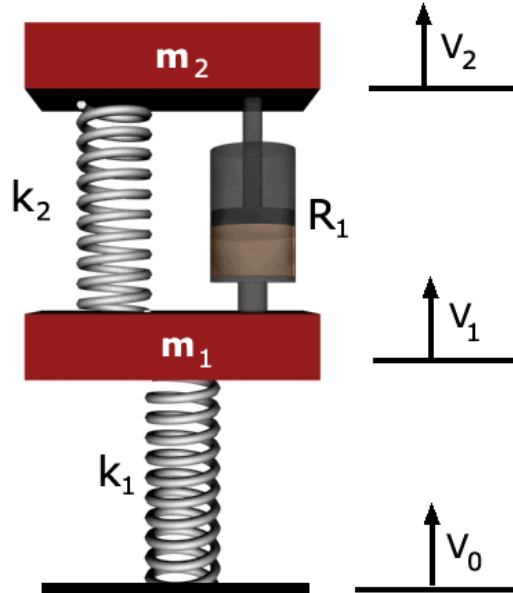


Figura 2.13

El problema consiste en hallar las velocidades v_1 y v_2 de las masas m_1 y m_2 dada una excitación de velocidad conocida; v_0 .

Hagamos ahora el Bond-Graph desde otro planteamiento:

Sobre el punto A actúa una velocidad conocida v_0 .

El muelle K_1 trabaja a la diferencia de velocidades de sus extremos, v_1 en el superior y v_0 en el inferior.

Debido a que el muelle trabaja a esta diferencia de velocidades la puerta resorte saldrá de una unión 0 y se tendrá:

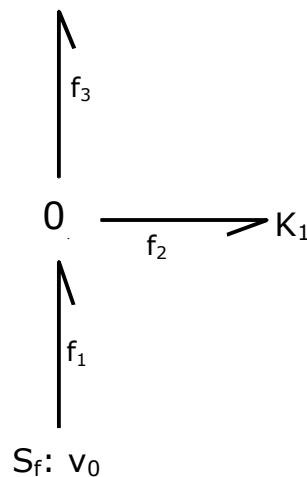


Figura 2.14

Al ser una unión 0, los esfuerzos son iguales y la suma de los flujos de entrada es igual a la suma de los flujos de salida.

Se cumple que:

$$f_1 = f_2 + f_3$$

O lo que es lo mismo:

$$f_2 = f_1 - f_3$$

En donde f_1 es la velocidad del punto inferior del resorte K_1 , y f_3 , la velocidad del punto superior.

Continuando con el planteamiento, f_3 o mejor dicho; el grafo que lleva asociado el flujo f_3 , acaba en la velocidad v_1 de la masa m_1 .

En el Bond-Graph se tendrá, pues, una unión 1 de la que saldrá la puerta de inercia, el peso propio de la masa m_1 y los extremos inferiores del muelle-amortiguador superior. Como todos ellos van a la misma velocidad v_1 , todos ellos concurrirán en una unión tipo 1.

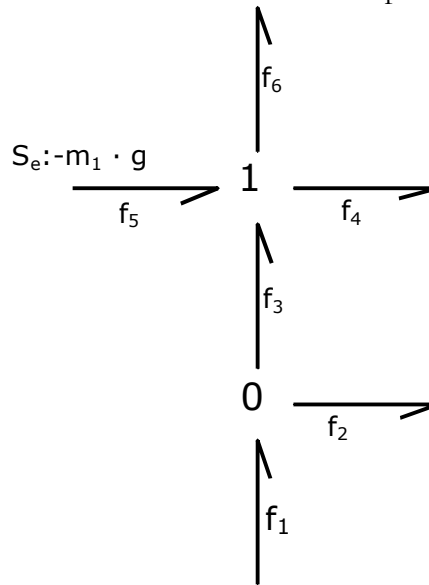


Figura 2.15

Como ya hemos comentado, en la unión 1 se tendrá que:

$$f_3 = f_4 = f_5 = f_6$$

El flujo f_6 representa la velocidad de los extremos inferiores del muelle K_2 y del amortiguador R_1 . Ambos trabajan a la diferencia de velocidades de sus extremos superior e inferior y por lo tanto, en el gráfico de Bond-Graph saldrán de una unión 0.

Respecto al conjunto de muelle y amortiguador, ambos se desplazan a la misma velocidad de modo que pertenecen a una unión tipo 1.

El flujo f_{10} es la velocidad de los puntos superiores del muelle K_2 y del amortiguador R_1 , y también la velocidad de la masa m_2 . Así, la representación mediante Bond-Graph se realizará mediante una unión 1.

Como variables independientes del problema se elegirán los momentos asociados a las puertas inercia y los desplazamientos en las puertas resorte. En la figura 2.16, se indican las cuatro variables independientes de este modelo.

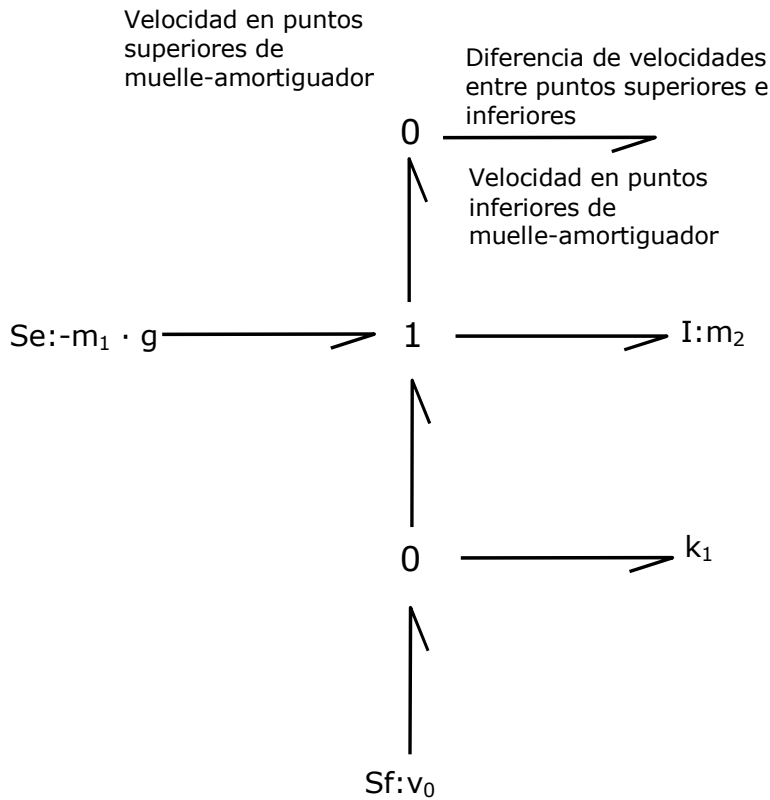


Figura 2.16

Para hallar los valores de los esfuerzos y flujos asociados a cada grafo, se siguen los mismos criterios que en los ejemplos anteriores.

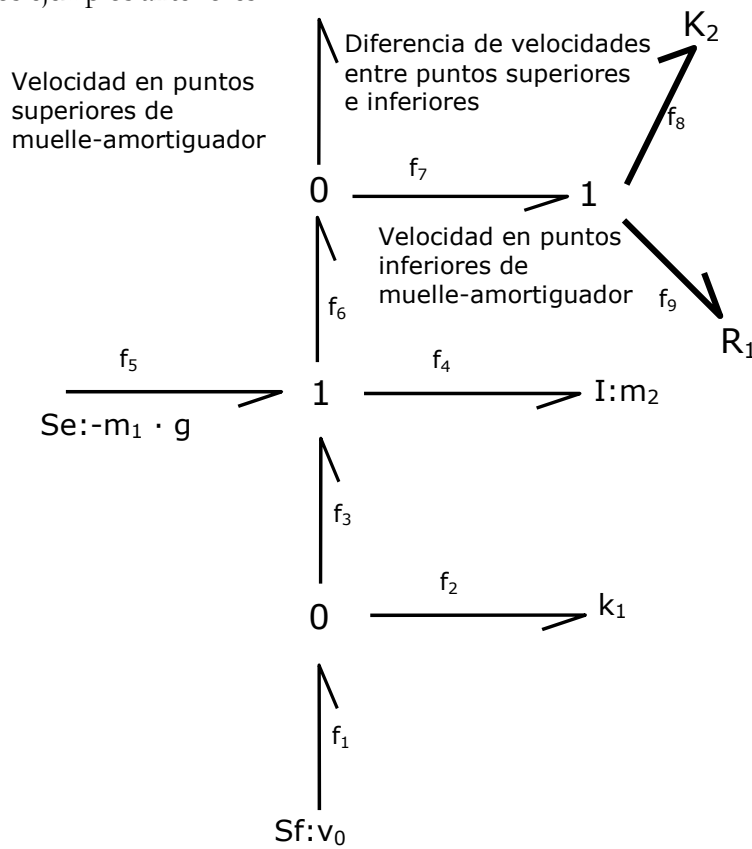


Figura 2.17

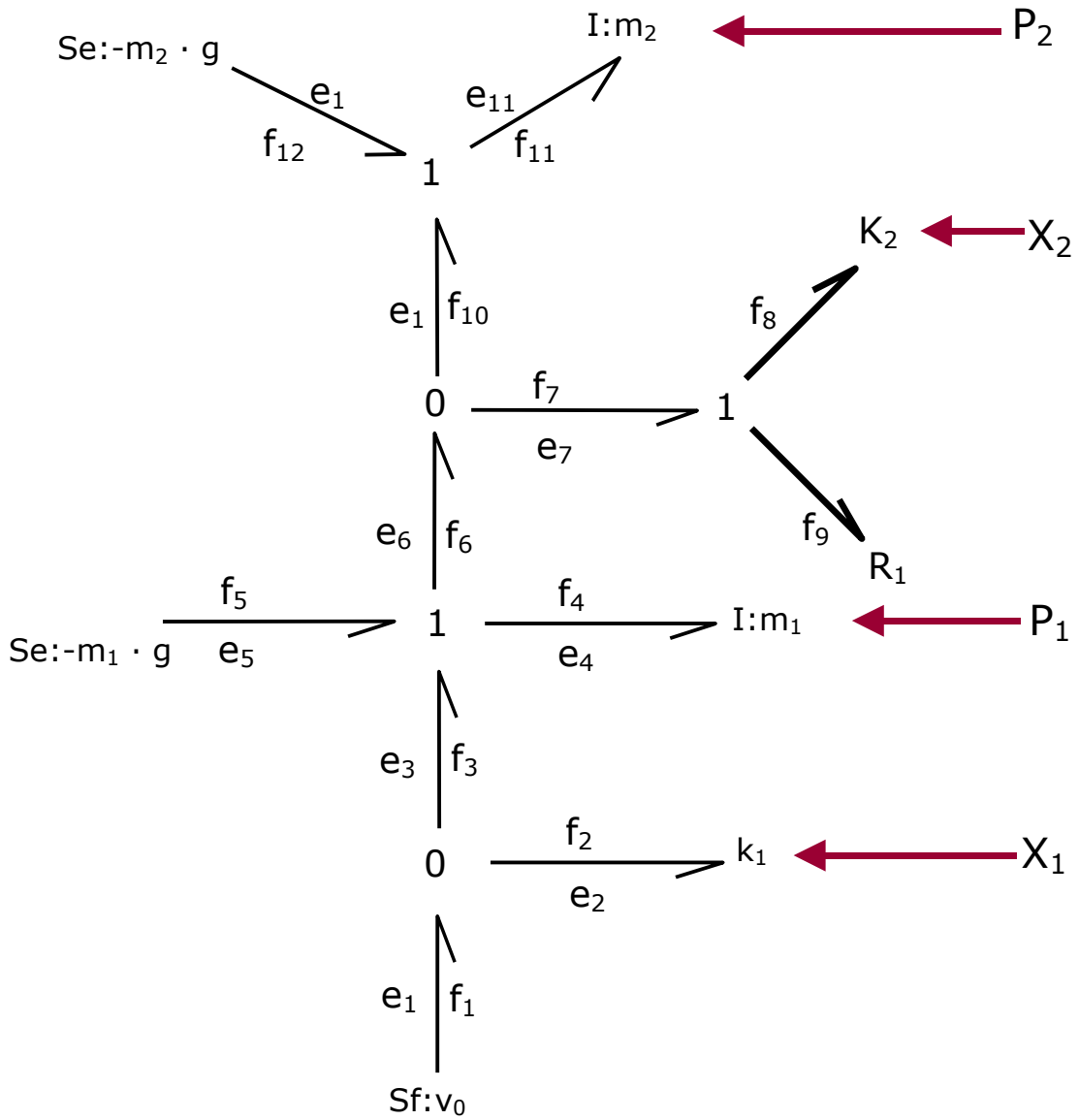


Figura 2.18

Valores de los flujos:

$$f_1 = v_0$$

$$f_2 = f_1 - f_3 = v_0 - \frac{P_1}{m_1}$$

$$f_3 = f_4 = \frac{P_1}{m_1}$$

$$f_4 = \frac{P_1}{m_1}$$

$$f_5 = f_4 = \frac{P_1}{m_1}$$

$$f_6 = f_4 = \frac{P_1}{m_1}$$

$$f_7 = f_6 - f_{10} = \frac{P_1}{m_1} - \frac{P_2}{m_2}$$

$$f_8 = f_7 = \frac{P_1}{m_1} - \frac{P_2}{m_2}$$

$$f_9 = f_7 = \frac{P_1}{m_1} - \frac{P_2}{m_2}$$

$$f_{10} = \frac{P_2}{m_2}$$

$$f_{11} = \frac{P_2}{m_2}$$

$$f_{12} = f_{11} = \frac{P_2}{m_2}$$

Valores de los esfuerzos:

$$e_1 = e_2 = k_1 \cdot x_1$$

$$e_2 = k_1 \cdot x_1$$

$$e_3 = e_2 = k_1 \cdot x_1$$

$$e_4 = e_3 + e_5 - e_6 = k_1 \cdot x_1 - m_1 \cdot g - k_2 \cdot x_2 - \left(\frac{P_1}{m_1} - \frac{P_2}{P_2}\right) \cdot R_1$$

$$e_5 = -m_1 \cdot g$$

$$e_6 = e_7 = k_2 \cdot x_2 + \left(\frac{P_1}{m_1} - \frac{P_2}{P_2}\right) \cdot R_1$$

$$e_7 = e_8 + e_9 = k_2 \cdot x_2 + \left(\frac{P_1}{m_1} - \frac{P_2}{P_2}\right) \cdot R_1$$

$$e_8 = k_2 \cdot x_2$$

$$e_9 = f_9 + R_1 = \left(\frac{P_1}{m_1} - \frac{P_2}{P_2}\right) \cdot R_1$$

$$e_{10} = e_7 = k_2 \cdot x_2 + \left(\frac{P_1}{m_1} - \frac{P_2}{P_2}\right) \cdot R_1$$

$$e_{11} = e_{10} + e_{12} = k_2 \cdot x_2 + \left(\frac{P_1}{m_1} - \frac{P_2}{P_2}\right) \cdot R_1 - m_2 \cdot g$$

$$e_{12} = -m_2 \cdot g$$

2.2 ACOPLAMIENTO DE MODELOS

La técnica de Bond-Graph presenta una importante ventaja al permitir aprovechar los esfuerzos dedicados al planteamiento de un modelo, ya que puede utilizarse fácilmente en modelos de complejidad superior. Lo hemos podido comprobar en el último caso analizado; el Bond-Graph del modelo completo no era más que la suma de modelos individuales.

De esta forma, siempre que en algún problema aparezca una masa con un resorte, se aplicará el Bond-Graph ya desarrollado sin necesidad de plantearlo de nuevo.

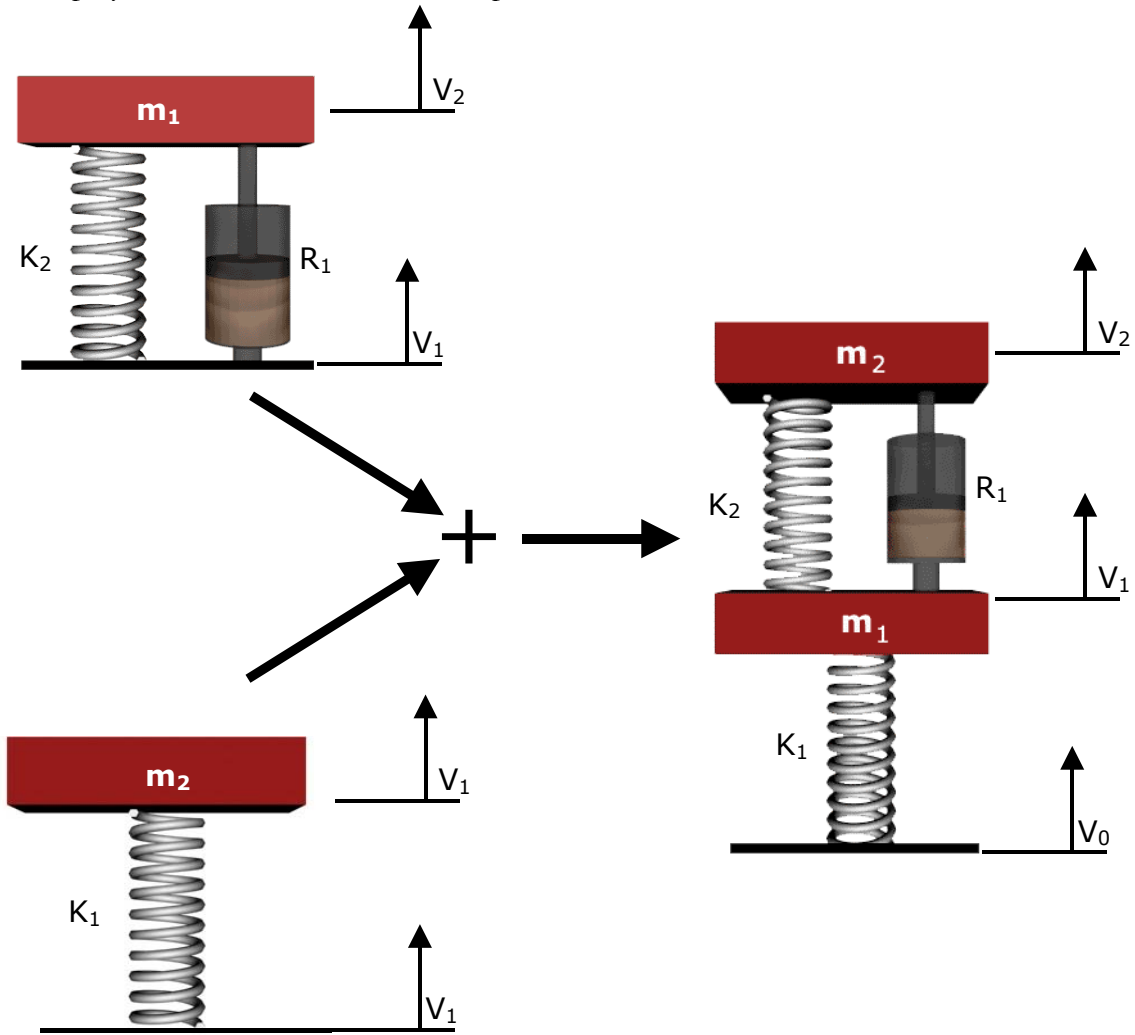


Figura 2.19

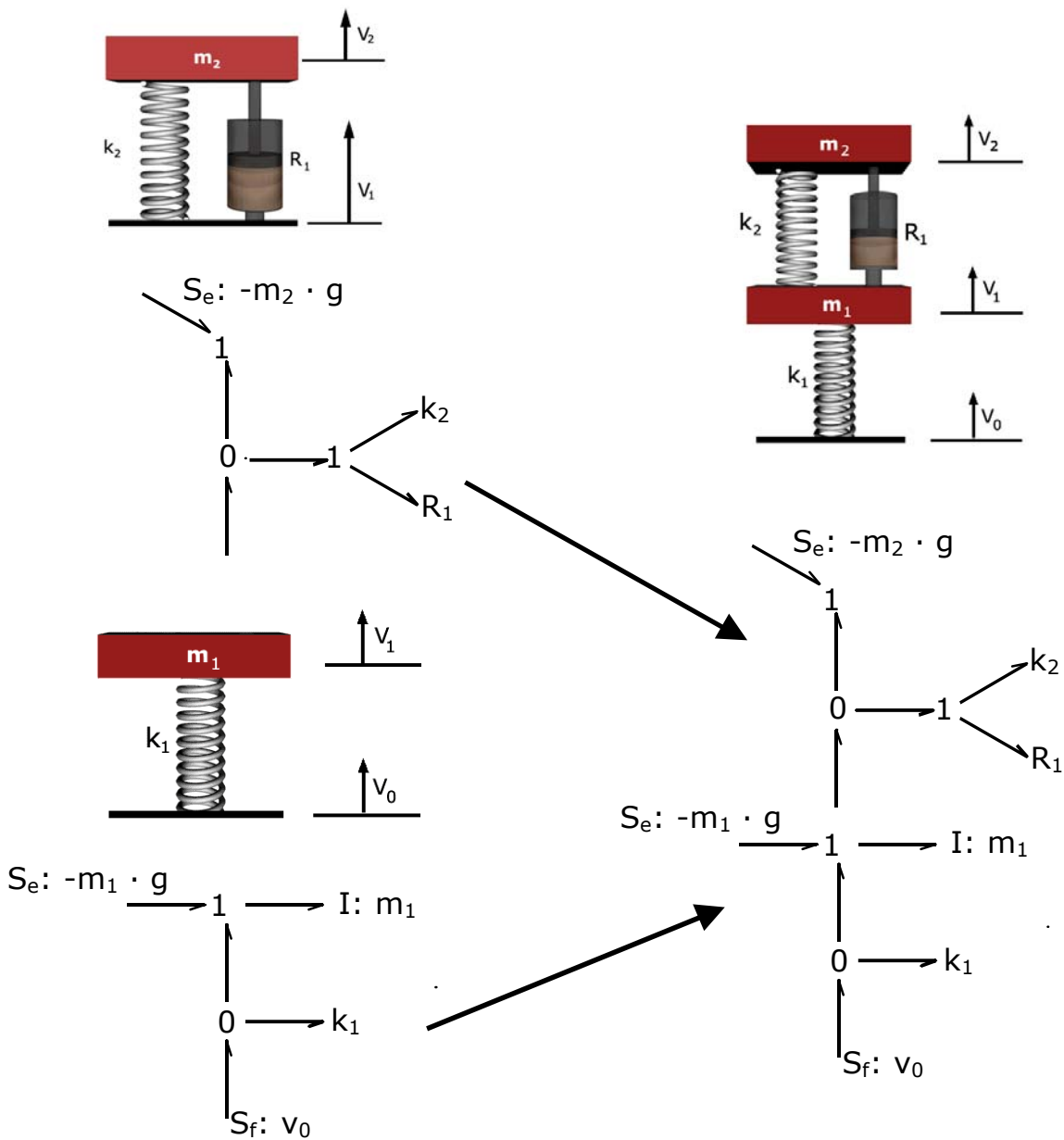


Figura 2.20

2.3 PLANTEAMIENTO DE LAS ECUACIONES DEL SISTEMA

Volviendo sobre el ejemplo inicial se tiene el siguiente Bond-Graph:

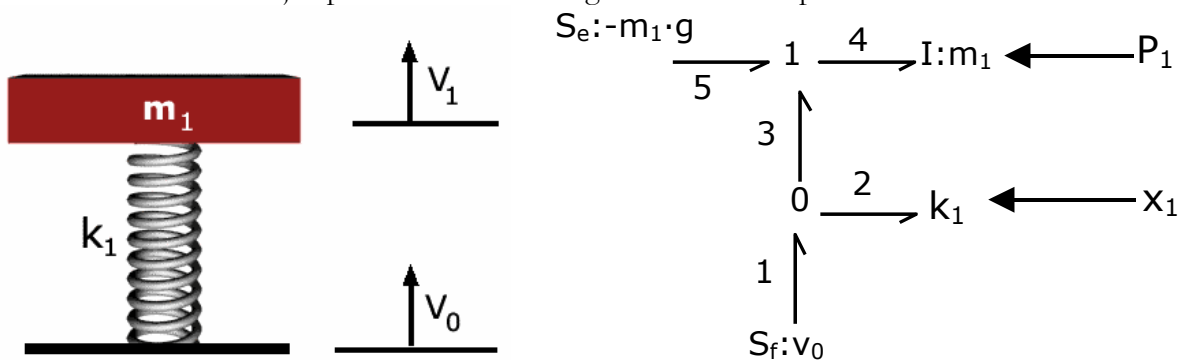


Figura 2.21

$$\begin{aligned}
 f_1 &= V_0 & ; & & e_1 &= e_2 = k_1 \cdot x_1 \\
 f_2 &= f_1 - f_3 = V_0 - \frac{P_1}{m_1} \cdot R_1 & ; & & e_2 &= k_1 \cdot x_1 \\
 f_3 &= f_4 = \frac{P_1}{m_1} & ; & & e_3 &= e_2 = k_1 \cdot x_1 \\
 f_4 &= \frac{P_1}{m_1} & ; & & e_4 &= e_3 + e_5 = k_1 \cdot x_1 - m_1 \cdot g \\
 f_5 &= f_4 = \frac{P_1}{m_1} & ; & & e_5 &= -m_1 \cdot g
 \end{aligned}$$

Se habían elegido como variables independientes: la cantidad de movimiento P_1 asociada a la puerta de inercia, y el desplazamiento x_1 asociado a la puerta resorte.

$$\text{Si } P_1 = m_1 \cdot V_1$$

La d/dt de P_1 es un esfuerzo, ya que es el producto de una masa por una aceleración.

$$\frac{dP_1}{dt} = m_1 \cdot a_1$$

A_1 = aceleración de la masa m_1 .

Pero la masa m_1 multiplicada por la aceleración a_1 , es el esfuerzo e_4 .

$$\frac{dP_1}{dt} = m_1 \cdot a_1 = e_4$$

Y sustituyendo e_4 por su valor:

$$\frac{dP_1}{dt} = k_1 \cdot x_1 - m_1 \cdot g$$

La otra variable independiente elegida era el desplazamiento x_1 , cuya derivada respecto al tiempo es una velocidad igual al flujo f_2 .

$$\frac{dx_1}{dt} = f_2$$

Sustituyendo f_2 por su valor:

$$\frac{dx_1}{dt} = V_0 - \frac{P_1}{m_1}$$

Las expresiones anteriores constituyen las ecuaciones diferenciales del modelo.

Por otra parte, se sabe que una masa asociada a un resorte es un sistema de un grado de libertad por lo que su respuesta en el tiempo viene dada por una ecuación diferencial de segundo orden. No obstante, con la técnica de Bond-Graph, la masa asociada al resorte viene definida por dos ecuaciones de primer orden. Esto, que podría interpretarse como un defecto de la técnica, es en realidad una ventaja, ya que los algoritmos para resolver ecuaciones diferenciales por ordenador necesitan transformar las ecuaciones diferenciales de segundo orden en ecuaciones diferenciales de primer orden.

En definitiva, mediante la técnica de Bond-Graph cada grado de libertad del modelo necesita dos ecuaciones diferenciales de primer orden.

En el caso ahora estudiado las ecuaciones diferenciales son:

$$\frac{dP_1}{dt} = k_1 \cdot x_1 - m_1 \cdot g$$

$$\frac{dx_1}{dt} = v_0 - \frac{P_1}{m_1}$$

Como se verá más adelante, a veces resulta ventajoso plantear las ecuaciones diferenciales matricialmente. En este caso se tendrá:

$$\begin{pmatrix} \frac{dP_1}{dt} \\ \frac{dx_1}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 \\ -1/m_1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_1 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -m_1 \cdot g \\ v_0 \end{pmatrix}$$

En donde, como puede observarse, el vector derivadas respecto al tiempo de las variables independientes es igual a una matriz característica del sistema multiplicada por el vector variables independientes más un vector de términos independientes.

$$d/dt(x) = (A) \cdot (x) + (B)$$

Siendo:

- (x) = Vector variables independientes.
- (A) = Matriz característica.
- (B) = Matriz de términos independientes.

2.4 APLICACIÓN DE LA TÉCNICA DE BOND-GRAPH A CIRCUITOS ELÉCTRICOS

El modelo que planteamos es el del circuito eléctrico indicado en la figura 2.22 que está formado por: un generador de tensión, E; dos resistencias, R₁, R₂; un condensador de capacidad, 1/K₁; y una bobina de autoinducción, L₁.

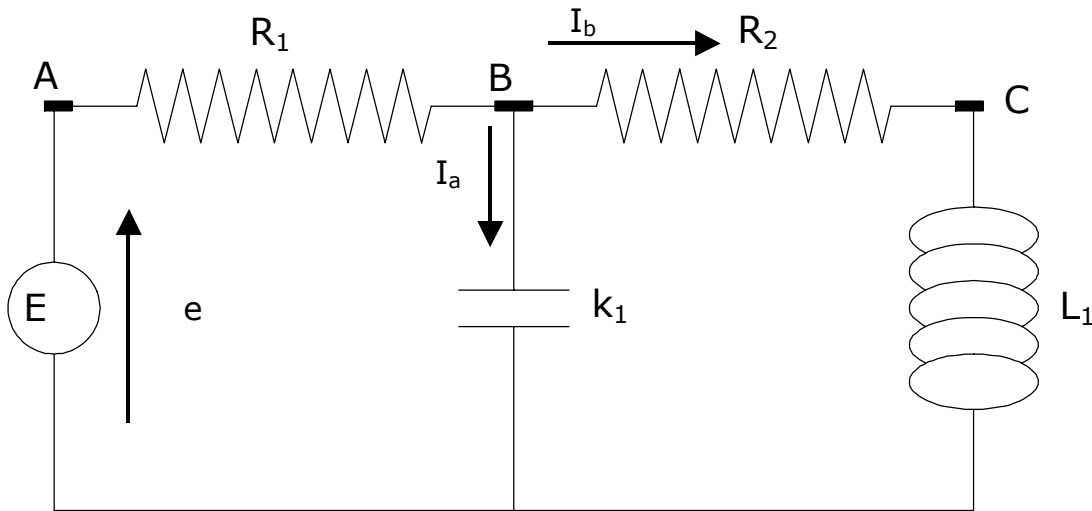


Figura 2.22

El generador de tensión se representará en Bond-Graph mediante una fuente de esfuerzo, recordemos que en electricidad los grafos llevan asociadas tensión como esfuerzo e intensidad como flujo.

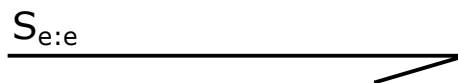


Figura 2.23

Toda fuente de tensión sobre un circuito provoca una intensidad de corriente. Supongamos que esta intensidad es i_a en el punto A, toda esta intensidad pasa a través de la resistencia R_1 y llega al punto B. En Bond-Graph, igualdad de flujos (en este caso intensidades) significaba unión tipo 1, de modo que:

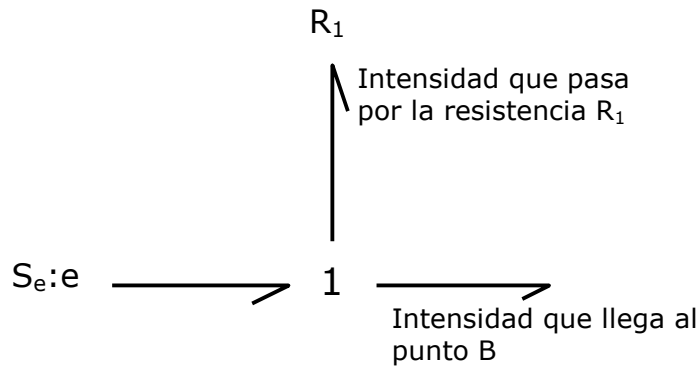


Figura 2.24

En el punto B hay una división de intensidad, parte se deriva hacia la resistencia R_2 y otra parte hacia el condensador K_1 . La suma de flujos se realizaba mediante uniones de tipo 0.

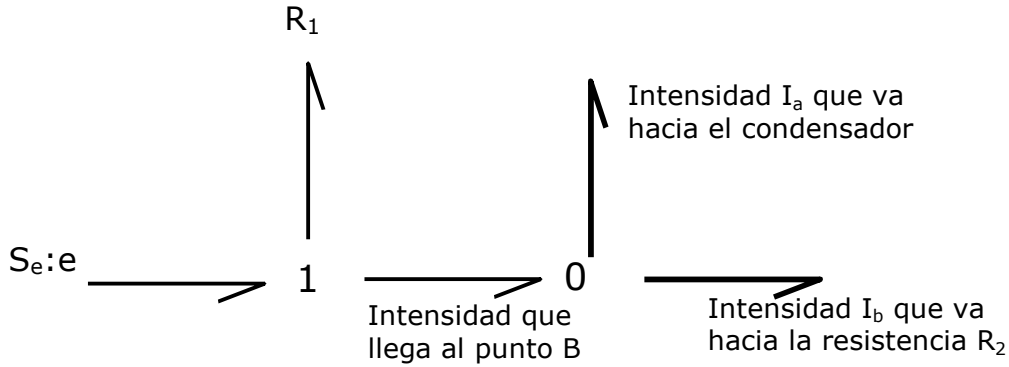


Figura 2.25

La intensidad i_b pasa toda ella por la resistencia R_2 y llega al punto C. Al ser igual la intensidad que pasa por la resistencia R_2 que la que llega al punto C, se representará con Bond-Graph mediante una unión 1. Por último, la bobina será representada mediante una puerta de inercia.

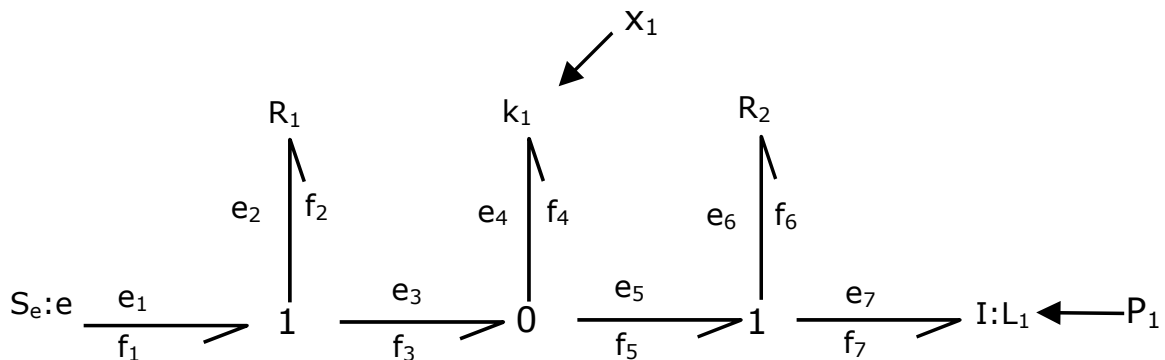


Figura 2.26

Como variables independientes se toman: P_1 asociado a la puerta de inercia y el desplazamiento x_1 asociado a la puerta resorte.

Como siempre, el siguiente paso es hallar el valor de flujos y esfuerzos asociados a los grafos. Hasta ahora, en los ejemplos anteriores se hallaban primero los flujos y después los esfuerzos, sin que

esto signifique que deba tomarse por norma. En general, los flujos y esfuerzos se definen a la vez e indistintamente conforme van siendo conocidos.

En este ejemplo los pasos serían los siguientes:

$$\begin{aligned}
 f_7 &= P_1/L_1 && \text{Por ser puerta de inercia} \\
 f_6 &= f_7 = P_1/L_1 && \text{Por pertenecer a unión 1.} \\
 f_5 &= f_7 = P_1/L_1 && \text{Por pertenecer a unión 1.} \\
 e_4 &= k_1 \cdot x_1 && \text{Por ser puerta resorte.} \\
 e_5 &= e_4 = k_1 \cdot x_1 && \text{Por pertenecer a unión 0.} \\
 e_3 &= e_4 = k_1 \cdot x_1 && \text{Por pertenecer a unión 0.} \\
 e_1 &= e && \text{Por ser fuente de esfuerzo.} \\
 e_2 &= e_1 - e_3 = e - k_1 \cdot x_1 && \text{Por pertenecer a unión 1.} \\
 f_2 &= e_2/R_1 = (e - k_1 \cdot x_1) / R_1 && \text{Por ser puerta resistencia.} \\
 f_1 &= f_2 = (e - k_1 \cdot x_1) / R_1 && \text{Por pertenecer a unión 1.} \\
 f_3 &= f_2 = (e - k_1 \cdot x_1) / R_1 && \text{Por pertenecer a unión 1.} \\
 f_4 &= f_3 - f_5 = (e - k_1 \cdot x_1) / R_1 - P_1 / L_1 && \text{Por pertenecer a unión 0.} \\
 e_6 &= f_6 \cdot R_2 = P_1 \cdot R_2 / L_1 && \text{Por ser puerta resistencia.} \\
 e_7 &= e_5 - e_6 = k_1 \cdot x_1 - P_1 \cdot R_2 / L_1 && \text{Por pertenecer a unión 1.}
 \end{aligned}$$

Las ecuaciones diferenciales del circuito eléctrico serán:

$$\begin{aligned}
 & dP_1/dt \text{ y } dx_1/dt \\
 & dP_1/dt = e_7, \text{ y } dx_1/dt = f_4
 \end{aligned}$$

Sustituyendo por los valores hallados, queda definitivamente:

$$\begin{aligned}
 dP_1 / dt &= k_1 \cdot x_1 - P_1 \cdot R_2 / L_1 \\
 dx_1/dt &= (e - k_1 \cdot x_1) / R_1 - P_1 / L_1
 \end{aligned}$$

Que en forma matricial será:

$$d/dt \begin{vmatrix} P_1 \\ x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -R_2/L_1 & k_1 \\ -1/L_1 & -k_1/R_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} P_1 \\ x_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ e/R_1 \end{vmatrix}$$

2.5 ELEMENTOS TRANSFORMER

Dada la palanca de la figura 2.27, vamos a estudiar la relación que existe entre las velocidades y esfuerzos de sus puntos extremos.

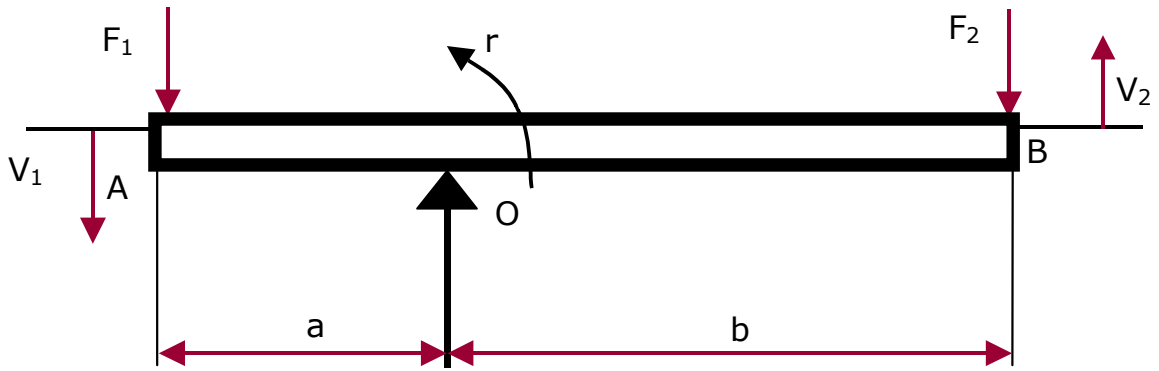


Figura 2.27

Supongamos que la palanca gira alrededor de su punto de apoyo 0 con una velocidad angular r . Se tendrá:

$$V_1 = r \cdot a$$

$$V_2 = r \cdot b$$

Por otra parte, si la palanca gira a velocidad angular constante hay equilibrio de esfuerzos y entonces:

$$F_1 \cdot a = F_2 \cdot b$$

De todas estas ecuaciones se pueden deducir las relaciones existentes entre las velocidades y esfuerzos de los puntos extremos.

$$V_1/a = r = V_2/b, \text{ de donde: } V_2 = b \cdot V_1/a$$

$$F_1 \cdot a = F_2 \cdot b, \text{ de donde: } F_2 = a \cdot F_1/b$$

Como se deduce de estas ecuaciones, al pasar del punto A al punto B de la palanca se han transformado tanto velocidades como esfuerzos, pero no ha habido pérdida de potencia y en consecuencia:

$$F_2 \cdot V_2 = b \cdot a \cdot F_1 \cdot V_1/a \cdot b = F_1 \cdot V_1$$

Estas transformaciones de esfuerzos y flujos sin pérdida de potencia se representan en Bond-Graph de la siguiente forma:

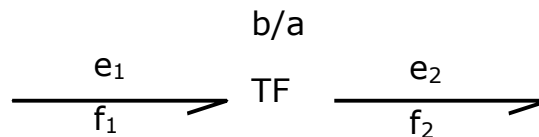


Figura 2.28

El elemento transformador viene definido por un grafo de entrada y otro de salida, así como por un valor o razón. En estos elementos el flujo de salida es igual al de entrada multiplicado por la razón del transformador y a la inversa entre los esfuerzos.

Sean:

e_1, f_1 = Esfuerzo y flujo de entrada.

e_2, f_2 = Esfuerzo y flujo de salida.

b/a = Razón del transformador.

$$f_2 = b \cdot f_1/a$$

$$e_2 = e_1 \cdot a/b$$

Como no hay pérdidas, siempre se cumple que:

$$e_2 \cdot f_2 = a \cdot b \cdot e_1 \cdot f_1 / b \cdot a = e_1 \cdot f_1$$

Otro ejemplo muy claro de la aplicación del elemento transformador es el engrane rueda-piñón.

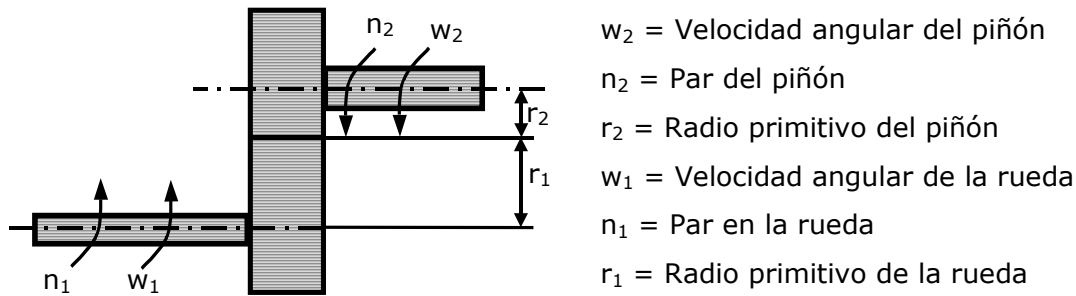


Figura 2.29

Su representación mediante Bond-Graph se hace con un elemento transformer.

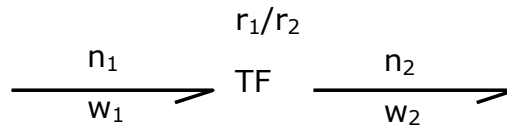


Figura 2.30

Se cumple que:

$$w_2 = r_1 \cdot w_1 / r_2$$

$$n_2 = r_2 \cdot n_1 / r_1$$

En el caso de movimientos angulares, los esfuerzos asociados a los grafos son pares y los flujos, velocidades angulares.

Mecánica rotacional

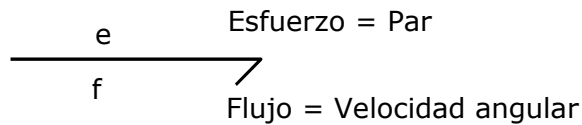


Figura 2.31

Como siempre, se cumplirá que no hay pérdidas de potencia en el transformer.

$$n_2 \cdot w_2 = r_2 \cdot r_1 \cdot n_1 \cdot w_1 / r_1 \cdot r_2 = n_1 \cdot w_1$$

El elemento transformer tiene también una aplicación importante en el paso de un sistema mecánico a otro hidráulico. En el cilindro hidráulico planteado en la figura 2.34 un esfuerzo F es aplicado al vástago del cilindro que se desplaza a una velocidad V, provocando en el aceite del cilindro una presión p y un caudal Q.

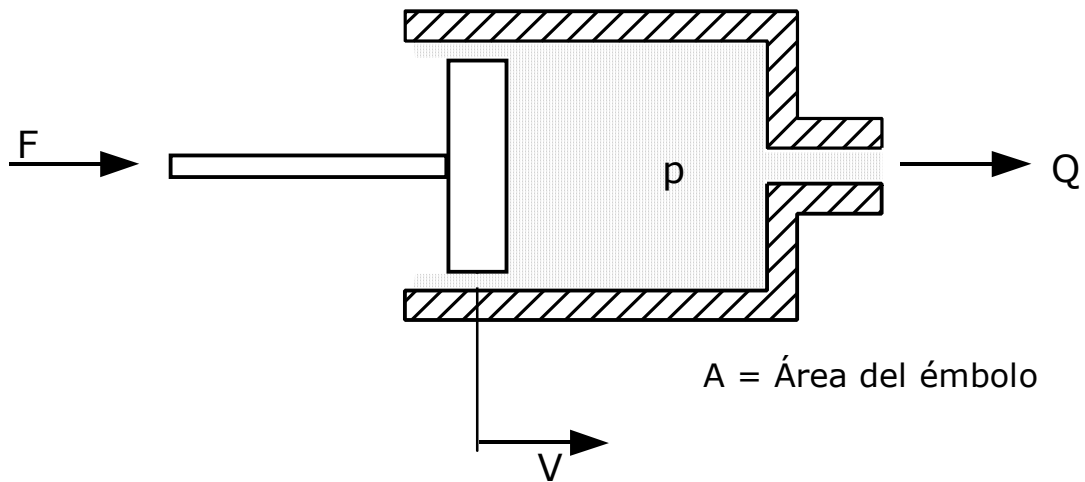


Figura 2.32

Mediante un elemento transformer en el que el grafo de entrada representa la parte mecánica; el grafo de salida, la hidráulica; y la razón, el área del vástago, se tiene:

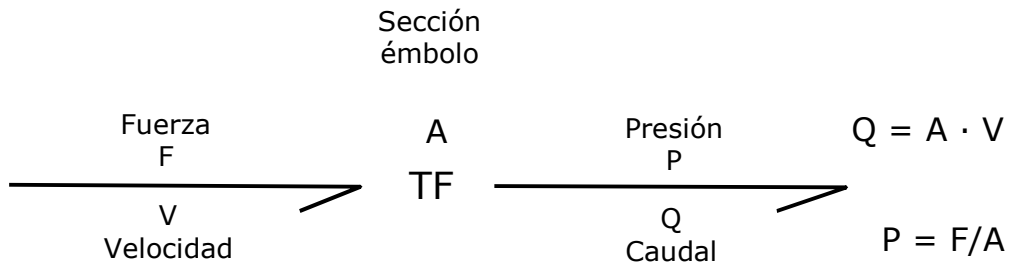


Figura 2.33

Efectivamente, la fuerza aplicada sobre el vástago de un cilindro hidráulico dividida por la sección del cilindro, determina el caudal de aceite a la salida.

Es importante observar que en hidráulica los esfuerzos asociados a los grafos son presiones del fluido, y los flujos son caudales.

Sistemas hidráulicos

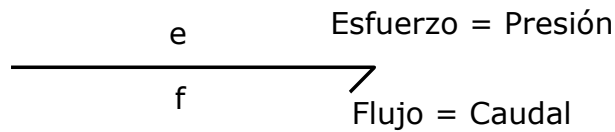


Figura 2.34

Aplicación del elemento transformer

El modelo indicado en la figura 2.37 tiene cuatro grados de libertad: desplazamiento vertical de la masa m_1 , desplazamiento vertical de la masa m_2 , giro r de la masa M y desplazamiento vertical de la masa M .

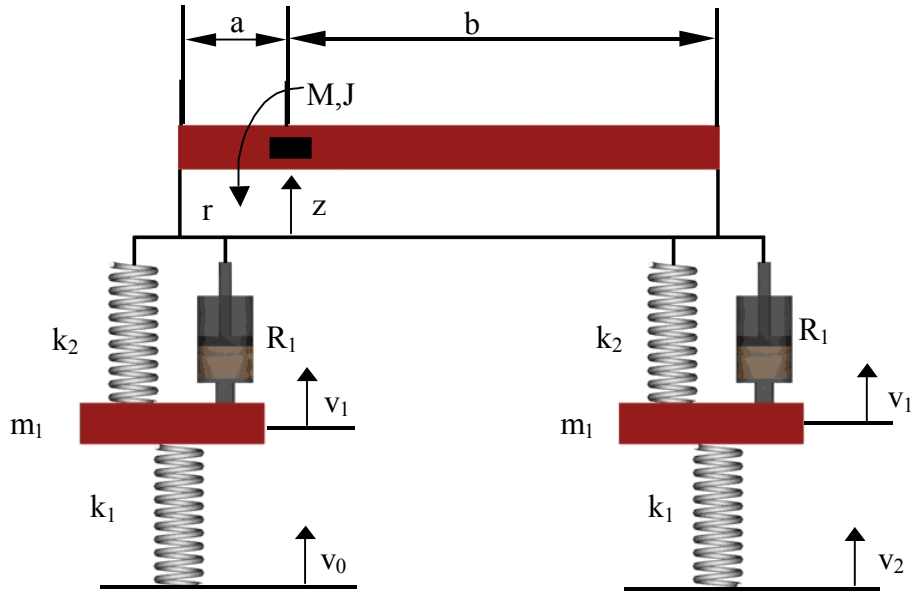


Figura 2.35

El modelo propuesto representa una moto o incluso una simplificación longitudinal de un vehículo de cuatro ruedas, en donde el eje delantero viene representado por la masa m_1 con sus elementos característicos.

- K_1 = Rigidez vertical del neumático.
- K_2 = Rigidez del muelle de la suspensión.
- R_1 = Constante del amortiguador.

Para analizar este caso se comenzará por plantear la suspensión de uno de los ejes y después se continuará con el resto del sistema.

Recordando los ejemplos anteriores, se observa que el Bond-Graph de este elemento ya había sido desarrollado y también se había demostrado que una vez realizado, podía aplicarse íntegramente en cualquier modelo más complejo.

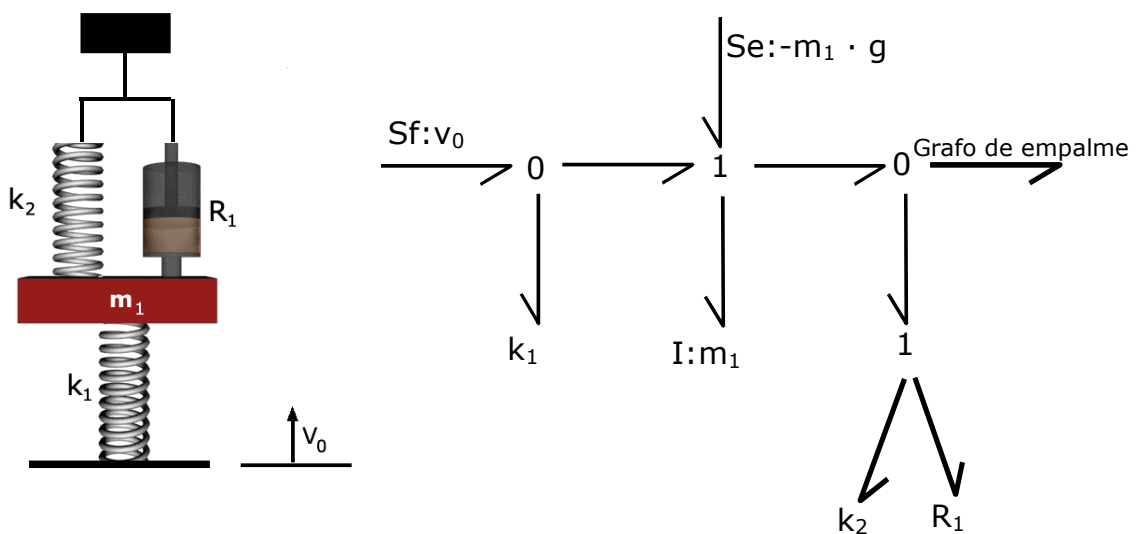


Figura 2.36

El planteamiento realizado para el eje delantero puede ser aplicado al eje trasero. Ambos constituyen dos submodelos: submodelo eje D, y submodelo eje T.

Sean:

O = Centro de gravedad de la carrocería.

a = Distancia eje delantero al centro de gravedad.

b = Distancia eje trasero al centro de gravedad.

M = Masa de la carrocería.

J = Momento de inercia de la carrocería.

r = Velocidad angular de la carrocería respecto al centro de gravedad.

z = Velocidad vertical de la carrocería.

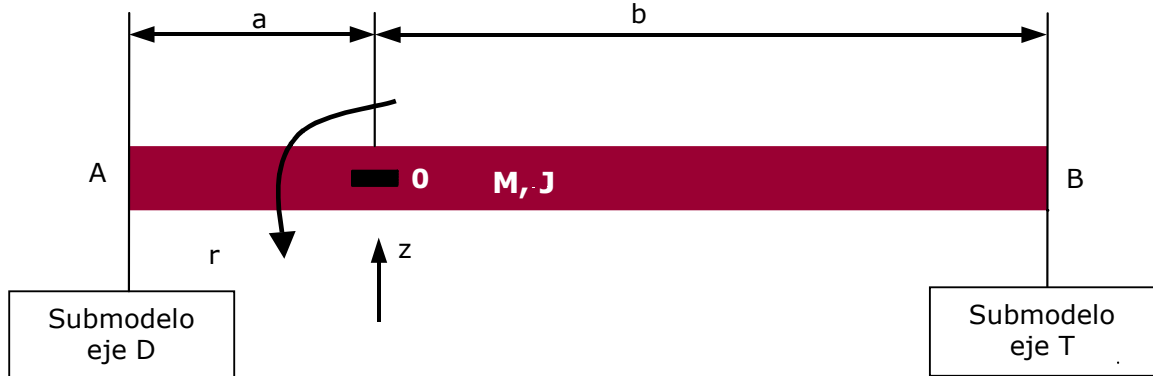


Figura 2.37

El submodelo eje D, comunica al punto A una velocidad vertical que, respecto al sistema de la carrocería, es suma de una velocidad vertical más otra provocada por la velocidad angular r.

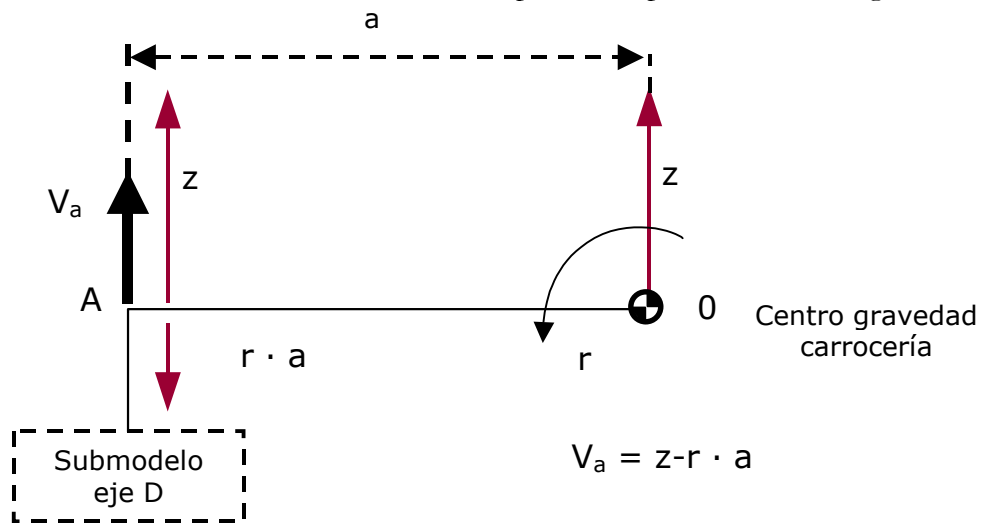


Figura 2.38

Al tratarse de una suma de velocidades se representará mediante una unión 0. Por otro lado, la velocidad angular r va multiplicada por a, y para su representación se empleará un transformer.

En la realización del Bond-Graph de un sistema, resulta con frecuencia de mucha ayuda identificar cada velocidad por una unión 1. En este caso, se tiene una unión 1 caracterizada por la velocidad r, y otra por la velocidad z.

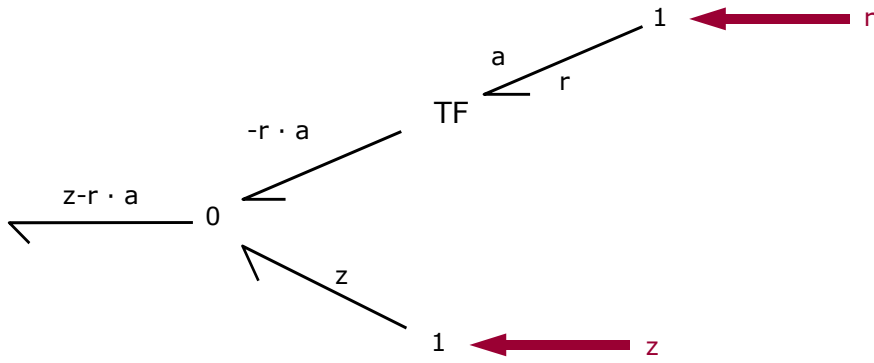


Figura 2.39

El planteamiento hecho en la figura 2.39 puede realizarse también de la siguiente forma:

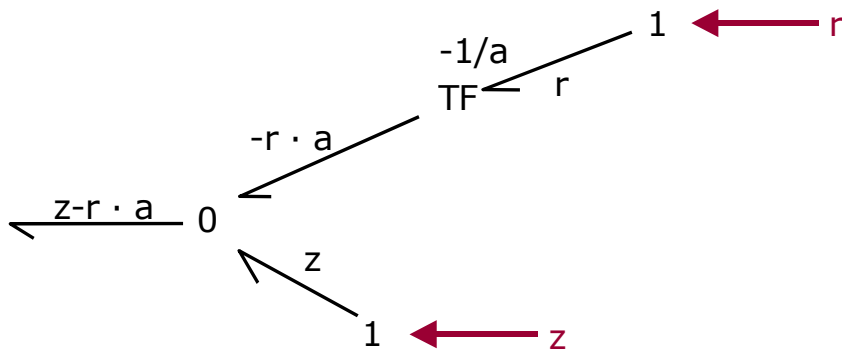


Figura 2.40

Sobre esta última figura hay que hacer constar que, dado un elemento transformer como el indicado seguidamente:

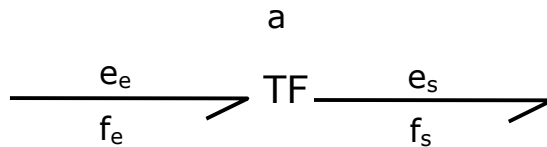


Figura 2.41

En donde:

e_e = Esfuerzo en grafo de entrada.

f_e = Flujo en grafo de entrada.

e_s = Esfuerzo en grafo de salida.

f_s = Flujo en grafo de salida.

a = Razón del transformer.

Por la definición dada para dicho elemento, se cumple que:

$$f_s = a \cdot f_e$$

$$e_s = e_e / a$$

Pero también se cumplirá que:

$$f_e = f_s / a$$

$$e_e = a \cdot e_s$$

Por lo que se puede invertir el sentido del transformer, invirtiendo a su vez el valor de su razón.

Igual que se ha actuado para empalmar la carrocería con el eje delantero, se hará con el eje trasero. Restará solamente situar las puertas de inercia y la fuente de esfuerzo debida al peso propio de la carrocería. Las puertas de inercia irán asociadas a las velocidades r y z , mientras que la fuente de esfuerzo lo estará a la velocidad z .

Definitivamente el Bond-Graph queda de la siguiente manera:

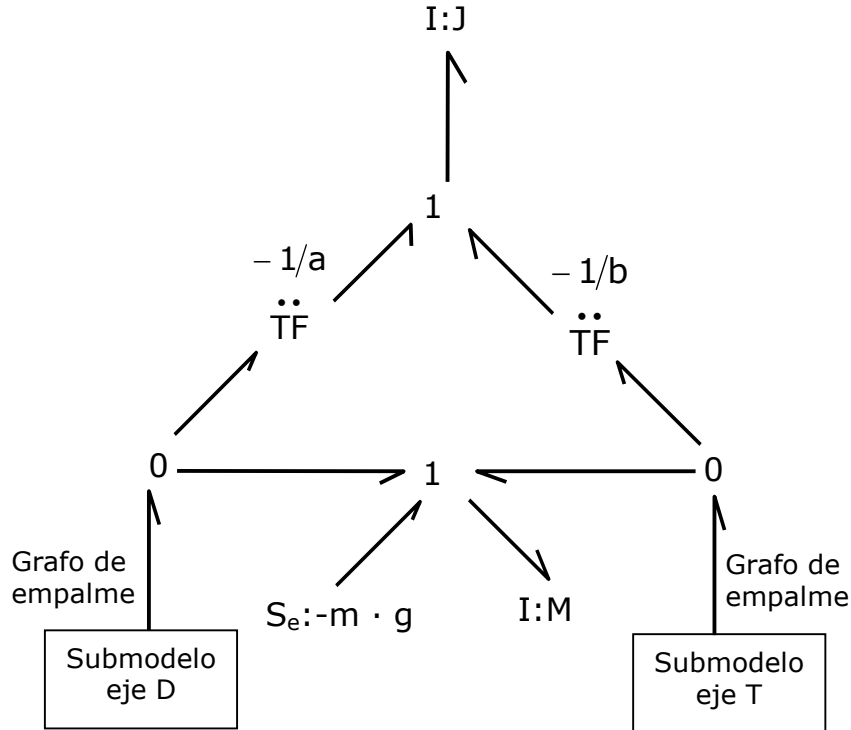


Figura 2.42

El transformer relacionado con el eje trasero tiene de razón $1/b$ con valor positivo, debido a que en el punto B se suman la velocidad inducida por z y la originada por r .

Ejemplo de sistemas mixtos mecánico-hidráulicos

El elemento transformer resulta ideal para cambiar de un sistema mecánico a otro hidráulico. Veamos una suspensión hidroneumática como la indicada en la figura 2.43 donde A es el área del émbolo del cilindro hidráulico; m_s , la masa suspendida; v_0 , la velocidad del émbolo; v_1 , la velocidad de la masa; K_a , la rigidez del acumulador hidroneumático; y R , el amortiguamiento de este acumulador.

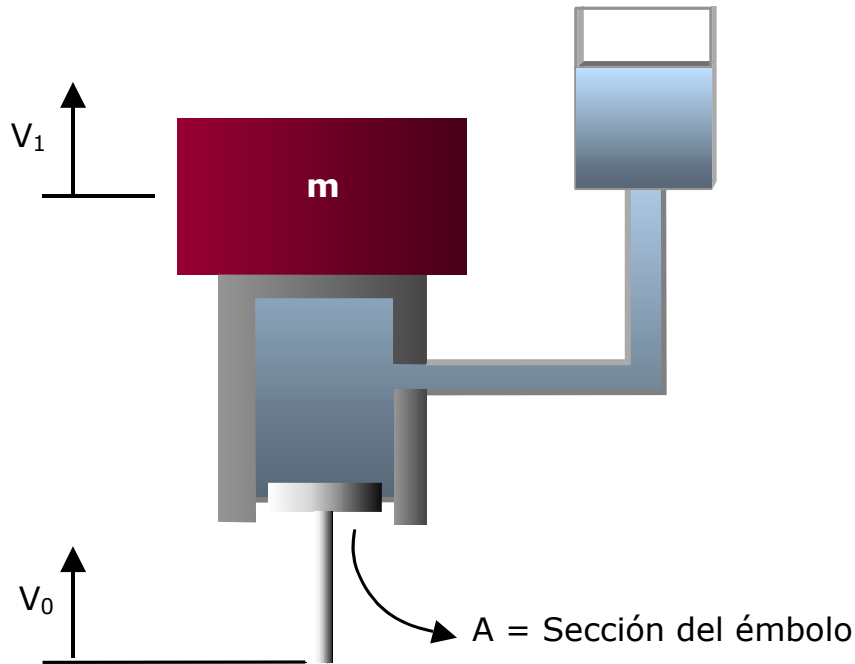


Figura 2.43

En el Bond-Graph de este ejemplo pueden resaltarse cuatro puntos importantes señalados en la figura 2.44.

Unión tipo 0 que simula la derivación de aceite que se dirige hacia el acumulador hidroneumático. Por haber suma de flujos (caudales en el caso de la hidráulica) se representa mediante una unión tipo 0.

Todo el caudal que va hacia el depósito del acumulador pasa por la tubería registrándose una pérdida de carga. Existen pues, dos fenómenos que funcionan con el mismo caudal; la pérdida de carga (puerta tipo resistencia) y la acumulación (puerta tipo resorte). Al existir igualdad de caudales se emplea una unión tipo 1.

1. El paso de un sistema mecánico a otro hidráulico contando con un cilindro hidráulico se realiza mediante un transformer que tiene de razón el área del émbolo. Para hacer el mismo paso en sentido contrario se emplea un transformer de razón inversa a la del área del émbolo.

2. Esta unión tipo q puede asociarse a la velocidad v_1 de la masa m . Tanto el peso propio de la masa como su inercia se desplazan a la misma velocidad y por este motivo, están en la misma unión tipo 1.

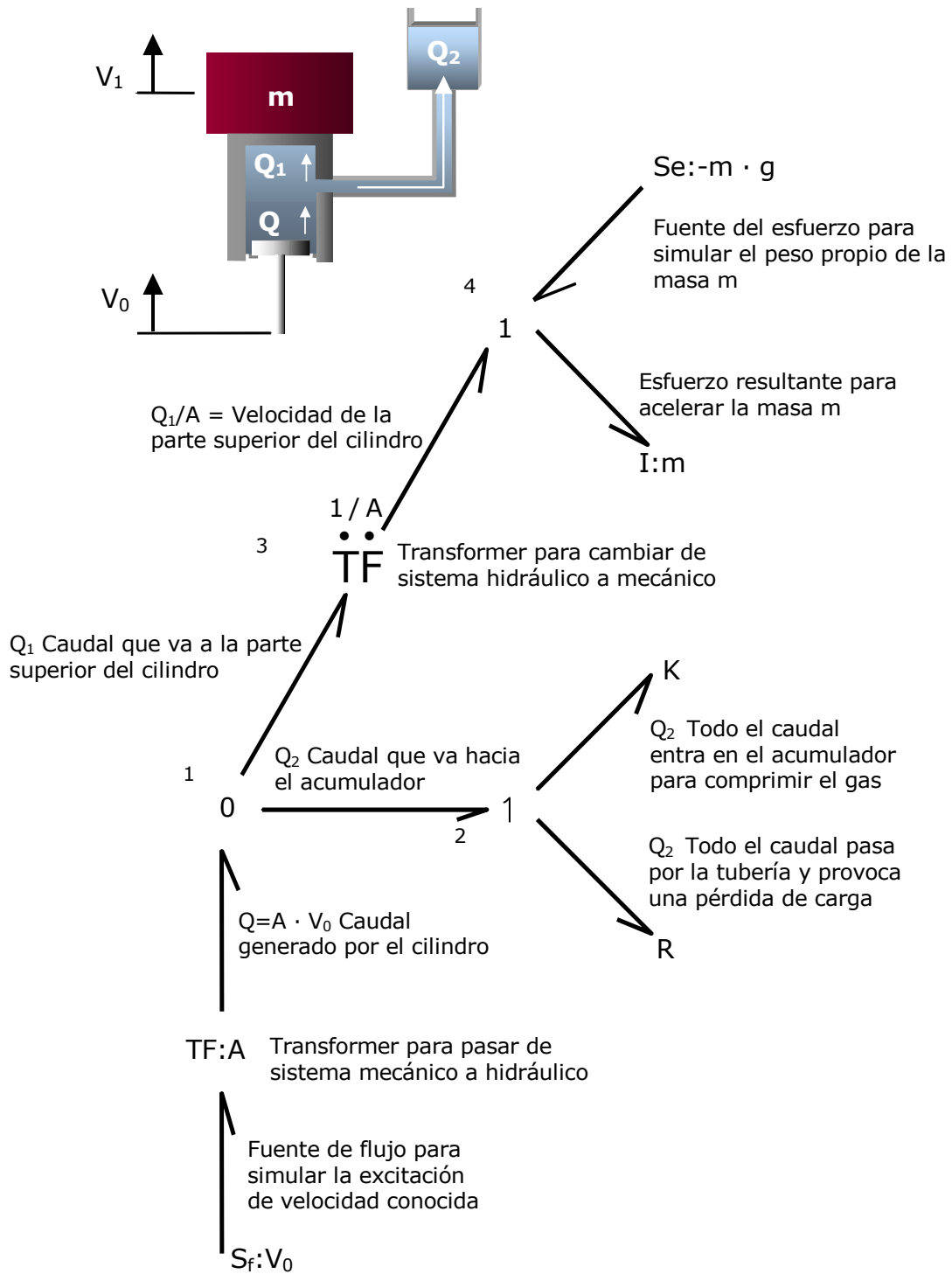


Figura 2.44

Como variables independientes se toman como ya es habitual, la cantidad de movimiento P_1 asociado a la puerta de inercia y el volumen de aceite x_1 asociado a la puerta resorte. En hidráulica, el flujo es el caudal y la integral del caudal en el tiempo es el volumen de aceite, concretamente el que se introduce en el acumulador hidroneumático.

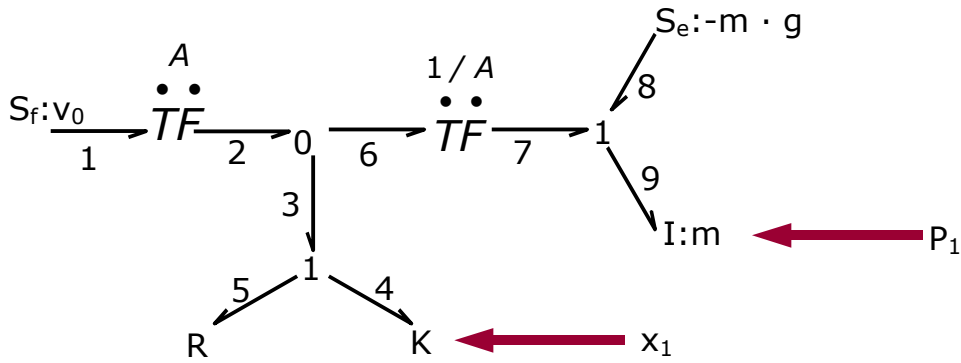


Figura 2.45

Cálculo de los flujos y esfuerzos.

$$f_1 = v_0 \quad \text{Fuente de flujo.}$$

$$f_2 = A \cdot v_0 \quad \text{Por definición de transformer.}$$

$$f_9 = P_1/m \quad \text{Variable independiente en puerta de inercia.}$$

$$f_8 = f_9 = P_1/m \quad \text{Unión 1.}$$

$$f_7 = f_9 = P_1/m \quad \text{Unión 1.}$$

$$f_6 = A \cdot f_7 = P_1 \cdot A/m \quad \text{Por definición de transformer.}$$

$$f_3 = f_2 - f_6 = A \cdot v_0 - A \cdot P_1/m \quad \text{Unión 0.}$$

$$f_4 = f_3 = A \cdot v_0 - A \cdot P_1/m \quad \text{Unión 1.}$$

$$f_5 = f_3 = A \cdot v_0 - A \cdot P_1/m \quad \text{Unión 1.}$$

$$e_4 = K \cdot x_1 \quad \text{Por puerta resorte.}$$

$$e_5 = f_5 \cdot R = (A \cdot v_0 - A \cdot P_1/m) \cdot R \quad \text{Por puerta resistencia.}$$

$$e_3 = e_4 + e_5 = K \cdot x_1 + (A \cdot v_0 - A \cdot P_1/m) \cdot R \quad \text{Unión 1.}$$

$$e_2 = e_3 = K \cdot x_1 + (A \cdot v_0 - A \cdot P_1/m) \cdot R \quad \text{Unión 0.}$$

$$e_6 = e_3 = K \cdot x_1 + (A \cdot v_0 - A \cdot P_1/m) \cdot R \quad \text{Unión 0.}$$

$$e_1 = A \cdot e_2 = A \cdot K \cdot x_1 + (A^2 \cdot v_0 - A^2 \cdot P_1/m) \cdot R \quad \text{Por definición de transformer.}$$

$$e_7 = A \cdot e_6 = A \cdot K \cdot x_1 + (A^2 \cdot v_0 - A^2 \cdot P_1/m) \cdot R \quad \text{Por definición de transformer.}$$

$$e_8 = -m \cdot g \quad \text{Fuente de esfuerzo.}$$

$$e_9 = e_7 + e_8 = A \cdot K \cdot x_1 + (A^2 \cdot v_0 - A^2 \cdot P_1/m) \cdot R - m \cdot g \quad \text{Unión 1.}$$

Como ecuaciones diferenciales del modelo quedan:

$$dP_1/dt = e_9 = A \cdot K \cdot x_1 + (A^2 \cdot v_0 - A^2 \cdot P_1/m) \cdot R - m \cdot g$$

$$dx_1/dt = f_4 = A \cdot v_0 - A \cdot P_1/m$$

Y en forma matricial:

$$d/dt \begin{vmatrix} P_1 \\ x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -A^2 \cdot R/m & A \cdot K \\ -A/m & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} P_1 \\ x_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A^2 \cdot v_0 \cdot R - m \cdot g \\ A \cdot v_0 \end{vmatrix}$$

2.6 ELEMENTO GYRATOR

Estos elementos transforman flujos en esfuerzos y esfuerzos en flujos. Están formados por un grafo de entrada, otro de salida y la razón del gyrator r . Como en el caso de los transformer, no hay pérdida de potencia.

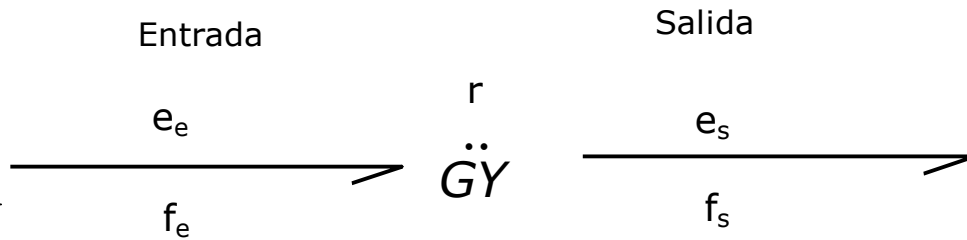


Figura 2.46

Por definición, en los elementos gyrator se cumplirá que

$$e_s = r \cdot f_e$$

$$e_e = r \cdot f_s$$

También se cumple que:

$$e_s \cdot f_s = r \cdot f_e \cdot e_e / r = e_e \cdot f_e$$

Y por lo tanto no hay pérdida de potencia.

Un ejemplo claro del empleo del gyrator es el motor eléctrico, ya que al paso de una intensidad produce un par motriz, y se cumple que el par es igual a una constante del motor por la intensidad.

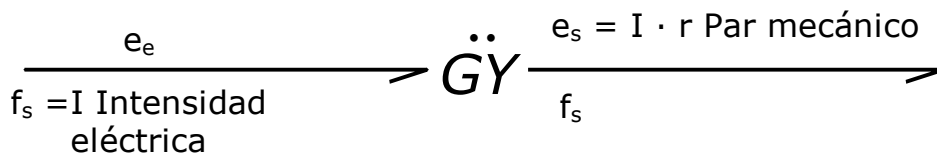
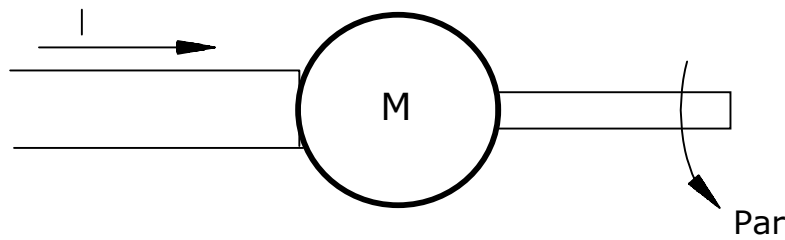


Figura 2.47