

Aplicación de Bond-Graph a Mecánica

3.1. Introducción.

Analizaremos un modelo de dos móviles que se desplazan sin resistencia y que están unidos entre sí mediante un muelle y un amortiguador. Aunque de una manera excesivamente simple, este caso puede simular el comportamiento de vagones de ferrocarril en su dinámica longitudinal.

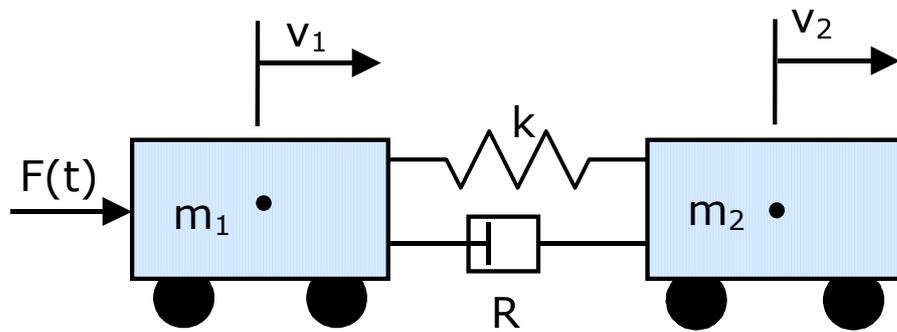


Figura 3.1

Suponiendo que sobre el primer móvil actúe una fuerza variable en el tiempo, $F(t)$, el Bond-Graph que representa el modelo será el siguiente:

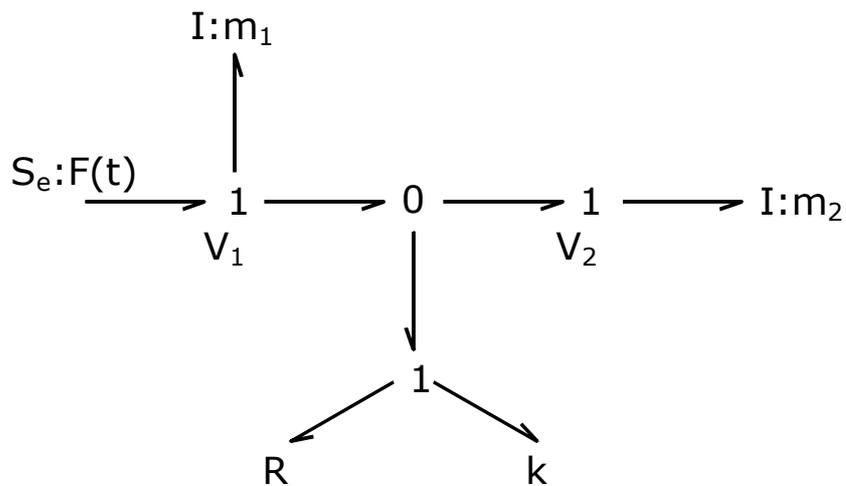


Figura 3.2

Como se observa en la figura 3.2, las uniones 1 pueden asociarse con las velocidades de los móviles. Por ello, hay autores que para realizar el Bond-Graph de un modelo comienzan situando uniones 1 para cada velocidad. Los pasos que se siguen con este método son los siguientes:

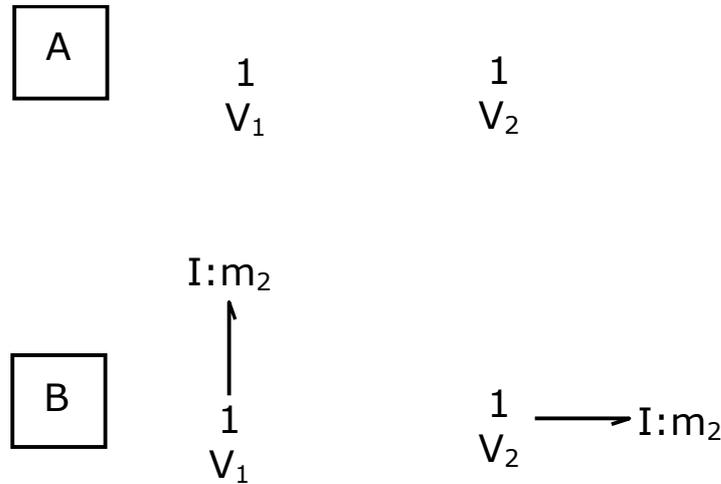


Figura 3.3

Después de situar un 1 para cada velocidad del modelo se asocian a estas velocidades las puertas de inercia.

El resorte y el amortiguador trabajan a la diferencia de velocidades que se produce entre ambos móviles de modo que surgen en Bond-Graph de una unión 0, como se indica en C.

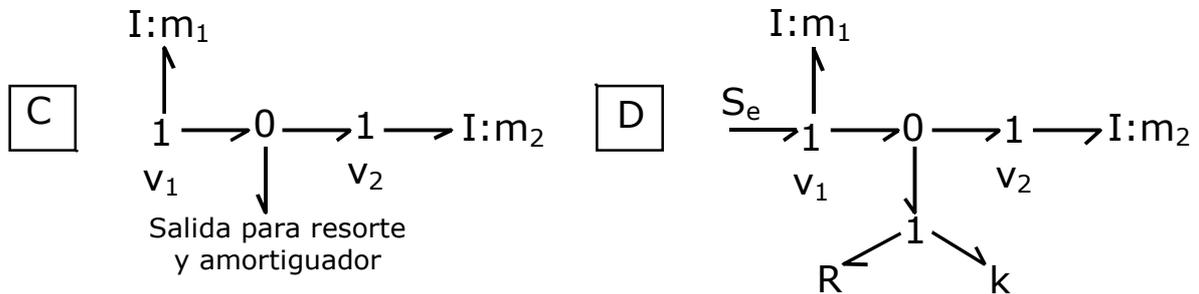


Figura 3.4

Finalmente, en D, debido a que tanto el resorte como el amortiguador trabajan a la misma diferencia de velocidades, se añade una unión 1 de donde salen las puertas resorte y resistencia que representan al muelle y al amortiguador respectivamente. Por último, basta añadir la fuente de esfuerzo S_e , que representa la fuerza $F(t)$ que actúa sobre el móvil de masa m_1 .

Como se ha comentado anteriormente, una de las grandes ventajas del Bond-Graph es que los esquemas que se obtuvieron tras analizar modelos sencillos pueden ser aplicados a tipos más complejos. Si en este caso se añade un móvil más al ejemplo, se observa que la representación mediante Bond-Graph es una simple ampliación de la anterior. Los grafos 1 a 8 son idénticos al Bond-Graph de nuestra primera muestra.

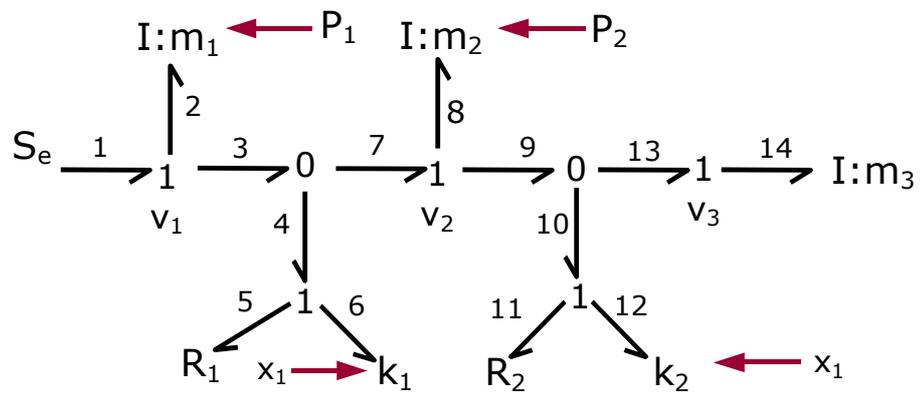
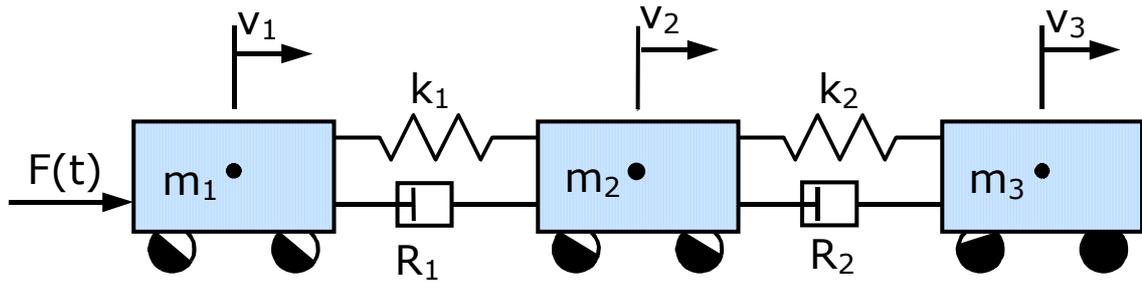


Figura 3.5

Como variables independientes se tomarán las cantidades de movimientos asociadas a las puertas de inercia y los desplazamientos en las puertas resorte.

$$\begin{aligned}
 f_1 &= P_1 / m_1 \\
 f_2 &= P_1 / m_1 \\
 f_3 &= P_1 / m_1 \\
 f_4 &= f_3 - f_7 = P_1 / m_1 - P_2 / m_2 \\
 f_5 &= f_4 = P_1 / m_1 - P_2 / m_2 \\
 f_6 &= f_4 = P_1 / m_1 - P_2 / m_2 \\
 f_7 &= P_2 / m_2 \\
 f_8 &= P_2 / m_2 \\
 f_9 &= P_2 / m_2 \\
 f_{10} &= f_9 - f_{13} = P_2 / m_2 - P_3 / m_3 \\
 f_{11} &= f_{10} = P_2 / m_2 - P_3 / m_3 \\
 f_{12} &= f_{10} = P_2 / m_2 - P_3 / m_3 \\
 f_{13} &= P_3 / m_3
 \end{aligned}$$

Esfuerzos

$$\begin{aligned}
 e_1 &= F(t) \\
 e_2 &= e_1 - e_3 = F(t) - R_1 \cdot (P_1 / m_1 - P_2 / m_2) - K_1 \cdot x_1 \\
 e_3 &= e_4 = R_1 \cdot (P_1 / m_1 - P_2 / m_2) + K_1 \cdot x_1
 \end{aligned}$$

$$e_4 = e_5 + e_6 = R_1 \cdot (P_1 / m_1 - P_2 / m_2) + K_1 \cdot x_1$$

$$e_5 = R_1 \cdot (P_1 / m_1 - P_2 / m_2)$$

$$e_6 = K_1 \cdot x_1$$

$$e_7 = e_4 = R_1 \cdot (P_1 / m_1 - P_2 / m_2) + K_1 \cdot x_1$$

$$e_8 = e_7 - e_9 = R_1 (P_1 / m_1 - P_2 / m_2) + K_1 \cdot x_1 - R_2 \cdot (P_2 / m_2 - P_3 / m_3) - K_2 \cdot x_2$$

$$e_9 = e_{10} = R_2 \cdot (P_2 / m_2 - P_3 / m_3) + K_2 \cdot x_2$$

$$e_{10} = e_{11} + e_{12} = R_2 (P_2 / m_2 - P_3 / m_3) + K_2 \cdot x_2$$

$$e_{11} = R_2 \cdot (P_2 / m_2 - P_3 / m_3)$$

$$e_{12} = K_2 \cdot x_2$$

$$e_{13} = e_{10} = R_2 \cdot (P_2 / m_2 - P_3 / m_3) + K_2 \cdot x_2$$

$$e_{14} = e_{13} = R_2 \cdot (P_2 / m_2 - P_3 / m_3) + K_2 \cdot x_2$$

Teniendo en cuenta las variables independientes elegidas, las ecuaciones de estado en forma matricial son así:

$$d/dt \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R_1/m_1 & R_1/m_2 & 0 & -K_1 & 0 \\ R_1/m_1 & -(R_1/m_2 + R_2/m_2) & R_2/m_3 & K_1 & -K_2 \\ 0 & R_2/m_2 & -R_2/m_3 & 0 & K_2 \\ 1/m_1 & -1/m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/m_2 & -1/m_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ya que, como se ha mencionado en el capítulo anterior:

$$d P_1 / dt = e_2 \quad ; \quad d P_2 / dt = e_8 \quad ; \quad d P_3 / dt = e_{14}$$

$$d x_1 / dt = f_6 \quad ; \quad d x_2 / dt = f_{12}$$

Si se resuelven estas cinco ecuaciones diferenciales por un método numérico, puede analizarse la respuesta del sistema en el tiempo.

Si en el ejemplo propuesto se toman los valores de la tabla se obtienen las curvas indicadas en las figuras 3.7 y 3.8.

Tabla de valores

$$m_1 = 20000 \text{ kg.}$$

$$m_2 = 20000 \text{ kg.}$$

$$m_3 = 20000 \text{ kg.}$$

$$K_1 = 2000000 \text{ N/m}$$

$$K_2 = 2000000 \text{ N/m}$$

$$R_1 = 50000 \text{ N s/m}$$

$$R_2 = 50000 \text{ N s/m}$$

Como fuerza de excitación $F(t)$ se ha tomado una variación continua entre 0 y 30000 N durante un segundo, tal y como se indica en la figura 3.6.

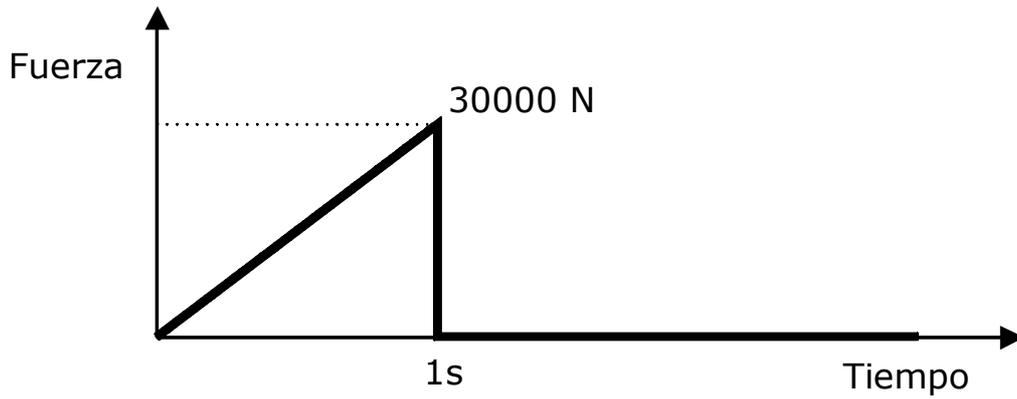


Figura 3.6

En la figura 3.7, se representan las velocidades en m/seg, en función del tiempo, de los vagones extremos y del intermedio. En ambos casos se observa una etapa transitoria de velocidad y otra posterior denominada permanente, en la cual la velocidad alcanza un valor constante.

Aunque no es objeto de este capítulo, es necesario señalar que para analizar un sistema dinámico son muy importantes el valor máximo de los picos en el transitorio y el tiempo que transcurre hasta que el sistema alcanza los valores permanentes. Evidentemente, un buen diseño debe ir encaminado a que estos valores sean mínimos.

En este caso, se observa cómo la respuesta del móvil intermedio tiene un transitorio más reducido en el tiempo que en los móviles extremos. Esta variación se debe al hecho de que el móvil intermedio tiene elementos amortiguadores en ambas caras, mientras que los extremos solo lo poseen en una de ellas.

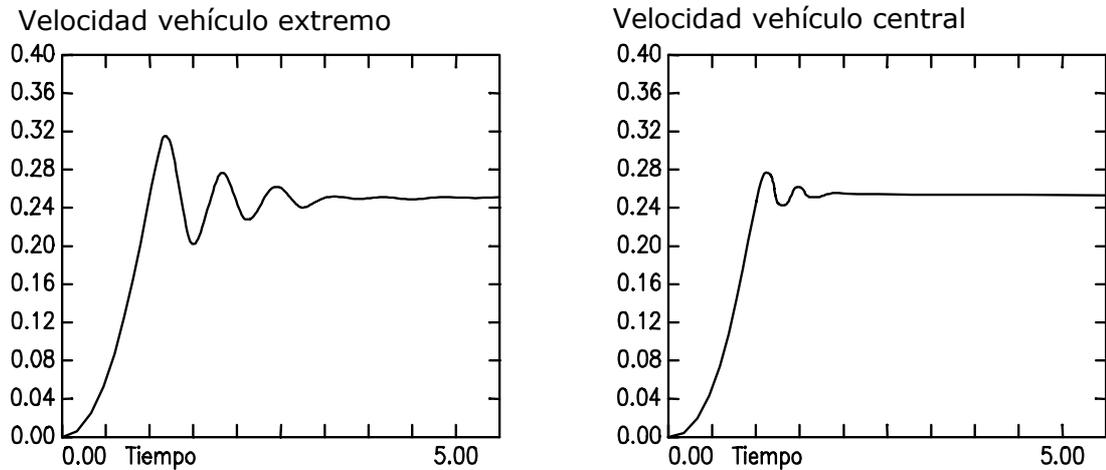


Figura 3.7

La velocidad de los móviles aumenta debido a la excitación hasta 0,27 m/s durante poco más de lo que dura dicho esfuerzo. En cuanto desaparece la excitación, la aceleración decae rápidamente y oscila durante el transitorio hasta que definitivamente, y debido a la ausencia de esfuerzo, se anula.

En la figura 3.8 se observa la respuesta de las aceleraciones en m/s^2 .

Evidentemente, cuando la aceleración se anula, los móviles han llegado al estado permanente y se desplazan a velocidad constante.

Como en el caso de las velocidades, las aceleraciones tienen un transitorio más largo en los móviles extremos.

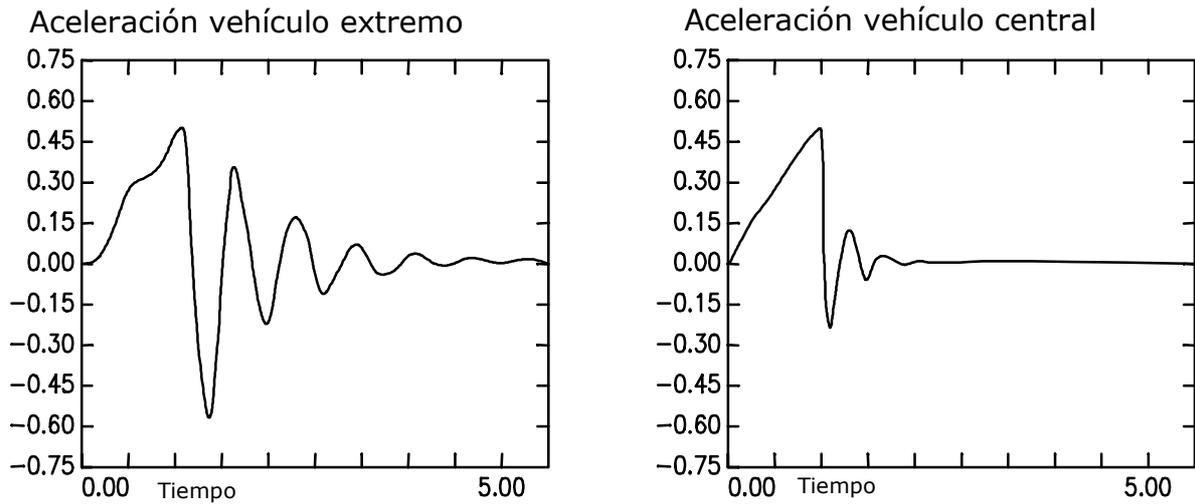


Figura 3.8

3.2. Resistencias al avance

Como se ha comentado en ocasiones anteriores, una de las ventajas principales de la técnica del Bond-Graph, consiste en la facilidad con la que sobre un sistema ya establecido, se van introduciendo modificaciones. En este caso resulta muy interesante añadir al modelo en estudio resistencias que se opongan al desplazamiento.

Se va a considerar que existe una resistencia a la rodadura igual al peso del móvil por el coeficiente de rodadura r_0 .

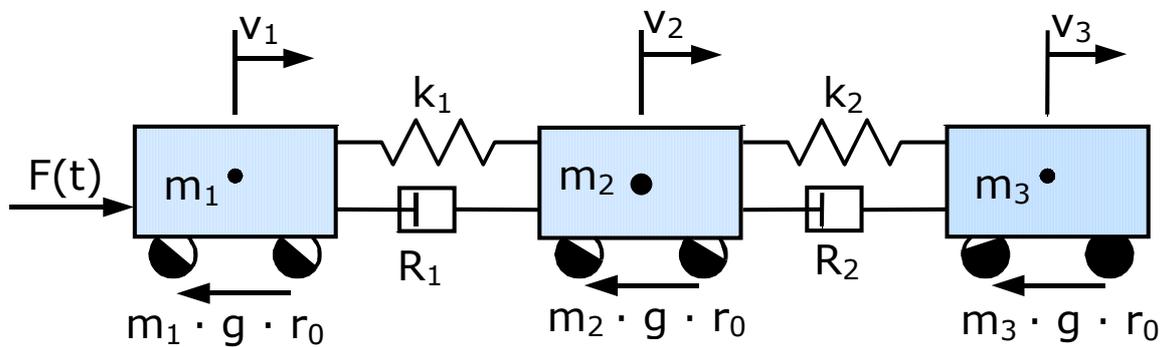


Figura 3.9

Como se observa en la representación mediante Bond-Graph, basta añadir sobre las uniones 1, asociadas a las velocidades V_1 , V_2 y V_3 , fuentes de esfuerzo negativas de valor $-m_1 g r_0$, $-m_2 g r_0$ y $-m_3 g r_0$ respectivamente.

Cuando las resistencias a la rodadura se representen mediante fuentes de esfuerzo debe tenerse presente que solo actúan cuando los móviles se desplazan ya que, como su nombre indica, se oponen a la marcha. Por tanto, es conveniente tener la precaución de considerar las fuentes de esfuerzo nulas cuando las velocidades de los móviles también lo sean.

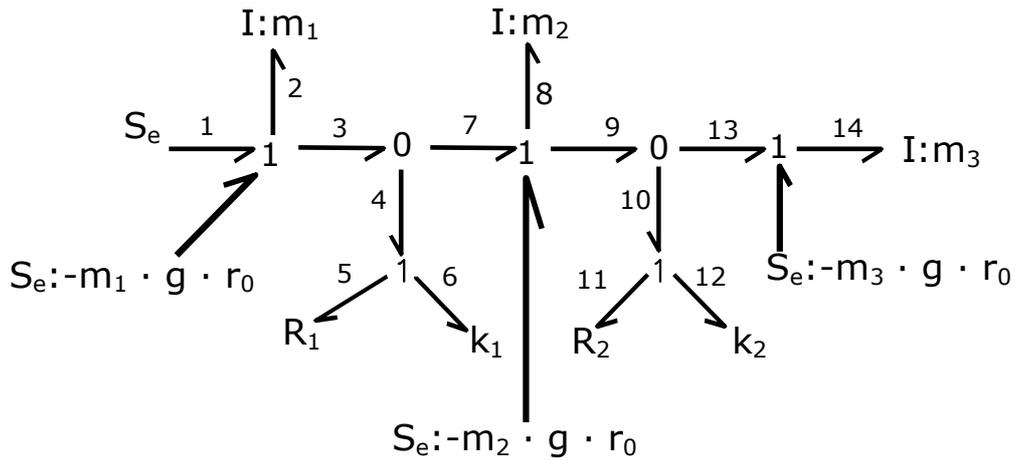


Figura 3.10

En la figura 3.11 se representa la unión 1 asociada a la velocidad V_1 del móvil de masa m_1 . Puede observarse cómo el esfuerzo $F(t)$ se consume venciendo la resistencia a la rodadura, acelerando la masa m_1 y comunicando el resto a los demás móviles.

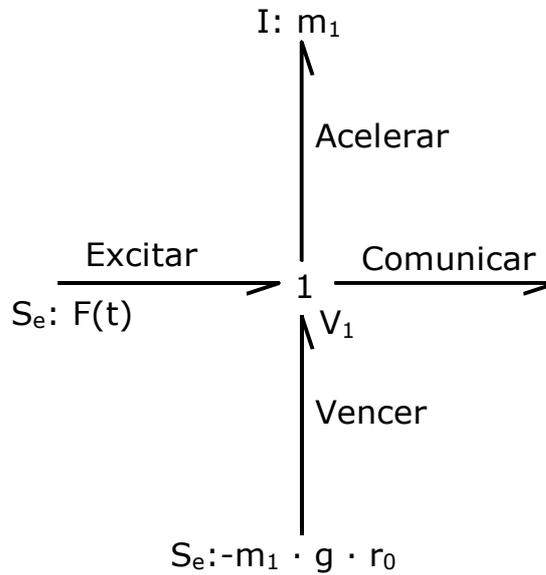


Figura 3.11

No obstante, las resistencias a la rodadura suelen depender de la velocidad del móvil, de tal manera que su representación mediante fuentes de esfuerzo sólo puede hacerse como simplificaciones del problema.

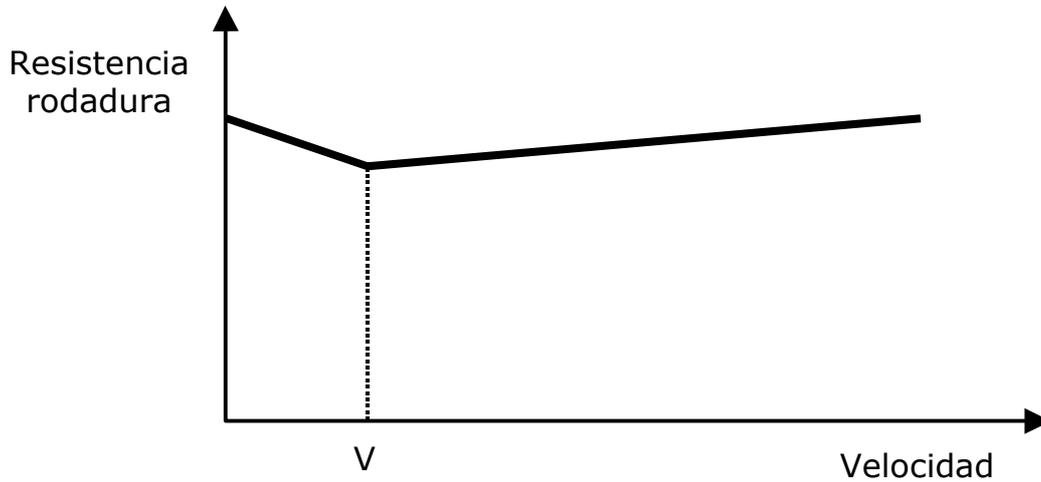


Figura 3.12

En la figura 3.12, se representa una gráfica de resistencia a la rodadura en función de la velocidad, que no corresponde exactamente con ningún móvil pero que puede servir de ejemplo.

Si la resistencia a la rodadura depende de la velocidad, su representación en el diagrama de grafos se hará mediante un elemento resistencia que es el encargado de relacionar esfuerzos con velocidades.

Así, sobre el ejemplo de los tres móviles basta con sustituir las tres fuentes de esfuerzo, colocadas para simular la resistencia a la rodadura, por tres puertas resistencia de valor R_3 , R_4 y R_5 , que, como se observa en la figura 3.12, tienen un valor variable en función de la velocidad.

El planteamiento matricial de las ecuaciones de este modelo es el siguiente:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R_1/m_1 - R_3/m_1 & R_1/m_2 & 0 & -K_1 & 0 \\ R_1/m_1 & -(R_1/m_2 + R_2/m_2 + R_4/m_2) & R_2/m_3 & K_1 & -K_2 \\ 0 & R_2/m_2 & -R_2/m_3 - R_5/m_3 & 0 & K_2 \\ 1/m_1 & -1/m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/m_2 & -1/m_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Los flujos en los grafos 15, 16 y 17 vienen dados por:

$$f_{15} = P_1/m_1 \ ; \ f_{16} = P_2/m_2 \ ; \ f_{17} = P_3/m_3$$

Y los esfuerzos por:

$$e_{15} = R_3 \cdot P_1/m_1 \ ; \ e_{16} = R_4 \cdot P_2/m_2 \ ; \ e_{17} = R_5 \cdot P_3/m_3$$

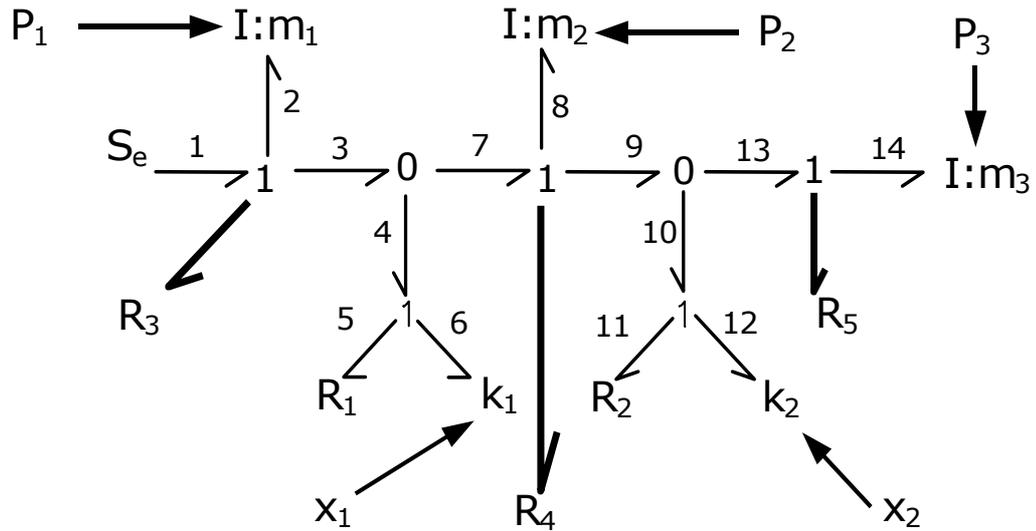


Figura 3.13

Si se compara la ecuación matricial de ahora con la obtenida cuando en el modelo no se consideraban las resistencias a la rodadura, se observa que solamente se han introducido en este caso los términos R_3, R_4, R_5 .

Como ya se ha mencionado anteriormente, la única diferencia existente entre el diagrama de grafos actual y el inicial, consiste en las puertas resistencias añadidas a las uniones 1. Al tratarse de uniones 1, cualquier grafo añadido es de flujo conocido y, por ser puertas resistencias, también lo es su esfuerzo.

En definitiva, en las ecuaciones diferenciales del sistema aparecen las resistencias oponiéndose a la aceleración de las masas.

3.3. Masas con deslizamiento

En la figura 3.14, se representa un modelo de varias masas acopladas por medio de resortes que se desplazan con rozamiento.

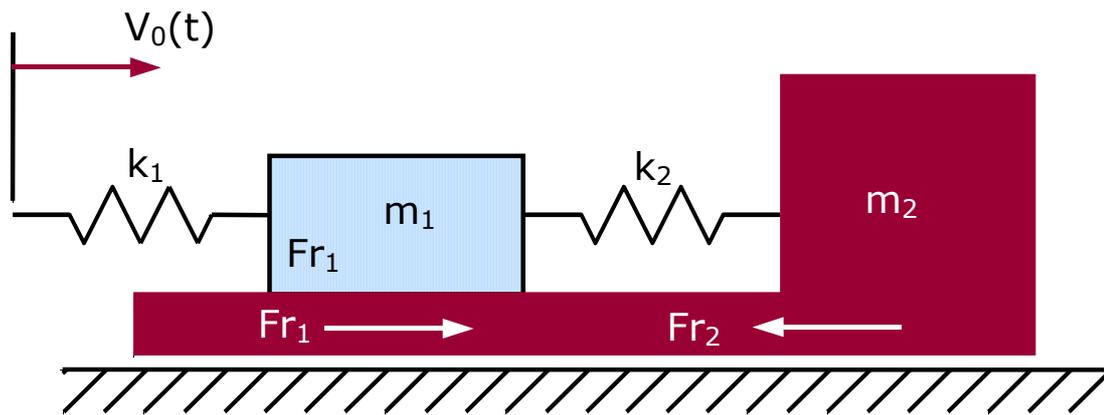


Figura 3.14

El diagrama de grafos o Bond-Graph de este modelo es el siguiente:

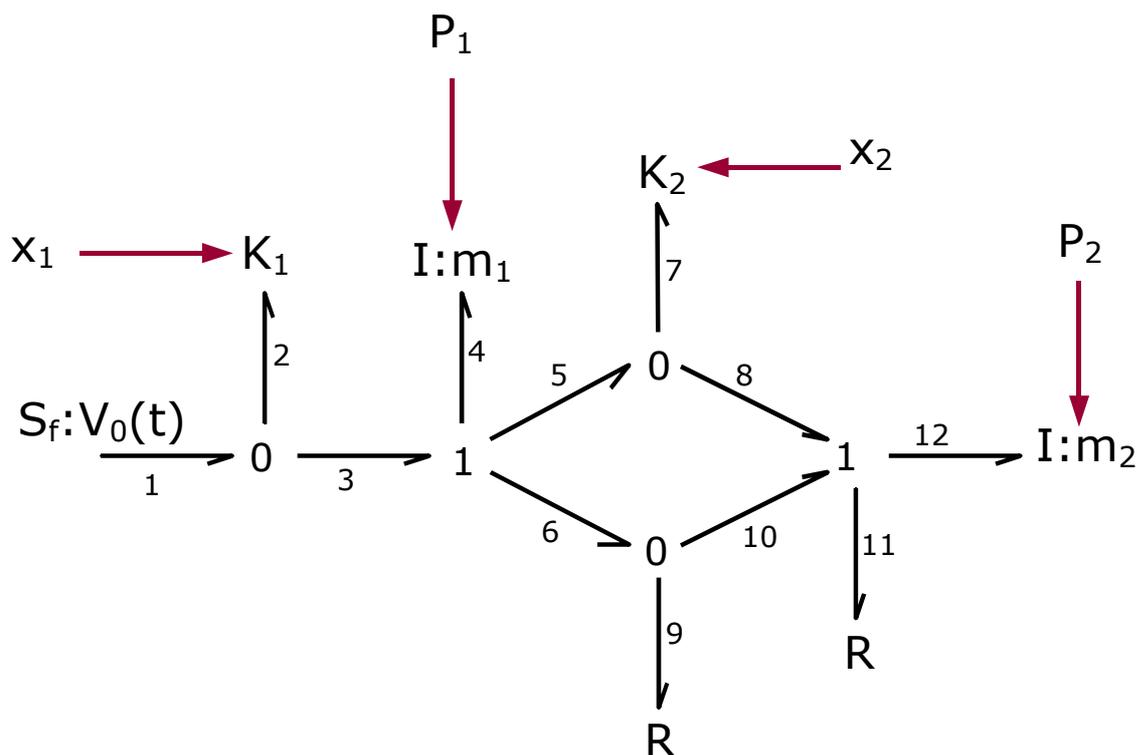


Figura 3.15

Veamos, uno a uno, qué representa cada grafo:

GRAFO

1. Excitación conocida en velocidad que llevará asociado un esfuerzo.
2. Resorte que se desplaza en función del esfuerzo asociado al grafo 1.
3. Esfuerzo, reacción del resorte sobre la masa m_1 . Es igual al introducido por el grafo 1.
4. Esfuerzo disponible para acelerar la masa m_1
5. Esfuerzo transmitido al resorte K_2 .
6. Esfuerzo necesario para vencer el rozamiento entre la masa m_1 y la masa m_2 .
7. Esfuerzo en el resorte K_2 que, evidentemente, es igual al que se le transmite.
8. Esfuerzo de reacción del resorte K_2 sobre la masa m_2 .
9. Esfuerzo de rozamiento.
10. Como la masa m_1 se desplaza sobre la m_2 , en este grafo se encuentra la reacción provocada por el esfuerzo de rozamiento entre ambas actuando sobre m_2 .
11. Esfuerzo necesario para vencer el rozamiento entre la masa m_2 y la superficie sobre la que apoya ésta.
12. Esfuerzo disponible para acelerar la masa m_2 . Este esfuerzo, como puede observarse en el diagrama de grafos, es suma del comunicado por el resorte K_2 y el de la reacción a la fuerza de rozamiento entre la masa m_1 y la m_2 , menos el consumido en el rozamiento de la masa m_2 con el suelo.

Parecidos razonamientos pueden hacerse si el enfoque del diagrama de grafos se hace pensando en velocidades. Veamos a modo de ejemplo la unión 1 de los grafos 3, 4, 5 y 6.

GRAFO

3. Velocidad del punto de unión del resorte K_1 con la masa m_1 .
4. Velocidad de la masa m_1 .
5. Velocidad del punto de unión del resorte K_2 con la masa m_1 .
6. Velocidad de desplazamiento de la masa m_1 respecto a la masa m_2 .

Como es evidente, todas las velocidades asociadas a estos grafos son iguales.

Mediante los pasos habituales se determinan los flujos y esfuerzos en el orden indicado seguidamente. Comenzamos por los flujos.

$$\begin{aligned}
 f_1 &= V_0(t) & e_2 &= K_1 \cdot x_1 \\
 f_4 &= P_1/m_1 & e_1 &= K_1 \cdot x_1 \\
 f_3 &= P_1/m_1 & e_3 &= K_1 \cdot x_1 \\
 f_5 &= P_1/m_1 & e_7 &= K_2 \cdot x_2 \\
 f_6 &= P_1/m_1 & e_5 &= K_2 \cdot x_2 \\
 f_2 &= f_1 - f_3 = V_0(t) - P_1/m_1 & e_8 &= K_2 \cdot x_2 \\
 f_{12} &= P_2/m_2 & e_9 &= R \cdot f_9 = R \cdot (P_1/m_1 - P_2/m_2) \\
 f_{11} &= P_2/m_2 & e_6 &= R \cdot (P_1/m_1 - P_2/m_2) \\
 f_{10} &= P_2/m_2 & e_{10} &= R \cdot (P_1/m_1 - P_2/m_2) \\
 f_8 &= P_2/m_2 & e_4 &= e_3 - e_5 - e_6 = K_1 \cdot x_1 - K_2 \cdot x_2 - \\
 f_7 &= f_5 - f_8 = P_1/m_1 - P_2/m_2 & & - R \cdot (P_1/m_1 - P_2/m_2) \\
 f_9 &= f_6 - f_{10} = P_1/m_1 - P_2/m_2 & e_{11} &= R \cdot f_{11} = R \cdot P_2/m_2 \\
 e_{12} &= e_8 + e_{10} - e_{11} = K_2 \cdot x_2 + R \cdot (P_1/m_1 - P_2/m_2) - R \cdot P_2/m_2
 \end{aligned}$$

Como siempre, teniendo en cuenta que:

$$dP_1/dt = e_4 \quad ; \quad dP_2/dt = e_{12}$$

$$dx_1/dt = f_2 \quad ; \quad dx_2/dt = f_7$$

Las ecuaciones diferenciales que definen el sistema tienen la siguiente expresión matricial.

$$d/dt \begin{vmatrix} P_1 \\ P_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -R/m_1 & R/m_2 & K_1 & -K_2 \\ R/m_1 & -2 \cdot R/m_2 & 0 & K_2 \\ -1/m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/m_1 & -1/m_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} P_1 \\ P_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ V_0(t) \\ 0 \end{vmatrix}$$

3.4. Discos giratorios

El disco de la figura 3.16, se supone que tiene su masa concentrada en el centro y está suspendido en dos puntos diametralmente opuestos. Uno de estos dos puntos se une mediante un resorte a un cuerpo fijo, mientras que el otro, por medio de otro resorte, está sometido a una excitación externa.

Sean:

m = masa del disco

V = Velocidad vertical del disco

w = Velocidad angular del disco

R = Radio del disco

V₀(t) = Velocidad conocida de excitación al sistema

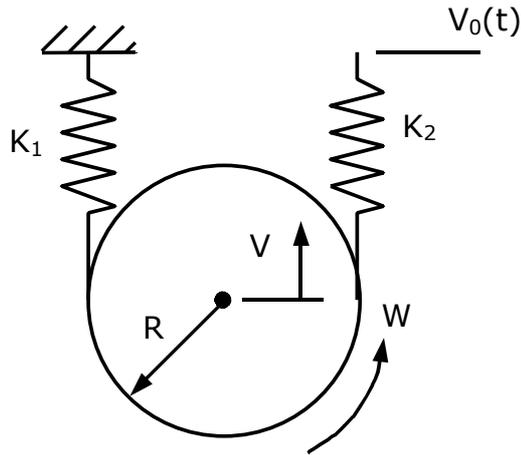


Figura 3.16

3.5. Construcción del Bond-Graph.

Para desarrollar el Bond-Graph se van a tomar partes del modelo, siguiendo paso a paso su representación en el diagrama de grafos.

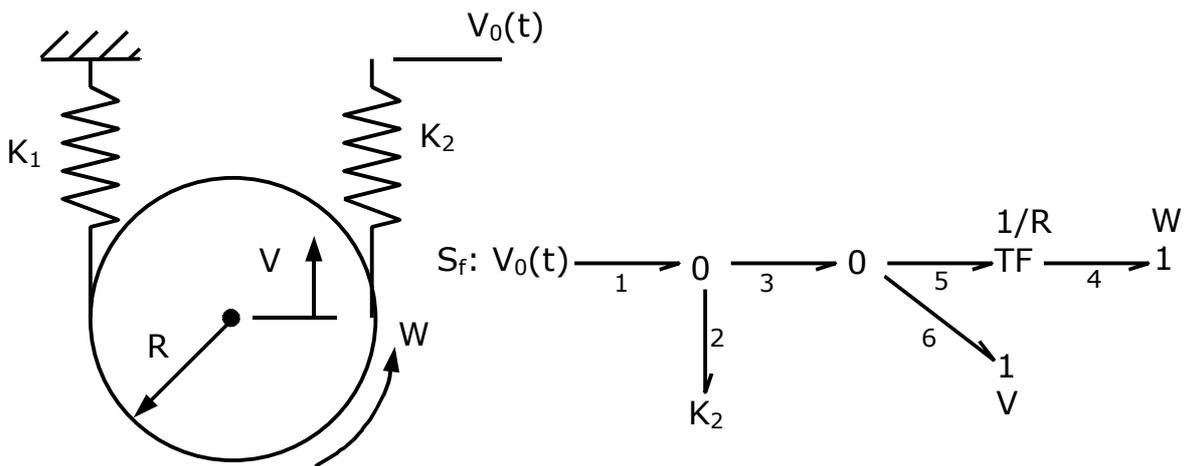


Figura 3.17

Se comienza por la excitación externa, que en este caso está constituida por la velocidad conocida y variable en el tiempo $V_0(t)$.

La velocidad $V_0(t)$ es comunicada al extremo del resorte K_2 , que al ser sometido a un desplazamiento opone una fuerza a este desplazamiento.

Esta fuerza, en el diagrama de grafos, está asociada al grafo 2 y evidentemente, es la misma en ambos extremos del resorte. Por este motivo, la representación del resorte se hace mediante una unión 0 en la que, como se observa en la figura 3.17, el grafo 1 representa la entrada al resorte; el 2, el comportamiento de éste; y por último, el 3, su salida.

Al llegar al disco, el esfuerzo provoca el desplazamiento según V del disco y al mismo tiempo genera un par respecto al centro, que le hace girar según W .

El esfuerzo para desplazar el disco es el asociado al grafo 6, mientras que para girar necesita ser multiplicado por el radio R , y esto se hace mediante el transformer de grafos 4 y 5.

El disco tiene por tanto, dos movimientos definidos por las velocidades V y W , que en Bond-Graph se representan mediante sendas uniones 1.

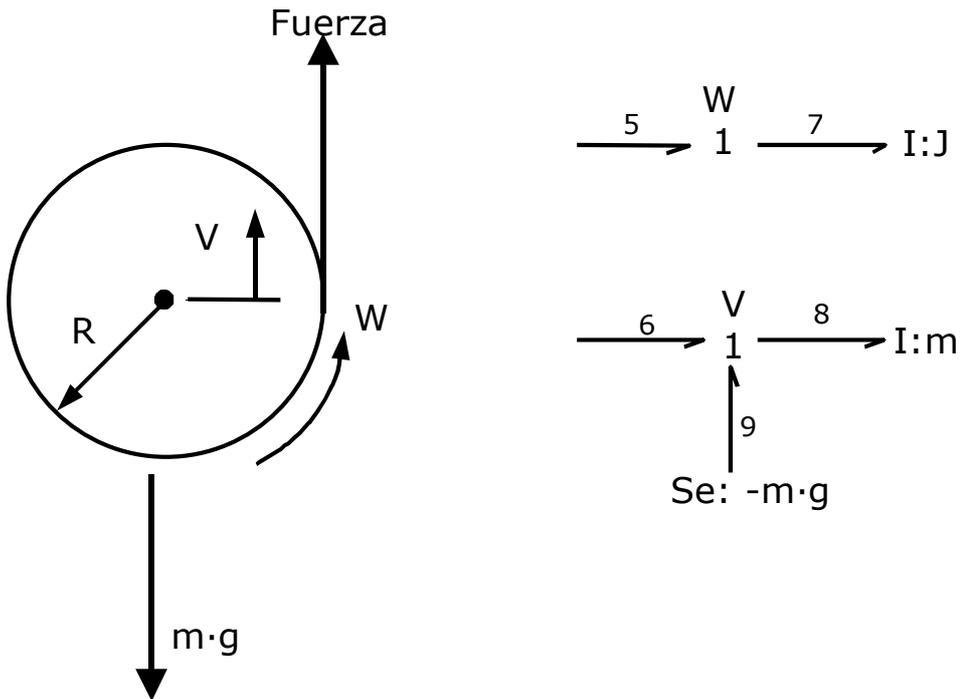


Figura 3.18

El par suministrado por el grafo 5 tiene que acelerar el movimiento del disco y, por lo tanto, de la unión 1 asociada a w sale la puerta de inercia, grafo 7, que tiene como valor el momento de inercia del disco.

Por otra parte, el esfuerzo en el grafo 6 debe vencer el peso propio, grafo 9, y acelerar el disco en la dirección de V . En la unión 1, asociada a V , se tendrá la entrada del grafo 9 y la puerta de inercia, grafo 8, de valor la masa m del disco.

Para hallar la velocidad del punto D, basta tener presente que será suma de la velocidad V del centro del disco, más la debida al giro $w \cdot R$ que, en este caso, es de sentido contrario a la originada por V .

$$V_D = V - w \cdot R$$

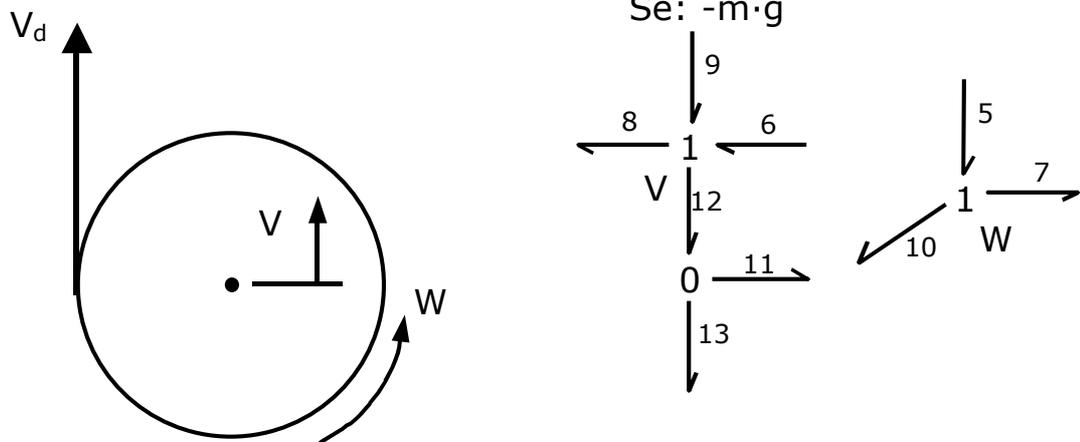


Figura 3.19

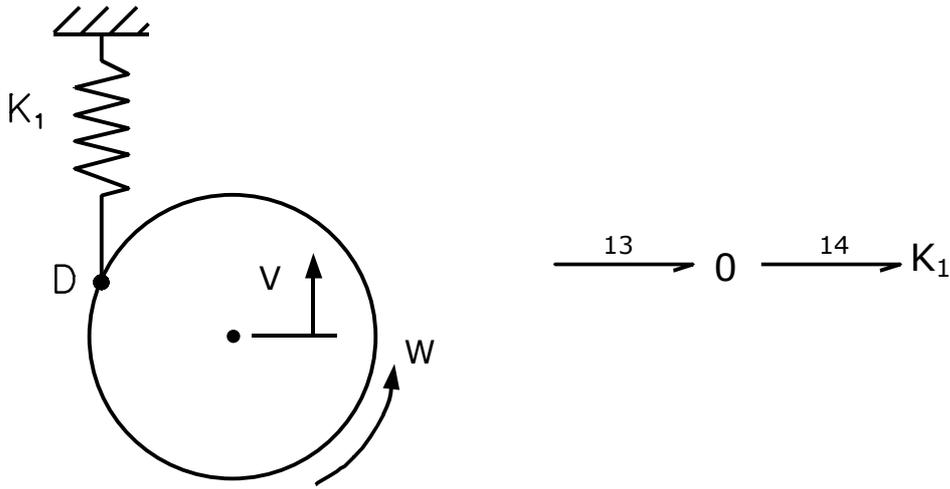


Figura 3.20

Su representación mediante Bond-Graph se hace con una unión 0, en la que la suma de velocidades de entrada es igual a la suma de velocidades de salida.

El grafo 13 representa la velocidad V_D ; el 12, la componente de V ; y el 11, la componente de $-w \cdot R$ que se consigue mediante el transformer de razón $-R$ (grafos 10 y 11)

Por último, el esfuerzo asociado al grafo 13 se comunica íntegramente al resorte de rigidez K_1 , representado por el grafo 14.

El diagrama de grafos completo se muestra en la figura 3.21.

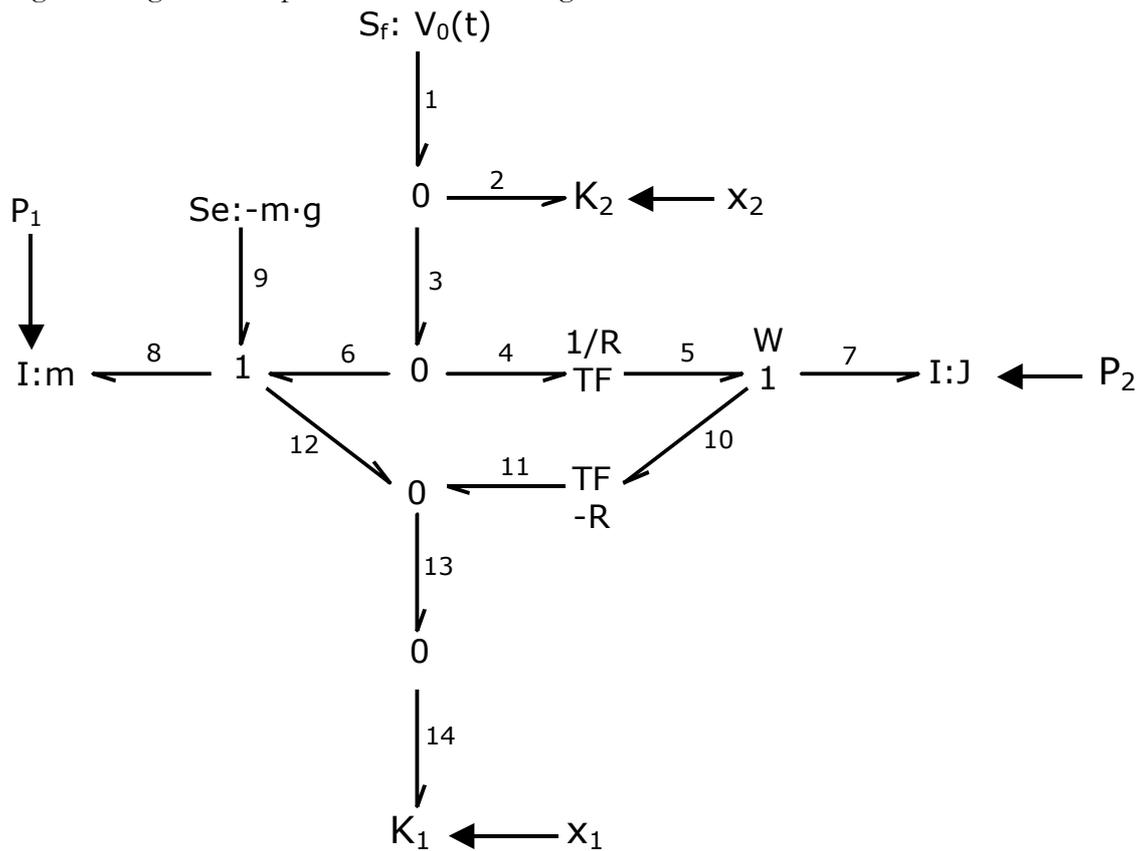


Figura 3.21

Como variables independientes del sistema, se toman las cantidades de movimiento asociadas a las puertas de inercia y los desplazamientos en las puertas resorte

Cálculo de flujos y esfuerzos

$$f_1 = V_0(t)$$

$$f_8 = P_1/m$$

$$f_9 = P_1/m$$

$$f_6 = P_1/m$$

$$f_{12} = P_1/m$$

$$f_7 = P_2/J$$

$$f_5 = P_2/J$$

$$f_{10} = P_2/J$$

$$f_4 = R \cdot f_5 = R \cdot P_2/J$$

$$f_3 = f_4 + f_6 = P_2 \cdot R/J + P_1/m$$

$$f_2 = f_1 - f_3 = V_0(t) - P_2 \cdot R/J - P_1/m$$

$$f_{11} = -R \cdot f_{10} = -R \cdot P_2/J$$

$$f_{13} = f_{11} + f_{12} = -R \cdot P_2/J + P_1/m$$

$$f_{14} = f_{13} = -R \cdot P_2/J + P_1/m$$

$$e_2 = K_2 \cdot x_2$$

$$e_1 = K_2 \cdot x_2$$

$$e_3 = K_2 \cdot x_2$$

$$e_4 = K_2 \cdot x_2$$

$$e_6 = K_2 \cdot x_2$$

$$e_{14} = K_1 \cdot x_1$$

$$e_{13} = K_1 \cdot x_1$$

$$e_{12} = K_1 \cdot x_1$$

$$e_{11} = K_1 \cdot x_1$$

$$e_{10} = -R \cdot e_{11} = -R \cdot K_1 \cdot x_1$$

$$e_5 = R \cdot e_{14} = R \cdot K_2 \cdot x_2$$

$$e_7 = e_5 - e_{10} = R \cdot K_2 \cdot x_2 + R \cdot K_1 \cdot x_1$$

$$e_9 = -m \cdot g$$

$$e_8 = e_6 + e_9 - e_{12} = K_2 \cdot x_2 - m \cdot g - K_1 \cdot x_1$$

Las variables independientes del sistema eran:

P_1, P_2, x_1, x_2

Las derivadas de estas variables respecto al tiempo son iguales a los esfuerzos y flujos asociados a sus grafos correspondientes.

$$dP_1/dt = e_8 \quad ; \quad dP_2/dt = e_7$$

$$dx_1/dt = f_{14} \quad ; \quad dx_2/dt = f_2$$

Y, en definitiva, sustituyendo por los valores hallados:

$$dP_1/dt = K_2 \cdot x_2 - m \cdot g - K_1 \cdot x_1$$

$$dP_2/dt = R \cdot K_2 \cdot x_2 + R \cdot K_1 \cdot x_1$$

$$dx_1/dt = -R \cdot P_2/J + P_1/m$$

$$dx_2/dt = V_0(t) - P_2 \cdot R/J - P_1/m$$

Y en forma matricial es así:

$$d/dt \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -K_1 & K_2 \\ 0 & 0 & R \cdot K_1 & R \cdot K_2 \\ 1/m & -R/J & 0 & 0 \\ -1/m & -R/J & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -m \cdot g \\ 0 \\ 0 \\ V_0(t) \end{pmatrix}$$

3.6. Modelo de dos grados de libertad

En los capítulos anteriores se había planteado un modelo de dos grados de libertad, como un ejemplo para enseñar la técnica de Bond-Graph. En este apartado va a analizarse la respuesta de este modelo ante diferentes excitaciones.

En la figura 3.22 se vuelve a representar el diagrama de grafos.

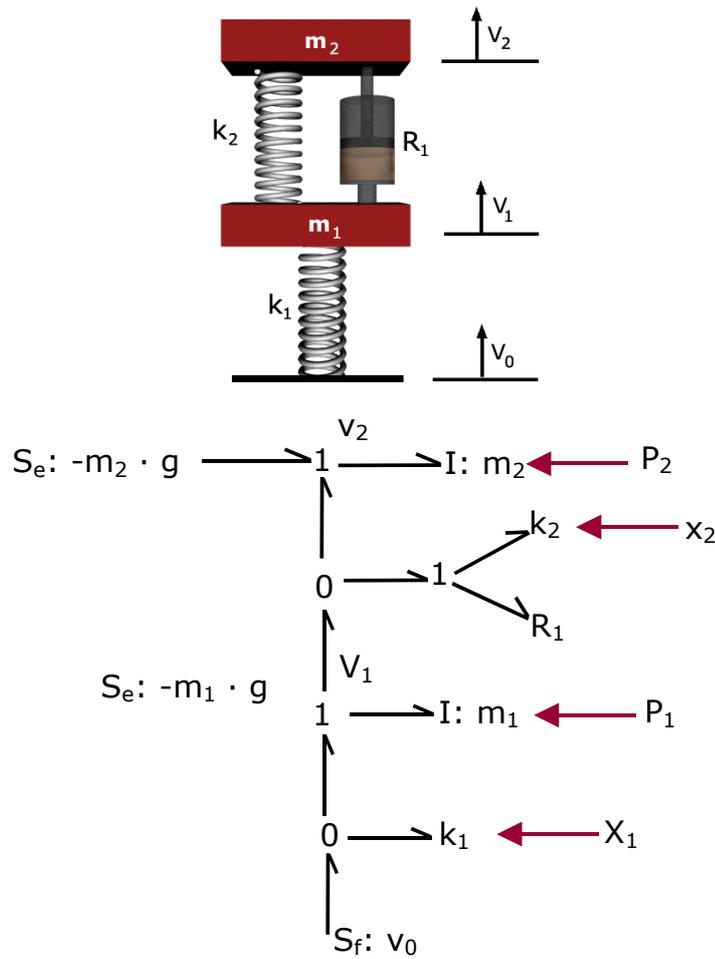


Figura 3.22

El cálculo de los flujos y esfuerzos asociados a cada grafo ya había sido realizado, por eso en este apartado se plantearán directamente las ecuaciones en forma matricial.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R_1/m_1 & R_1/m_2 & K_1 & -K_2 \\ R_1/m_1 & -R_1/m_2 & 0 & K_2 \\ -1/m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/m_1 & -1/m_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -m_1 \cdot g \\ -m_2 \cdot g \\ V_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como caso inicial para analizar la respuesta del sistema, se va a suponer que $V_0 = 0$, es decir la única excitación del modelo, será el peso propio de las masas.

Sean:

- $K_1 = 80000 \text{ N/m}$
- $K_2 = 8000 \text{ N/m}$
- $R_1 = 350 \text{ N} \cdot \text{s/m}$
- $m_1 = 25 \text{ kg}$
- $m_2 = 200 \text{ kg}$

Como condiciones iniciales en el tiempo $t = 0$ se tiene:

$$P_1 = P_2 = x_1 = x_2 = 0$$

En este caso, el sistema no está en equilibrio y se deformará por el peso propio de las masas hasta que los resortes se compriman lo suficiente como para equilibrar los pesos.

En la figura 3.23 se representa el desplazamiento en función del tiempo de las masas m_1 y m_2 . Esta última cae al principio rápidamente hasta 0.47 metros aproximadamente para recuperarse posteriormente mediante oscilaciones cada vez de menos amplitud hasta que llega al estado permanente.

Como se ha comentado anteriormente, la única excitación es el peso propio de las masas, es decir, inicialmente es como si estas estuviesen sujetas y se soltaran. Las masas caen y permanecen durante un tiempo oscilando hasta que, una vez amortiguado el movimiento, el sistema queda en equilibrio.

Existe, pues, un tiempo, en este caso y para la masa m_2 aproximadamente 6.5 segundos, en que la respuesta se encuentra en su período transitorio. Al cabo de este tiempo la masa m_2 se ha parado, habiéndose desplazado definitivamente 0.28 m.

En cuanto a la masa m_1 , su desplazamiento es mucho más reducido en amplitud, y también el transitorio dura menos tiempo.

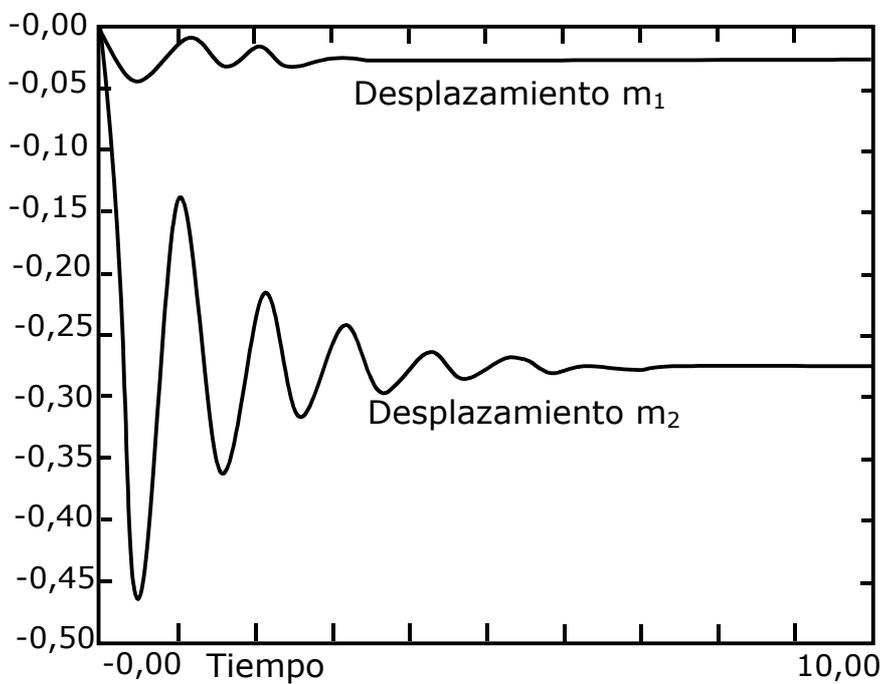


Figura 3.23

El amortiguamiento que se produce durante el transitorio de la respuesta, depende del coeficiente de amortiguación R_1 . Conforme se incrementa su valor, el modelo responde con oscilaciones de menor amplitud y además, llega al estado permanente en menos tiempo.

No obstante, el valor del amortiguamiento R_1 tiene un límite que se conoce con el nombre de amortiguamiento crítico, cuando se alcanza o se supera este valor, el sistema ya no responde con movimientos oscilantes.

En la figura 3.24, se representa el movimiento de la masa m_2 cuya única excitación, al igual que en la figura anterior, es su peso propio.

En este caso, se han representado dos respuestas para sendos valores del amortiguamiento R_1 , gracias a lo cual puede observarse la influencia que supone el incremento de R_1 en la respuesta del modelo. Señalaremos que para $R_1 = 650 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ se alcanza el estado permanente en 3.5

segundos frente a los 6.5 que tarda para $R_1 = 350 \text{ N} \cdot \text{s/m}$. Por otra parte, los picos de desplazamiento que se producen durante el transitorio disminuyen sustancialmente.

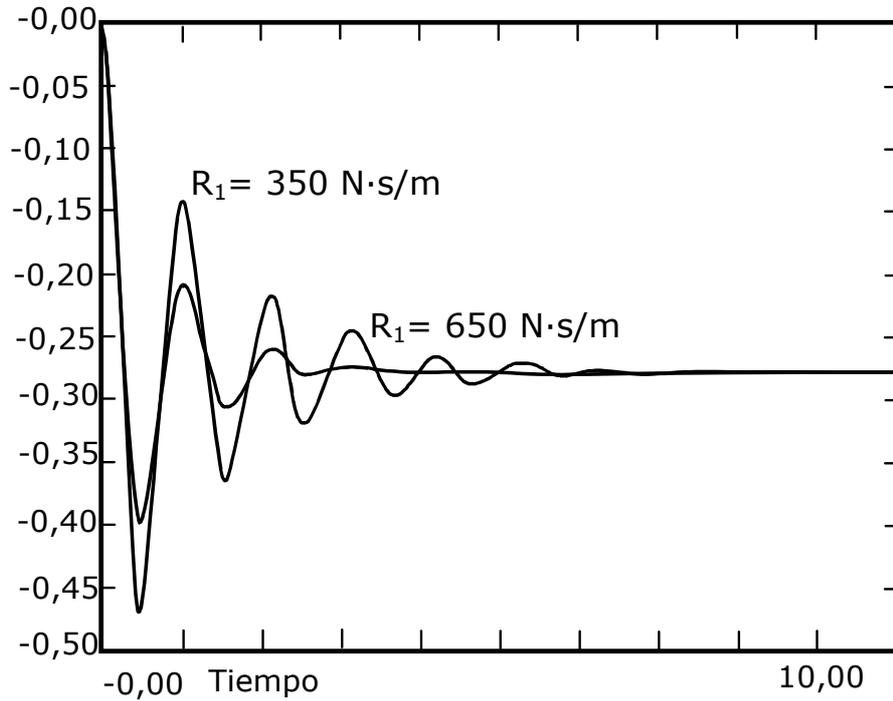


Figura 3.24

3.7. Comportamiento transversal de vehículos

En la figura 3.25, se representa un modelo plano que puede aplicarse al estudio del comportamiento transversal de vehículos, así como su diagrama de grafos.

Resolviendo los flujos y esfuerzos en cada grafo y planteando las ecuaciones diferenciales del modelo en forma matricial, se tiene:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2R/m & 0 & 2R/M & 0 & K_r & K_r & -K & -K \\ 0 & -2Ra^2/j & 0 & 2Ra^2/J & -K_r1 & K_r1 & K_a & K_a \\ 2R/m & 0 & -2R/M & 0 & 0 & 0 & K & K \\ 0 & 2Ra^2/j & 0 & -2Ra^2/J & 0 & 0 & -Ka & -Ka \\ -1/m & 1/j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/m & -1/j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/m & -a/j & -1/M & a/j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/m & a/j & -1/M & -a/j & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -m \cdot g \\ 0 \\ -M \cdot g \\ 0 \\ V_0 \\ V_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

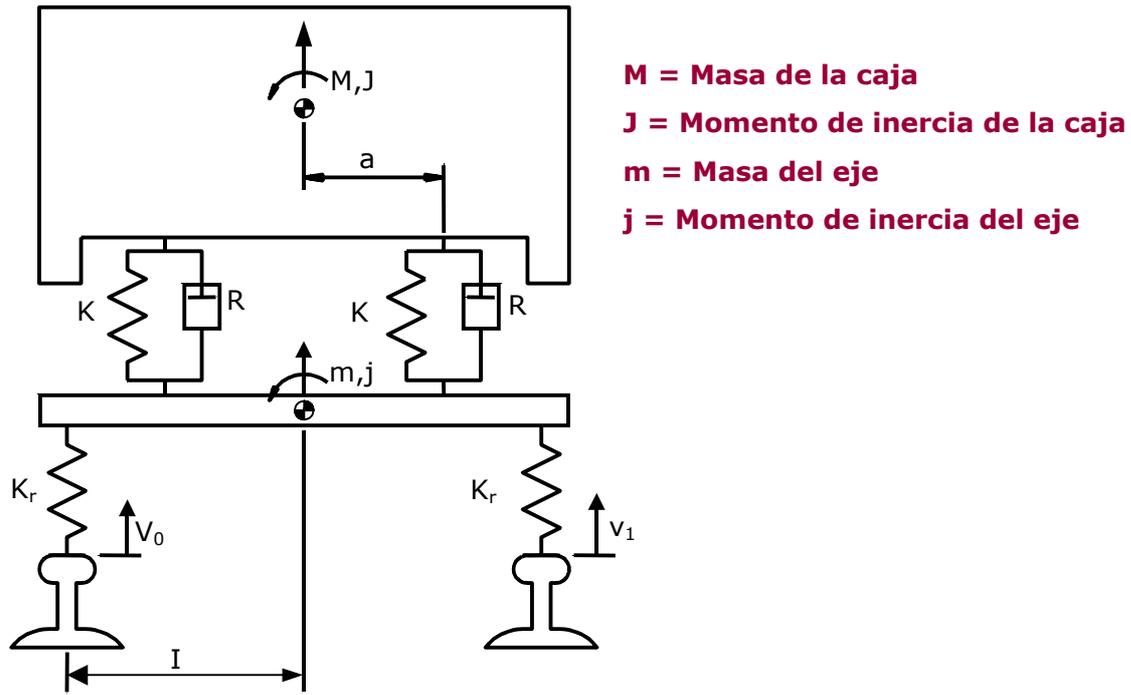


Figura 3.25.a

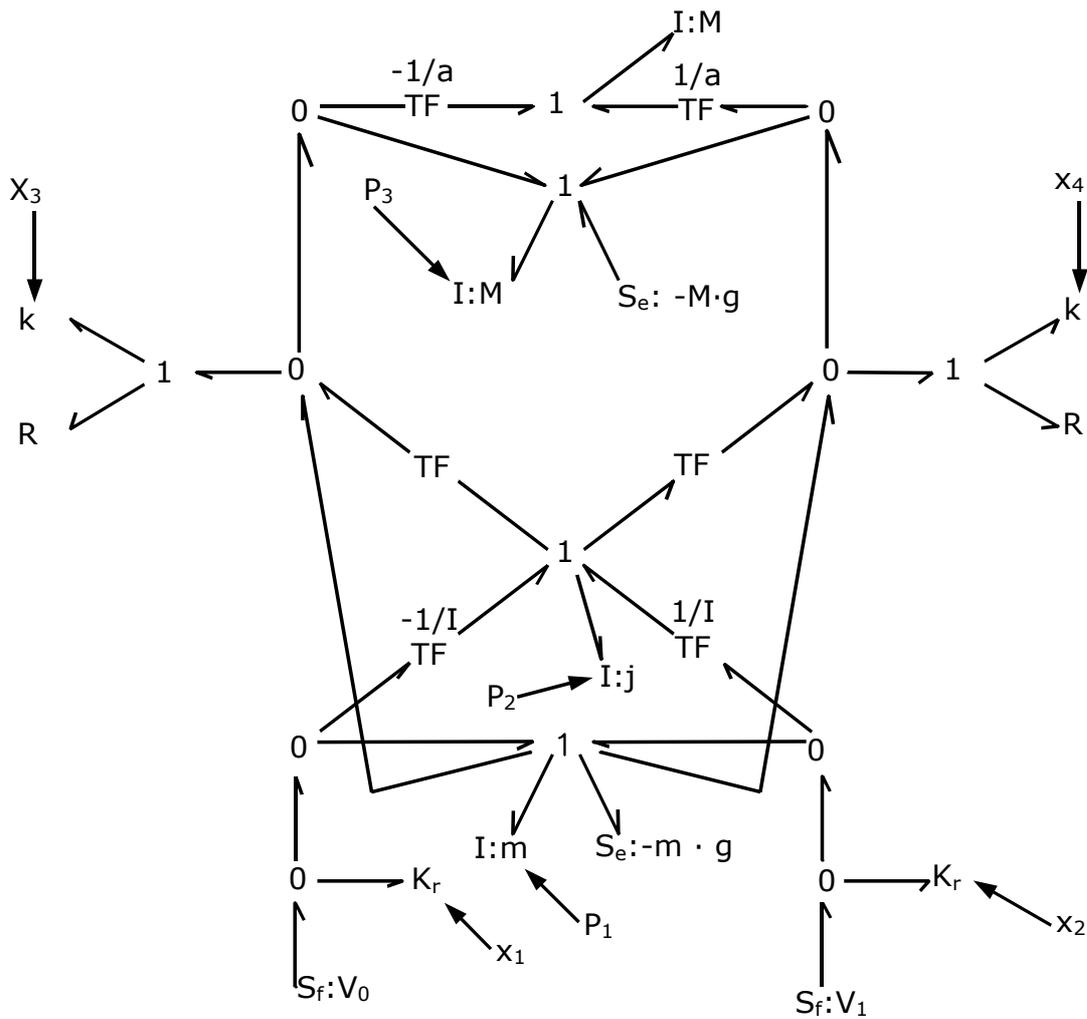


Figura 3.25.b Supongamos que el modelo en estudio se aplica al análisis de un coche de ferrocarril

y que se tienen los siguientes valores:

$$M = 10600 \text{ kg}$$

$$J = 19700 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$m = 1081 \text{ kg}$$

$$j = 1050 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$K_r = 46 \cdot 10^6 \text{ N/m}$$

$$K = 183000 \text{ N/m}$$

$$R = 12600 \text{ N} \cdot \text{s/m}$$

$$l = 0.869 \text{ m}$$

$$a = 0.8 \text{ m}$$

Como excitación se va a suponer que la rueda izquierda circula por encima de un rail que presenta una irregularidad de forma senoidal, mientras que el carril de la derecha está completamente liso.

Al ser la excitación una fuente de flujo se hace lo siguiente:

$$v_0 = 0.1 \cdot \text{sen}(6.28 \cdot t)$$

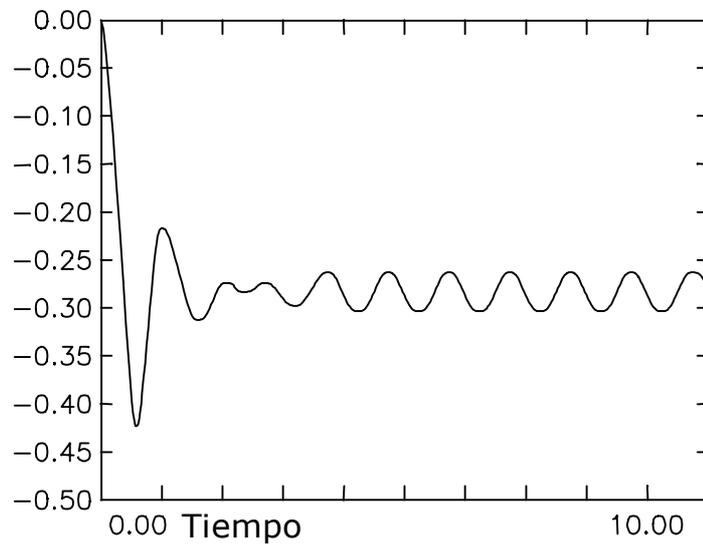


Figura 3.26

Donde t es el tiempo, y correspondiendo esta excitación a una irregularidad de vía del tipo senoidal, con una amplitud máxima de 16 mm, que es recorrida por el coche de ferrocarril a una velocidad tal que supone una frecuencia de 1 Hz.

En la figura 3.26, se representa el desplazamiento vertical del centro de gravedad de la caja. Se observa cómo inicialmente es predominante el movimiento de oscilación debido a la caída de las

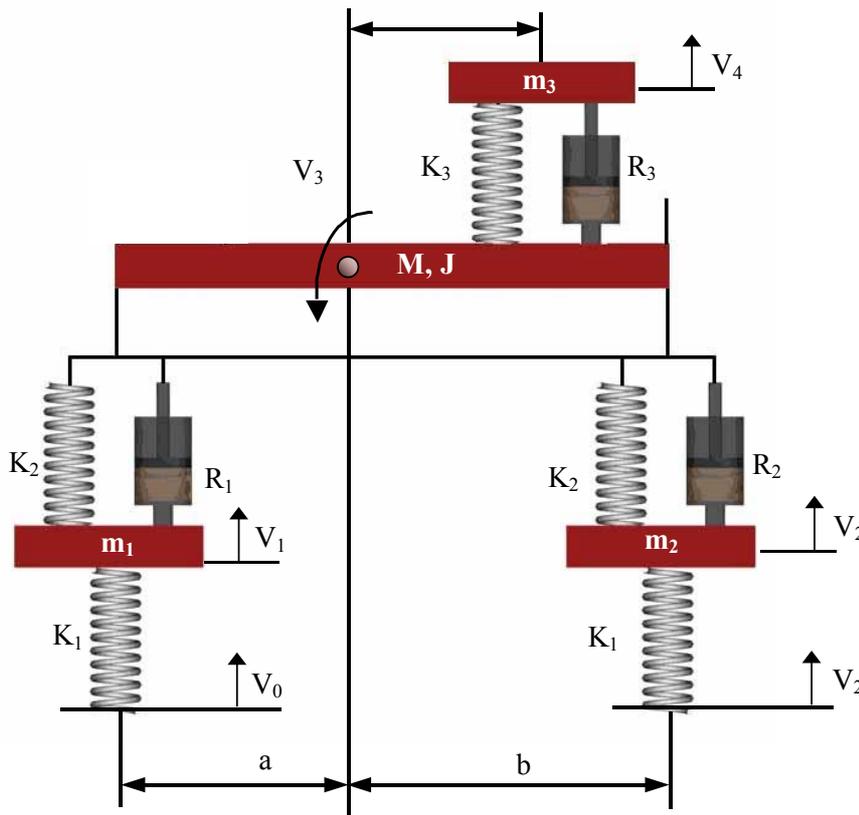
masas, hasta que, después de los 3.5 segundos el desplazamiento ya es el de respuesta a la excitación senoidal de la rueda izquierda.

3.8. Modelo de cinco grados de libertad

En la figura 3.27, se representa un modelo de 5 grados de libertad que puede utilizarse para analizar el comportamiento vertical de los vehículos. La masa m_3 con el resorte K_3 y el amortiguador R_3 , simulan lo que podría ser un asiento dotado de suspensión.

Para analizar el modelo se han supuesto los siguientes valores:

- m_1 = masa del eje delantero 50 kg
- m_2 = masa del eje trasero 50 kg
- m_3 = masa del asiento más el pasajero 80 kg
- M = masa del vehículo 800 kg
- J = Momento de inercia del vehículo $4000 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
- K_1 = Rigidez de cada rueda 100000 N/m
- K_2 = Rigidez de la suspensión 16000 N/m
- R_2 = Coeficiente de amortiguación 700 N s/m
- K_3 = Rigidez de la suspensión del asiento 3200 N/m
- R_3 = Coeficiente de amortiguación del asiento 125 N s/m
- a = Distancia del eje delantero al centro de gravedad del vehículo 1 m
- b = Distancia del eje trasero al centro de gravedad del vehículo 1 m
- c = Distancia del asiento al centro de gravedad 0.8 m



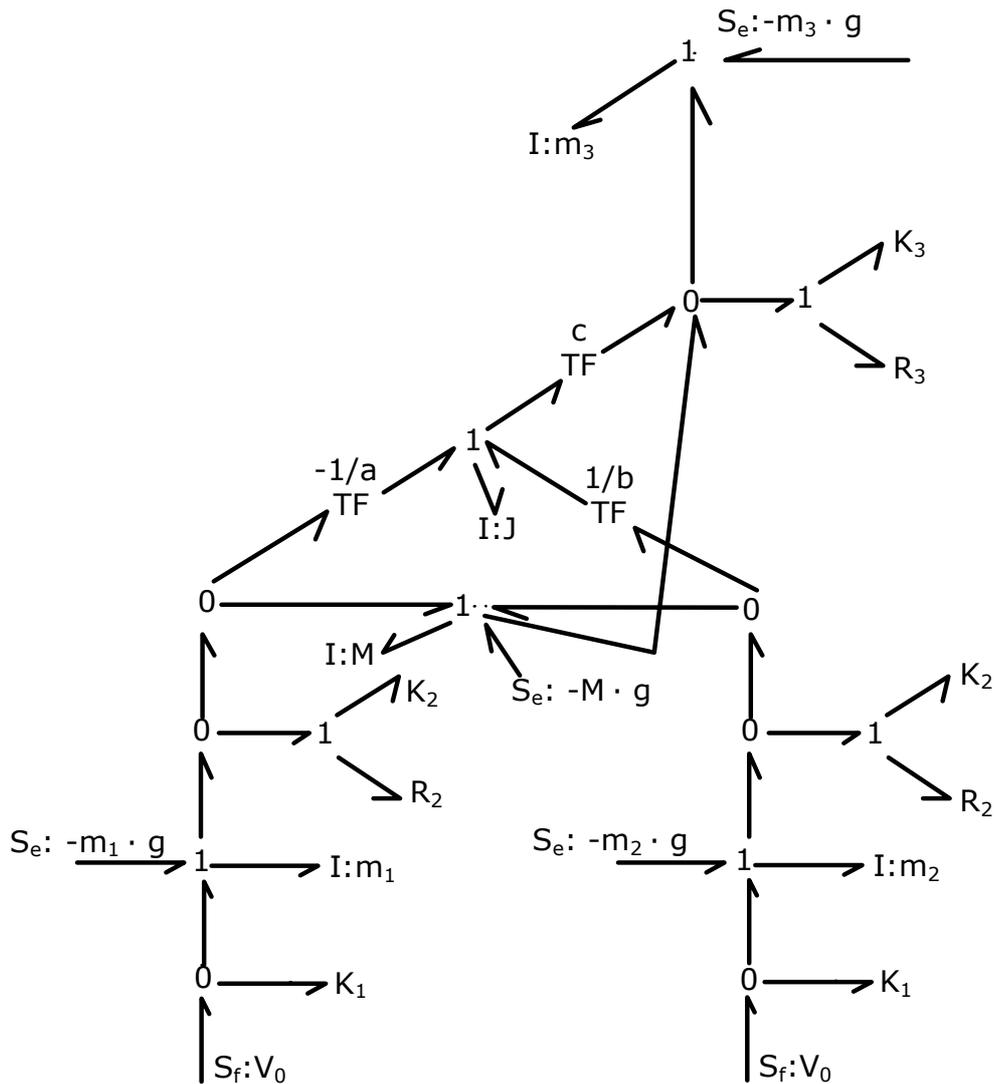


Figura 3.27

Como excitación del modelo se considera que, además del peso propio, actúa un flujo conocido sobre el eje delantero.

$$v_0 = 0.1 \cdot \text{sen}(6.28 \cdot t)$$

En la figura 3.28, se representa la respuesta del sistema mediante el desplazamiento en el tiempo de las masas m_1 , M y m_3 .

Para analizar más concretamente la respuesta senoidal del primer eje, se han representado los desplazamientos solamente en el período de tiempo comprendido entre los 5 y los 10 segundos.

De esta forma, la respuesta transitoria, debida principalmente a la caída de las masas, no queda reflejada.

Como se observa en la figura 3.28, la masa m_3 es la que más se desplaza y de una forma prácticamente senoidal. En el caso de las otras dos masas sus desplazamientos son mucho más reducidos.

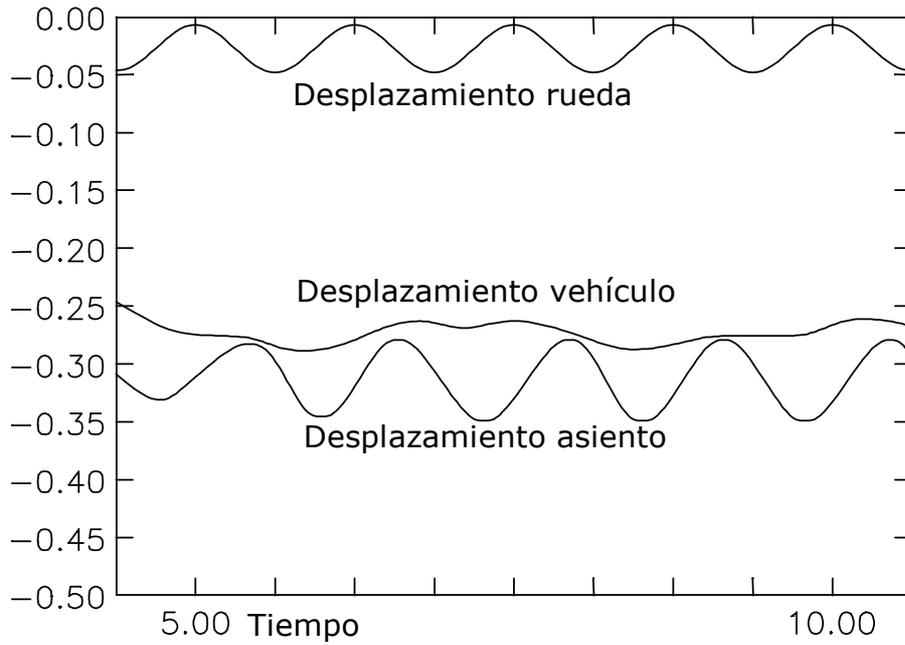


Figura 3.28

3.9. Engranajes planetarios

En la figura 3.29 se muestra un ejemplo de engranaje planetario. r_1 , r_2 y r_3 son los radios primitivos de cada una de las ruedas y, para simplificar el planteamiento, no se tendrán en cuenta ni las inercias de las partes giratorias ni los rozamientos. Se hará solamente el estudio cinemático del engranaje planetario.

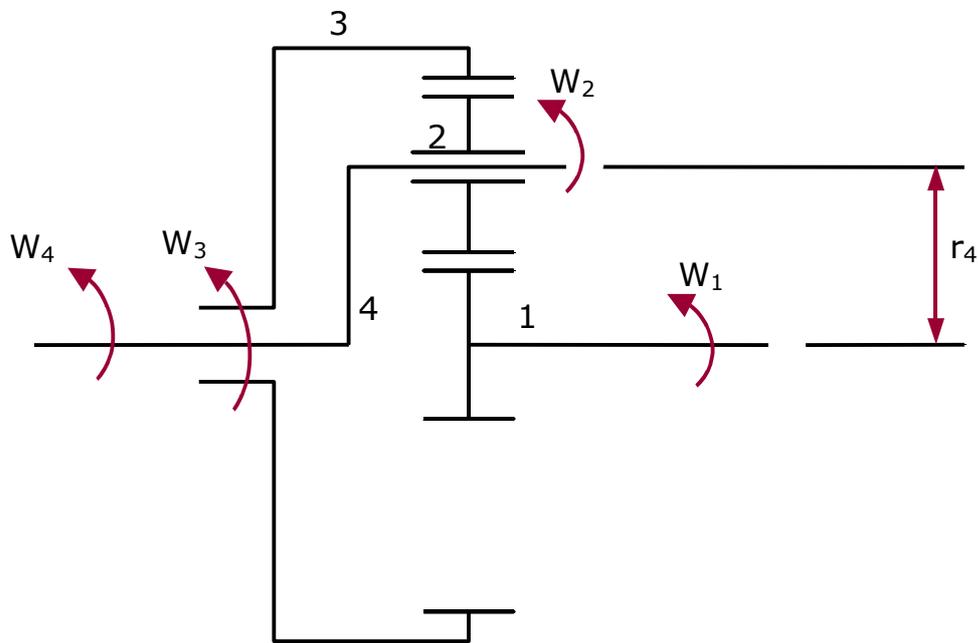


Figura 3.29

Para ayudar al análisis del sistema, en la figura 3.30 se presenta la vista del mecanismo desde el lado derecho.

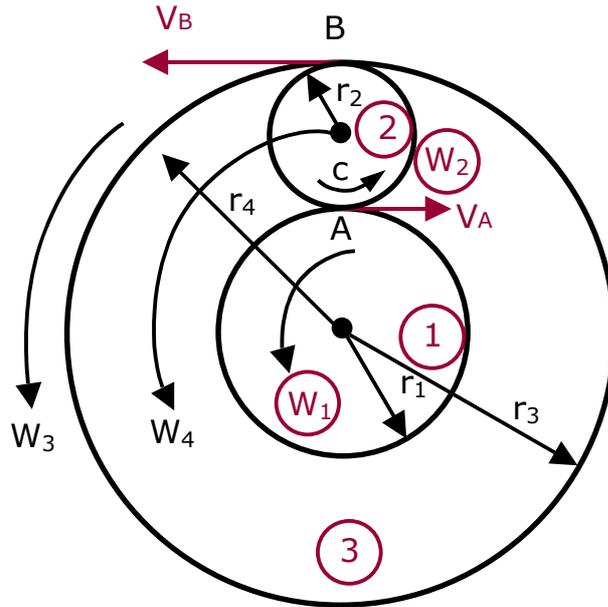


Figura 3.30

Denominando O al centro de la rueda 2, la velocidad de este punto viene definida por $w_4 \cdot r_4$ y, por otra parte, la velocidad del punto A, engrane entre las ruedas 1 y 2, tendrá como velocidad la del punto O más la debida al giro propio de la rueda 2.

$$V_A = -w_4 \cdot r_4 + w_2 \cdot r_2$$

Considerando ahora el punto A, como perteneciente a la rueda 1, se tiene:

$$V_A = w_1 \cdot r_1$$

Igualando ambas expresiones, queda definitivamente:

$$w_1 \cdot r_1 = -w_4 \cdot r_4 + w_2 \cdot r_2$$

En la figura 3.31 se representa el diagrama de grafos de esta expresión, en el que como criterio de signos se consideran positivos los giros contrarios al de las agujas del reloj.

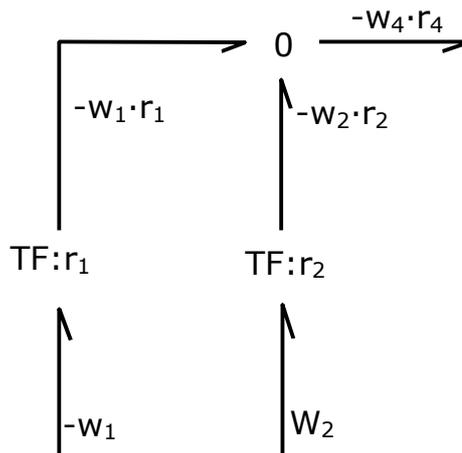


Figura 3.31

Para evitar el hecho de que aparezca la velocidad angular w_1 con signo menos, puede plantearse también el siguiente Bond-Graph.

Si se evalúa la velocidad V_B del punto B, engrane entre la rueda 2 y 3, para el caso de considerarlo perteneciente a la rueda 2 su velocidad viene dada por:

$$V_B = w_4 \cdot r_4 + w_2 \cdot r_2$$

Y cuando se considera a B perteneciente a la rueda 3.

$$V_B = w_3 \cdot r_3$$

Igualando ambas expresiones tenemos:

$$w_3 \cdot r_3 = w_4 \cdot r_4 + w_2 \cdot r_2$$

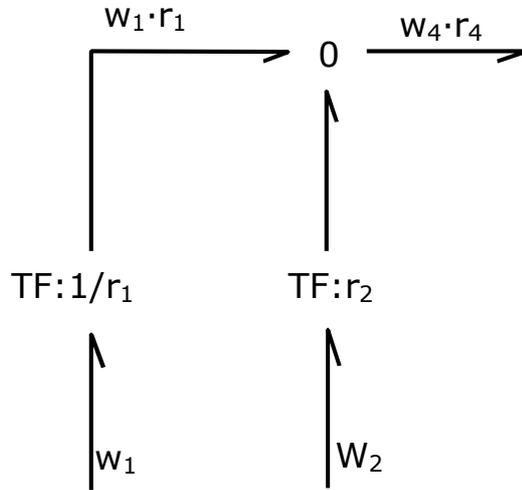


Figura 3.32

Cuya representación en el diagrama de grafos se muestra en la figura 3.33.

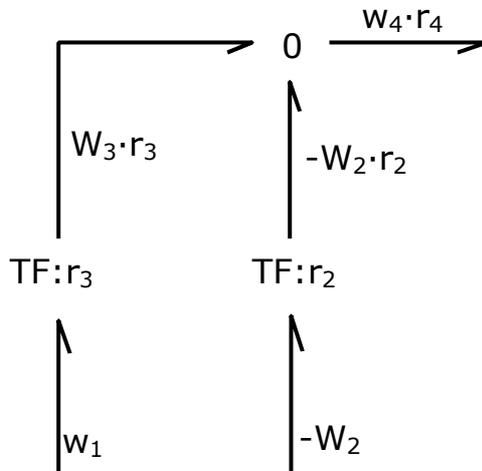


Figura 3.33

La unión de este diagrama de grafos con el desarrollado anteriormente, da el Bond-Graph completo del engranaje planetario que se encuentra en la figura 3.34.

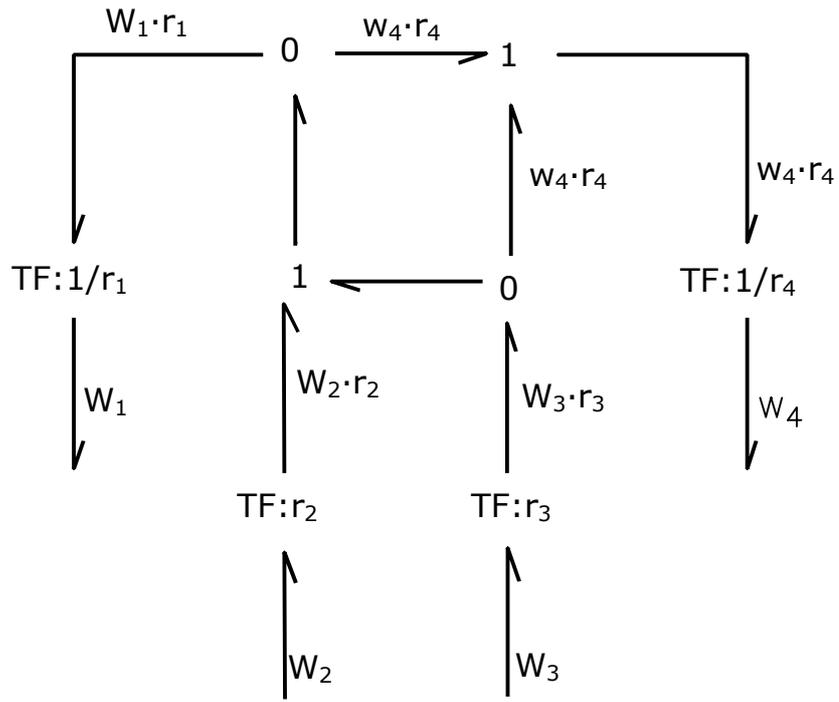


Figura 3.34