Capítulo

T9

Dinámica de los sistemas libres de un grado de libertad

9.1 INTRODUCCIÓN

A lo largo de este capítulo, se va a plantear la respuesta de los sistemas dinámicos resolviendo analíticamente las ecuaciones que aparecen. Así mismo, se prestará especial atención a los valores de amortiguamiento de los sistemas y cómo estos influyen en las diferentes respuestas que se producen. En este capítulo se abordarán solamente los sistemas libres, es decir sin excitación externa y en consecuencia, el movimiento se produce por un desplazamiento inicial del punto de equilibrio.

En la figura se muestra un sistema de un grado de libertad que consiste en una masa que se desplaza horizontalmente sin rozamiento y que está sujeta a la pared por medio de un resorte de rigidez K, y un amortiguador de coeficiente de amortiguación R. Si el sistema se pone en movimiento debido a un desplazamiento inicial y/o una velocidad inicial, la masa vibrará libremente.

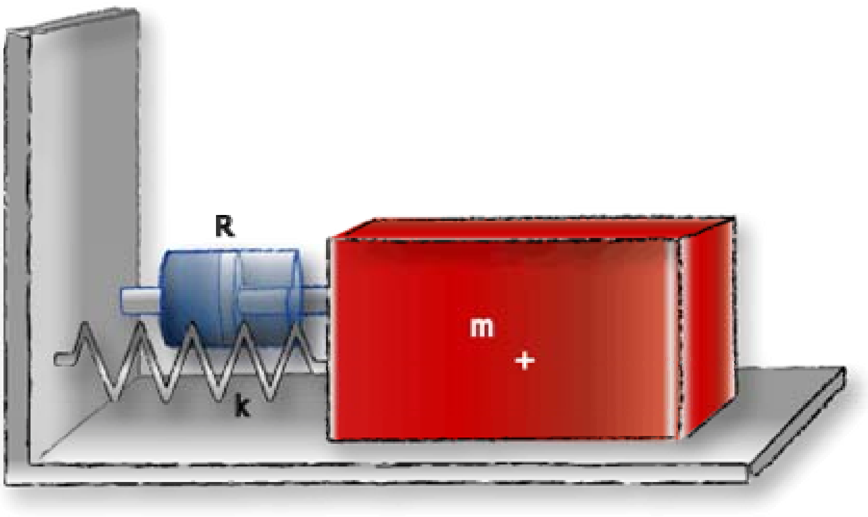

Figura 1. Masa que se desplaza horizontalmente.

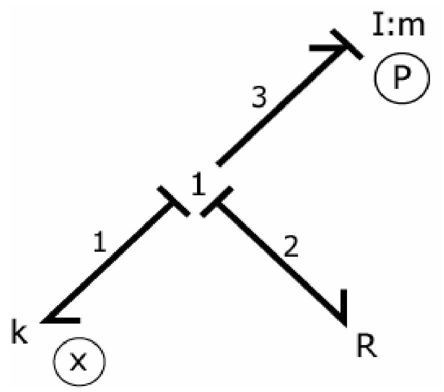

Figura 2. Bond-Graph del modelo.

	Flujo	Esfuerzo
1	p/m	Kx
2	p/m	$R\dfrac{p}{m}$
3	p/m	$-Kx-R\dfrac{P}{m}$

En la figura 2 se muestra el Bond-Graph del modelo; como siempre, las ecuaciones diferenciales del modelo son las derivadas respecto al tiempo de las variables utilizadas.

En nuestro ejemplo las variables utilizadas son p, x y sus derivadas respecto al tiempo:

$\dot{P}$ = esfuerzo del grafo 3.

$\dot{x}$ = flujo del grafo 1.

$$\dot{P} = -Kx - R\frac{P}{m}$$

$$\dot{x} = \frac{P}{m}$$

Al tratarse de un sistema oscilante, la respuesta será del tipo:

$$p = P\,e^{st}$$

$$x = X\,e^{st}$$

En donde t es el tiempo, P, X son las amplitudes, mientras que s es un parámetro desconocido que obligatoriamente debe ser un número complejo para que la función exponencial represente a un movimiento oscilante.

Derivando las expresiones se tiene:

$$\dot{p} = s\,P\,e^{st}$$

$$\dot{x} = s\,X\,e^{st}$$

Y sustituyendo en las ecuaciones diferenciales originales:

$$s\,P\,e^{st} = -K\,X\,e^{st} - \frac{R\,P\,e^{st}}{m}$$

$$s\,X\,e^{st} = \frac{P\,e^{st}}{m}$$

O bien:

$$\left(P\,s + K\,X + \frac{R\,P}{m}\right)e^{st} = 0$$

$$\left(X\,s - \frac{P}{m}\right)e^{st} = 0$$

Aunque el tiempo t sea cero, la exponencial no puede ser nula y en consecuencia se deberá cumplir que:

$$\left(P\,s + K\,X + \frac{R\,P}{m}\right) = 0$$

$$\left(X\,s - \frac{P}{m}\right) = 0$$

Y en forma matricial:

$$\begin{vmatrix} s + \frac{R}{m} & K \\ -\frac{1}{m} & s \end{vmatrix} \begin{vmatrix} P \\ X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Una posible solución podría ser que P y X fueran cero, pero esta solución no tiene sentido ya que si las amplitudes del movimiento son nulas, no existe el movimiento. En consecuencia es necesario que se cumpla que:

$$det \begin{vmatrix} s+\frac{R}{m} & K \\ -\frac{1}{m} & s \end{vmatrix} = 0$$

Resolviendo el determinante.

$$s^2 + s\frac{R}{m} + \frac{K}{m} = 0$$

Esta ecuación algebraica de segundo grado se denomina ecuación característica del sistema y como ecuación de segundo grado tiene dos soluciones:

$$S_{1,2} = \frac{-\frac{R}{m} \pm \sqrt{\frac{R^2}{m^2} - \frac{4K}{m}}}{2}$$

Como recordará el lector, los valores de s deben ser números complejos para que la respuesta sea un movimiento oscilante.

Como se deduce de la expresión anterior, para que los valores de s sean números complejos es necesario que la expresión contenida por la raíz cuadrada sea negativa.

Es decir:

$$\frac{R^{2}}{m^2} - \frac{4K}{m} < 0$$

Que se cumple cuando:

$$\frac{R^{2}}{m^2} < \frac{4K}{m}$$

De donde despejando el valor de R, se obtiene:

$$R < \sqrt{4km}$$

Cuando se cumple esta condición los valores de s se pueden expresar como:

$$s_2 = \alpha + i\ \beta$$

$$s_2 = \alpha - i\ \beta$$

En donde la parte real α es:

$$\alpha = \frac{-R}{2m}$$

Y la parte imaginaria β :

$$\beta = \frac{\sqrt{\frac{4k}{m} - \frac{R^2}{m^2}}}{2}$$

En donde, como observará el lector se han invertido los términos que se encuentran dentro de la raíz, debido a que ahora β se encuentra multiplicado por el término imaginario i.

Al existir dos respuestas de s, habrá dos soluciones de las funciones planteadas, es decir, se tendrá:

$$p_1 = P_1\, e^{s_1 t}$$

$$p_2 = P_2\, e^{s_2 t}$$

$$x_1 = X_1\, e^{s_1 t}$$

$$x_2 = X_2\, e^{s_2 t}$$

Tal que la respuesta final, para sistemas lineales en donde se cumple el principio de superposición, es:

$$x = x_1 + x_2 = X_1\, e^{s_1 t} + X_2\, e^{s_2 t}$$

$$p = p_1 + p_2 = P_1\, e^{s_1 t} + P_2\, e^{s_2 t}$$

Teniendo en cuenta que la respuesta es suma de funciones exponenciales complejas y utilizando las fórmulas de Euler, se puede llegar a una expresión final de la respuesta del tipo:

$$p = P\ e^{\alpha t}\, sen\left(\beta t + \phi_P\right)$$

$$x = X\ e^{\alpha t}\, sen\left(\beta t + \phi_X\right)$$

En donde P, X son constantes a determinar y ϕ_P, ϕ_X son ángulos de desfase que también es necesario determinar.

Como se observa, la expresión de las respuestas están formadas por el producto de una función exponencial que tiene como exponente la parte real de s, multiplicada por una función senoidal de frecuencia la parte imaginaria.

En la figura 3, se muestra una función exponencial de exponente negativo en función del tiempo.

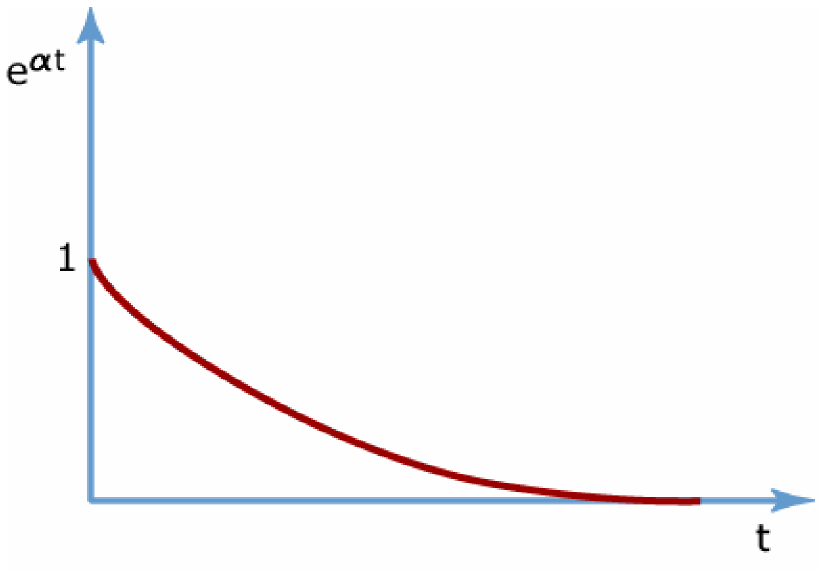

Figura 3. Función exponencial con exponente negativo.

Como se observa en la figura, una función exponencial con exponente negativo tiende asintóticamente a cero conforme aumenta el tiempo.

Efectivamente, en este caso:

$$\alpha = \frac{-R}{2m}$$

Al tener valor negativo el exponente:

$$e^{-\frac{Rt}{2m}} = \frac{1}{e^{\frac{Rt}{2m}}}$$

Y por lo tanto tiende a cero conforme aumenta el tiempo.

En la figura 4, se muestra una función senoidal desfasada.

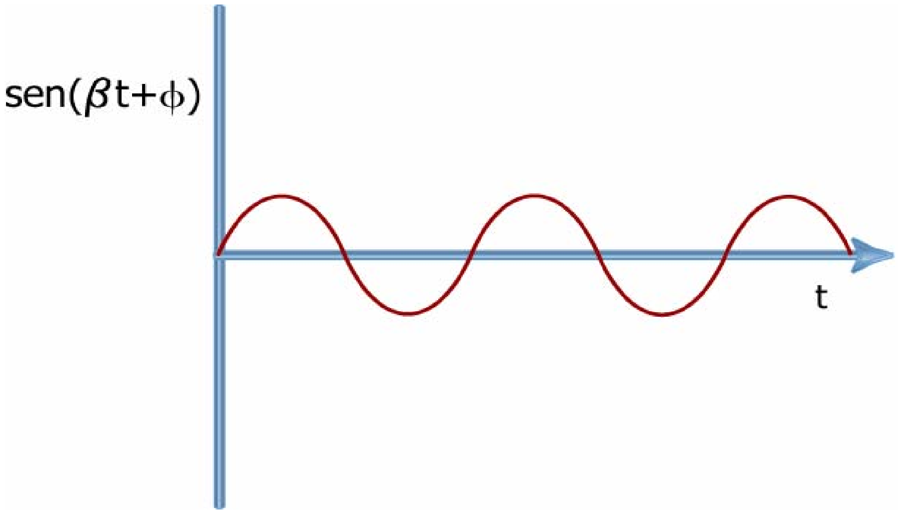

Figura 4. Función senoidal desfasada.

Como la respuesta es producto de una función exponencial decreciente, por una función senoidal, la respuesta en definitiva es una función oscilante de amplitud decreciente que llega a anularse.

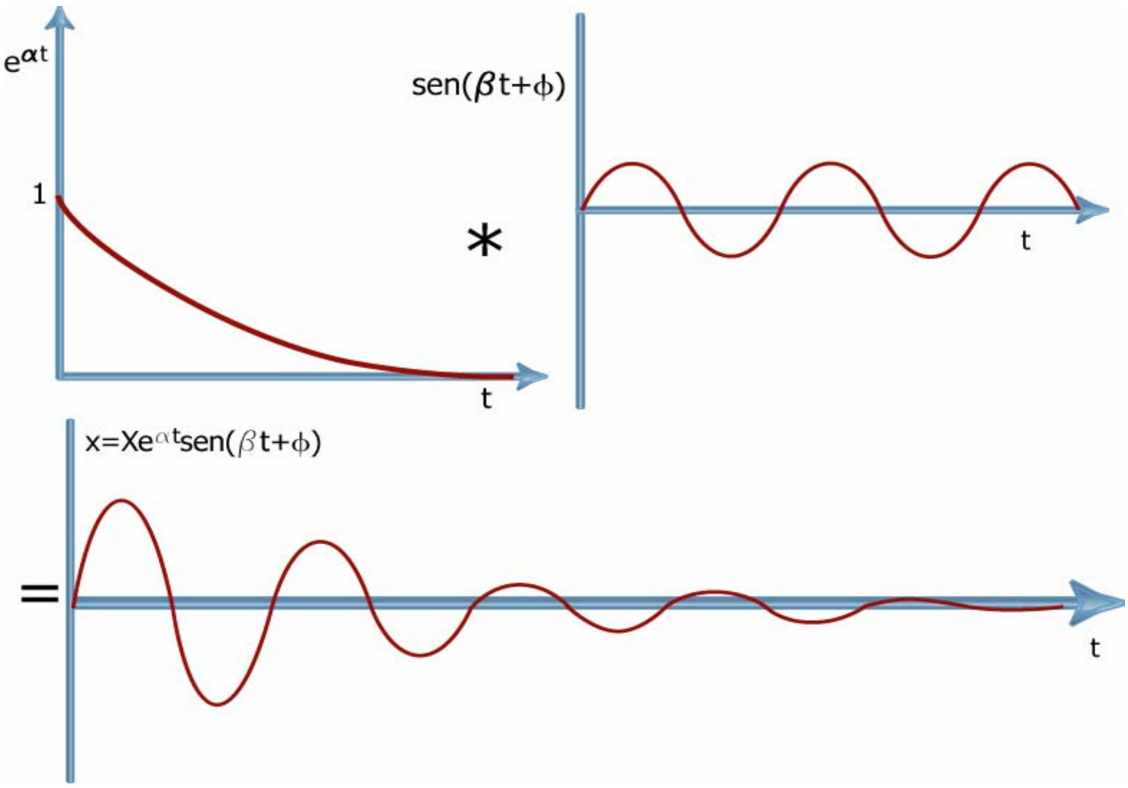

Figura 5. El producto de una función exponencial decreciente por una función senoidal es una función oscilante decreciente

9.2. SISTEMAS AMORTIGUADOS CRÍTICAMENTE Y SOBREAMORTIGUADOS

Un caso especial de los sistemas se produce cuando el amortiguamiento es tal que no se cumple la condición expuesta en el apartado anterior.

Para que la respuesta de un sistema fuera oscilante es necesario que el amortiguamiento R cumpla la condición:

$$R < \sqrt{4km}$$

Esta era la condición para que los valores de s fueran complejos y en consecuencia la respuesta oscilante.

Veamos qué sucede cuando no se cumple esta condición. Por ejemplo, supongamos que:

$$R = \sqrt{4km}$$

En este caso los valores de s, son:

$$s_{1,2} = \frac{-\frac{\sqrt{4km}}{m} \pm \sqrt{\frac{4km}{m^2} - \frac{4k}{m}}}{2} =$$

$$= \frac{-\frac{\sqrt{4km}}{m} \pm 0}{2} =$$

$$= -\sqrt{\frac{k}{m}} =$$

En consecuencia cuando $R = \sqrt{4km}$ los dos valores de s son iguales

$$s_1 = s_2 = -\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Y además son números reales.

$$s_1 = -\sqrt{\frac{k}{m}} + io$$

$$s_2 = -\sqrt{\frac{k}{m}} + io$$

En ambas respuestas la parte imaginaria es nula.

La respuesta del sistema será como siempre:

$$x = x_1 + x_2 = X_1 e^{st} + X_2 e^{st}$$

$$p = p_1 + p_2 = P_1 e^{st} + P_2 e^{st}$$

Recuerde el lector que este planteamiento de que x es suma de x_1 y x_2, sólo puede hacerse cuando el sistema es lineal y por lo tanto se cumple el principio de superposición.

Los sistemas que tienen un valor de amortiguamiento tal que:

$$R = \sqrt{4km}$$

y que por lo tanto tienen valor nulo en la raíz, se dice que presentan amortiguamiento crítico. Al tener la parte imaginaria de s nula, la respuesta es la suma de dos funciones exponenciales con exponente real.

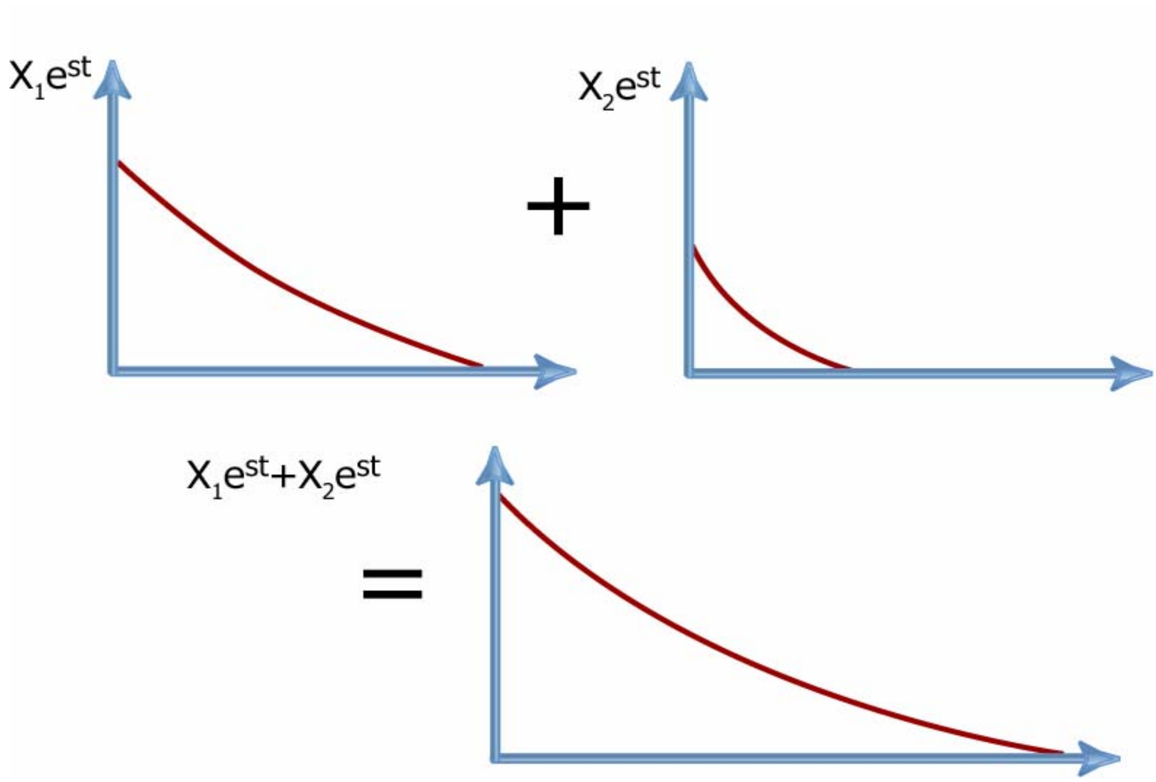

Figura 6. Respuesta con amortiguamiento crítico.

Efectivamente, como se observa en la figura cuando el sistema tiene amortiguamiento crítico, la repuesta no es un movimiento oscilante. Este hecho es por otra parte obvio, ya que un movimiento oscilante sólo puede ser representado por una función exponencial cuando el exponente es un número complejo, y como se ha demostrado con amortiguamiento crítico el exponente de la función es un número real.

Sistemas sobreamortiguados

Otra posibilidad que puede producirse es $R > \sqrt{4km}$ que , en este caso se tiene:

$$s_{1,2} = \frac{-\frac{R}{m} \pm \sqrt{cantidad > 0}}{2}$$

Y, en consecuencia s_1 y s_2 son números reales pero distintos y ambos negativos.

Cuando el amortiguamiento R es mayor que el crítico, se dice que el sistema está sobreamortiguado.

La respuesta del sistema puede escribirse como:

$$p = P_1 e^{s_1 t} + P_2 e^{s_2 t}$$

$$x = X_1 e^{s_1 t} + X_2 e^{s_2 t}$$

Donde X_1, X_2, P_1, P_2, son constantes que dependen de las condiciones iniciales. Las soluciones de p, x son suma de dos funciones exponenciales cuyos exponentes tienen valor real y negativo. Por este motivo conforme transcurre el tiempo t y mayor se hace este, las funciones $e^{s_1 t}$ y $e^{s_2 t}$ tienden a cero.

Al igual que en el caso del amortiguamiento crítico, cuando el sistema se desplaza inicialmente una distancia x de su punto de equilibrio y luego se suelta, vuelve al punto de equilibrio con un movimiento no oscilante, tal y como se indica en la figura 7.

Cuanto mayor es el amortiguamiento, mayor es el tiempo que tarda el sistema en volver al punto de equilibrio.

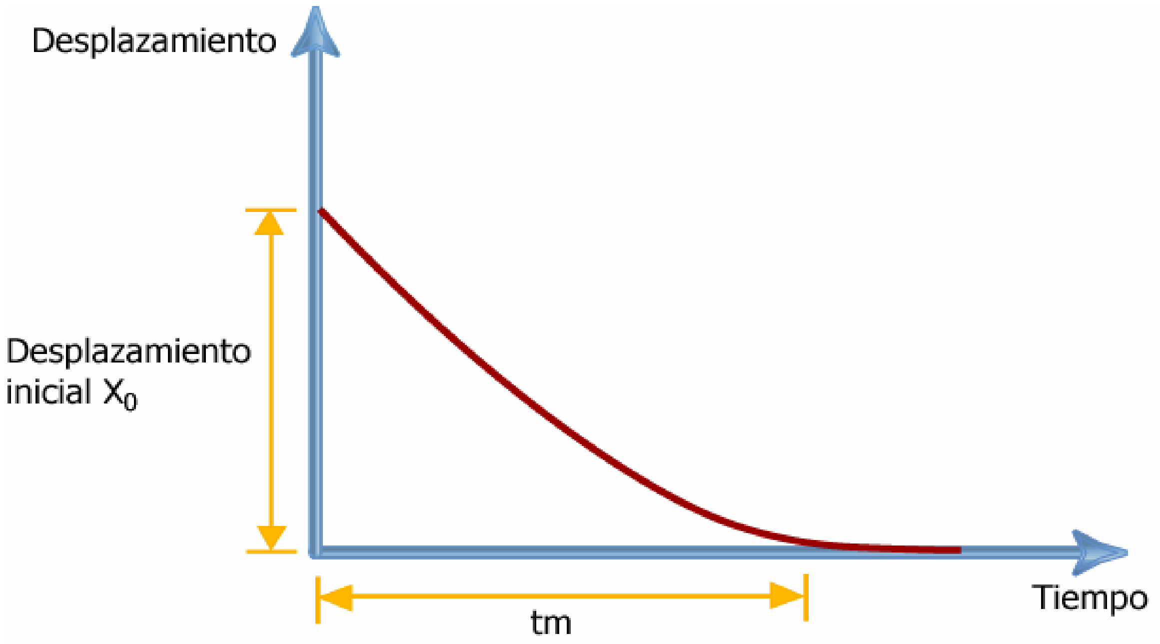

Figura 7. Respuesta de un sistema sobreamortiguado.

Para obtener el tiempo tm que tarda el sistema en volver a su punto de equilibrio, basta con plantear la ecuación de la cantidad de movimiento y tener en cuenta que cuando t = tm, la velocidad del sistema se anulará y en consecuencia p = 0

Para t = tm

$$p = 0 = P_1 e^{s_1 tm} + P_2 e^{s_2 tm}$$

De donde:

$$P_1 e^{s_1 tm} = -P_2 e^{s_2 tm}$$

$$e^{(s_1 - s_2) tm} = \frac{-P_2}{P_1}$$

De donde, se puede despejar el valor de tm.

$$t_m = \frac{1}{s_1 - s_2} \quad ln\left(\frac{-P_2}{P_2}\right)$$

Obtención de las constantes P_2, P_1, X_2, X_1

Para obtener los parámetros P_2, P_1, X_2, X_1, se parte de las ecuaciones iniciales del modelo.

$$\left(Ps + kX + \frac{RP}{m}\right)e^{st} = 0$$

$$\left(Xs - \frac{P}{m}\right)e^{st} = 0$$

Para el instante inicial t = 0 y en consecuencia:

$$e^{s\,o} = 1$$

$$\left(Ps + kX + \frac{RP}{m}\right) = 0$$

$$\left(Xs - \frac{P}{m}\right) = 0$$

Para la solución s_1 se tendrá:

$$P_1\, s_1 + kX_1 + \frac{RP_1}{m} = 0$$

$$X_1\, s_1 - \frac{P_1}{m} = 0$$

Sustituyendo s1 por su valor:

$$s_1 = \frac{-\frac{R}{m} + \sqrt{\frac{R^2}{m^2} - \frac{4k}{m}}}{2} =$$

Y después de algunas manipulaciones algebraicas, puede observarse que ambas ecuaciones son equivalentes a una simple ecuación.

$$X_1 - \frac{R + \sqrt{R^2 - 4km}}{2km} P_1 = 0$$

De donde no pueden despejarse los valores de X_1 y P_1 pero sí obtener la relación entre ellos.

Del mismo modo planteando las ecuaciones para la solución s_2, se obtiene:

$$X_2 + \frac{-R + \sqrt{R^2 - 4km}}{2km} P_2 = 0$$

Para obtener definitivamente los valores de P_2, P_1, X_2, X_1, es necesario plantear dos ecuaciones más. Estas ecuaciones se plantean por medio de las condiciones iniciales. Así, si para t = 0 se tiene que:

$x = x_0$

$p = p_0$

Se pueden plantear:

t = 0

$$p_0 = P_1\, e^{s_1\, 0} + P_2\, e^{s_2\, 0}$$

$$x_0 = X_1\, e^{s_1\, 0} + X_2\, e^{s_2\, 0}$$

O en definitiva:

$$p_0 = P_1 + P_2$$

$x_0 = X_1 + X_2$

Con las dos relaciones entre los valores de P_1, X_1 y P_2, X_2 y estas dos últimas ecuaciones, se pueden obtener definitivamente las expresiones de P_2, P_1, X_2, X_1. De esta forma ya definitivamente se ha obtenido la respuesta del sistema dinámico.

$$p = P_1 e^{s_1 t} + P_2 e^{s_2 t}$$

$$x = X_1 e^{s_1 t} + X_2 e^{s_2 t}$$

9.3. SISTEMAS NO AMORTIGUADOS

Un caso particular se produce cuando el sistema no tiene amortiguamiento, es decir, cuando R=0.

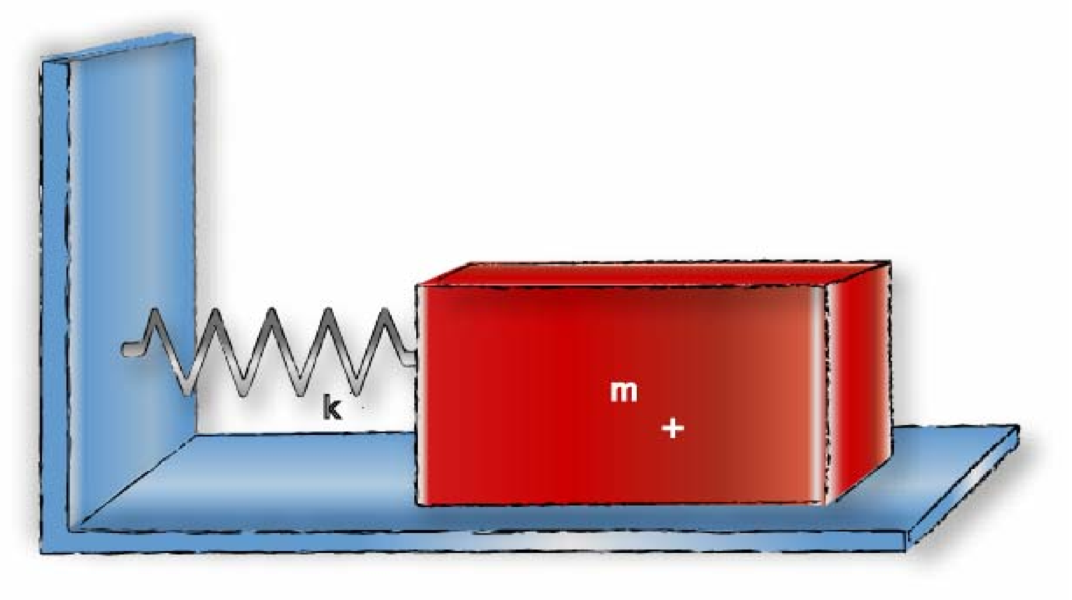

Figura 8. Sistema no amortiguado.

Anulado el valor de R en las expresiones de s_1 y s_2, se obtiene:

$$s_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{-\frac{4k}{m}}}{2} = \pm\sqrt{-\frac{k}{m}}$$

Como puede observarse se tienen dos soluciones que resultan ser imaginarias.

Denominando:

$$\beta = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Se tiene en definitiva:

$$s_1 = i\,\beta$$

$$s_2 = -i\,\beta$$

En donde i es el operador imaginario definido como $i = \sqrt{-1}$

Las soluciones del sistema serán:

$$p = p_1 + p_2 = P_1\, e^{s_1 t} + P_2\, e^{s_2 t}$$

$$x = x_1 + x_2 = X_1\, e^{s_1 t} + X_2\, e^{s_2 t}$$

En este caso s_1, s_2 son dos números complejos conjugados con la parte real nula.

Sustituyendo en la ecuación de p_1 se tiene:

$$p = P_1\, e^{(\alpha + i\beta)\, t} + P_2\, e^{(\alpha + i\beta)\, t}$$

$$= e^{\alpha t}\left(P_1\, e^{i\beta\, t} + P_2\, e^{-i\beta\, t}\right)$$

$e^{\alpha t}$ es igual a 1 por ser $\alpha = 0$, y la función exponencial compleja $e^{i\beta t}$ y $e^{-i\beta t}$, puede escribirse en términos de funciones trigonométricas, usando las fórmulas de Euler.

$$e^{i\beta\, t} = \cos\beta t + i \ \operatorname{sen} \beta t$$

$$e^{-i\beta\, t} = \cos\beta t - i \ \operatorname{sen} \beta t$$

Después de algunas manipulaciones algebraicas, la solución definitiva de p, puede expresarse como:

$$p = P \operatorname{sen} (\beta t + \phi)$$

En donde P y ϕ son las constantes a hallar en función de las condiciones iniciales.

Cuando la parte real es nula, p es una función armónica de frecuencia β desfasada un ángulo Φ.

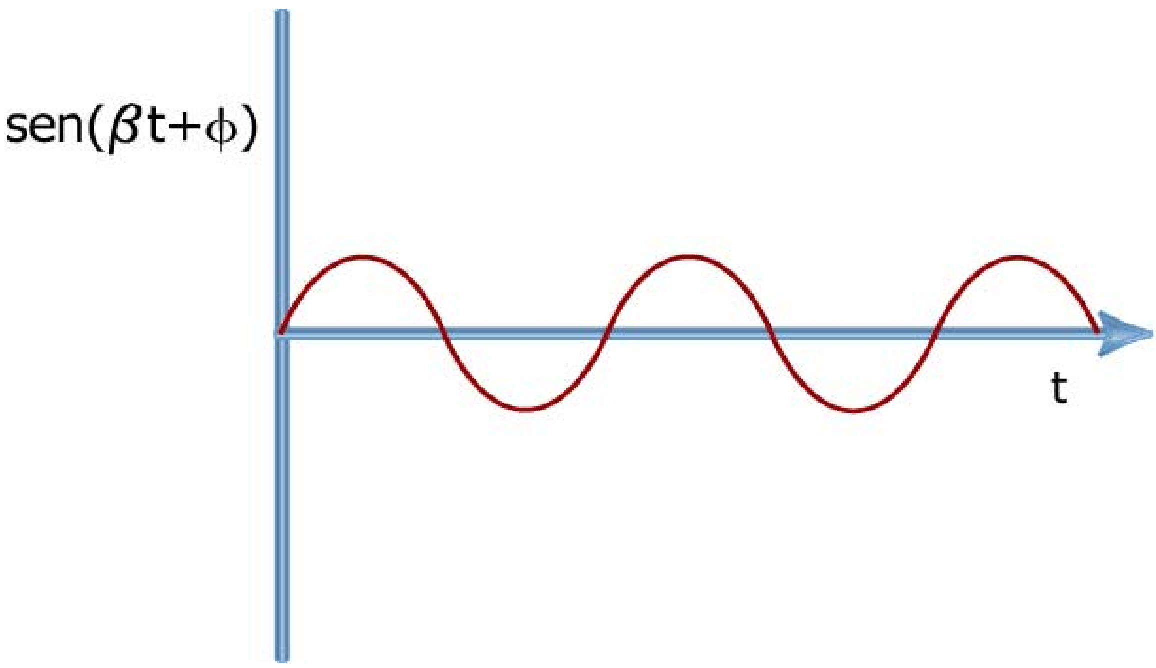

Figura 9. Respuesta de un sistema sin amortiguamiento.

9.4. RAZÓN DE AMORTIGUAMIENTO

En la práctica se utiliza mucho la razón del amortiguamiento utilizado en el sistema, respecto a su amortiguamiento crítico.

Sea R el amortiguamiento del sistema y recordando que el amortiguamiento crítico tenía la expresión:

$$R_{Crítico} = \sqrt{4km}$$

Se denomina ξ a la razón de amortiguamiento, tal que:

$$\xi = \frac{R}{\sqrt{4km}}$$

Si $\xi = 1$ el amortiguamiento es crítico.

Si $\xi < 1$ el sistema es subamortiguado.

Si $\xi > 1$ el sistema es sobreamortiguado.

Por otro lado si se denomina:

$$\omega_m = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

que es la frecuencia de oscilación de la masa cuando el sistema no tenía amortiguamiento, los valores de s, pueden expresarse como:

$$s_1 = -\xi\omega_m + i\omega_m\sqrt{1-\xi^2}$$

$$s_2 = -\xi\omega_m - i\omega_m\sqrt{1-\xi^2}$$

La parte imaginaria es la frecuencia natural del sistema amortiguado. Denominando a esta frecuencia natural ω_d, se tiene:

$$\omega_d = \omega_m\sqrt{1-\xi^2}$$

Y operando esta expresión puede ponerse como:

$$\left(\frac{\omega_d}{\omega_m}\right)^2 + \xi^2 = 1$$

Esta relación entre la frecuencia natural del sistema sin amortiguamiento ω_m y con amortiguamiento ω_d, en función de la razón de amortiguamiento ξ, puede representarse en un gráfico, tal y como se muestra en la figura 10.

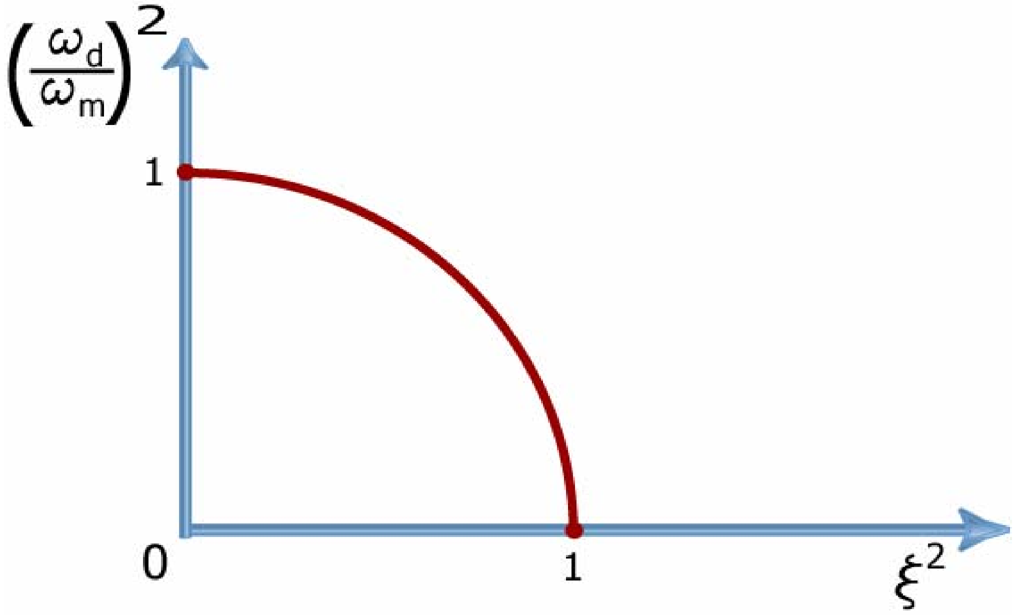

Figura 10. Gráfico de frecuencias naturales en función de x.

En esta figura, se observa como para pequeños valores de amortiguamiento, las frecuencias naturales con y sin amortiguamiento se aproximan mucho.

Cuando ξ se aproxima a 1 y por tanto, el amortiguamiento se acerca al valor del amortiguamiento crítico, ω_d disminuye rápidamente hasta que cuando ξ se iguala a 1, ω_d vale 0, es decir; el movimiento ya no es oscilatorio.

9.5. DECREMENTO LOGARÍTMICO

Como se ha visto en los apartados anteriores, la solución en los sistemas subamortiguados puede escribirse como:

$$x = X e^{-\xi\omega t} sen(\omega_d t + \phi)$$

En donde la amplitud X y el ángulo de fase φ son constantes que se determinan en función de las condiciones iniciales. La solución x es el producto de una función exponencial que decrece con el tiempo y una función armónica. La respuesta en este caso es oscilatoria, tal y como se indica en la figura 11.

La velocidad $\dot{x}$ se obtiene diferenciando con respecto al tiempo la ecuación de x.

$$\dot{x} = X e^{-\xi\omega t}\left[-\xi\,\omega\, sen\left(\omega_d t + \phi\right) + \omega_d \cos\left(\omega_d t + \phi\right)\right]$$

Los picos de desplazamientos mostrados en la figura, pueden ser obtenidos haciendo $\dot{x}$ igual a cero.

$$X e^{-\xi\omega t_i}\left[-\xi\,\omega\, sen\left(\omega_d t_i + \phi\right) + \omega_d \cos\left(\omega_d t_i + \phi\right)\right] = 0$$

Siendo t_i el tiempo en el que se produce el pico i.

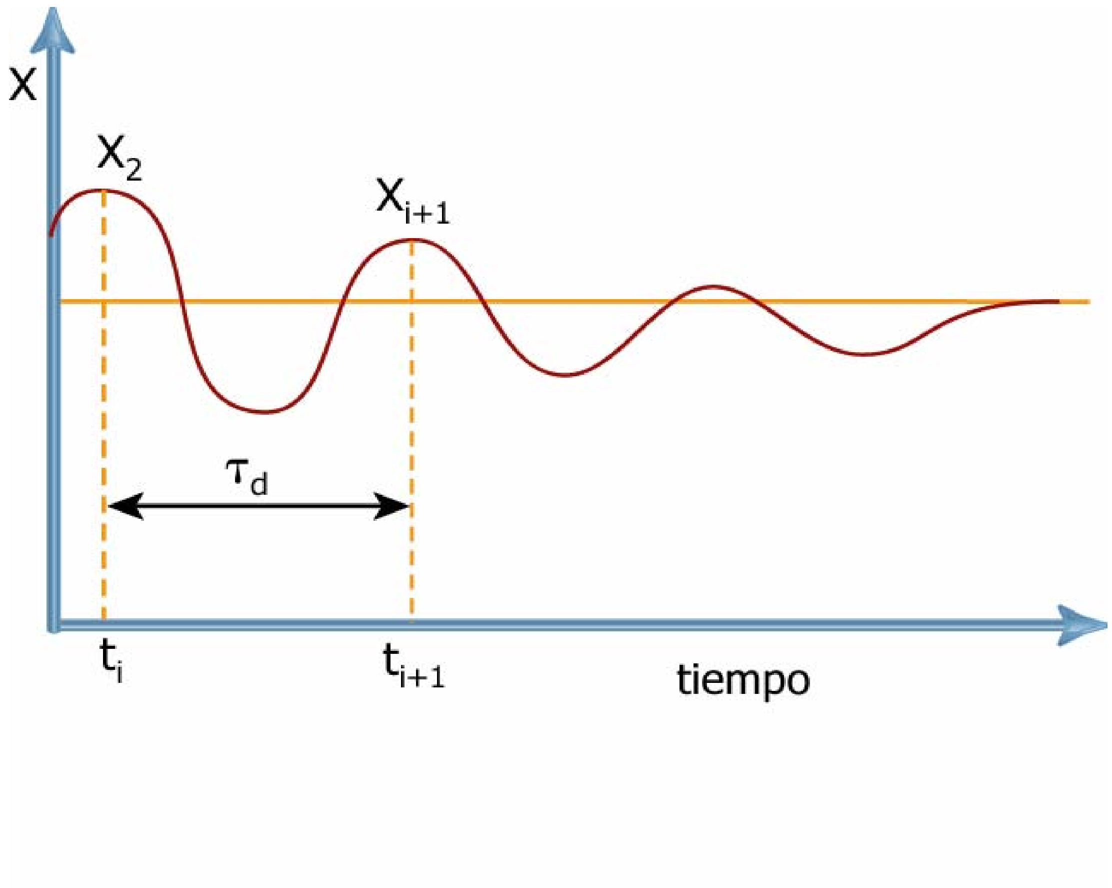

Figura 11. Picos de desplazamientos en oscilaciones sucesivas.

De la ecuación anterior se deduce que:

$$\left[-\xi\, \omega\, sen(\omega_d\, t_i + \phi) + \omega_d \cos(\omega_d\, t_i + \phi)\right] = 0$$

Y operando:

$$\tan(\omega_d\, t_i + \phi) = \frac{\omega_d}{\xi\omega} = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$$

Usando la identidad trigonométrica:

$$sen\,\theta = \frac{\tan\theta}{\sqrt{1-\tan^2\theta}}$$

La ecuación puede escribirse:

$$sen(\omega_d\, t_i + \phi) = \sqrt{1-\xi^2}$$

Sustituyendo ahora esta ecuación en la original de x, se puede calcular el desplazamiento de pico i.

$$x_i = \sqrt{1-\xi^2}\; X e^{-\xi\omega\, t_i}$$

Esta ecuación puede ser utilizada para desarrollar un método que permita determinar experimentalmente, el coeficiente de amortiguación de un sistema subamortiguado de un grado de libertad.

La ecuación anterior define la amplitud para el ciclo i. En el ciclo siguiente (i+1) que ocurre en el tiempo $t_i+\tau_d$ se tendrá:

$$x_{i+1} = \sqrt{1-\xi^2}\; Xe^{-\xi\omega\left(t_i+\tau_d\right)}$$

En donde td es el tiempo de un ciclo.

$$\tau_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$$

Dividiendo las ecuaciones de x_i, x_{i+1}:

$$\frac{x_i}{x_{i+1}} = \frac{\sqrt{1-\xi^2}\; Xe^{-\xi\omega\, t_i}}{\sqrt{1-\xi^2}\; Xe^{-\xi\omega\left(t_i+\tau_d\right)}} = e^{\xi\omega\,\tau_d}$$

En donde puede verse cómo el cociente de dos amplitudes sucesivas, es una constante que no depende del tiempo. Esta ecuación puede ser expresada también como.

$$ln\frac{x_i}{x_{i+1}} = \xi\omega\,\tau_d = \delta$$

En donde δ es una constante que se denomina decremento logarítmico. Usando esta ecuación y teniendo en cuenta la definición de τ_d y de ω_d,

$$\omega_d = \omega\sqrt{1-\xi^2}$$

El decremento logarítmico δ puede ser escrito como:

$$\delta = ln\frac{x_i}{x_{i+1}} = \frac{2\pi\,\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

Si δ puede ser determinado experimentalmente, midiendo dos amplitudes sucesivas, se puede calcular el factor de amortiguamiento del sistema x que despejado de la ecuación anterior tiene la siguiente expresión:

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2+4\pi^2}}$$

9.6. INESTABILIDAD DE LOS SISTEMAS

Como se ha visto en los apartados anteriores, los sistemas libres cuya solución de la ecuación característica es un número complejo del tipo s = α+iβ presentan una respuesta que es el producto de una constante por una función exponencial y por una función armónica.

$$x = Xe^{\alpha t} sen(\beta t + \phi)$$

En el ejemplo planteado de masa, muelle amortiguador, la parte real del número complejo s era siempre negativa y en consecuencia, la función exponencial tendía a cero.

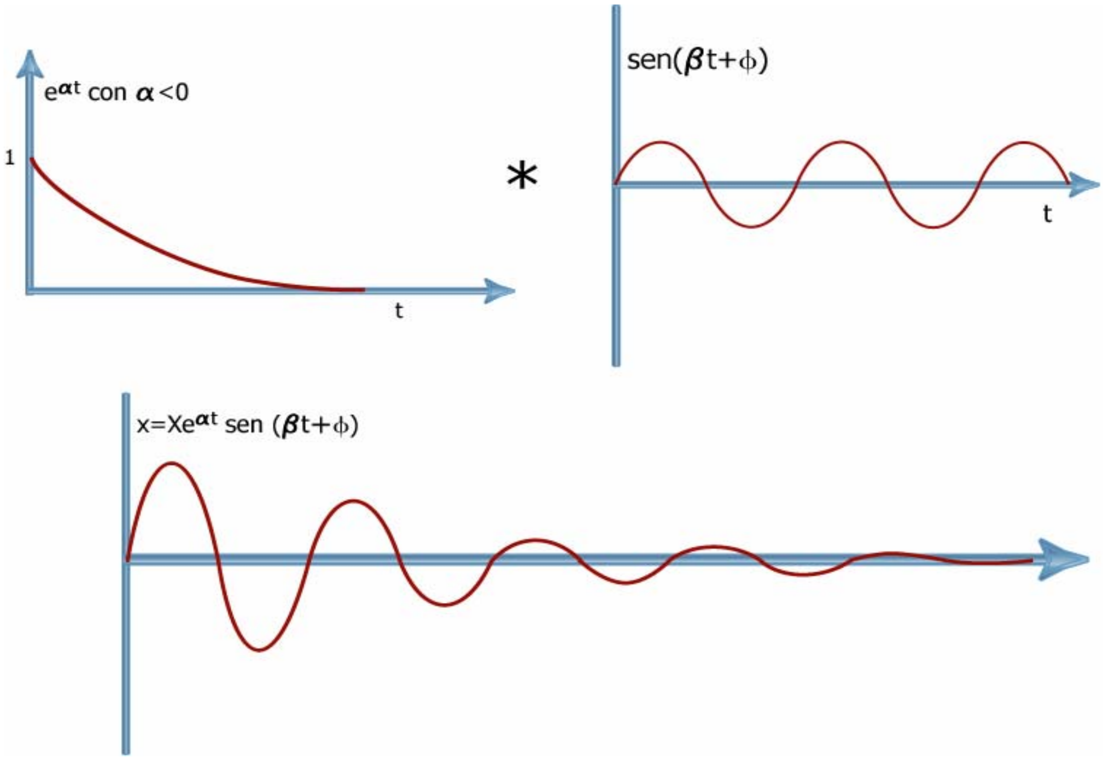

Figura 12. Respuesta de un sistema con α negativo.

Existen sistemas en los cuales la parte real de s es positiva.

Una función exponencial con exponente positivo tiende al infinito conforme crece el tiempo t.

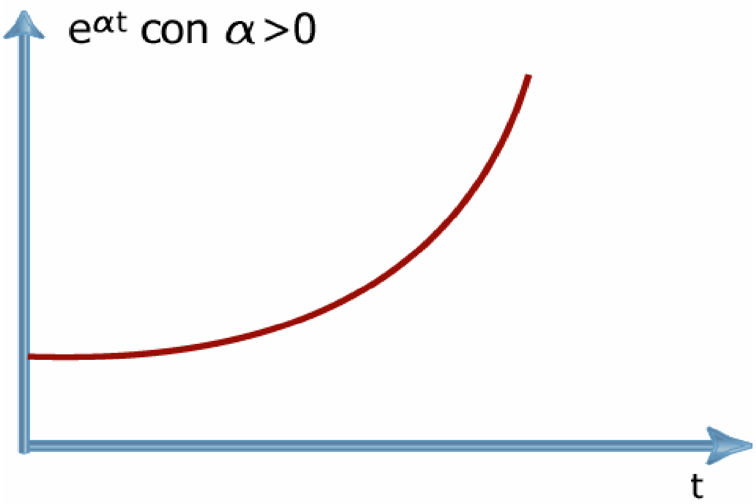

Figura 13. Función exponencial con α>0.

El producto de una función exponencial con $\alpha>0$ y una función armónica, resulta una función oscilante de amplitud que crece en cada ciclo y que tiende al infinito.

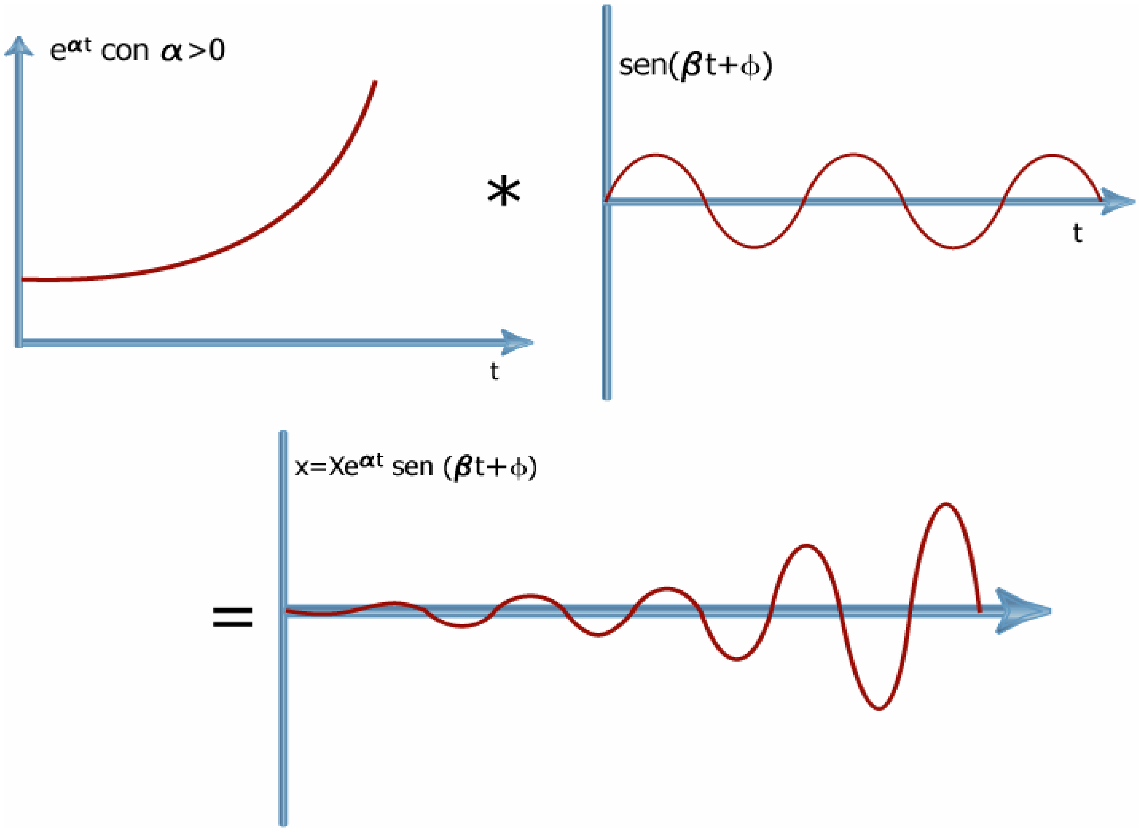

Figura 14. Respuesta de un sistema con parte real de s positiva.

Cuando un sistema tiene la parte real de s positiva, al ser separado de su punto de equilibrio, oscila pero cada vez lo hace con mayor amplitud tendiendo esta al infinito. A este fenómeno se lo conoce con el nombre de inestabilidad y en esas condiciones se dice que el sistema es inestable.

Sistemas inestables hay en todos los dominios de la física, aunque en unos más que en otros. En Ingeniería Mecánica aparece en temas muy concretos como por ejemplo, la dirección de los vehículos automóviles, los procesos de arranque de material en las máquinas herramientas y la dinámica ferroviaria. En sistemas eléctricos es más corriente la aparición de comportamientos inestables y por último, en el control de procesos y de mecanismos es bastante frecuente si no se eligen adecuadamente los parámetros de control.

Para contrastar gráficamente lo lejos o cerca que un sistema se encuentra de la inestabilidad, se suelen representar los valores de s en el plano complejo situando la parte real de s en el eje de las abscisas y la parte imaginaria en el eje de ordenadas.

Sólo son estables los sistemas que se encuentran a la izquierda del eje de ordenadas, ya que solamente en este caso la parte real de s es negativa.

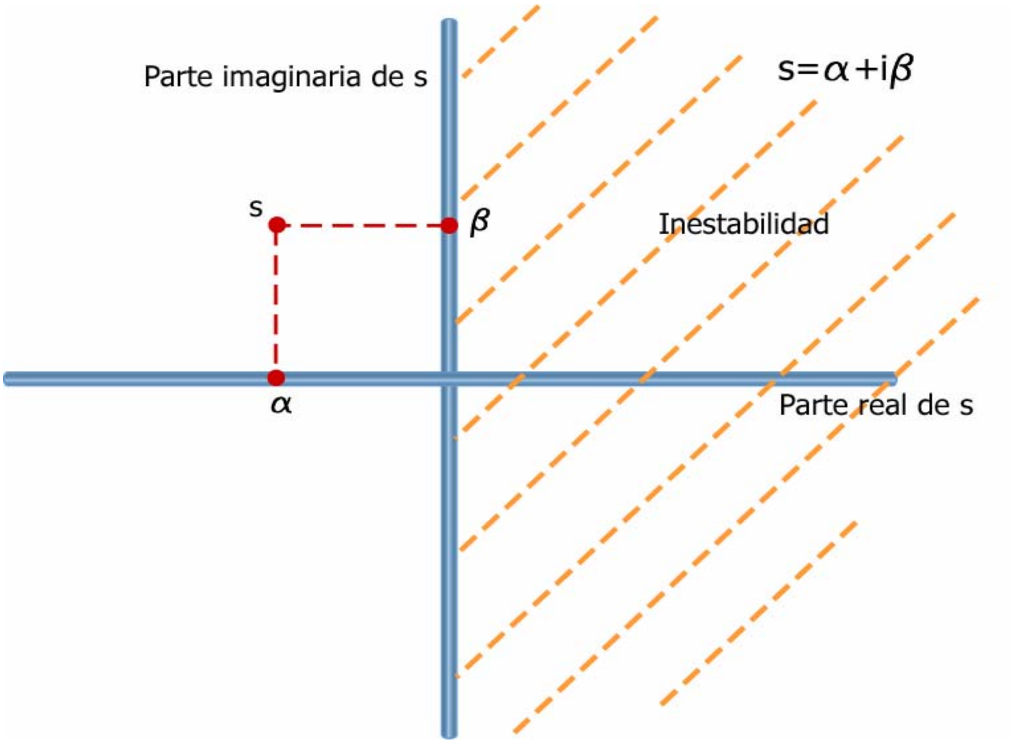

Figura 15. Representación de s en el plano complejo.

9.7. DINÁMICA DE LOS SISTEMAS FORZADOS DE UN GRADO DE LIBERTAD

En la figura 1 se muestra un modelo de un grado de libertad formado por una masa que se desplaza horizontalmente y está unida mediante un resorte y un amortiguador, a una base cuyo movimiento en función del tiempo es conocido.

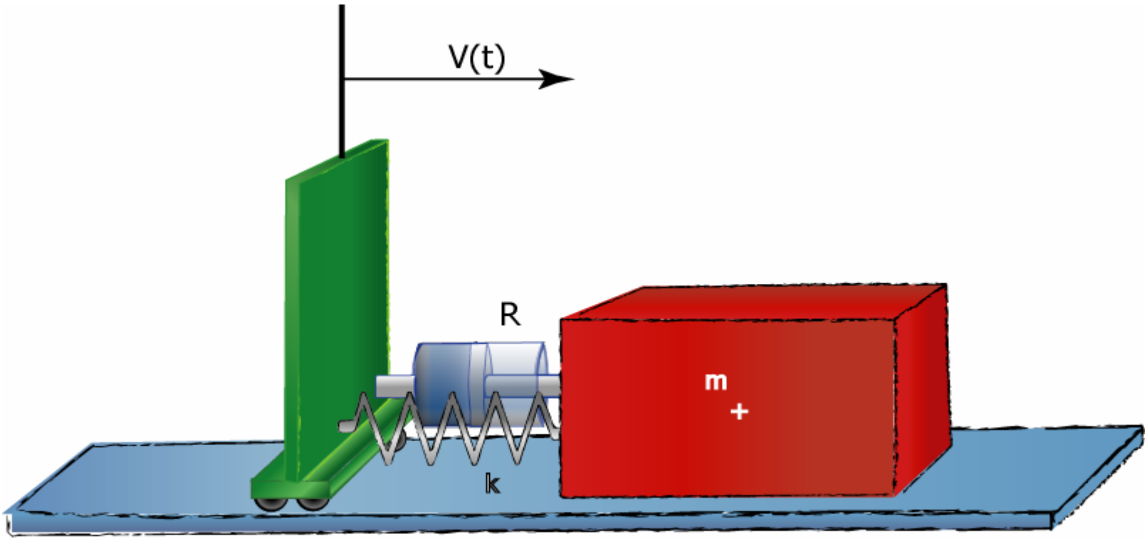

Figura 1. Masa que se desplaza excitada por una base de movimiento conocido.

En los apartados anteriores se han estudiado los sistemas de un grado de libertad en su respuesta libre, es decir cuando se mueven debido a condiciones iniciales no nulas, pero no existe ninguna excitación externa. En este apartado se va a abordar la respuesta de los modelos de un grado de libertad forzados, es decir, cuando están sometidos a una excitación externa.

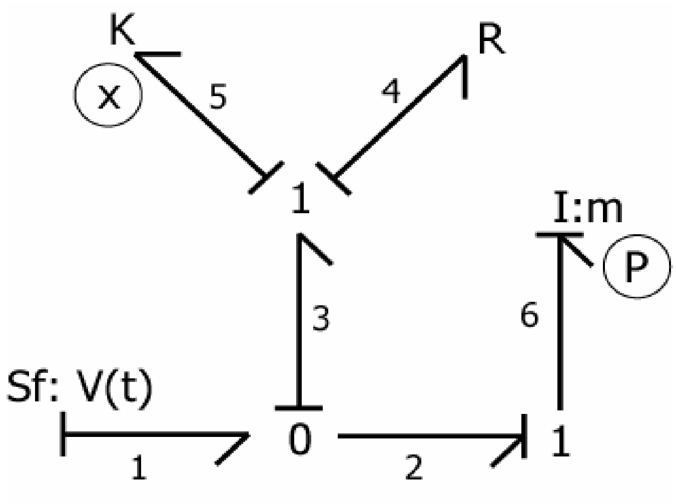

Figura 2. Bond-Graph del modelo

	Flujos	Esfuerzos
1	V(t)	Kx + R[V(t) - P/m]
2	P/m	Kx + R[V(t) - P/m]
3	V(t) - P/m	Kx + R[V(t) - P/m]
4	V(t) - P/m	R[V(t) - P/m]
5	V(t) - P/m	Kx
6	P/m	Kx + R[V(t) - P/m]

Las ecuaciones diferenciales del modelo son las derivadas respecto al tiempo de las variables P, x.

$$\dot{P} = k\ x + R\left[v(t) - \frac{P}{m}\right]$$

$$\dot{x} = v(t) - \frac{P}{m}$$

Ordenando las ecuaciones y dejando en el segundo miembro la excitación, se tiene:

$$\dot{P} - k\ x\ + R\frac{P}{m} = \ Rv(t)$$

$$\dot{x}\ + \frac{P}{m} = v(t)$$

Estas ecuaciones coinciden con las que se obtenían para el modelo inicial de este capítulo, con la salvedad de que en aquel caso no había excitación y por lo tanto las ecuaciones eran homogéneas, es decir, eran iguales a cero.

La solución de las ecuaciones diferenciales no homogéneas es la suma de la solución encontrada para la ecuación homogénea más una solución particular. Es decir:

$$P(t) = P_h(t) + P_p(t)$$
$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

En donde p (t) es la solución de la ecuación no homogénea, p_h (t) la solución de la ecuación homogénea y p_p (t) la solución particular. Lo mismo sucede para la variable x (t).

En los párrafos anteriores se ha estudiado la obtención y la forma de la solución de la ecuación homogénea y por lo tanto, ahondaremos ahora solamente en la obtención de la solución particular y para el caso en que la excitación es una función armónica.

Si la excitación es una función armónica, se tendrá:

$$V(t) = V \cdot \cos \omega_f t = Re\left(Ve^{i\omega_f t}\right)$$

En donde el operador Re significa la parte real de la función exponencial compleja $Ve^{i\omega_f t}$

Recuerde el lector que la exponencial compleja es:

$$e^{i\omega_f t} = \cos \omega_f t + i\ sen\, \omega_f t$$

Y por lo tanto:

$$Re\left(e^{i\omega_f t}\right) = \cos \omega_f t$$

$$Im\left(e^{i\omega_f t}\right) = sen\, \omega_f t$$

Si la excitación del modelo es una función armónica de frecuencia ω_f, las respuestas particulares serán también funciones armónicas y en consecuencia:

$$x_P(t) = Re\left(X_1 e^{i\omega_f t}\right) = X_1 \cos \omega_f t$$

$$p_P(t) = Re\left(P_1 e^{i\omega_f t}\right) = P_1 \cos \omega_f t$$

Derivando y sustituyendo en las ecuaciones diferenciales del modelo, se tiene:

$$i\omega_f P_1 e^{i\omega_f t} - kX_1 e^{i\omega_f t} + \frac{RP_1 e^{i\omega_f t}}{m} = R\,V\,e^{i\omega_f t}$$

$$i\omega_f X_1\, e^{i\omega_f t} + \frac{P_1 e^{i\omega_f t}}{m} = V e^{i\omega_f t}$$

En donde como observará el lector, se ha suprimido el operador Re. Esto puede hacerse hasta que se han completado todas las operaciones y entonces tomar solamente la parte real del resultado final.

Las ecuaciones ahora planteadas constituyen un sistema algebraico cuyas incógnitas son X_1, P_1.

Simplificando y ordenando, se tiene:

$$\left(i\omega f + \frac{R}{m}\right)P_1 - k\, X_1 = RV$$

$$\frac{P_1}{m} + i\omega_f\, X_1 = V$$

Aplicando la regla de Cramer para resolver el sistema:

$$P_1 = \frac{\begin{vmatrix} RV & -k \\ V & i\omega f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} i\omega f + \frac{R}{m} & -k \\ \frac{1}{m} & i\omega f \end{vmatrix}} = \frac{(iR\omega f + k)V}{-\omega_f^2 + \frac{iR\omega f}{m} + \frac{k}{m}}$$

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} i\omega f + \frac{R}{m} & RV \\ \frac{1}{m} & V \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} i\omega f + \frac{R}{m} & -k \\ \frac{1}{m} & i\omega f \end{vmatrix}} = \frac{i\omega_f\, V}{-\omega_f^2 + \frac{iR\omega f}{m} + \frac{k}{m}}$$

Las amplitudes X_1, P_1 de las funciones exponenciales complejas que constituyen la solución particular de la respuesta del modelo forzado, son cocientes de los números complejos que varían con la frecuencia de la excitación ω_f.

No tiene ninguna dificultad hallar X_1 y P_1 para cualquier valor de ω_f, sin más que recordar que solamente se necesita la parte real, debido a que anteriormente y por comodidad se había prescindido del operador real Re. No obstante es más interesante determinar como X_1 y P_1 varían conforme ω_f va desde cero a infinito.

En la figura 3 se muestra la variación de P_1 en función del cociente de la frecuencia de excitación ω_f entre la frecuencia natural del sistema, para diferentes valores de la razón de amortiguamiento.

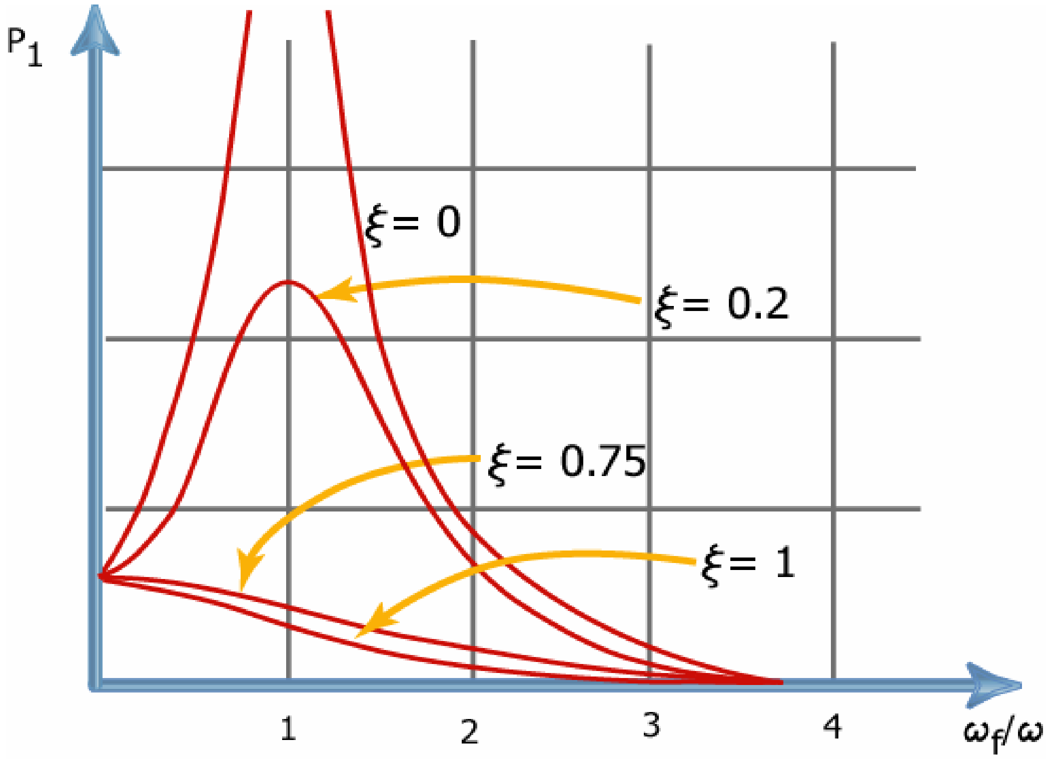

Figura 3. Respuesta de P_1 en función del cociente ω_f/ω, para diferentes valores de ξ.

En la figura 3 se observa cómo si la frecuencia de excitación coincide con la natural del sistema y no existe amortiguamiento, es decir $\xi = 0$, la amplitud de P_1 tiende al infinito, es decir se produce la resonancia del modelo. En cuanto la razón de amortiguamiento es distinta de cero, ya no se produce el fenómeno de la resonancia aunque la frecuencia de la excitación coincida con la natural del modelo. En cualquier caso la amplitud de la respuesta es siempre mayor conforme la frecuencia de excitación se acerca a la frecuencia natural.

9.8. RESPUESTA TOTAL DE LOS SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD

Como se ha planteado en los apartados anteriores las ecuaciones:

$$\dot{P} - k\,x + R\frac{P}{m} = R\,v(t)$$

$$\dot{x} + \frac{P}{m} = v(t)$$

Tienen como solución la suma de dos soluciones, la de la ecuación homogénea $p_h(t)$ más la solución particular $p_p(t)$ para el caso de p, y $x_h(t)$ más $x_p(t)$ para la variable x.

$$p(t) = p_h(t) + p_p(t)$$
$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

Como ambas ecuaciones son diferenciales ordinarias de primer orden, las soluciones son del mismo tipo. En consecuencia, a partir de ahora nos referiremos solo a una de ellas.

En el apartado correspondiente a los sistemas libres, se dedujo que la solución de la ecuación homogénea para la variable x era:

$$x_h(t) = X\ e^{\alpha t}\ sen(\beta t + \phi)$$

En donde α es la parte real de la solución de la ecuación característica s, β es la parte imaginaria y ϕ es el ángulo de desfase.

Esta solución está formada por el producto de una función exponencial por una función armónica. Cuando el exponente de la función exponencial es negativo, $x_h(t)$ resulta una función oscilante de amplitud decreciente que tiende a cero conforme al tiempo t crece. Esta función oscilante decreciente tiene de frecuencia la natural del sistema y depende exclusivamente de los parámetros del modelo y no de la excitación.

$$x_h(t) = X\ e^{\alpha t}\ sen(\beta t + \phi)$$

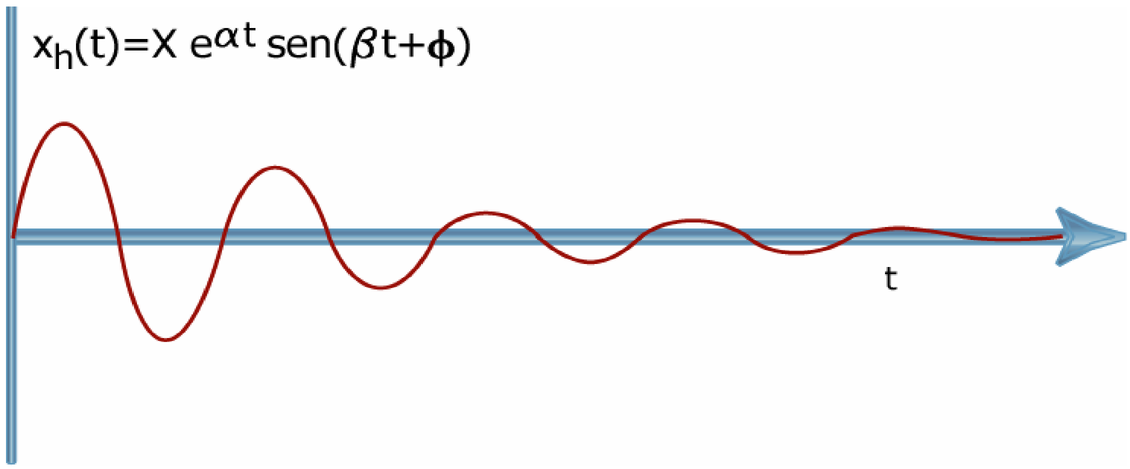

Figura 4. Solución homogénea $x_h(t)$.

En cuanto se refiere a la solución particular $x_p(t)$, tal y como se ha planteado en el apartado anterior es una función armónica de frecuencia la de excitación ω_f.

$$x_p(t) = X_1 \cos \omega_f t$$

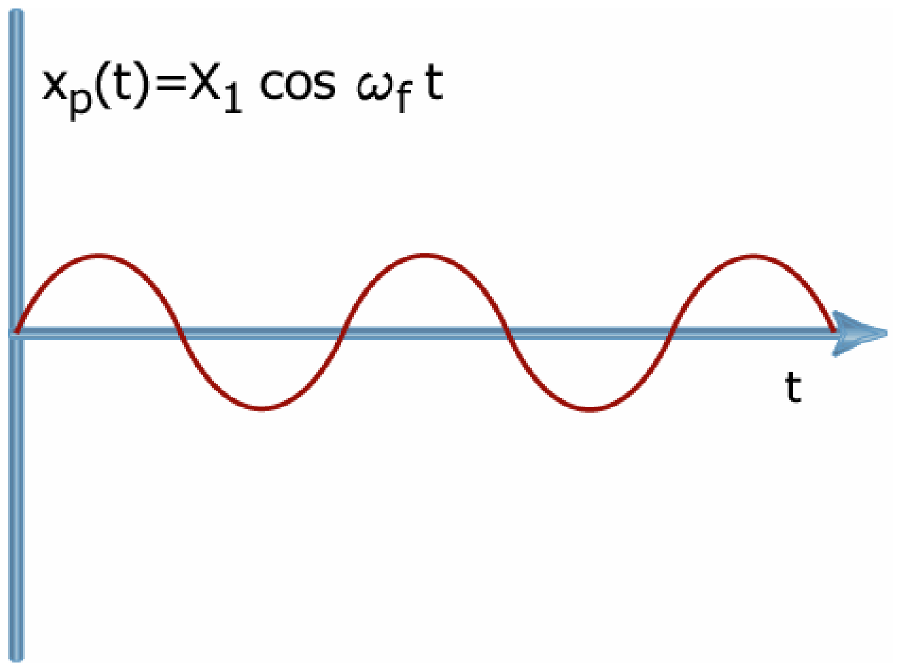

Figura 5. Solución particular $x_p(t)$.

$$x(t)= x_h(t)+x_p(t)=Xe^{\alpha t}\ sen(\beta t+\phi)+X_1 cos\,\omega_f\, t$$

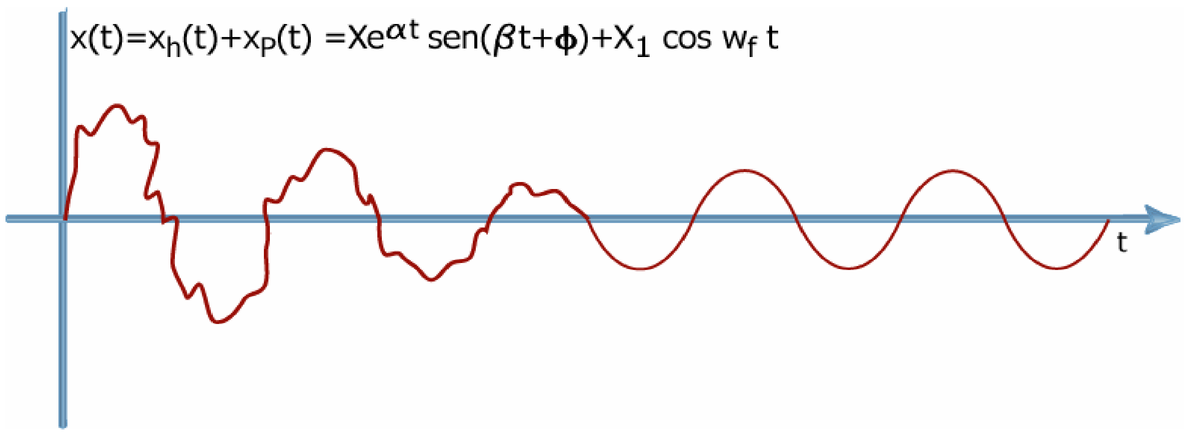

Figura 6. Solución total x(t).

Al ser la solución total la suma de la homogénea más la particular la respuesta total del sistema tiene una primera parte totalmente influenciada por la solución homogénea que como el lector conoce disminuye con el tiempo y llega a anularse. Cuando la solución homogénea desaparece sólo queda la solución particular que al ser una función armónica permanece en el tiempo hasta que desaparece la excitación.