

### 13.5 CINEMÁTICA PLANA

#### Coordenadas de un punto perteneciente a un elemento

A lo largo de este apartado y a partir de ahora se van a utilizar las coordenadas de punto de referencia.

Dado un punto genérico  $P$ , perteneciente a un elemento  $i$ , su posición puede definirse, bien por sus coordenadas locales, que permanecen constantes, o bien por sus coordenadas globales, que varían a medida que el elemento se mueve.

En la figura 13.1 se muestra un punto  $P_i$  perteneciente a un elemento  $i$ , así como dos sistemas de referencia: uno exterior al elemento y el otro con origen en un punto fijo del mismo,  $O_i$ , y que por lo tanto se mueve solidariamente con el cuerpo.

Las coordenadas del punto  $P_i$  respecto al sistema exterior, que se denomina "sistema global" son  $x_i^P, y_i^P$ , mientras que las coordenadas de este mismo punto respecto al sistema de referencia solidario al elemento, llamado "sistema local", son  $\xi_i^P, \eta_i^P$ .

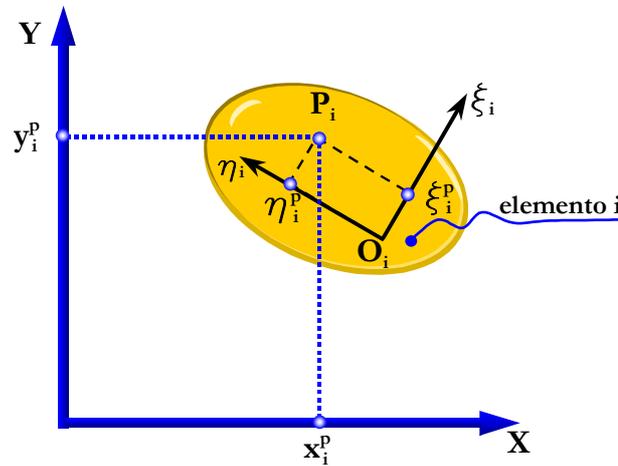
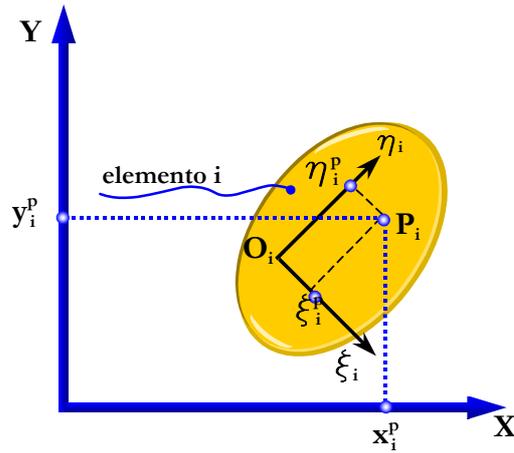


Figura 13.16. Coordenadas cartesianas de  $P_i$  en los sistemas local y global.

Observe el lector que en la notación empleada para identificar las coordenadas, el subíndice ( $i$  en este caso) indica a qué elemento pertenecen las coordenadas y el superíndice ( $P$ ), a qué punto concreto de ese elemento pertenecen las coordenadas. Por otra parte, si las coordenadas están referidas al sistema global se denominan  $x$  y  $y$ , y si lo están al sistema local del elemento  $\xi$  y  $\eta$ . Así,  $x_i^P, y_i^P$  son las coordenadas globales del punto  $P$  perteneciente al elemento  $i$ ; y  $\xi_i^P$  y  $\eta_i^P$  son sus coordenadas locales.

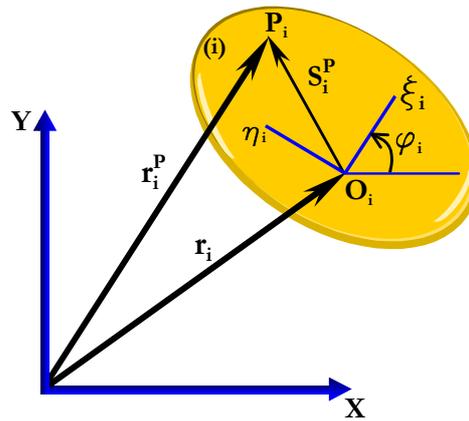
En cuanto a los puntos, se emplea la notación  $P_i$  para especificar que el punto  $P$  pertenece al elemento  $i$ .

Los puntos de referencia de cada elemento (puntos en los que se va a situar el origen del sistema de referencia local) se denotan con la letra  $O$  y para especificar el elemento al que pertenece el punto de referencia se vuelve a emplear como subíndice el nombre del elemento. Así,  $O_i$  representa el punto de referencia del elemento  $i$ .



**Figura 13.17.** Coordenadas cartesianas de  $P_i$  tras el movimiento del elemento  $i$ .

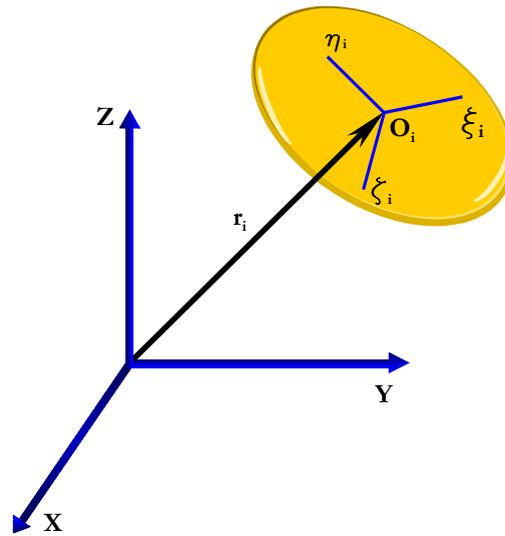
Si el elemento  $i$  se mueve, al cabo de un tiempo  $t$  se encontrará en otra posición, tal como se indica en la figura 13.17. Observemos que el sistema global permanece fijo en el exterior, mientras que el local se mueve acompañando en su movimiento al elemento sobre el que está definido. Por este motivo las coordenadas del punto  $P_i$  respecto al sistema local permanecen siempre constantes.



**Figura 13.18.** Vectores de posición  $\mathbf{r}_i$ ,  $\mathbf{r}_i^P$ ,  $\mathbf{s}_i^P$ .

Los puntos del elemento  $i$  pueden representarse también respecto al sistema global por medio de sus vectores de posición. En la figura 13.18. se muestran el elemento  $i$  y los vectores  $\mathbf{r}_i$  y  $\mathbf{r}_i^P$  que definen la posición de los puntos  $O_i$  y  $P_i$  respecto al sistema global. Así mismo, el vector  $\mathbf{s}_i^P$  definido en coordenadas globales, une el punto  $O_i$  con  $P_i$ .

En general, la localización de cada elemento  $i$  en el espacio queda definida si se conocen las tres componentes globales del vector  $\mathbf{r}_i$  que posiciona el origen  $O_i$  del sistema local asociado al elemento (figura 13.19).



**Figura 13.19.** Coordenadas cartesianas.

El vector  $r_i$  puede representarse de la siguiente forma:

$$r_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}$$

O bien empleando el vector traspuesto, así:

$$r_i = [ x_i , y_i , z_i ]^T$$

En forma más general puede expresarse como:

$$r_i = [ x , y , z ]_i^T$$

En donde la  $i$  significa que se trata del elemento  $i$ .

En el caso de movimiento plano,  $r_i = [ x , y ]_i^T$

Además del vector  $r_i$  hay que especificar los tres giros  $v_{1i}$ ,  $v_{2i}$  y  $v_{3i}$  que definen la orientación angular del sistema local respecto al sistema global. Así pues, la situación espacial del elemento  $i$  puede representarse por el vector de coordenadas  $q_i$  cuyas componentes son las 3 coordenadas traslacionales y las otras 3 angulares que definen la posición relativa del sistema local respecto al global.

$$q_i = [ x , y , z , \varphi_1 , \varphi_2 , \varphi_3 ]_i^T$$

En el plano sólo son necesarias 2 coordenadas traslacionales y una angular, por lo que el vector de coordenadas asociado al elemento  $i$  es de la forma:

$$q_i = [ x , y , \varphi ]_i^T = [ r^T , \varphi ]_i^T$$

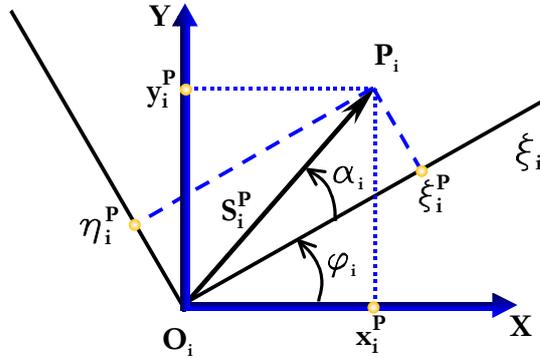
En un sistema formado por  $N$  elementos, se necesitan  $n = 6 N$  coordenadas si es espacial, y  $n = 3 N$  si es plano. El vector de coordenadas del sistema es el siguiente:

$$q = [ q_1^T , q_2^T , \dots , q_N^T ]^T$$

En donde  $q_1, q_2, \dots, q_n$  corresponden a los elementos 1, 2, ..., n que forman el mecanismo.

**Relaciones de transformación en cinemática plana. Matriz de transformación**

En la figura 13.20. se muestran las proyecciones de un punto genérico  $P_i$  sobre los ejes locales ligados al elemento al que pertenece dicho punto, y sobre los ejes globales, que por simplicidad se han trasladado hasta el punto  $O_i$ .



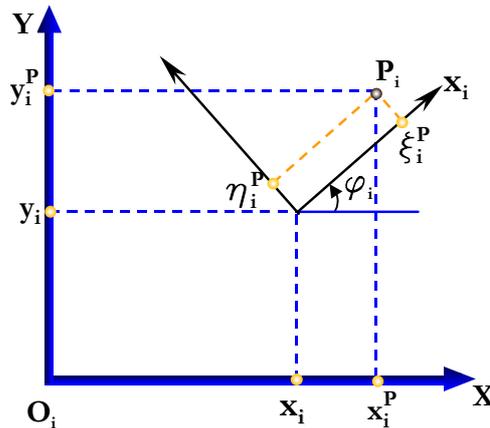
**Figura 13.20.** Proyecciones de  $P_i$  sobre los ejes locales y globales.

A la vista de la figura 13.20, pueden establecerse las siguientes relaciones entre las coordenadas locales y globales del punto  $P_i$ :

$$\begin{aligned} x_i^P &= \xi_i^P \cos \varphi_i - \eta_i^P \operatorname{sen} \varphi_i \\ y_i^P &= \xi_i^P \operatorname{sen} \varphi_i + \eta_i^P \cos \varphi_i \end{aligned} \quad (3)$$

Si se considera que el sistema global no está situado en el punto  $O_i$ , tal y como se indica en la figura 13.21, las expresiones anteriores quedan en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x_i^P &= x_i + \xi_i^P \cos \varphi_i - \eta_i^P \operatorname{sen} \varphi_i \\ y_i^P &= y_i + \xi_i^P \operatorname{sen} \varphi_i + \eta_i^P \cos \varphi_i \end{aligned}$$



**Figura 13.21.** Proyecciones de  $P_i$  sobre los ejes locales y globales.

Las dos últimas ecuaciones forman el sistema de ecuaciones de transformación, cuya expresión matricial es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} x^P \\ y^P \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\text{sen } \varphi \\ \text{sen } \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \xi^P \\ \eta^P \end{bmatrix}_i \quad (4)$$

Donde, el vector del primer miembro representa las coordenadas del punto P en globales, y en el segundo miembro el primer sumando representa las coordenadas del punto O en locales, y el último vector las coordenadas del punto P en locales. La matriz que aparece en el segundo sumando recibe el nombre de matriz de transformación.

En forma compacta, las coordenadas del punto P<sub>i</sub> respecto al sistema global pueden expresarse como:

$$r_i^P = r_i + A_i s_i^P \quad (5)$$

Siendo  $r_i^P$  y  $r_i$  los vectores indicados en la figura 13.18 y  $A_i$  una matriz que se conoce con el nombre de "Matriz de transformación". Esta matriz toma la forma siguiente cuando se trabaja en coordenadas cartesianas planas:

$$A_i = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\text{sen } \varphi \\ \text{sen } \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}_i \quad (6)$$

El vector  $s_i^P$  es el vector de las coordenadas locales del punto P<sub>i</sub>. Por tanto;

$$s_i^P = [ \xi_i^P, \eta_i^P ]^T$$

### Derivadas de las ecuaciones de transformación

Así como las relaciones de transformación son útiles para determinar la posición de algunos puntos del mecanismo, su primera y segunda derivadas lo son para conocer sus velocidades y aceleraciones, respectivamente.

#### Primera derivada

Partiendo de la relación de transformación, tenemos que:

$$\begin{bmatrix} x^P \\ y^P \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\text{sen } \varphi \\ \text{sen } \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \xi^P \\ \eta^P \end{bmatrix}_i \quad (7)$$

Como las coordenadas  $(x_i^P, y_i^P)$ ,  $(x, y)$  varían con el tiempo al igual que el ángulo  $\varphi$ , mientras que las coordenadas locales permanecen constantes, al derivar respecto al tiempo se obtiene lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^P \\ \dot{y}^P \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} -\dot{\varphi} \text{sen } \varphi & -\dot{\varphi} \cos \varphi \\ \dot{\varphi} \cos \varphi & -\dot{\varphi} \text{sen } \varphi \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \xi^P \\ \eta^P \end{bmatrix}_i \quad (8)$$

La relación de transformación en velocidades puede ponerse también de esta forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^P \\ \dot{y}^P \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} -\text{sen } \varphi & -\cos \varphi \\ \cos \varphi & -\text{sen } \varphi \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \xi^P \\ \eta^P \end{bmatrix}_i \dot{\varphi}_i \quad (9)$$

Pueden expresarse también de forma más compacta:

$$\dot{r}_i^P = \dot{r}_i + B_i s_i^P \dot{\varphi}_i \quad (10)$$

Donde  $B_i$  es la matriz:

$$B_i = \begin{bmatrix} -\text{sen } \varphi & -\text{cos } \varphi \\ \text{cos } \varphi & -\text{sen } \varphi \end{bmatrix}_i \quad (11)$$

En definitiva, la relación de transformación en velocidades puede definirse diciendo que: las componentes del vector velocidad de un punto  $P_i$  ligado al elemento  $i$  respecto al sistema global son iguales a las componentes globales del vector velocidad del punto  $O_i$ , en el que se sitúa el sistema local, más el producto de la matriz  $B_i$ , por el vector que contiene las coordenadas locales del punto  $P_i$  y por la velocidad de giro del sistema local respecto al global.

Segunda derivada

Derivando de nuevo respecto al tiempo se obtiene la segunda derivada de las relaciones de transformación, cuya expresión general es:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}^P \\ \ddot{y}^P \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} -\text{sen } \varphi & -\text{cos } \varphi \\ \text{cos } \varphi & -\text{sen } \varphi \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \xi^P \\ \eta^P \end{bmatrix}_i \ddot{\varphi}_i - \begin{bmatrix} \text{cos } \varphi & -\text{sen } \varphi \\ \text{sen } \varphi & \text{cos } \varphi \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \xi^P \\ \eta^P \end{bmatrix}_i \dot{\varphi}_i^2 \quad (12)$$

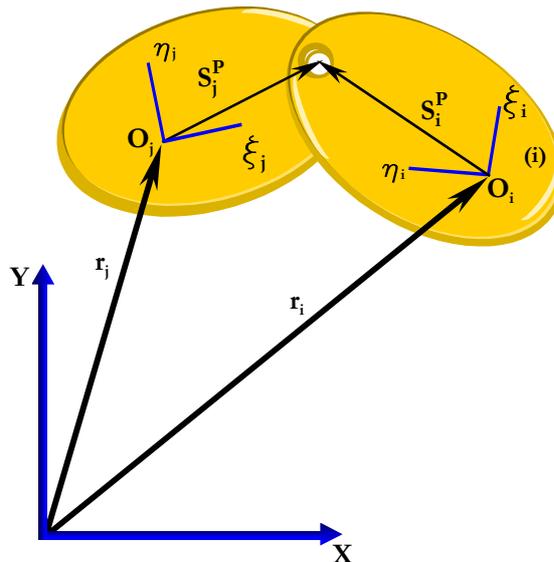
Expresado en forma compacta es como sigue:

$$\ddot{r}_i^P = \ddot{r}_i + B_i s_i^P \ddot{\varphi}_i - A_i s_i^P \dot{\varphi}_i^2 \quad (13)$$

Las relaciones de transformación y sus derivadas no solo sirven para determinar la posición, velocidad y aceleración de cualquier punto de un sistema mecánico, sino que también son de utilidad en la obtención de las ecuaciones de restricción y en las ecuaciones cinemáticas de velocidad y aceleración, como se podrá comprobar más adelante.

**Par elemental de Revolución**

La junta de revolución que une los dos puntos  $i$  y  $j$  que constituyen un par cinemático plano (ver figura 13.22) queda definida por un punto  $P$  de la articulación ya que se trata de una unión plana. Naturalmente, el punto  $P$  puede pertenecer tanto al miembro  $i$  como al  $j$ .



**Figura 13.22.** Par de revolución.

Este tipo de junta es un par inferior simple.

Observando la figura 13.22. el vector de posición del punto P, respecto al sistema global, como perteneciente al elemento j puede definirse como:

$$r_j^P = r_j + s_j^P$$

Y como perteneciente al elemento i:

$$r_i^P = r_i + s_i^P$$

Siendo  $s_j^P$  y  $s_i^P$  los vectores  $O_j^P$  y  $O_i^P$  respectivamente. Sus componentes están expresadas respecto al sistema global.

Por otra parte, recordando la ecuación (5) el vector de posición del punto P, como perteneciente al elemento i, puede definirse como:

$$r_i^P = r_i + A_i s_i^P \quad (14)$$

Y como perteneciente al elemento j, así:

$$r_j^P = r_j + A_j s_j^P \quad (15)$$

Siendo  $s_j^P$  y  $s_i^P$  los vectores  $O_j^P$  y  $O_i^P$ , pero esta vez expresados en las coordenadas locales asociadas a los elementos i y j respectivamente.

Igualando ambas expresiones, tenemos que:

$$r_i + A_i s_i^P = r_j + A_j s_j^P \quad (16)$$

O bien;

$$r_i + A_i s_i^P - r_j - A_j s_j^P = 0 \quad (17)$$

Siendo esta igualdad la expresión vectorial de las ecuaciones de restricción correspondientes a este tipo de junta.

Al estar trabajando en el plano, los vectores que aparecen en la igualdad (17) tienen sólo dos componentes, por lo que esta representa un sistema de dos ecuaciones. En la práctica, se conocerán las coordenadas locales del punto P, tanto en el sistema local ligado al cuerpo i como en el solidario al j, y en definitiva, serán conocidos los vectores  $s_i^P$  y  $s_j^P$ . Por tanto, las únicas incógnitas son los elementos de los vectores  $r_i$  y  $r_j$  y los de las matrices  $A_i$  y  $A_j$ .

La ecuación (17) puede representarse también en forma matricial:

$$\Phi^{(r, 2)} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \xi^P \\ \eta^P \end{bmatrix}_i - \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_j - \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} \xi^P \\ \eta^P \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

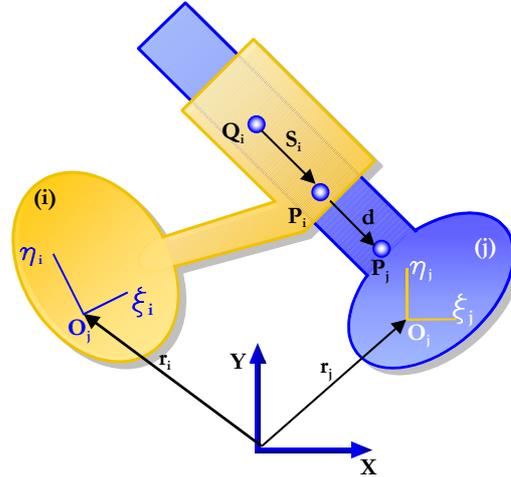
Siendo:

- $(x, y)_i$ : Coordenadas del punto  $O_i$  en el sistema de referencia global XY.
- $(x, y)_j$ : Coordenadas del punto  $O_j$  en el sistema de referencia global XY.
- $\varphi_i$ : Ángulo de giro entre el sistema local del elemento i y el sistema global.
- $\varphi_j$ : Ángulo de giro entre el sistema local del elemento j y el sistema global.

- $(\xi_i, \eta_i)$ : Coordenadas del punto P en el sistema local del elemento i.
- $(\xi_j, \eta_j)$ : Coordenadas del punto P en el sistema local del elemento j.

**Par de traslación**

El par elemental de traslación es un par cinemático plano constituido por dos elementos i y j, y una junta de traslación que los conecta. Este tipo de unión es un par inferior simple. Se representa por la línea en la que se produce el desplazamiento relativo entre ambos cuerpos.



**Figura 13.23.** Par de traslación.

En la figura 13.23. se muestra un par de traslación. Es un tipo de junta en la que queda impedido el giro relativo entre los cuerpos i y j. Esta condición exige que el ángulo girado por ambos elementos sea el mismo en cualquier instante. Así pues, si  $\varphi_i^0$  y  $\varphi_j^0$  denotan los ángulos que definen el giro de i y j en el instante inicial, y  $\varphi_i$  y  $\varphi_j$  los correspondientes a un instante cualquiera. Siendo:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_i &= \varphi_i - \varphi_i^0 \\ \Delta \varphi_j &= \varphi_j - \varphi_j^0 \end{aligned} \tag{19}$$

Debe verificarse que ambos incrementos de ángulos sean iguales y por lo tanto:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_i &= \Delta \varphi_j \\ \varphi_i - \varphi_i^0 &= \varphi_j - \varphi_j^0 \end{aligned} \tag{20}$$

O lo que es lo mismo:

$$\varphi_i - \varphi_j - (\varphi_i^0 - \varphi_j^0) = 0 \tag{21}$$

La ecuación (19) es una de las dos ecuaciones de restricción del par de traslación. Para encontrar otra ecuación de restricción se toman dos puntos pertenecientes al elemento i,  $P_i$  y  $Q_i$ , que estén situados sobre la línea de acción del par, y un tercer punto,  $P_j$ , situado sobre esa misma línea pero ligado al cuerpo j. Entre estos dos puntos se impone la condición de que permanezcan continuamente alineados. Esto se consigue exigiendo que el vector  $\mathbf{s}_i$ , que une  $P_i$  y  $Q_i$ , sea paralelo al vector  $\mathbf{d}$ , que une  $P_i$  y  $P_j$  o, lo que es lo mismo, que el producto vectorial de ambos vectores sea nulo.

$$\vec{s}_i \times \vec{d} = \vec{0} \Rightarrow |\vec{s}_i \times \vec{d}| = 0 \tag{22}$$

Siguiendo la figura 13.23, los vectores  $\mathbf{s}_i$  y  $\mathbf{d}$  pueden definirse como:

$$s_i = r_i^P - r_i^O = \begin{bmatrix} x_i^P - x_i^O \\ y_i^P - y_i^O \\ 0 \end{bmatrix} \quad (23.a)$$

$$d = r_j^P - r_i^P = \begin{bmatrix} x_j^P - x_i^P \\ y_j^P - y_i^P \\ 0 \end{bmatrix} \quad (23.b)$$

Y multiplicando escalarmente estos dos vectores:

$$\begin{aligned} \tilde{s}_i d &= \begin{bmatrix} s_{i2} d_3 - s_{i3} d_2 \\ s_{i3} d_1 - s_{i1} d_3 \\ s_{i1} d_2 - s_{i2} d_1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (x_i^P - x_i^O)(y_j^P - y_i^P) - (y_i^P - y_i^O)(x_j^P - x_i^P) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (24)$$

Como la condición de paralelismo es que el producto vectorial sea nulo, la segunda ecuación de restricción viene dada por:

$$(x_i^P - x_i^O)(y_j^P - y_i^P) - (y_i^P - y_i^O)(x_j^P - x_i^P) = 0 \quad (25)$$

En definitiva, para el par de traslación, al igual que en el caso anterior, existen dos ecuaciones de restricción, que son:

$$\begin{bmatrix} (x_i^P - x_i^O)(y_j^P - y_i^P) - (y_i^P - y_i^O)(x_j^P - x_i^P) \\ \varphi_i - \varphi_j - (\varphi_i^0 - \varphi_j^0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

### Par de Revolución-Revolución

Cuando uno de los elementos del mecanismo se encuentra ligado a otros dos por sendas juntas de revolución, puede tratarse el conjunto como si fueran dos elementos unidos por una única junta múltiple de revolución-revolución.

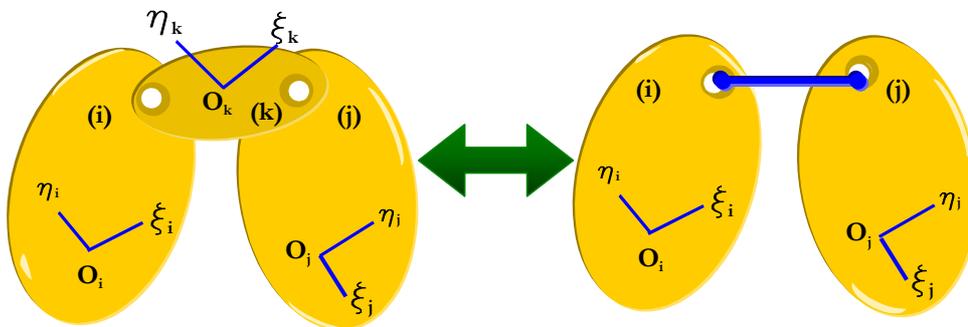


Figura 13.24. Junta múltiple del tipo revolución-revolución.

El hecho de trabajar con juntas múltiples permite omitir las coordenadas del elemento intermedio, lo cual supone una gran ventaja, ya que se reduce el número de ecuaciones totales del sistema

mecánico. En contraposición, el hecho de no tener en consideración esas coordenadas impide que pueda obtenerse alguna información sobre la posición de dicho elemento.

Un par de revolución-revolución que conecta dos elementos  $i$  y  $j$  se define por los puntos  $P_i$  y  $P_j$  en los que los ejes de las juntas simples de revolución de los elementos  $i$  y  $j$  cortan al plano en el que se estudia el movimiento.

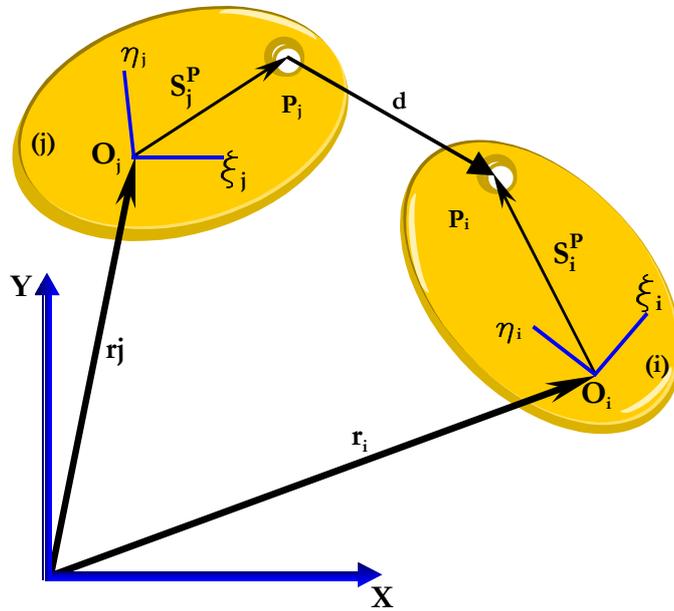


Figura 13.25. Par de revolución-revolución.

En la figura 13.25 se muestra el par de revolución-revolución. Además de los vectores clásicos ya utilizados en los casos anteriores, se define aquí un vector  $\mathbf{d}$  con origen en  $P_j$  y extremo en el punto  $P_i$ , cuyo módulo se denota con la letra  $l$  y representa la longitud de la junta.

De la figura 13.25 puede deducirse que en el sistema de referencia global:

$$r_i + s_i^P = r_j + s_j^P + d \quad (27)$$

De donde, despejando el vector  $\mathbf{d}$ :

$$d = (r_i + s_i^P) - (r_j + s_j^P) \quad (28)$$

O bien:

$$d = r_i^P - r_j^P \quad (29)$$

Y expresada esta ecuación en términos de las componentes de los vectores, respecto al sistema global, se tiene:

$$d = \begin{bmatrix} x_i^P - x_j^P \\ y_i^P - y_j^P \end{bmatrix} \quad (30)$$

Tomando módulos y elevando al cuadrado se llega a lo siguiente:

$$l^2 = (x_i^P - x_j^P)^2 + (y_i^P - y_j^P)^2 \quad (31)$$

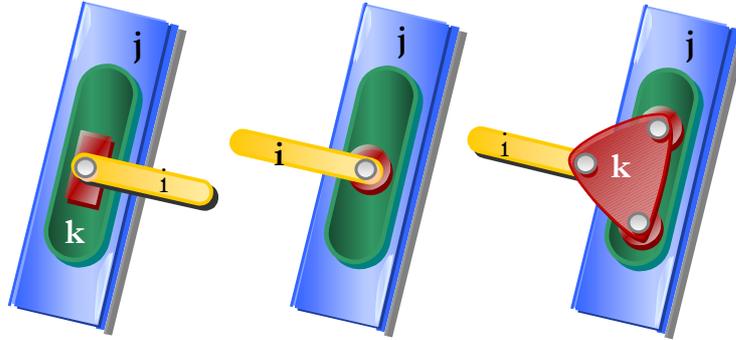
O bien:

$$(x_i^P - x_j^P)^2 + (y_i^P - y_j^P)^2 - l^2 = 0 \quad (32)$$

Esta expresión constituye la ecuación de restricción del par de revolución-revolución. Únicamente se necesita una ecuación porque esta junta múltiple sólo elimina un grado de libertad.

**Par de Revolución-Traslación**

En la figura 13.26 se muestran algunos ejemplos de este tipo de juntas múltiples:



*Figura 13.26.* Diferentes juntas de revolución-traslación.

Como puede apreciarse, si se tiene un cuerpo k unido a otros dos i y j por medio de una junta de revolución y otra de traslación, respectivamente, el conjunto formado por el elemento k y los dos pares simples puede considerarse como una junta compuesta de revolución-traslación.

Como ya se comentó al estudiar la junta simple de traslación, una forma de garantizar el cumplimiento de la condición que impide el giro relativo de los elementos que la componen consiste en tomar 3 puntos sobre la línea de acción de la junta (dos pertenecientes a uno de los elementos y uno al otro miembro), y exigir que permanezcan alineados en todo instante. En este caso se toman dos puntos arbitrarios  $P_j$  y  $Q_j$  sobre el elemento de la junta compuesta en el que se encuentra la junta simple de traslación, y un tercer punto,  $P_i$ , situado en el eje de la junta de revolución. Nótese que  $P_i$  pertenece tanto al elemento i en el que se encuentra la junta de revolución, como al elemento intermedio, y además está situado en la línea de acción de la junta de traslación.

De forma análoga a como se hizo ya con el par de traslación, para expresar esta condición matemáticamente se definen un vector  $\mathbf{d}$  con origen en  $P_i$  y extremo en  $Q_j$  y otro  $\mathbf{s}_j$  que va de  $Q_j$  a  $P_j$ , y se exige que su producto vectorial sea nulo.

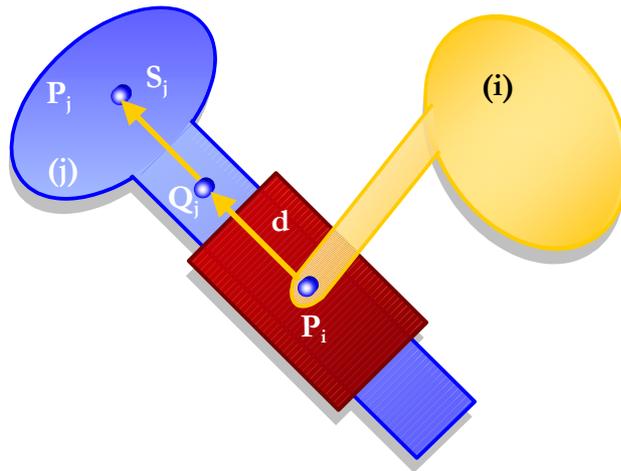


Figura 13.27. Par de revolución-traslación.

Operando se llega a la ecuación de restricción del par que viene dada por la siguiente expresión:

$$(x_i^P - x_j^Q)(y_j^P - y_j^Q) - (y_i^P - y_j^Q)(x_j^P - x_j^Q) = 0 \quad (33)$$

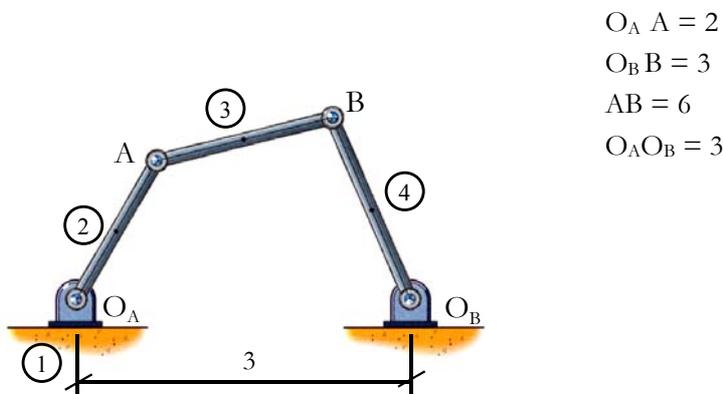
En donde  $x_i^P, y_i^P, x_j^P, y_j^P, x_j^Q$  e  $y_j^Q$  son respectivamente, las coordenadas de los puntos  $P_i, P_j$  y  $Q_j$  respecto al sistema de referencia global.

$P_i$  es el punto del elemento  $i$  en el que el eje de la junta simple de revolución corta al plano de estudio, y  $P_j$  y  $Q_j$  dos puntos arbitrarios del elemento  $j$ , situados sobre la línea de acción de la junta simple de traslación.

Si se comparan los pares de traslación y de revolución-traslación, puede observarse cómo en el primero se tenían dos ecuaciones de restricción: una para garantizar la colinearidad de los vectores  $s_i$  y  $s_j$ , y la otra para evitar que los elementos  $i$  y  $j$  giren uno respecto al otro; en el par de revolución-traslación, sin embargo, como los elementos  $i$  y  $j$  giran uno respecto al otro, solamente se necesita la condición de colinearidad para los vectores y por lo tanto sólo existe una ecuación de restricción.

Ejemplo 1

Se deben plantear las ecuaciones de restricción correspondientes al cuadrilátero articulado de la figura, resolverlas para el instante  $t = 0$ , y a partir de la solución obtenida determinar las coordenadas globales de los puntos A y B para  $t = 0$ .



Resolución:

*Número de incógnitas*

Si se emplean coordenadas cartesianas para describir la configuración del mecanismo, al considerarse que este está formado por 4 elementos, las variables del problema son cada una de las tres componentes de los vectores  $\mathbf{q}_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ). Se tienen, por tanto:

$$4 \cdot 3 = 12 \text{ incógnitas}$$

*Número de restricciones simples*

Cada elemento fijo puede representarse por 3 restricciones simples (una por cada coordenada) de la forma  $x_i = \text{cte}$ . Al existir un único elemento fijo (elemento n.º 1) hay:

$$1 \cdot 3 = 3 \text{ restricciones simples}$$

*Juntas*

En la siguiente tabla se recogen los datos correspondientes a cada uno de los pares elementales del mecanismo.

N.º Junta	Elemento $i$	Elemento $j$	Tipo de junta	N.º de restricciones
1	1	2	r	2
2	1	4	r	2
3	2	3	r	2
4	3	4	r	2

*Número de ecuaciones de restricción*

A la vista de la tabla anterior queda claro que el número de ecuaciones de ligadura para este mecanismo es:

$$\begin{aligned} N.º \text{ restricciones} &= N.º \text{ restricciones simples} + N.º \text{ juntas } r \times 2 = \\ &= 3 + 4 \cdot 2 = 3 + 8 = 11 \end{aligned}$$

*Grados de libertad y número de restricciones motrices adicionales*

Se sabe que la diferencia entre el número de restricciones y el de coordenadas es siempre igual al número de grados de libertad del sistema.

$$g.d.l. = 12 - 11 = 1$$

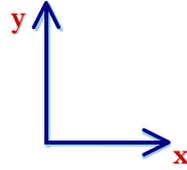
Y si se decide seguir el método de las restricciones motrices adicionales para plantear las ecuaciones de ligadura, es preciso añadir tantas ecuaciones motrices como grados de libertad tenga el mecanismo, con el fin de obtener un sistema con igual número de ecuaciones que de incógnitas. Así pues, según el resultado anterior se necesita una única ecuación motriz. Si se supone que el órgano motriz es el elemento n.º 2 y que además el movimiento motor es de revolución, dicha ecuación debe ser de la forma:

$$\varphi_2 = \varphi_2(t)$$

*Elección de los sistemas de referencia y determinación de las coordenadas locales que definen la posición de las juntas en cada elemento*

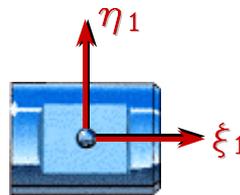
- Referencia global.

Se toma con origen en el punto  $O_A$ . La referencia se orienta según se muestra en la figura.



- Referencia local ligada al elemento 1.

Se toma con origen en  $O_A$ .

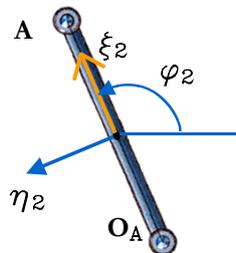


Para la referencia elegida se tienen las siguientes coordenadas locales para los puntos  $O_A$  y  $O_B$ .

$$(\xi_1^{O_A}, \eta_1^{O_A}) = (0, 0) \quad ; \quad (\xi_1^{O_B}, \eta_1^{O_B}) = (3, 0)$$

- Referencia local ligada al elemento 2.

Se toma con origen en el punto medio de  $O_A A$  y orientada según la dirección de dicha barra.

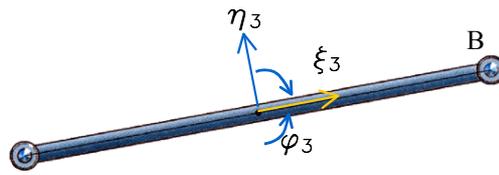


En este caso, teniendo en cuenta que la longitud del elemento es  $l_2 = 2$ , las coordenadas locales de los extremos son:

$$(\xi_2^{O_A}, \eta_2^{O_A}) = (-1, 0) \quad ; \quad (\xi_2^A, \eta_2^A) = (1, 0)$$

- Referencia local ligada al elemento 3.

Se toma con origen en el punto medio de AB.



Como  $l_3 = 6$ , las coordenadas locales de los extremos son:

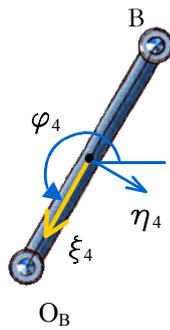
$$(\xi_3^A, \eta_3^A) = (-3, 0) \quad ; \quad (\xi_3^B, \eta_3^B) = (3, 0)$$

Referencia local ligada al elemento 4.

Se toma con origen en el punto medio de  $BO_B$ , y es orientada según esta barra.

Al ser  $l_4 = 3$ , las coordenadas locales de los extremos son:

$$(\xi_4^B, \eta_4^B) = (-1.5, 0) \quad ; \quad (\xi_4^{O_B}, \eta_4^{O_B}) = (1.5, 0)$$



*Planteamiento de las ecuaciones de restricción simples*

Dado que las coordenadas iniciales del miembro fijo (elemento n.º 1) valen:  $q_1 = (0, 0, 0)$  las ecuaciones de restricción correspondientes a este elemento son:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &\equiv x_1 = 0 \\ \Phi_2 &\equiv y_1 = 0 \\ \Phi_3 &\equiv \varphi_1 = 0 \end{aligned} \right\}$$

*Planteamiento de las ecuaciones de restricción correspondientes a cada junta*

Junta n.º 1.

Al igual que todas las demás uniones del mecanismo, es una junta de revolución, por lo que la expresión general de las ecuaciones de ligadura para este tipo de par cinemático es (ecuación 17):

$$\Phi^{(r, 2)} \equiv r_i + A_i s_i^P - r_j - A_j s_j^P = 0$$

O en forma más desarrollada:

$$\left. \begin{aligned} x_i + \xi_i^P \cos \varphi_i - \eta_i^P \operatorname{sen} \varphi_i - x_j - \xi_j^P \cos \varphi_j + \eta_j^P \operatorname{sen} \varphi_j &= 0 \\ y_i + \xi_i^P \operatorname{sen} \varphi_i + \eta_i^P \cos \varphi_i - y_j - \xi_j^P \operatorname{sen} \varphi_j - \eta_j^P \cos \varphi_j &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Y si se tiene en cuenta que para todas las referencias escogidas la segunda coordenada local es nula, puede escribirse:

$$\left. \begin{aligned} x_i + \xi_i^P \cos \varphi_i - x_j - \xi_j^P \cos \varphi_j &= 0 \\ y_i + \xi_i^P \operatorname{sen} \varphi_i - y_j - \xi_j^P \operatorname{sen} \varphi_j &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\left. \begin{aligned} P \equiv O_A \\ i \equiv 1 \\ j \equiv 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} (\xi_i^P, \eta_i^P) &\equiv (\xi_1^{O_A}, \eta_1^{O_A}) = (0, 0) \\ (\xi_j^P, \eta_j^P) &\equiv (\xi_2^{O_A}, \eta_2^{O_A}) = (-1, 0) \end{aligned} \right.$$

Al sustituir se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_4 \equiv x_1 - x_2 + \cos \varphi_2 &= 0 \\ \Phi_5 \equiv y_1 - y_2 + \operatorname{sen} \varphi_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

□ Junta n.º 2.

Es también de revolución, por lo que puede emplearse la expresión general (1). En este caso se tiene que:

$$\left. \begin{aligned} P \equiv O_B \\ i \equiv 1 \\ j \equiv 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} (\xi_i^P, \eta_i^P) &\equiv (\xi_1^{O_B}, \eta_1^{O_B}) = (3, 0) \\ (\xi_j^P, \eta_j^P) &\equiv (\xi_4^{O_B}, \eta_4^{O_B}) = (1.5, 0) \end{aligned} \right.$$

Sustituyendo se obtienen las ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_6 \equiv x_1 + 3 \cos \varphi_1 - x_4 - 1.5 \cos \varphi_4 &= 0 \\ \Phi_7 \equiv y_1 + 3 \operatorname{sen} \varphi_1 - y_4 - 1.5 \operatorname{sen} \varphi_4 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

□ Junta n.º 3.

Es también de revolución.

$$\left. \begin{aligned} P \equiv A \\ i \equiv 2 \\ j \equiv 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} (\xi_i^P, \eta_i^P) &\equiv (\xi_2^A, \eta_2^A) = (1, 0) \\ (\xi_j^P, \eta_j^P) &\equiv (\xi_3^A, \eta_3^A) = (-3, 0) \end{aligned} \right.$$

Las ecuaciones correspondientes a esta junta son:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_8 \equiv x_2 + \cos \varphi_2 - x_3 + 3 \cos \varphi_3 &= 0 \\ \Phi_9 \equiv y_2 + \operatorname{sen} \varphi_2 - y_3 + 3 \operatorname{sen} \varphi_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

□ Junta n.º 4.

Se trata de una junta de revolución.

$$\left. \begin{array}{l} P \equiv B \\ i \equiv 3 \\ j \equiv 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\xi_i^P, \eta_i^P) \equiv (\xi_3^B, \eta_3^B) = (3, 0) \\ (\xi_j^P, \eta_j^P) \equiv (\xi_4^B, \eta_4^B) = (-1.5, 0) \end{array} \right.$$

Operando de igual modo que para las otras juntas se obtiene:

$$\left. \begin{array}{l} \Phi_{10} \equiv x_3 + 3 \cos \varphi_3 - x_4 + 1.5 \cos \varphi_4 = 0 \\ \Phi_{11} \equiv y_3 + 3 \operatorname{sen} \varphi_3 - y_4 + 1.5 \operatorname{sen} \varphi_4 = 0 \end{array} \right\}$$

*Planteamiento de las restricciones motrices*

Como ya se ha comentado, existe una única ecuación motriz, que ha de ser de la forma:

$$\varphi_2 = \varphi_2(t)$$

Se supondrá que el movimiento del miembro motor (elemento n.º 2) sigue la ley:

$$\varphi_2 = \varphi_2^0 + \omega_2 t \Rightarrow \varphi_2 - \varphi_2^0 - \omega_2 t = 0$$

Siendo  $\varphi_2^0$  el valor inicial de la coordenada  $\varphi_2$ , y  $\omega_2$  la velocidad angular, que se supondrá constante, se tomarán para estos dos parámetros los valores:

$$\varphi_2^0 = \frac{3 \pi}{4} = 135^\circ \quad , \quad \omega_2 = 100$$

Así pues, la restricción motriz puede representarse de esta forma:

$$\Phi_{12} \equiv \varphi_2 - \frac{3 \pi}{4} - 100 t = 0$$

*Sistema de ecuaciones de restricción correspondientes al mecanismo*

En este sistema se agrupan todas las ecuaciones obtenidas anteriormente.

$$\begin{aligned}
 \Phi_1 &\equiv x_1 = 0 \\
 \Phi_2 &\equiv y_1 = 0 \\
 \Phi_3 &\equiv \varphi_1 = 0 \\
 \Phi_4 &\equiv x_1 - x_2 + \cos \varphi_2 = 0 \\
 \Phi_5 &\equiv y_1 - y_2 + \operatorname{sen} \varphi_2 = 0 \\
 \Phi_6 &\equiv x_1 + 3 \cos \varphi_1 - x_4 - 1.5 \cos \varphi_4 = 0 \\
 \Phi_7 &\equiv y_1 + 3 \operatorname{sen} \varphi_1 - y_4 - 1.5 \operatorname{sen} \varphi_4 = 0 \\
 \Phi_8 &\equiv x_2 + \cos \varphi_2 - x_3 + 3 \cos \varphi_3 = 0 \\
 \Phi_9 &\equiv y_2 + \operatorname{sen} \varphi_2 - y_3 + 3 \operatorname{sen} \varphi_3 = 0 \\
 \Phi_{10} &\equiv x_3 + 3 \cos \varphi_3 - x_4 + 1.5 \cos \varphi_4 = 0 \\
 \Phi_{11} &\equiv y_3 + 3 \operatorname{sen} \varphi_3 - y_4 + 1.5 \operatorname{sen} \varphi_4 = 0 \\
 \Phi_{12} &\equiv \varphi_2 - \frac{3 \pi}{4} - 100 t = 0
 \end{aligned}$$

Como puede observarse, la última ecuación es distinta en cada instante, por lo que el sistema tiene una solución diferente para cada valor de la variable temporal,  $t$ .

### Solución de las ecuaciones de restricción para el instante inicial

Para  $t = 0$  la solución del sistema es:

$$\begin{aligned}x_1 &= 0 & ; & & y_1 &= 0 & ; & & \varphi_1 &= 0 \\x_2 &= -0.7071 & ; & & y_2 &= 0.7071 & ; & & \varphi_2 &= 135^\circ \\x_3 &= 1.5777 & ; & & y_3 &= 1.9854 & ; & & \varphi_3 &= 10.81^\circ \\x_4 &= 3.7849 & ; & & y_4 &= 1.2783 & ; & & \varphi_4 &= 238.45^\circ\end{aligned}$$

### Coordenadas globales de los puntos A y B en el instante inicial

Utilizando las relaciones de transformación y una vez conocidas las coordenadas del sistema, pueden determinarse las coordenadas de cualquier punto del mecanismo.

$$\begin{aligned}x_i^P &= x_i + \xi_i^P \cos \varphi_i - \eta_i^P \operatorname{sen} \varphi_i \\y_i^P &= y_i + \xi_i^P \operatorname{sen} \varphi_i + \eta_i^P \cos \varphi_i\end{aligned}$$

Y teniendo en cuenta que para los sistemas de referencia escogidos la segunda coordenada local es siempre nula, pueden simplificarse las ecuaciones anteriores, quedando:

$$\begin{aligned}x_i^P &= x_i + \xi_i^P \cos \varphi_i \\y_i^P &= y_i + \xi_i^P \operatorname{sen} \varphi_i\end{aligned}$$

- Coordenadas globales del punto A (para  $t = 0$ ).

Si se considera que A es un punto fijo del miembro 2, puede escribirse:

$$\begin{aligned}x^A &= x_2 + \xi_2^A \cos \varphi_2 = -0.7071 + \cos 135^\circ = -1.4142 \\y^A &= y_2 + \xi_2^A \operatorname{sen} \varphi_2 = 0.7071 + \operatorname{sen} 135^\circ = 1.4142\end{aligned}$$

- Coordenadas globales del punto B (para  $t = 0$ ).

Teniendo en cuenta que B es un punto fijo del elemento 4, se obtiene:

$$\begin{aligned}x^B &= x_4 + \xi_4^B \cos \varphi_4 = 3.7849 - 1.5 \cos 238.45^\circ = 4.5697 \\y^B &= y_4 + \xi_4^B \operatorname{sen} \varphi_4 = 1.2783 - 1.5 \operatorname{sen} 238.45^\circ = 2.5566\end{aligned}$$

### Ejemplo 2

Se deben plantear las ecuaciones de restricción correspondientes al mecanismo biela-manivela representado en la figura, resolverlas para  $t = 0$ , y a partir de la solución obtenida determinar las coordenadas globales de los puntos A y B en el instante inicial.



Resolución:

**Número de incógnitas**

Si se emplean coordenadas cartesianas para describir la configuración del mecanismo, al considerarse que este está formado por 4 elementos, las variables del problema son cada una de las tres componentes de los vectores  $\mathbf{q}_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ). Se tienen, por tanto

$$4 \cdot 3 = 12 \text{ incógnitas}$$

**Número de restricciones simples**

Cada elemento fijo puede representarse por 3 restricciones simples (una por cada coordenada) de la forma  $x_i = \text{cte}$ . Al existir un único elemento fijo (elemento n.º 1) existen:

$$1 \cdot 3 = 3 \text{ restricciones simples}$$

**Juntas**

En la tabla se recogen los datos correspondientes a todos los pares elementales.

N.º Junta	Elemento i	Elemento j	Tipo de junta	N.º de restricciones
1	1	2	r	2
2	1	4	t	2
3	2	3	r	2
4	3	4	r	2

**Número de ecuaciones de restricción**

A la vista de la tabla anterior queda claro que el número de ecuaciones de ligadura para este mecanismo es:

$$\begin{aligned}
 N.^{\circ} \text{ restricciones} &= N.^{\circ} \text{ restricciones simples} + N.^{\circ} \text{ juntas } r \times 2 + N.^{\circ} \text{ juntas } t \times 2 = \\
 &= 3 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 3 + 6 + 2 = 11
 \end{aligned}$$

**Grados de libertad y número de restricciones matrices adicionales**

Se sabe que la diferencia entre el número de restricciones y el de coordenadas es siempre igual al número de grados de libertad del sistema.

$$g. d. l. = 12 - 11 = 1$$

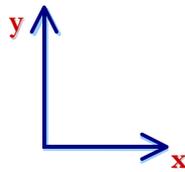
Es preciso añadir tantas ecuaciones motrices como grados de libertad tenga el mecanismo, con el fin de obtener un sistema con igual número de ecuaciones que de incógnitas, por lo que se necesita una única ecuación motriz. Si se supone que el órgano motriz es el elemento n.º 2 y que además el movimiento motor es de revolución, dicha ecuación debe ser de la forma.

$$\varphi_2 = \varphi_2(t)$$

*Elección de los sistemas de referencia y determinación de las coordenadas locales que definen la posición de las juntas en cada elemento*

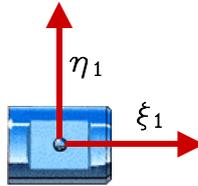
- Referencia global.

Se toma con origen en el punto  $O_A$ , y orientada según se muestra en la figura.



- Referencia local ligada al elemento 1.

Se toma con origen en  $O_A$ .

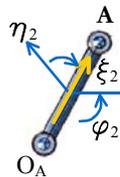


Dada la referencia elegida se tienen las siguientes coordenadas locales para el punto  $O_A$ .

$$(\xi_1^{O_A}, \eta_1^{O_A}) = (0, 0)$$

- Referencia local ligada al elemento 2.

Se toma con origen en el punto medio de  $O_A A$ , y orientada según la dirección de dicha barra.

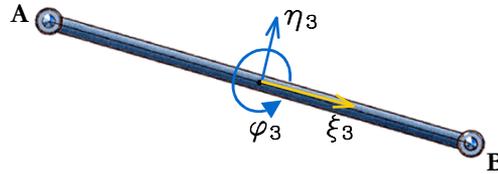


En este caso, teniendo en cuenta que la longitud del elemento es  $l_2 = 2$ , las coordenadas locales de los extremos son:

$$(\xi_2^{O_A}, \eta_2^{O_A}) = (-1, 0) \quad ; \quad (\xi_2^A, \eta_2^A) = (1, 0)$$

- Referencia local ligada al elemento 3.

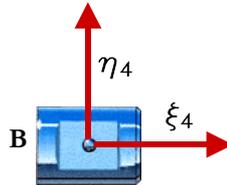
Se toma con origen en el punto medio de AB.



Como  $l_3 = b/6$ , las coordenadas locales de los extremos son

$$(\xi_3^A, \eta_3^A) = (-3, 0) \quad ; \quad (\xi_3^B, \eta_3^B) = (3, 0)$$

- Referencia local ligada al elemento 4. Se toma con origen en el punto B.



Y en este caso las coordenadas locales del punto B son:

$$(\xi_4^B, \eta_4^B) = (0, 0)$$

*Planteamiento de las ecuaciones de restricción simples*

Dado que las coordenadas iniciales del miembro fijo (elemento n.º 1) valen:  $q_1 = (0, 0, 0)$  las ecuaciones de restricción correspondientes a este elemento serán:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &\equiv x_1 = 0 \\ \Phi_2 &\equiv y_1 = 0 \\ \Phi_3 &\equiv \varphi_1 = 0 \end{aligned} \right\}$$

*Planteamiento de las ecuaciones de restricción correspondientes a cada junta*

- Junta n.º 1.

Es una junta de revolución, y operando de modo análogo a como se hizo en el primer ejemplo se obtienen las siguientes ecuaciones de restricción:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_4 &\equiv x_1 - x_2 + \cos \varphi_2 = 0 \\ \Phi_5 &\equiv y_1 - y_2 + \text{sen } \varphi_2 = 0 \end{aligned} \right\}$$

- Junta n.º 2.

Es una junta de traslación, y sus ecuaciones de restricción responden a la expresión general obtenida en el apartado 4.3:

$$\Phi^{(i,2)} \equiv \begin{bmatrix} (x_i^P - x_i^Q)(y_j^P - y_j^Q) - (y_i^P - y_i^Q)(x_j^P - x_j^Q) \\ \varphi_i - \varphi_j - (\varphi_i^0 - \varphi_j^0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donde,  $P_i$  y  $Q_i$  son dos puntos ligados al elemento  $i$  de la junta (en este caso, el miembro n.º 1) y situados sobre la línea de acción de esta, y  $P_j$  es un punto del elemento  $j$  (elemento n.º 4), también perteneciente a la línea de acción.

Como estos puntos pueden seleccionarse de forma arbitraria, para obtener mayor simplicidad en los cálculos se han elegido los puntos con las siguientes coordenadas locales:

$$P_i \equiv P_1 = (\xi_1^P, \eta_1^P) = (0, 0)$$

$$Q_i \equiv Q_1 = (\xi_1^Q, \eta_1^Q) = (1, 0)$$

$$P_j \equiv P_4 = (\xi_4^P, \eta_4^P) = (0, 0)$$

Aplicando a estos puntos las ecuaciones de transformación:

$$x_i^P = x_i + \xi_i^P \cos \varphi_i - \eta_i^P \operatorname{sen} \varphi_i$$

$$y_i^P = y_i + \xi_i^P \operatorname{sen} \varphi_i + \eta_i^P \cos \varphi_i$$

Se tiene que:

$$P_i \rightarrow \begin{cases} x_i^P \equiv x_1^P = x_1 \\ y_i^P \equiv y_1^P = y_1 \end{cases}$$

$$Q_i \rightarrow \begin{cases} x_i^Q \equiv x_1^Q = x_1 + \cos \varphi_1 \\ y_i^Q \equiv y_1^Q = y_1 + \operatorname{sen} \varphi_1 \end{cases}$$

$$P_j \rightarrow \begin{cases} x_j^P \equiv x_4^P = x_4 \\ y_j^P \equiv y_4^P = y_4 \end{cases}$$

Y sustituyendo en la expresión general de las ecuaciones de ligadura se obtiene:

$$\Phi_6 \equiv [x_1 - (x_1 + \cos \varphi_1)](y_4 - y_1) - [y_1 - (y_1 + \operatorname{sen} \varphi_1)](x_4 - x_1) = 0$$

$$\Phi_7 \equiv \varphi_1 - \varphi_4 - (\varphi_1^0 - \varphi_4^0) = 0$$

Además, teniendo en cuenta que los valores iniciales de los ángulos  $\varphi_1$  y  $\varphi_4$  son nulos, queda:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_6 &\equiv (x_4 - x_1) \operatorname{sen} \varphi_1 - (y_4 - y_1) \cos \varphi_1 = 0 \\ \Phi_7 &\equiv \varphi_1 - \varphi_4 = 0 \end{aligned} \right\}$$

□ Junta n.º 3.

Es una junta de revolución. Operando como en el ejemplo 1 se llega a:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_8 &\equiv x_2 + \cos \varphi_2 - x_3 + 3 \cos \varphi_3 = 0 \\ \Phi_9 &\equiv y_2 + \operatorname{sen} \varphi_2 - y_3 + 3 \operatorname{sen} \varphi_3 = 0 \end{aligned} \right\}$$

□ Junta n.º 4.

Se trata también de una junta de revolución y sus ecuaciones correspondientes son:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{10} &\equiv x_3 + 3 \cos \varphi_3 - x_4 = 0 \\ \Phi_{11} &\equiv y_3 + 3 \operatorname{sen} \varphi_3 - y_4 = 0 \end{aligned} \right\}$$

*Planteamiento de las restricciones motrices*

Se supondrá que el movimiento del miembro motor (elemento n.º 2) sigue la ley:

$$\varphi_2 = \varphi_2^0 + \omega_2 t \Rightarrow \varphi_2 - \varphi_2^0 - \omega_2 t = 0$$

Siendo  $\varphi_2^0$  el valor inicial de la coordenada  $\varphi_2$ ; y  $\omega_2$ , la velocidad angular, que se supondrá constante se tomarán para estos dos parámetros los valores:

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{4} = 45^\circ \quad , \quad \omega_2 = 100$$

Así pues, la restricción motriz puede representarse en la siguiente forma:

$$\Phi_{12} \equiv \varphi_2 - \frac{\pi}{4} - 100 t = 0$$

*Sistema de ecuaciones de restricción correspondientes al mecanismo*

En este sistema se agrupan todas las ecuaciones obtenidas anteriormente.

$$\begin{aligned} \Phi_1 &\equiv x_1 = 0 \\ \Phi_2 &\equiv y_1 = 0 \\ \Phi_3 &\equiv \varphi_1 = 0 \\ \Phi_4 &\equiv x_1 - x_2 + \cos \varphi_2 = 0 \\ \Phi_5 &\equiv y_1 - y_2 + \operatorname{sen} \varphi_2 = 0 \\ \Phi_6 &\equiv (x_4 - x_1) \operatorname{sen} \varphi_1 - (y_4 - y_1) \cos \varphi_1 = 0 \\ \Phi_7 &\equiv \varphi_1 - \varphi_4 = 0 \\ \Phi_8 &\equiv x_2 + \cos \varphi_2 - x_3 + 3 \cos \varphi_3 = 0 \\ \Phi_9 &\equiv y_2 + \operatorname{sen} \varphi_2 - y_3 + 3 \operatorname{sen} \varphi_3 = 0 \\ \Phi_{10} &\equiv x_3 + 3 \cos \varphi_3 - x_4 = 0 \\ \Phi_{11} &\equiv y_3 + 3 \operatorname{sen} \varphi_3 - y_4 = 0 \\ \Phi_{12} &\equiv \varphi_2 - \frac{\pi}{4} - 100 t = 0 \end{aligned}$$

La última ecuación es distinta en cada instante, por lo que el sistema tiene una solución diferente para cada valor de la variable temporal, t.

*Solución de las ecuaciones de restricción para el instante inicial*

Para t = 0 la solución del sistema es:

$$\begin{aligned} x_1 = 0 & \quad ; \quad y_1 = 0 & \quad ; \quad \varphi_1 = 0^\circ \\ x_2 = 0.7071 & \quad ; \quad y_2 = 0.7071 & \quad ; \quad \varphi_2 = 45^\circ \\ x_3 = 4.3297 & \quad ; \quad y_3 = 0.7071 & \quad ; \quad \varphi_3 = 346.37^\circ \\ x_4 = 7.2452 & \quad ; \quad y_4 = 0 & \quad ; \quad \varphi_4 = 0^\circ \end{aligned}$$

*Coordenadas globales de los puntos A y B en el instante inicial*

Utilizando las relaciones de transformación y una vez conocidas las coordenadas del sistema, pueden determinarse las coordenadas de cualquier punto del mecanismo.

$$\begin{aligned} x_i^P &= x_i + \xi_i^P \cos \varphi_i - \eta_i^P \operatorname{sen} \varphi_i \\ y_i^P &= y_i + \xi_i^P \operatorname{sen} \varphi_i + \eta_i^P \cos \varphi_i \end{aligned}$$

Además, sabiendo que para los sistemas de referencia escogidos la segunda coordenada local es siempre nula, pueden simplificarse las ecuaciones anteriores:

$$\begin{aligned} x_i^P &= x_i + \xi_i^P \cos \varphi_i \\ y_i^P &= y_i + \xi_i^P \operatorname{sen} \varphi_i \end{aligned}$$

- Coordenadas globales del punto A (para  $t = 0$ ).

Si se considera que A es un punto fijo del miembro 2, puede escribirse:

$$\begin{aligned} x^A &= x_2 + \xi_2^A \cos \varphi_2 = 0.7071 + \cos 45^\circ = 1.4142 \\ y^A &= y_2 + \xi_2^A \operatorname{sen} \varphi_2 = 0.7071 + \operatorname{sen} 45^\circ = 1.4142 \end{aligned}$$

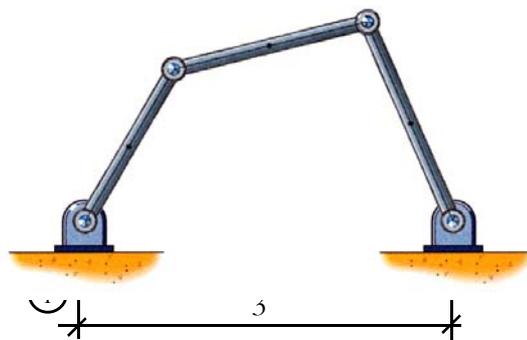
- Coordenadas globales del punto B (para  $t = 0$ ).

Teniendo en cuenta que B es un punto fijo del elemento 4, se obtiene:

$$\begin{aligned} x^B &= x_4 + \xi_4^B \cos \varphi_4 = 7.2452 \\ y^B &= y_4 + \xi_4^B \operatorname{sen} \varphi_4 = 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 3

Deben plantearse las ecuaciones de restricción correspondientes al cuadrilátero articulado de la figura y resolverlas para el instante inicial,  $t = 0$ .



- $O_A A = 2$
- $O_B B = 3$
- $AB = 6$

Como puede apreciarse, el mecanismo que se va a estudiar es el mismo del ejemplo 1 pero esta vez considerando que la barra que une A y B está integrada en una junta de revolución-revolución.

Resolución:

*Número de incógnitas*

Al considerarse que este está formado por 3 elementos, las variables del problema son las componentes de los vectores  $\mathbf{q}_i$  ( $i = 1, \dots, 3$ ). Se tienen, por tanto:

$$3 \cdot 3 = 9 \text{ incógnitas}$$

*Número de restricciones simples*

Cada elemento fijo puede representarse por 3 restricciones simples (una por cada coordenada) de la forma  $x_i = \text{cte}$ . Al existir un único elemento fijo (elemento n.º 1) existen:

$$1 \cdot 3 = 3 \text{ restricciones simples}$$

*Juntas*

En la siguiente tabla se recogen los datos correspondientes a cada uno de los pares elementales del mecanismo.

N.º Junta	Elemento i	Elemento j	Tipo de junta	N.º de restricciones
1	1	2	r	2
2	1	3	r	2
3	2	3	r-r	1

*Número de ecuaciones de restricción*

A la vista de la tabla anterior queda claro que el número de ecuaciones de ligadura para este mecanismo es:

$$\begin{aligned} N.^{\circ} \text{ restricciones} &= N.^{\circ} \text{ restricciones simples} + N.^{\circ} \text{ juntas } r \times 2 + N.^{\circ} \text{ juntas } rr \times 1 = \\ &= 3 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 3 + 4 + 1 = 8 \end{aligned}$$

*Grados de libertad y número de restricciones motrices adicionales*

El número de grados de libertad es:

$$g.d.l. = 9 - 8 = 1$$

Es preciso añadir tantas ecuaciones motrices como grados de libertad tenga el mecanismo, por lo que se necesita una única ecuación motriz.

*Elección de los sistemas de referencia y determinación de las coordenadas locales que definen la posición de las juntas en cada elemento*

- Referencia global.

Como en el ejemplo 1.

- Referencia local ligada al elemento 1.

Como en el ejemplo 1.

$$(\xi_1^{O_A}, \eta_1^{O_A}) = (0, 0) \quad ; \quad (\xi_1^{O_B}, \eta_1^{O_B}) = (3, 0)$$

- Referencia local ligada al elemento 2.

Como en el ejemplo 1.

$$(\xi_2^{O_A}, \eta_2^{O_A}) = (-1, 0) \quad ; \quad (\xi_2^A, \eta_2^A) = (1, 0)$$

- Referencia local ligada al elemento 3.

Igual que la referencia local del elemento 4 vista en el ejemplo 1 pero cambiando el índice "4" por "3", por lo que en este caso se tiene que:

$$(\xi_3^B, \eta_3^B) = (-1.5, 0) \quad ; \quad (\xi_3^{O_B}, \eta_3^{O_B}) = (1.5, 0)$$

*Planteamiento de las ecuaciones de restricción simples*

Como en el ejemplo 1.

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &\equiv x_1 = 0 \\ \Phi_2 &\equiv y_1 = 0 \\ \Phi_3 &\equiv \varphi_1 = 0 \end{aligned} \right\}$$

*Planteamiento de las ecuaciones de restricción correspondientes a cada junta*

- Junta n.º 1.

Como en el ejemplo 1.

$$\left. \begin{aligned} \Phi_4 &\equiv x_1 - x_2 + \cos \varphi_2 = 0 \\ \Phi_5 &\equiv y_1 - y_2 + \text{sen } \varphi_2 = 0 \end{aligned} \right\}$$

- Junta n.º 2.

Como en el ejemplo 1 pero cambiando el índice "4" por "3".

$$\left. \begin{aligned} \Phi_6 &\equiv x_1 + 3 \cos \varphi_1 - x_3 - 1.5 \cos \varphi_3 = 0 \\ \Phi_7 &\equiv y_1 + 3 \text{sen } \varphi_1 - y_3 - 1.5 \text{sen } \varphi_3 = 0 \end{aligned} \right\}$$

- Junta n.º 3.

En este caso se trata de una junta de revolución-revolución que, por tanto, responde a la expresión general dada por la ecuación (32).

$$\Phi^{(rr,1)} \equiv (x_i^P - x_j^P)^2 + (y_i^P - y_j^P)^2 - l^2 = 0$$

Para esta junta se tiene que:

$$\left. \begin{array}{l} P_i \equiv A \\ P_j \equiv B \\ i \equiv 2 \\ j \equiv 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\xi_i^P, \eta_i^P) \equiv (\xi_2^A, \eta_2^A) = (1, 0) \\ (\xi_j^P, \eta_j^P) \equiv (\xi_3^B, \eta_3^B) = (-1.5, 0) \end{array} \right.$$

Se aplican a estos puntos las ecuaciones de transformación:

$$\begin{aligned} x_i^P &= x_i + \xi_i^P \cos \varphi_i - \eta_i^P \operatorname{sen} \varphi_i \\ y_i^P &= y_i + \xi_i^P \operatorname{sen} \varphi_i + \eta_i^P \cos \varphi_i \end{aligned}$$

Y se tendrá que:

$$\begin{aligned} P_i &\rightarrow \begin{cases} x_i^P \equiv x_2^A = x_2 + \cos \varphi_2 \\ y_i^P \equiv y_2^A = y_2 + \operatorname{sen} \varphi_2 \end{cases} \\ P_j &\rightarrow \begin{cases} x_j^P \equiv x_3^B = x_3 - 1.5 \cos \varphi_3 \\ y_j^P \equiv y_3^B = y_3 - 1.5 \operatorname{sen} \varphi_3 \end{cases} \end{aligned}$$

Y sustituyendo en la expresión general de las ecuaciones de ligadura se obtiene:

$$\Phi_8 \equiv (x_2 + \cos \varphi_2 - x_3 + 1.5 \cos \varphi_3)^2 + (y_2 + \operatorname{sen} \varphi_2 - y_3 + 1.5 \operatorname{sen} \varphi_3)^2 - 36 = 0$$

#### Planteamiento de las restricciones motrices

Como en el ejemplo 1.

$$\Phi_9 \equiv \varphi_2 - \frac{3}{4} \pi - 100 t = 0$$

#### Sistema de ecuaciones de restricción correspondientes al mecanismo

En este sistema se agrupan todas las ecuaciones obtenidas anteriormente.

$$\begin{aligned} \Phi_1 &\equiv x_1 = 0 \\ \Phi_2 &\equiv y_1 = 0 \\ \Phi_3 &\equiv \varphi_1 = 0 \\ \Phi_4 &\equiv x_1 - x_2 + \cos \varphi_2 = 0 \\ \Phi_5 &\equiv y_1 - y_2 + \operatorname{sen} \varphi_2 = 0 \\ \Phi_6 &\equiv x_1 + 3 \cos \varphi_1 - x_4 - 1.5 \cos \varphi_3 = 0 \\ \Phi_7 &\equiv y_1 + 3 \operatorname{sen} \varphi_1 - y_4 - 1.5 \operatorname{sen} \varphi_3 = 0 \\ \Phi_8 &\equiv (x_2 + \cos \varphi_2 - x_3 + 1.5 \cos \varphi_3)^2 + (y_2 + \operatorname{sen} \varphi_2 - y_3 + 1.5 \operatorname{sen} \varphi_3)^2 - 36 = 0 \\ \Phi_9 &\equiv \varphi_2 - \frac{3}{4} \pi - 100 t = 0 \end{aligned}$$

*Solución de las ecuaciones de restricción para el instante inicial*

Para  $t = 0$  la solución del sistema es:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 & ; & & y_1 &= 0 & ; & & \varphi_1 &= 0^\circ \\ x_2 &= 0.7071 & ; & & y_2 &= 0.7071 & ; & & \varphi_2 &= 135^\circ \\ x_3 &= 3.7849 & ; & & y_3 &= 1.2783 & ; & & \varphi_3 &= 238.45^\circ \end{aligned}$$

*Ejemplo 4*

Deben plantearse las ecuaciones de restricción correspondientes al mecanismo biela-manivela de la figura y resolverlas para el instante inicial,  $t = 0$ .



$$\begin{aligned} O_A A &= 2 \\ AB &= 6 \end{aligned}$$

Este mecanismo es el mismo del ejemplo 3, pero considerando que el elemento n.º 4 está integrado en una junta de revolución-traslación.

Resolución:

*Número de incógnitas*

Al considerarse que este modelo está formado por 3 elementos, las variables del problema son las componentes de los vectores  $\mathbf{q}_i$  ( $i = 1, \dots, 3$ ). Se tienen, por tanto:

$$3 \cdot 3 = 9 \text{ incógnitas}$$

*Número de restricciones simples*

Al haber un único elemento fijo (elemento n.º 1) existen:

$$1 \cdot 3 = 3 \text{ restricciones simples}$$

*Juntas*

En la siguiente tabla se recogen los datos correspondientes a cada uno de los pares elementales del mecanismo.

N.º Junta	Elemento i	Elemento j	Tipo de junta	N.º de restricciones
1	1	2	r	2
2	2	3	r	2
3	3	1	r-t	1

*Número de ecuaciones de restricción*

El número de ecuaciones de ligadura para este mecanismo es:

$$\begin{aligned}
 N.º \text{ restricciones} &= N.º \text{ restricciones simples} + N.º \text{ juntas } r \times 2 + N.º \text{ juntas } tr \times 1 = \\
 &= 3 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 3 + 4 + 1 = 8
 \end{aligned}$$

*Grados de libertad y número de restricciones matrices adicionales*

El número de grados de libertad es:

$$g.d.l. = 9 - 8 = 1$$

Es preciso añadir tantas ecuaciones matrices como grados de libertad tenga el mecanismo, por lo que se necesita una única ecuación matriz.

*Elección de los sistemas de referencia y determinación de las coordenadas locales que definen la posición de las juntas en cada elemento*

- Referencia global.

Como en el ejemplo 2.

- Referencia local ligada al elemento 1.

Como en el ejemplo 2.

$$(\xi_1^{O_A}, \eta_1^{O_A}) = (0, 0)$$

- Referencia local ligada al elemento 2.

Como en el ejemplo 2.

$$(\xi_2^{O_A}, \eta_2^{O_A}) = (-1, 0) \quad ; \quad (\xi_2^A, \eta_2^A) = (1, 0)$$

- Referencia local ligada al elemento 3.

Como en el ejemplo 2.

$$(\xi_3^A, \eta_3^A) = (-3, 0) \quad ; \quad (\xi_3^B, \eta_3^B) = (3, 0)$$

*Planteamiento de las ecuaciones de restricción simples*

Como en el ejemplo 2.

$$\left. \begin{aligned}
 \Phi_1 &\equiv x_1 = 0 \\
 \Phi_2 &\equiv y_1 = 0 \\
 \Phi_3 &\equiv \varphi_1 = 0
 \end{aligned} \right\}$$

Planteamiento de las ecuaciones de restricción correspondientes a cada junta

□ Junta n.º 1.

Como en el ejemplo 2.

$$\left. \begin{aligned} \Phi_4 &\equiv x_1 - x_2 + \cos \varphi_2 = 0 \\ \Phi_5 &\equiv y_1 - y_2 + \text{sen } \varphi_2 = 0 \end{aligned} \right\}$$

□ Junta n.º 2.

Igual a la junta n.º 3 del ejemplo 2.

$$\left. \begin{aligned} \Phi_6 &\equiv x_2 + \cos \varphi_2 - x_3 + 3 \cos \varphi_3 = 0 \\ \Phi_7 &\equiv y_2 + \text{sen } \varphi_2 - y_3 + 3 \text{sen } \varphi_3 = 0 \end{aligned} \right\}$$

□ Junta n.º 3.

Se trata de una junta de revolución-traslación, que responde a la expresión general obtenida en el apartado 4.5:

$$\Phi^{(r,1)} \equiv (x_i^P - x_j^Q)(y_j^P - y_j^Q) - (y_i^P - y_j^Q)(x_j^P - x_j^Q) = 0$$

Donde,  $P_i$  es el punto del elemento  $i$  (elemento n.º 3) que define la posición de la junta de revolución, y  $P_j$  y  $Q_j$  son dos puntos ligados al elemento  $j$  (en este caso el miembro n.º 1) y situados sobre la línea de acción de la de junta simple de traslación. Así pues, se tiene que:

$$P_i \equiv B \Rightarrow (\xi_i^P, \eta_i^P) \equiv (\xi_3^B, \eta_3^B) = (3, 0)$$

Y aplicando las ecuaciones de transformación:

$$\begin{aligned} x_i^P &= x_i + \xi_i^P \cos \varphi_i - \eta_i^P \text{sen } \varphi_i \\ y_i^P &= y_i + \xi_i^P \text{sen } \varphi_i + \eta_i^P \cos \varphi_i \end{aligned}$$

Se tiene que:

$$P_i \rightarrow \begin{cases} x_i^P \equiv x_3^B = x_3 + 3 \cos \varphi_3 \\ y_i^P \equiv y_3^B = y_3 + 3 \text{sen } \varphi_3 \end{cases}$$

En cuanto a  $P_j$  y  $Q_j$ , pueden seleccionarse de forma arbitraria, y para obtener mayor simplicidad en los cálculos se han elegido los puntos con las siguientes coordenadas locales:

$$\begin{aligned} P_j \equiv P_1 &= (\xi_1^P, \eta_1^P) = (0, 0) \\ Q_j \equiv Q_1 &= (\xi_1^Q, \eta_1^Q) = (1, 0) \end{aligned}$$

Estas coordenadas, como se vio en el ejemplo 2, verifican las relaciones:

$$\begin{aligned} P_j &\rightarrow \begin{cases} x_j^P \equiv x_1^P = x_1 \\ y_j^P \equiv y_1^P = y_1 \end{cases} \\ Q_j &\rightarrow \begin{cases} x_j^Q \equiv x_1^Q = x_1 + \cos \varphi_1 \\ y_j^Q \equiv y_1^Q = y_1 + \text{sen } \varphi_1 \end{cases} \end{aligned}$$

Y sustituyendo en la expresión general de las ecuaciones de ligadura se obtiene:

$$\Phi_8 \equiv (x_3 + 3 \cos \varphi_3 - x_1 - \cos \varphi_1)(y_1 - y_1 - \text{sen } \varphi_1) - (y_3 + 3 \text{sen } \varphi_3 - y_1 \text{sen } \varphi_1)(x_1 - x_1 - \cos \varphi_1) = 0$$

Simplificando la expresión anterior se llega a:

$$\Phi_8 \equiv (x_3 + 3 \cos \varphi_3 - x_1 \cos \varphi_1) \text{sen } \varphi_1 + (y_3 + 3 \text{sen } \varphi_3 - y_1 - \text{sen } \varphi_1) \cos \varphi_1 = 0$$

**Planteamiento de las restricciones motrices**

Como en el ejemplo 2.

$$\Phi_9 \equiv \varphi_2 - \frac{\pi}{4} - 100 t = 0$$

**Sistema de ecuaciones de restricción correspondientes al mecanismo**

En este sistema se agrupan todas las ecuaciones obtenidas anteriormente.

$$\Phi_1 \equiv x_1 = 0$$

$$\Phi_2 \equiv y_1 = 0$$

$$\Phi_3 \equiv \varphi_1 = 0$$

$$\Phi_4 \equiv x_1 - x_2 + \cos \varphi_2 = 0$$

$$\Phi_5 \equiv y_1 - y_2 + \text{sen } \varphi_2 = 0$$

$$\Phi_6 \equiv x_2 + \cos \varphi_2 - x_3 + 3 \cos \varphi_3 = 0$$

$$\Phi_7 \equiv y_2 + \text{sen } \varphi_2 - y_3 + 3 \text{sen } \varphi_3 = 0$$

$$\Phi_8 \equiv (x_3 + 3 \cos \varphi_3 - x_1 - \cos \varphi_1) \text{sen } \varphi_1 + (y_3 + 3 \text{sen } \varphi_3 - y_1 \text{sen } \varphi_1) \cos \varphi_1 = 0$$

$$\Phi_9 \equiv \varphi_2 - \frac{\pi}{4} - 100 t = 0$$

**Solución de las ecuaciones de restricción para el instante inicial**

Para t = 0 la solución del sistema es:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 & ; & & y_1 &= 0 & ; & & \varphi_1 &= 0^\circ \\ x_2 &= 0.7071 & ; & & y_2 &= 0.7071 & ; & & \varphi_2 &= 45^\circ \\ x_3 &= 4.3297 & ; & & y_3 &= 0.7071 & ; & & \varphi_3 &= 346.37^\circ \end{aligned}$$

**Engranajes**

El contacto entre los dientes de un engranaje no se produce sobre una superficie, sino en una línea tangente a ambos perfiles. Por ello, los engranajes son pares cinemáticos superiores.

**Engranajes cilíndricos**

Dado que las ruedas que forman un engranaje giran alrededor de su centro, que permanece fijo, se representa este tipo de pares por las dos ruedas que engranan, i y j, más un tercer elemento, k, al que están ligados los centros de las ruedas.

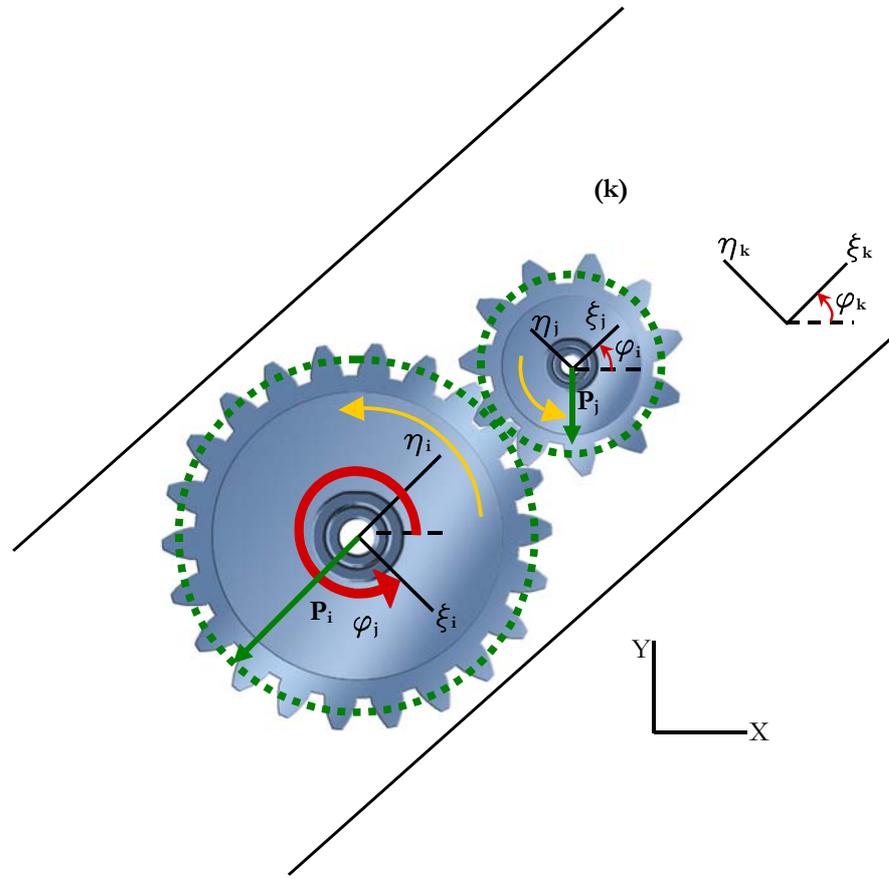


Figura 13.28. Engranaje cilíndrico.

Como es sabido, en toda rueda dentada puede definirse una circunferencia imaginaria llamada circunferencia primitiva, tal que el movimiento relativo entre las circunferencias primitivas correspondientes a dos ruedas que engranan es siempre de rodadura sin deslizamiento. Por ello, resulta útil definir este tipo de pares cinemáticos por las dos circunferencias primitivas de las ruedas dentadas  $i$  y  $j$ .

Si se considera que el cuerpo  $k$  es fijo, basta con imponer la condición de no deslizamiento entre las ruedas primitivas o, lo que es lo mismo, con exigir que las velocidades lineales de ambas ruedas en el punto en que se produce la rodadura pura sean iguales.

Siendo  $P$  el punto en el que se produce la tangencia entre las ruedas primitivas y siendo  $v_i$  y  $v_j$  las velocidades lineales del punto  $P$ , de la rueda  $i$  y la rueda  $j$  respectivamente, debe verificarse que:

$$v_i = v_j$$

Como se sabe, la velocidad lineal puede expresarse como el producto del radio de giro por la velocidad angular. Dado que el ángulo  $\nu$  indica el giro relativo de cada una de las ruedas respecto al sistema global, su derivada coincide con el módulo de la velocidad angular aunque afectada por el signo correspondiente; variación angular positiva o negativa. Así pues, teniendo en cuenta que las ruedas de un engranaje giran siempre con sentidos opuestos, puede escribirse la relación anterior en la forma:

$$\rho_i \dot{\phi}_i = -\rho_j \dot{\phi}_j \Rightarrow \rho_i \frac{d\phi_i}{dt} = -\rho_j \frac{d\phi_j}{dt} \Rightarrow \rho_i d\phi_i = -\rho_j d\phi_j \quad (35)$$

Donde  $\rho_i$  y  $\rho_j$  representan los radios primitivos de las ruedas  $i$  y  $j$ .

Integrando la expresión anterior entre el momento inicial y un instante genérico  $t$  se obtiene:

$$\begin{aligned} \rho_i \int_0^t d\varphi_i &= -\rho_j \int_0^t d\varphi_j \Rightarrow \rho_i(\varphi_i - \varphi_i^0) = -\rho_j(\varphi_j - \varphi_j^0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \rho_i(\varphi_i - \varphi_i^0) + \rho_j(\varphi_j - \varphi_j^0) = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

Siendo  $\varphi_i^0$  y  $\varphi_j^0$  los valores iniciales de las coordenadas angulares  $\varphi_i$  y  $\varphi_j$  respectivamente.

Hasta ahora se había supuesto que el elemento  $k$  permanecía fijo, sin embargo, si este miembro girase con una velocidad angular  $\dot{\varphi}_k$ , las ruedas, fijadas a él, se moverían solidariamente. Por ello, si se le diera al conjunto un giro igual y opuesto al del elemento  $k$ , se obtendría un sistema equivalente al que se acaba de estudiar. Se llamará  $\dot{\varphi}'_i$  y  $\dot{\varphi}'_j$  a las velocidades resultantes de superponer al giro de las ruedas  $i$  y  $j$  otro contrario al del elemento  $k$ :

$$\dot{\varphi}'_i = \dot{\varphi}_i - \dot{\varphi}_k \quad ; \quad \dot{\varphi}'_j = \dot{\varphi}_j - \dot{\varphi}_k$$

Según lo anteriormente expuesto, estas nuevas variables han de verificar la relación (36), por lo que se tiene que:

$$\rho_i(\varphi'_i - \varphi_i^0) + \rho_j(\varphi'_j - \varphi_j^0) = 0 \quad (37)$$

Y deshaciendo el cambio de variables se llega a la ecuación que constituye la ecuación de restricción del par engranaje cilíndrico:

$$[(\varphi_i - \varphi_i^0) - (\varphi_k - \varphi_k^0)] \rho_i + [(\varphi_j - \varphi_j^0) - (\varphi_k - \varphi_k^0)] \rho_j = 0 \quad (38)$$

Engranaje piñón-cremallera

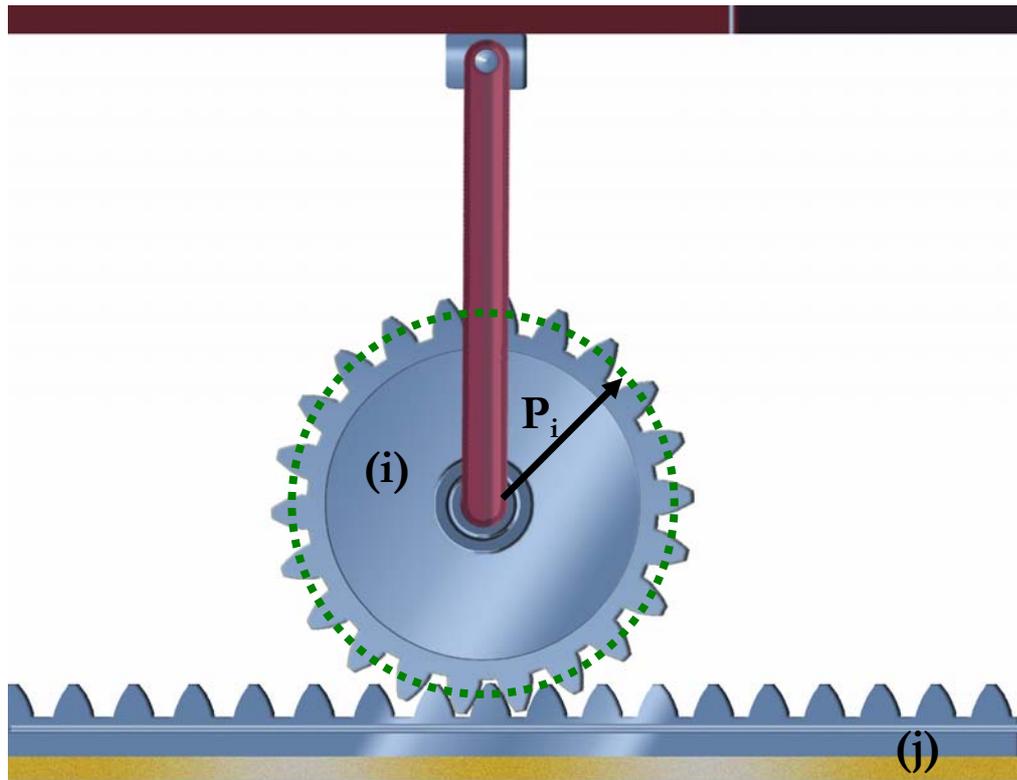


Figura 13.29. Piñón fijo y cremallera.

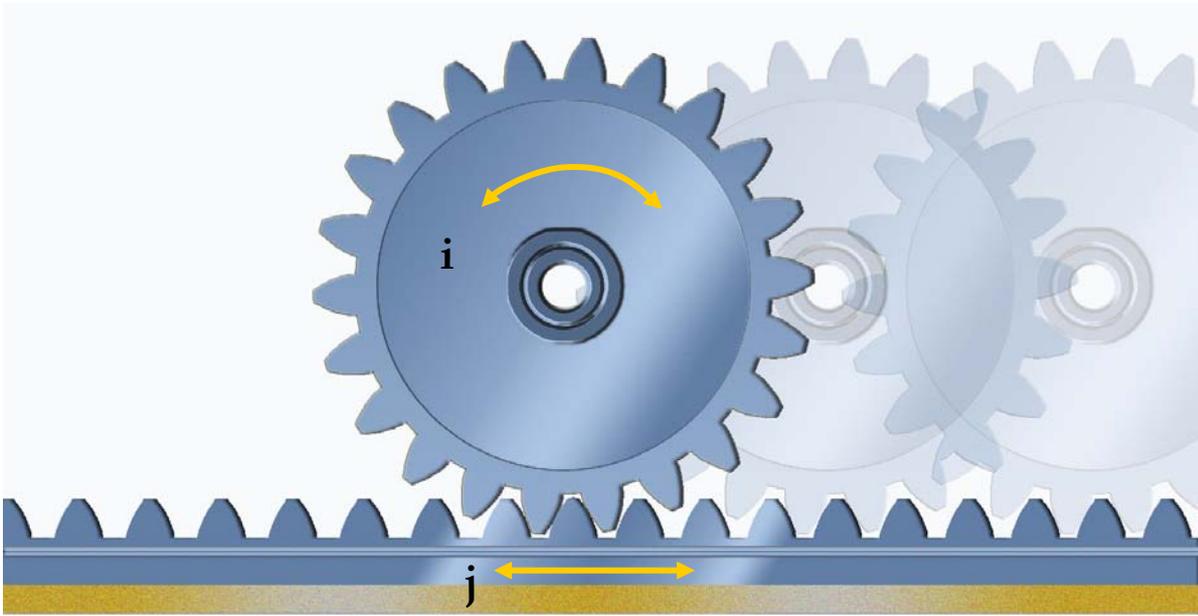
Se estudiará ahora el par cinemático formado por un piñón  $i$ , de centro fijo, que engrana con una cremallera  $j$ , la cual se desplaza paralelamente al eje global  $x$ .

En este caso, la velocidad lineal de la cremallera en el punto de contacto viene dada por la derivada de su coordenada  $x_j$ . Por tanto, la condición que impide el deslizamiento relativo entre la cremallera y el piñón puede expresarse como:

$$\rho_i \dot{\varphi}_i = \dot{x}_j \Rightarrow \rho_i \frac{d\varphi_i}{dt} = \frac{dx_j}{dt} \Rightarrow \rho_i d\varphi_i = dx_j \quad (39)$$

Integrando la expresión anterior entre 0 y  $t$  se llega a la ecuación de restricción cuando el piñón no se desplaza:

$$(\varphi_i - \varphi_i^0) \rho_i - (x_j - x_j^0) = 0 \quad (40)$$



**Figura 13.30.** Piñón desplazable y cremallera.

Si además el piñón se desliza paralelamente a la cremallera, a la velocidad tangencial del piñón que se tenía en el caso anterior, hay que sumarle su velocidad de traslación como sólido rígido, que es igual a la derivada de su coordenada  $x_i$ . La condición de rodadura pura presenta la forma:

$$\dot{x}_i + \rho_i \dot{\varphi}_i = \dot{x}_j \Rightarrow \frac{d x_i}{d t} + \rho_i \frac{d \varphi_i}{d t} = \frac{d x_j}{d t} \Rightarrow d x_i + \rho_i d \varphi_i = d x_j \quad (41)$$

Y al integrar se obtiene:

$$(x_i - x_i^0) + (\varphi_i - \varphi_i^0) \rho_i - (x_j - x_j^0) = 0 \quad (42)$$

### 13.6 ANÁLISIS CINEMÁTICO

En los apartados anteriores, para determinar un sistema mecánico se han utilizado como variables las tres coordenadas que definen la ubicación y la orientación del sistema de referencia local asociado a cada elemento.

En la figura del ejemplo 1 se muestra un sistema mecánico con tres barras. En general, se dice que las  $q_i$  coordenadas escogidas para describir la configuración de un sistema se agrupan para formar un vector algebraico  $\mathbf{q}$ , llamado vector de coordenadas.

En concreto, para el ejemplo citado, el vector de coordenadas podría ser:

$$q = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \varphi_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \varphi_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}$$

Como la posición del mecanismo evoluciona con el tiempo, las coordenadas son funciones de este, y en general, para  $n$  coordenadas, puede emplearse el siguiente vector:

$$q(t) = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{bmatrix}$$

Normalmente este vector se suele escribir como fila en lugar de en columna, y por tanto, es más usual la siguiente expresión:

$$q(t) = [q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)]^T$$

Recuerde el lector que el superíndice  $T$  indica que este vector fila es el traspuesto del vector original.

Una vez definidas las coordenadas que describen el mecanismo, es necesario encontrar las  $m$  ecuaciones de restricción independientes entre sí, que relacionan las  $n$  coordenadas del sistema. En cinemática plana lo normal es encontrar mecanismos con un grado de libertad, y por tanto:

$$n = m + 1$$

Cada una de las  $m$  restricciones geométricas puede expresarse en forma de una función escalar  $\Phi$  de las  $n$  coordenadas del sistema. En general, la  $i$ -ésima ecuación de restricción puede escribirse en la forma:

$$\Phi_i = \Phi_i [q_1, q_2, \dots, q_n]^T = \Phi_i(q) = 0$$

En el ejemplo 1 se obtuvieron las ecuaciones de restricción que eran de la forma:

$$\Phi_1 \equiv x_1 = 0$$

$$\Phi_2 \equiv y_1 = 0$$

$$\Phi_3 \equiv \varphi_1 = 0$$

$$\Phi_4 \equiv x_1 - x_2 + \cos \varphi_2 = 0$$

$$\Phi_5 \equiv y_1 - y_2 + \text{sen } \varphi_2 = 0$$

$$\vdots$$

$$\Phi_{11} \equiv y_3 + 3 \text{ sen } \varphi_3 - y_4 + 1.5 \text{ sen } \varphi_4 = 0$$

Llamando  $\Phi$  al vector formado por las funciones escalares  $\Phi_i$ , se puede escribir:

$$\Phi = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \varphi_1 \\ x_1 - x_2 + \cos \varphi_2 \\ y_1 - y_2 + \text{sen } \varphi_2 \\ \vdots \\ y_3 + 3 \text{ sen } \varphi_3 - y_4 + 1.5 \text{ sen } \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Y en general, en notación matricial para el sistema de ecuaciones de restricción:

$$\Phi (q) = 0$$

Como realmente se han planteado  $m$  ecuaciones de restricción y existen  $n$  coordenadas ( $n = m + 1$ ), falta una ecuación para poder resolver el mecanismo. La ecuación que falta debe ser una ecuación motriz que defina perfectamente una de las coordenadas en función del tiempo.

Al final, se dispone de un sistema de  $n$  ecuaciones ( $m$  restricciones geométricas más una restricción motriz) que permite determinar las diferentes posiciones que el mecanismo adopta en el tiempo.

Para determinar las diferentes velocidades del mecanismo es necesario obtener el sistema de ecuaciones cinemáticas de velocidad. Estas ecuaciones se hallan derivando las ecuaciones de restricción respecto al tiempo.

Para una ecuación de restricción  $\Phi_i$  se tendrá:

$$\frac{d\Phi_i}{dt} = 0$$

O lo que es lo mismo:

$$\frac{d\Phi_i}{dt} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_2} \frac{dq_2}{dt} + \dots + \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_n} \frac{dq_n}{dt} = 0$$

En general, teniendo en cuenta todas las ecuaciones de restricción, la expresión matricial del sistema de ecuaciones de velocidad es:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \Phi_q \dot{q} = 0$$

Donde,  $\Phi_q$  es una matriz cuyos términos son las derivadas parciales de las ecuaciones de restricción respecto a las coordenadas del sistema. A esta matriz se la denomina matriz jacobiana.

Para un mecanismo de  $m$  ecuaciones de restricción y  $n$  coordenadas, la matriz jacobiana tiene la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_2} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_3} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial q_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial q_2} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial q_3} & \dots & \frac{\partial \Phi_2}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_m}{\partial q_1} & \frac{\partial \Phi_m}{\partial q_2} & \frac{\partial \Phi_m}{\partial q_3} & \dots & \frac{\partial \Phi_m}{\partial q_n} \end{bmatrix}$$

Una vez conocidos los elementos de la matriz jacobiana correspondiente a cada tipo de par cinemático es posible ensamblarlos convenientemente para formar la matriz jacobiana asociada al mecanismo.

**Obtención de la matriz jacobiana**

Inicialmente, se van a plantear los elementos de la matriz jacobiana correspondientes a cada tipo de junta.

Par de revolución

En la siguiente tabla están recogidos todos los elementos de la matriz jacobiana correspondiente a una junta simple de revolución que conecta dos elementos i y j.

	$\partial / \partial x_i$	$\partial / \partial y_i$	$\partial / \partial \varphi_i$	$\partial / \partial x_j$	$\partial / \partial y_j$	$\partial / \partial \varphi_j$
$\Phi_1^{(r,2)}$	1	0	$-(y_i^p - y_i)$	-1	0	$(y_j^p - y_j)$
$\Phi_2^{(r,2)}$	0	1	$(x_i^p - x_i)$	0	-1	$-(x_j^p - x_j)$

**Tabla 13.1.** Matriz jacobiana para un par cinemático de revolución.

Para obtener los elementos de la matriz jacobiana del par de revolución basta con derivar las ecuaciones de restricción de esta junta respecto a sus coordenadas características.

Como se ha visto en los apartados anteriores, las ecuaciones de restricción de una junta de revolución son:

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(r,2)} &\equiv (x_i + \xi_i^p \cos \varphi_i - \eta_i^p \text{sen } \varphi_i) - (x_j + \xi_j^p \cos \varphi_j - \eta_j^p \text{sen } \varphi_j) = 0 \\ \Phi_2^{(r,2)} &\equiv (y_i + \xi_i^p \text{sen } \varphi_i + \eta_i^p \cos \varphi_i) - (y_j + \xi_j^p \text{sen } \varphi_j + \eta_j^p \cos \varphi_j) = 0 \end{aligned}$$

No obstante, para derivar estas ecuaciones resulta más cómodo trabajar con una expresión más compacta, y empleando las relaciones de transformación puede escribirse

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(r,2)} &\equiv x_i^p - x_j^p = 0 \\ \Phi_2^{(r,2)} &\equiv y_i^p - y_j^p = 0 \end{aligned}$$

Como es sabido, los elementos de la matriz jacobiana asociada a un vector de funciones escalares,  $\Phi(\mathbf{q})$  se calculan mediante la expresión:

$$[\Phi_q]_{i,j} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_j}$$

Ya se comentó en el capítulo anterior que las ecuaciones de restricción tienen como variables las componentes de los vectores de coordenadas  $\mathbf{q}_i$  y  $\mathbf{q}_j$ , por lo que hay que derivar las funciones del primer miembro de las ecuaciones de ligadura respecto a los parámetros  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $\varphi_i$ ,  $x_j$ ,  $y_j$  y  $\varphi_j$ .

Derivadas de  $\Phi_1$  respecto a  $x_i$ ,  $y_i$  y  $\varphi_i$ :

$$\begin{aligned} \left[ \Phi_q^{(r,2)} \right]_{1,1} &= \frac{\partial \Phi_1^{(r,2)}}{\partial x_i} = \frac{\partial (x_i^P - x_j^P)}{\partial x_i} = 1 \\ \left[ \Phi_q^{(r,2)} \right]_{1,2} &= \frac{\partial \Phi_1^{(r,2)}}{\partial y_i} = \frac{\partial (x_i^P - x_j^P)}{\partial y_i} = 0 \\ \left[ \Phi_q^{(r,2)} \right]_{1,3} &= \frac{\partial \Phi_1^{(r,2)}}{\partial \varphi_i} = \frac{\partial (x_i^P - x_j^P)}{\partial \varphi_i} = -(y_i^P - y_j^P) \end{aligned}$$

Derivadas de  $\Phi_1$  respecto a  $x_j$ ,  $y_j$  y  $\varphi_j$ :

$$\begin{aligned} \left[ \Phi_q^{(r,2)} \right]_{1,4} &= \frac{\partial \Phi_1^{(r,2)}}{\partial x_j} = \frac{\partial (x_i^P - x_j^P)}{\partial x_j} = -1 \\ \left[ \Phi_q^{(r,2)} \right]_{1,5} &= \frac{\partial \Phi_1^{(r,2)}}{\partial y_j} = \frac{\partial (x_i^P - x_j^P)}{\partial y_j} = 0 \\ \left[ \Phi_q^{(r,2)} \right]_{1,6} &= \frac{\partial \Phi_1^{(r,2)}}{\partial \varphi_j} = \frac{\partial (x_i^P - x_j^P)}{\partial \varphi_j} = (y_j^P - y_i^P) \end{aligned}$$

Derivadas de  $\Phi_2$  respecto a  $x_i$ ,  $y_i$  y  $\varphi_i$ :

$$\begin{aligned} \left[ \Phi_q^{(r,2)} \right]_{2,1} &= \frac{\partial \Phi_2^{(r,2)}}{\partial x_i} = \frac{\partial (y_i^P - y_j^P)}{\partial x_i} = 0 \\ \left[ \Phi_q^{(r,2)} \right]_{2,2} &= \frac{\partial \Phi_2^{(r,2)}}{\partial y_i} = \frac{\partial (y_i^P - y_j^P)}{\partial y_i} = 1 \\ \left[ \Phi_q^{(r,2)} \right]_{2,3} &= \frac{\partial \Phi_2^{(r,2)}}{\partial \varphi_i} = \frac{\partial (y_i^P - y_j^P)}{\partial \varphi_i} = (x_i^P - x_j^P) \end{aligned}$$

Derivadas de  $\Phi_2$  respecto a  $x_j$ ,  $y_j$  y  $\varphi_j$ :

$$\begin{aligned} \left[ \Phi_q^{(r,2)} \right]_{2,4} &= \frac{\partial \Phi_2^{(r,2)}}{\partial x_j} = \frac{\partial (y_i^P - y_j^P)}{\partial x_j} = 0 \\ \left[ \Phi_q^{(r,2)} \right]_{2,5} &= \frac{\partial \Phi_2^{(r,2)}}{\partial y_j} = \frac{\partial (y_i^P - y_j^P)}{\partial y_j} = -1 \\ \left[ \Phi_q^{(r,2)} \right]_{2,6} &= \frac{\partial \Phi_2^{(r,2)}}{\partial \varphi_j} = \frac{\partial (y_i^P - y_j^P)}{\partial \varphi_j} = -(x_j^P - x_i^P) \end{aligned}$$

Par de Traslación

La siguiente tabla muestra los elementos de la matriz jacobiana asociada a una junta simple de traslación que enlaza dos elementos i y j.

	$\partial / \partial x_i$	$\partial / \partial y_i$	$\partial / \partial \varphi_i$	$\partial / \partial x_j$	$\partial / \partial y_j$	$\partial / \partial \varphi_j$
$\Phi_1^{(t,2)}$	$(y_i^p - y_i^o)$	$-(x_i^p - x_i^o)$	$-(x_j^p - x_i)(x_i^p - x_i^o) - (y_j^p - y_i)(y_i^p - y_i^o)$	$-(y_i^p - y_i^o)$	$(x_i^p - x_i^o)$	$(x_j^p - x_i)(x_i^p - x_i^o) + (y_j^p - y_i)(y_i^p - y_i^o)$
$\Phi_2^{(t,2)}$	0	0	1	0	0	-1

**Tabla 13.2.** Matriz jacobiana para un par cinemático de traslación.

Par de Revolución-Revolución

En la tabla 13.3. se indican los elementos de la matriz jacobiana correspondiente al par compuesto de revolución-revolución que liga dos elementos i y j.

	$\partial / \partial x_i$	$\partial / \partial y_i$	$\partial / \partial \varphi_i$	$\partial / \partial x_j$	$\partial / \partial y_j$	$\partial / \partial \varphi_j$
$\Phi^{(rr,1)}$	$2(x_i^p - x_j^p)$	$2(y_i^p - y_j^p)$	$-2(x_i^p - x_j^p)(y_i^p - y_j^p) + 2(y_i^p - y_j^p)(x_i^p - x_j^p)$	$-2(x_i^p - x_j^p)$	$-2(y_i^p - y_j^p)$	$2(x_i^p - x_j^p)(y_j^p - y_j^p) - 2(y_i^p - y_j^p)(x_j^p - x_j^p)$

**Tabla 13.3.** Matriz jacobiana para un par cinemático de revolución-revolución.

Par de Revolución-Traslación

La tabla siguiente muestra los elementos de la matriz jacobiana correspondiente al par múltiple de revolución-traslación que conecta dos elementos i y j de un mecanismo, en la forma ya señalada.

	$\partial / \partial x_i$	$\partial / \partial y_i$	$\partial / \partial \varphi_i$	$\partial / \partial x_j$	$\partial / \partial y_j$	$\partial / \partial \varphi_j$
$\Phi^{(rt,1)}$	$(y_j^p - y_j^o)$	$-(x_j^p - x_j^o)$	$-(y_i^p - y_i)(y_j^p - y_j^o) - (x_i^p - x_i)(x_j^p - x_j^o)$	$-(y_j^p - y_j^o)$	$(x_j^p - x_j^o)$	$(y_i^p - y_i)(y_j^p - y_j^o) + (x_i^p - x_i)(x_j^p - x_j^o)$

**Tabla 13.4.** Matriz jacobiana para un par cinemático de revolución-traslación.

**13.7 GENERACIÓN SISTEMÁTICA DE LAS ECUACIONES DE VELOCIDAD**

Estas ecuaciones responden a la fórmula general:

$$\Phi_q \dot{q} = 0$$

Es evidente que conocer los elementos de la matriz jacobiana correspondiente al mecanismo es suficiente para poder plantear estas ecuaciones. Esto puede conseguirse calculando las componentes de la matriz jacobiana asociada a cada uno de los pares elementales del mecanismo. Después debe colocarse cada uno de estos elementos en la matriz global del sistema; en las filas correspondientes a las ecuaciones de restricción del par cinemático en cuestión, y en las columnas asociadas a las coordenadas de los elementos enlazados por la junta. Una vez situados todos estos elementos, pueden igualarse a cero el resto de las componentes de la matriz global. Posteriormente, es necesario multiplicar esta matriz por el vector velocidad e igualar el producto a cero.

Como se ha visto en el ejemplo 1, en un análisis cinemático es preciso añadir tantas ecuaciones motrices como grados de libertad tenga el mecanismo, con el fin de obtener un sistema con igual número de ecuaciones que de incógnitas.

Para distinguir las ecuaciones motrices de las restricciones geométricas, se denotarán las primeras con un superíndice (d).

Se tendrá, pues, un sistema formado por:

$$m \text{ restricciones geométricas } \Phi = \Phi(q) = 0$$

$$k \text{ ecuaciones motrices } \Phi^{(d)} = \Phi^{(d)}(q, t) = 0$$

Estas ecuaciones representan un sistema formado por  $m + k = n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas (las  $n$  componentes de  $q$ ).

La derivada de las restricciones geométricas es, como se sabe:

$$\Phi_q \dot{q} = 0$$

Teniendo en cuenta que ahora  $\Phi^{(d)}$  depende directamente del tiempo, la ecuación motriz es:

$$\frac{d\Phi^{(d)}}{dt} = \frac{\partial\Phi^{(d)}}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial\Phi^{(d)}}{\partial t} \frac{dt}{dt} = \Phi_q^{(d)} \dot{q} + \Phi_t^{(d)} = 0$$

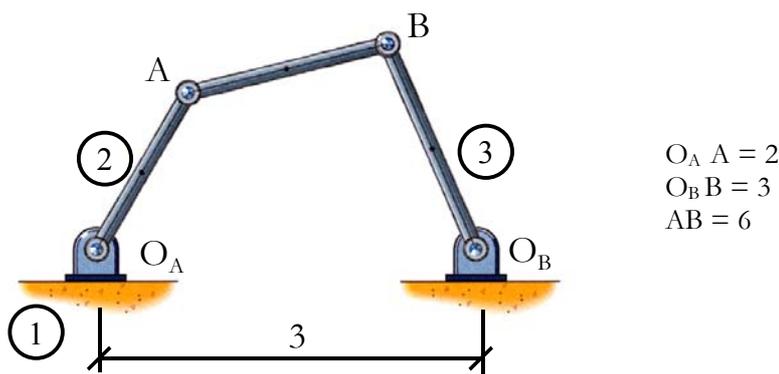
En donde  $\Phi_q^{(d)}$  es la matriz jacobiana de las ecuaciones motrices y  $\Phi_t^{(d)}$  son las derivadas parciales de las ecuaciones motrices respecto al tiempo.

Agrupando las expresiones obtenidas para las restricciones geométricas y para las ecuaciones motrices, el sistema de ecuaciones de velocidad toma la forma:

$$\begin{bmatrix} \Phi_q \\ \Phi_q^{(d)} \end{bmatrix} \dot{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\Phi_t^{(d)} \end{bmatrix}$$

**Ejemplo 5**

Se deben plantear las ecuaciones de velocidad correspondientes al cuadrilátero articulado de la figura para el instante inicial,  $t = 0$ , resolverlas y determinar las velocidades globales de los puntos A y B.



Como puede apreciarse, el mecanismo que se va a estudiar es el mismo del ejemplo 3 del capítulo 3, en el que se obtuvieron sus ecuaciones de restricción, así como su solución para  $t = 0$ .

Resolución:

*Coordenadas locales de los puntos empleados para representar la posición de las juntas*

Estas coordenadas se estimaron ya en el ejemplo 3 y valen:

$$\begin{aligned} (\xi_1^{O_A}, \eta_1^{O_A}) &= (0, 0) & ; & & (\xi_2^{O_A}, \eta_2^{O_A}) &= (-1, 0) \\ (\xi_1^{O_B}, \eta_1^{O_B}) &= (3, 0) & ; & & (\xi_3^{O_B}, \eta_3^{O_B}) &= (1.5, 0) \\ (\xi_2^A, \eta_2^A) &= (1, 0) \\ (\xi_3^B, \eta_3^B) &= (-1.5, 0) \end{aligned}$$

*Coordenadas que definen la posición del mecanismo en el instante inicial, t = 0*

Se obtuvieron ya en el ejemplo 3 al resolver el sistema de ecuaciones de restricción particularizado para t = 0.

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 & ; & & y_1 &= 0 & ; & & \varphi_1 &= 0^\circ \\ x_2 &= 0.7071 & ; & & y_2 &= 0.7071 & ; & & \varphi_2 &= 135^\circ \\ x_3 &= 3.7849 & ; & & y_3 &= 1.2783 & ; & & \varphi_3 &= 238.45^\circ \end{aligned}$$

*Coordenadas globales de los puntos empleados para representar la posición de las juntas, en el instante inicial, t = 0*

Utilizando las relaciones de transformación pueden determinarse las coordenadas de cualquier punto del mecanismo, una vez conocidas las coordenadas del sistema.

$$\begin{aligned} x_i^P &= x_i + \xi_i^P \cos \varphi_i - \eta_i^P \operatorname{sen} \varphi_i \\ y_i^P &= y_i + \xi_i^P \operatorname{sen} \varphi_i + \eta_i^P \cos \varphi_i \end{aligned}$$

Y teniendo en cuenta que para los sistemas de referencia escogidos (ver ejemplo 3) la segunda coordenada local es siempre nula, pueden simplificarse las ecuaciones anteriores, quedando:

$$\begin{aligned} x_i^P &= x_i + \xi_i^P \cos \varphi_i \\ y_i^P &= y_i + \xi_i^P \operatorname{sen} \varphi_i \end{aligned}$$

- Coordenadas globales del punto  $O_A$  (para t = 0).

Si se considera que  $O_A$  es un punto fijo del miembro 1, puede escribirse:

$$\begin{aligned} x^{O_A} &= x_1 + \xi_1^{O_A} \cos \varphi_1 = 0 \\ y^{O_A} &= y_1 + \eta_1^{O_A} \operatorname{sen} \varphi_1 = 0 \end{aligned}$$

- Coordenadas globales del punto  $O_B$  (para t = 0).

Teniendo en cuenta que  $O_B$  es un punto fijo del elemento 1, se obtiene:

$$\begin{aligned} x^{O_B} &= x_1 + \xi_1^{O_B} \cos \varphi_1 = 3 \cos 0^\circ = 3 \\ y^{O_B} &= y_1 + \eta_1^{O_B} \operatorname{sen} \varphi_1 = 0 \end{aligned}$$

- Coordenadas globales del punto A (para t = 0).

Se calcularon ya en el ejemplo 3.

$$x^A = -1.4142 \quad ; \quad y^A = 1.4142$$

□ Coordenadas globales del punto B (para  $t = 0$ ).

También se calcularon en el ejemplo 3.

$$x^B = 4.5697 \quad ; \quad y^B = 2.5566$$

*Matriz jacobiana correspondiente a las restricciones simples*

Como las restricciones simples son de la forma  $x_i = cte$ , la única derivada no nula es:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = 1$$

Así pues, los únicos elementos no nulos de las matrices jacobianas correspondientes a las restricciones 1, 2 y 3 son:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} = 1$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1} = 1$$

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi_1} = 1$$

*Matriz jacobiana correspondiente a cada junta*

□ Junta n.º 1.

Se trata de una junta de revolución que conecta los elementos 1 y 2, y que daba lugar a las ecuaciones de restricción 4 y 5. Por tratarse de una unión de revolución, la forma general de su correspondiente matriz jacobiana es:

	$\partial / \partial x_i$	$\partial / \partial y_i$	$\partial / \partial \varphi_i$	$\partial / \partial x_j$	$\partial / \partial y_j$	$\partial / \partial \varphi_j$
$\Phi_1^{(r,2)}$	1	0	$-(y_i^p - y_i)$	-1	0	$(y_j^p - y_j)$
$\Phi_2^{(r,2)}$	0	1	$(x_i^p - x_i)$	0	-1	$-(x_j^p - x_j)$

Considerando que en esta junta:

$$\left. \begin{aligned} P &\equiv O_A \\ i &\equiv 1 \\ j &\equiv 2 \end{aligned} \right\}$$

Se tiene que:

$$(x_i^p - x_i) = (x^{O_A} - x_1) = 0 \quad 0 = 0$$

$$(y_i^p - y_i) = (y^{O_A} - y_1) = 0 \quad 0 = 0$$

$$(x_j^p - x_j) = (x^{O_A} - x_2) = 0 + 0.7071 = 0.7071$$

$$(y_j^p - y_j) = (y^{O_A} - y_2) = 0 - 0.7071 = -0.7071$$

Por tanto, la matriz jacobiana para esta junta es:

	$\partial / \partial x_1$	$\partial / \partial y_1$	$\partial / \partial \varphi_1$	$\partial / \partial x_2$	$\partial / \partial y_2$	$\partial / \partial \varphi_2$
$\Phi_4$	1	0	0	-1	0	-0.7071
$\Phi_5$	0	1	0	0	-1	-0.7071

□ Junta n.º 2.

Se trata también de una junta de revolución, que proporciona las ecuaciones de restricción 6 y 7, y en la que:

$$\left. \begin{aligned} P &\equiv O_B \\ i &\equiv 1 \\ j &\equiv 3 \end{aligned} \right\}$$

Y procediendo del mismo modo que para la junta anterior, se llega a:

	$\partial / \partial x_1$	$\partial / \partial y_1$	$\partial / \partial \varphi_1$	$\partial / \partial x_3$	$\partial / \partial y_3$	$\partial / \partial \varphi_3$
$\Phi_6$	1	0	0	-1	0	-1.2783
$\Phi_7$	0	1	3	0	-1	0.7849

□ Junta n.º 3.

Se trata de una junta de revolución-revolución que une los elementos 2 y 3, y que proporcionaba la ecuación de restricción n.º 8. Por tratarse de una unión de revolución-revolución, la forma general de su matriz jacobiana es:

	$\partial / \partial x_i$	$\partial / \partial y_i$	$\partial / \partial \varphi_i$	$\partial / \partial x_j$	$\partial / \partial y_j$	$\partial / \partial \varphi_j$
$\Phi^{(\pi,1)}$	$2(x_i^p - x_j^p)$	$2(y_i^p - y_j^p)$	$-2(x_i^p - x_j^p)(y_i^p - y_j^p) + 2(y_i^p - y_j^p)(x_i^p - x_j^p)$	$-2(x_i^p - x_j^p)$	$-2(y_i^p - y_j^p)$	$2(x_i^p - x_j^p)(y_j^p - y_i^p) - 2(y_i^p - y_j^p)(x_j^p - x_i^p)$

Considerando que en esta junta:

$$\left. \begin{aligned} P_i &\equiv A \\ P_j &\equiv B \\ i &\equiv 2 \\ j &\equiv 3 \end{aligned} \right\}$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned} (x_i^p - x_j^p) &= (x^A - x^B) = -1.4142 + 0.7071 = -0.7071 \\ (y_i^p - y_j^p) &= (y^A - y^B) = 1.4142 - 0.7071 = 0.7071 \\ (x_j^p - x_j^p) &= (x^B - x^3) = 4.5697 - 3.7849 = 0.7849 \\ (y_j^p - y_j^p) &= (y^B - y^3) = 2.5566 - 1.2783 = 1.2783 \\ (x_i^p - x_j^p) &= (x^A - x^B) = -1.4142 - 4.5697 = -5.9840 \\ (y_i^p - y_j^p) &= (y^A - y^B) = 1.4142 - 2.5566 = -1.1424 \end{aligned}$$

Y sustituyendo estos valores en la expresión general se obtiene:

	$\partial / \partial x_2$	$\partial / \partial y_2$	$\partial / \partial \varphi_2$	$\partial / \partial x_3$	$\partial / \partial y_3$	$\partial / \partial \varphi_3$
$\Phi_8$	-11.968	-2.2848	10.0781	11.968	2.2848	-13.5053

*Matriz jacobiana correspondiente a las restricciones motrices*

La restricción motriz es:

$$\Phi_9 \equiv \varphi_2 - \frac{3\pi}{4} - 100t = 0$$

Derivando respecto al tiempo:

$$\frac{d\Phi_9}{dt} \equiv \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi_2} \dot{\varphi}_2 - 100 = 0$$

Así pues, la novena ecuación de velocidad es:

$$\dot{\varphi}_2 = 100$$

Y obviamente, el único elemento no nulo de la matriz jacobiana es:

$$\frac{\partial \Phi_9}{\partial \varphi_2} = 1$$

*Matriz jacobiana global para el instante t = 0*

Teniendo en cuenta que el orden de las ecuaciones de restricción se corresponde con el de las filas de la matriz jacobiana, y el de las coordenadas del mecanismo con las columnas, pueden ensamblarse las matrices anteriormente obtenidas en una única matriz jacobiana, que corresponde al mecanismo completo.

	$\partial / \partial x_1$	$\partial / \partial y_1$	$\partial / \partial \varphi_1$	$\partial / \partial x_2$	$\partial / \partial y_2$	$\partial / \partial \varphi_2$	$\partial / \partial x_3$	$\partial / \partial y_3$	$\partial / \partial \varphi_3$
$\Phi_1$	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$\Phi_2$	0	1	0	0	0	0	0	0	0
$\Phi_3$	0	0	1	0	0	0	0	0	0
$\Phi_4$	1	0	0	-1	0	-0.7071	0	0	0
$\Phi_5$	0	1	0	0	-1	-0.7071	0	0	0
$\Phi_6$	1	0	0	0	0	0	-1	0	-1.2783
$\Phi_7$	0	1	3	0	0	0	0	-1	0.7849
$\Phi_8$	0	0	0	-11.968	-2.2848	10.0781	11.968	2.2848	-13.505
$\Phi_9$	0	0	0	0	0	1	0	0	0

*Ecuaciones cinemáticas de velocidad para el instante inicial t = 0*

La expresión general de estas ecuaciones es:

$$\begin{bmatrix} \Phi_q \\ \Phi_q^{(d)} \end{bmatrix} \dot{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi_t^{(d)} \end{bmatrix}$$

Y particularizando para este caso se obtiene el siguiente sistema, en el que se agrupan todas las ecuaciones obtenidas anteriormente.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 0 \\ \dot{y}_1 &= 0 \\ \dot{\phi}_1 &= 0 \\ \dot{x}_1 - \dot{x}_2 - 0.7071 \dot{\phi}_2 &= 0 \\ \dot{y}_1 - \dot{y}_2 - 0.7071 \dot{\phi}_2 &= 0 \\ \dot{x}_1 - \dot{x}_3 - 1.2783 \dot{\phi}_3 &= 0 \\ \dot{y}_1 + 3 \dot{\phi}_1 - \dot{y}_3 + 0.7849 \dot{\phi}_3 &= 0 \\ -11.968 \dot{x}_2 - 2.2848 \dot{y}_2 + 10.0781 \dot{\phi}_2 + 11.968 \dot{x}_3 + 2.2848 \dot{y}_3 - 13.5053 \dot{\phi}_3 &= 0 \\ \dot{\phi}_2 &= 100 \end{aligned}$$

*Solución de las ecuaciones cinemáticas de velocidad*

La solución del sistema es:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 0 & ; & \dot{y}_1 = 0 & ; & \dot{\phi}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 &= 70.71 & ; & \dot{y}_2 = 70.71 & ; & \dot{\phi}_2 = 100 \\ \dot{x}_3 &= 95.391 & ; & \dot{y}_3 = 58.5719 & ; & \dot{\phi}_3 = 74.6233 \end{aligned}$$

*Velocidades globales de los puntos A y B en el instante inicial*

Haciendo uso de la primera derivada de las relaciones de transformación pueden determinarse las velocidades de cualquier punto del mecanismo, una vez conocidas las coordenadas y velocidades del sistema.

$$\begin{aligned} \dot{x}_i^P &= \dot{x}_i + \dot{\phi}_i ( -\xi_i^P \text{sen } \varphi_i - \eta_i^P \text{cos } \varphi_i ) \\ \dot{y}_i^P &= \dot{y}_i + \dot{\phi}_i ( \xi_i^P \text{cos } \varphi_i - \eta_i^P \text{sen } \varphi_i ) \end{aligned}$$

Y teniendo en cuenta que para los sistemas de referencia escogidos la segunda coordenada local es siempre nula, pueden simplificarse las ecuaciones anteriores, quedando:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i^P &= \dot{x}_i - \xi_i^P \dot{\phi}_i \text{sen } \varphi_i \\ \dot{y}_i^P &= \dot{y}_i + \xi_i^P \dot{\phi}_i \text{cos } \varphi_i \end{aligned}$$

□ Velocidad global del punto A (para t = 0).

Si se considera que A es un punto fijo del miembro 2, puede escribirse:

$$\begin{aligned} \dot{x}^A &= \dot{x}_2 - \xi_2^A \dot{\phi}_2 \text{sen } \varphi_2 = -70.71 - 100 \text{sen } 135^\circ = -141.4207 \\ \dot{y}^A &= \dot{y}_2 + \xi_2^A \dot{\phi}_2 \text{cos } \varphi_2 = -70.71 + 100 \text{cos } 135^\circ = -141.4207 \end{aligned}$$

Y el módulo del vector velocidad es

$$v^A = \sqrt{(\dot{x}^A)^2 + (\dot{y}^A)^2} = \sqrt{(-141.4207)^2 + (-141.4207)^2} = 200$$

□ Velocidad global del punto B (para  $t = 0$ ).

Teniendo en cuenta que B es un punto fijo del elemento 3, se obtiene:

$$\dot{x}^B = \dot{x}_3 - \xi_3^B \dot{\varphi}_3 \operatorname{sen} \varphi_3 = -95.391 + 1.5 \cdot 74.6233 \operatorname{sen} 238.45^\circ = -190.7802$$

$$\dot{y}^B = \dot{y}_3 + \xi_3^B \dot{\varphi}_3 \cos \varphi_3 = 58.5719 - 1.5 \cdot 74.6233 \cos 238.45^\circ = 117.1410$$

Y el módulo es:

$$v^B = \sqrt{(\dot{x}^B)^2 + (\dot{y}^B)^2} = \sqrt{(-190.7802)^2 + (117.1410)^2} = 223.8729$$

### 13.8 GENERACIÓN SISTEMÁTICA DE LAS ECUACIONES DE ACELERACIÓN

Como recordará el lector, para obtener la expresión matricial del sistema de ecuaciones de velocidad, bastaba con derivar las ecuaciones de restricción respecto al tiempo, es decir:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial q} \frac{dq}{dt} = \Phi_q \dot{q} = 0$$

Si lo que se quiere obtener es el sistema de ecuaciones cinemáticas de aceleración, basta derivar nuevamente las ecuaciones de velocidad respecto al tiempo. En definitiva, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Phi}{dt^2} &= \frac{d}{dt} (\Phi_q \dot{q}) = \frac{\partial}{\partial q} (\Phi_q \dot{q}) \frac{dq}{dt} + \frac{\partial}{\partial t} (\Phi_q \dot{q}) \frac{dt}{dt} = \\ &= (\Phi_q \dot{q})_q \dot{q} + \frac{\partial \Phi_q}{\partial t} \dot{q} + \Phi_q \ddot{q} = 0 \end{aligned}$$

Y considerando que la matriz jacobiana no depende directamente del tiempo, la representación matricial del sistema de ecuaciones cinemáticas de aceleración tomará la forma:

$$\frac{d^2 \Phi}{dt^2} = (\Phi_q \dot{q})_q \dot{q} + \Phi_q \ddot{q} = 0$$

En donde  $(\Phi_q \dot{q})_q$  representa las derivadas parciales, respecto a las coordenadas  $\mathbf{q}$ , del producto de la matriz jacobiana por el vector de velocidades de las coordenadas.

Escribiendo la ecuación de aceleraciones en la forma  $\Phi_q \ddot{q} = -(\Phi_q \dot{q})_q \dot{q}$ , se tiene una ecuación en la que el segundo miembro es un vector algebraico que suele representarse por  $\boldsymbol{\gamma}$ . En este caso las ecuaciones de aceleración pueden escribirse como:

$$\Phi_q \ddot{q} = \boldsymbol{\gamma}$$

Siendo:

$$\boldsymbol{\gamma} = -(\Phi_q \dot{q})_q \dot{q}$$

Al igual que ocurre con las ecuaciones de restricción y con la matriz jacobiana, los elementos del vector  $\boldsymbol{\gamma}$  pueden generarse de forma sistemática.

Veamos un ejemplo de cómo se obtienen los elementos del vector  $\boldsymbol{\gamma}$  para una junta de revolución. En primer lugar se va a realizar el producto de la matriz jacobiana  $\Phi_q$  por el vector de velocidades  $\dot{\boldsymbol{q}}$ .

Teniendo en cuenta que las ecuaciones de restricción correspondientes a una junta de revolución dependen únicamente de los elementos  $i$  y  $j$  que componen el par cinemático, es claro que los elementos del vector  $\dot{\boldsymbol{q}}$  son:

$$\dot{\boldsymbol{q}} = [\dot{q}_i, \dot{q}_j]^T = [\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{\phi}_i, \dot{x}_j, \dot{y}_j, \dot{\phi}_j]^T$$

Y como los elementos de la matriz jacobiana asociada a este tipo de unión son los que están representados en la tabla 13.1, se tiene:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -(y_i^P - y_i) & -1 & 0 & (y_j^P - y_j) \\ 0 & 1 & (x_i^P - x_i) & 0 & -1 & -(x_j^P - x_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{\phi}_i \\ \dot{x}_j \\ \dot{y}_j \\ \dot{\phi}_j \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} \dot{x}_i - (y_i^P - y_i) \dot{\phi}_i - \dot{x}_j + (y_j^P - y_j) \dot{\phi}_j \\ \dot{x}_j - (x_i^P - x_i) \dot{\phi}_i - \dot{y}_j + (x_j^P - x_j) \dot{\phi}_j \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} \Phi_q^{(r,2)} \dot{\boldsymbol{q}} \end{bmatrix}_1 = \dot{x}_i - (y_i^P - y_i) \dot{\phi}_i - \dot{x}_j + (y_j^P - y_j) \dot{\phi}_j \\ & \begin{bmatrix} \Phi_q^{(r,2)} \dot{\boldsymbol{q}} \end{bmatrix}_2 = \dot{x}_j - (x_i^P - x_i) \dot{\phi}_i - \dot{y}_j + (x_j^P - x_j) \dot{\phi}_j \end{aligned}$$

Una vez conocido el producto  $\Phi_q \dot{\boldsymbol{q}}$  puede calcularse el término  $(\Phi_q \dot{\boldsymbol{q}})_q \dot{\boldsymbol{q}}$

$$\begin{aligned} (\Phi_q \dot{\boldsymbol{q}})_q \dot{\boldsymbol{q}} &= \sum \frac{\partial(\Phi_q \dot{\boldsymbol{q}})}{\partial q_k} \dot{q}_k \\ \left[ (\Phi_q \dot{\boldsymbol{q}})_q \dot{\boldsymbol{q}} \right]_1 &= -(x_i^P - x_i) \dot{\phi}_i^2 + (x_j^P - x_j) \dot{\phi}_j^2 \\ \left[ (\Phi_q \dot{\boldsymbol{q}})_q \dot{\boldsymbol{q}} \right]_2 &= -(y_i^P - y_i) \dot{\phi}_i^2 + (y_j^P - y_j) \dot{\phi}_j^2 \end{aligned}$$

Y como:

$$\boldsymbol{\gamma} = (\Phi_q \dot{\boldsymbol{q}})_q \dot{\boldsymbol{q}}$$

Se concluye que:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= (x_i^P - x_i) \dot{\phi}_i^2 - (x_j^P - x_j) \dot{\phi}_j^2 \\ \gamma_2 &= (y_i^P - y_i) \dot{\phi}_i^2 - (y_j^P - y_j) \dot{\phi}_j^2 \end{aligned}$$

Las siguientes tablas recogen los elementos de la matriz jacobiana y del vector  $\boldsymbol{\gamma}$  correspondientes a los pares cinemáticos más frecuentes.

	$\partial \Phi / \partial x_i$	$\partial \Phi / \partial y_i$	$\partial \Phi / \partial \varphi_i$	$\partial \Phi / \partial x_j$	$\partial \Phi / \partial y_j$	$\partial \Phi / \partial \varphi_j$
$\Phi^{(r,2)}$	1	0	$-(y_i^p - y_i)$	-1	0	$(y_j^p - y_j)$
	0	1	$(x_i^p - x_i)$	0	-1	$-(x_j^p - x_j)$
$\Phi^{(t,2)}$	$(y_i^p - y_i^o)$	$-(x_i^p - x_i^o)$	$-(x_j^p - x_i)(x_i^p - x_i^o) - (y_j^p - y_i)(y_i^p - y_i^o)$	$-(y_i^p - y_i^o)$	$(x_i^p - x_i^o)$	$(x_j^p - x_j)(x_i^p - x_i^o) + (y_j^p - y_j)(y_i^p - y_i^o)$
	0	0	1	0	0	-1
$\Phi^{(rr,1)}$	$2(x_i^p - x_j^p)$	$2(y_i^p - y_j^p)$	$-2(x_i^p - x_j^p)(y_i^p - y_i) + 2(y_i^p - y_j^p)(x_i^p - x_i)$	$-2(x_i^p - x_j^p)$	$-2(y_i^p - y_j^p)$	$2(x_i^p - x_j^p)(y_j^p - y_j) - 2(y_i^p - y_j^p)(x_j^p - x_j)$
$\Phi^{(tr,1)}$	$(y_j^p - y_j^o)$	$-(x_j^p - x_j^o)$	$-(y_i^p - y_i)(y_j^p - y_j^o) - (x_i^p - x_i)(x_j^p - x_j^o)$	$-(y_j^p - y_j^o)$	$(x_j^p - x_j^o)$	$(y_i^p - y_i)(y_j^p - y_j^o) + (x_i^p - x_i)(x_j^p - x_j^o)$

Tabla 13.5. Elementos de la matriz jacobiana para algunos de los pares cinemáticos más comunes.

$\gamma$	
$\Phi^{(r,2)}$	$(x_i^p - x_i)\dot{\varphi}_i^2 - (x_j^p - x_j)\dot{\varphi}_j^2$
	$(y_i^p - y_i)\dot{\varphi}_i^2 - (y_j^p - y_j)\dot{\varphi}_j^2$
$\Phi^{(t,2)}$	$2[(x_i^p - x_i^o)(\dot{x}_i - \dot{x}_j) + (y_i^p - y_i^o)(\dot{y}_i - \dot{y}_j)]\dot{\varphi}_i - [ (x_i^p - x_i^o)(y_i - y_j) - (y_i^p - y_i^o)(x_i - x_j) ]\dot{\varphi}_i^2$
	0
$\Phi^{(rr,1)}$	$-2(\dot{x}_i - \dot{x}_j)^2 - 2(\dot{y}_i - \dot{y}_j) - 2[(x_i^p - x_i)(x_j^p - x_i) + (y_i^p - y_i)(y_j^p - y_i)]\dot{\varphi}_i^2 - 2[(x_j^p - x_j)(x_i^p - x_j) + (y_j^p - y_j)(y_i^p - y_j)]\dot{\varphi}_j^2 + 4[(x_i^p - x_i)(x_j^p - x_j) + (y_i^p - y_i)(y_j^p - y_j)]\dot{\varphi}_i\dot{\varphi}_j - 4[(x_i^p - x_i)(\dot{y}_i - \dot{y}_j) - (y_i^p - y_i)(\dot{x}_i - \dot{x}_j)]\dot{\varphi}_i + 4[(x_j^p - x_j)(\dot{y}_i - \dot{y}_j) - (y_j^p - y_j)(\dot{x}_i - \dot{x}_j)]\dot{\varphi}_j$
$\Phi^{(tr,1)}$	$[(x_i^p - x_i)(y_j^p - y_j^o) - (y_i^p - y_i)(x_j^p - x_j^o)](\dot{\varphi}_i - 2\dot{\varphi}_j)\dot{\varphi}_i + [(x_i^p - x_j)(y_j^p - y_j^o) - (y_i^p - y_j)(x_j^p - x_j^o)]\dot{\varphi}_j^2 - 2[(x_j^p - x_j^o)(\dot{x}_i - \dot{x}_j) + (y_j^p - y_j^o)(\dot{y}_i - \dot{y}_j)]\dot{\varphi}_j$

Tabla 13.5. Vector  $\gamma$  de términos independientes de las ecuaciones de aceleración para algunos de los pares cinemáticos más comunes.

Al igual que cuando se analizan velocidades, para estudiar cinemáticamente las aceleraciones de un mecanismo es necesario introducir tantas ecuaciones motrices como grados de libertad tenga el mecanismo que se pretende estudiar.

La segunda derivada de las restricciones geométricas como ya se ha visto tiene la expresión:

$$\Phi_q \ddot{q} = \gamma$$

Veamos ahora la segunda derivada de las ecuaciones motrices:

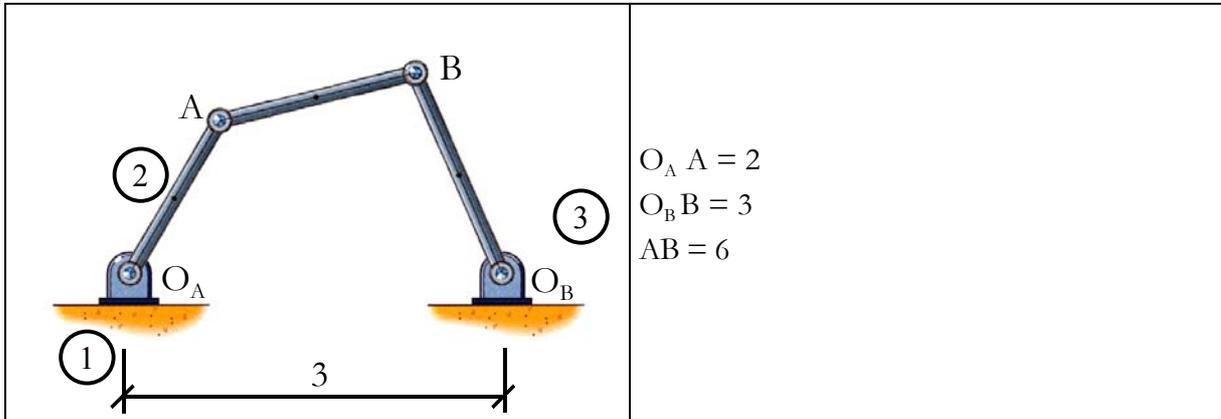
$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Phi_q^{(d)}}{dt^2} &= \frac{d}{dt} (\Phi_q^{(d)} \dot{q} + \Phi_t^{(d)}) = \\ &= \frac{\partial}{\partial q} (\Phi_q^{(d)} \dot{q} + \Phi_t^{(d)}) \frac{dq}{dt} + \frac{\partial}{\partial t} (\Phi_q^{(d)} \dot{q} + \Phi_t^{(d)}) \frac{dt}{dt} = \\ &= \left[ (\Phi_q^{(d)} \dot{q})_q + \Phi_{qt}^{(d)} \right] \dot{q} + \Phi_{qt}^{(d)} \dot{q} + \Phi_q^{(d)} \ddot{q} + \Phi_{tt}^{(d)} = 0 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones de restricción y las motrices, las ecuaciones de la aceleración presentarán el siguiente aspecto:

$$\begin{bmatrix} \Phi_q \\ \Phi_q^{(d)} \end{bmatrix} \ddot{q} = \begin{bmatrix} \gamma \\ -(\Phi_q^{(d)} \dot{q})_q \dot{q} - 2\Phi_{qt}^{(d)} \dot{q} - \Phi_{tt}^{(d)} \end{bmatrix}$$

**Ejemplo 6**

Deben plantearse las ecuaciones de aceleración correspondientes al cuadrilátero articulado estudiado en el ejemplo anterior para el instante inicial  $t = 0$ , resolverlas y determinar las aceleraciones globales de los puntos A y B.



Resolución:

*Coordenadas locales de los puntos empleados para representar la posición de las juntas*

Como se sabe, estas coordenadas valen:

$$\begin{aligned} (\xi_1^{O_A}, \eta_1^{O_A}) &= (0, 0) \quad ; \quad (\xi_2^{O_A}, \eta_2^{O_A}) = (-1, 0) \\ (\xi_1^{O_B}, \eta_1^{O_B}) &= (3, 0) \quad ; \quad (\xi_3^{O_B}, \eta_3^{O_B}) = (1.5, 0) \\ (\xi_2^A, \eta_2^A) &= (1, 0) \\ (\xi_3^B, \eta_3^B) &= (-1.5, 0) \end{aligned}$$

*Coordenadas que definen la posición del mecanismo en el instante inicial,  $t = 0$*

Se obtuvieron ya en el ejemplo 3, al resolver el sistema de ecuaciones de restricción particularizado para  $t = 0$ .

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 & ; & & y_1 &= 0 & ; & & \varphi_1 &= 0^\circ \\ x_2 &= -0.7071 & ; & & y_2 &= 0.7071 & ; & & \varphi_2 &= 135^\circ \\ x_3 &= 3.7849 & ; & & y_3 &= 1.2783 & ; & & \varphi_3 &= 238.45^\circ \end{aligned}$$

*Primeras derivadas de las coordenadas que definen la posición del mecanismo en el instante inicial, t = 0*

Se obtuvieron ya en el ejemplo anterior al resolver las ecuaciones cinemáticas de velocidad correspondientes al instante t = 0.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 0 & ; & & \dot{y}_1 &= 0 & ; & & \dot{\varphi}_1 &= 0 \\ \dot{x}_2 &= -70.71 & ; & & \dot{y}_2 &= -70.71 & ; & & \dot{\varphi}_2 &= 100 \\ \dot{x}_3 &= -95.391 & ; & & \dot{y}_3 &= 58.5719 & ; & & \dot{\varphi}_3 &= 74.6233 \end{aligned}$$

*Coordenadas globales de los puntos empleados para representar la posición de las juntas, en el instante inicial, t = 0*

Estas coordenadas se calcularon ya en el ejemplo anterior y son:

$$\begin{aligned} (x^{O_A}, y^{O_A}) &= (0, 0) \\ (x^{O_B}, y^{O_B}) &= (3, 0) \\ (x^A, y^A) &= (1.4142, 1.4142) \\ (x^B, y^B) &= (4.5697, 2.5566) \end{aligned}$$

*Vector  $\gamma$  correspondiente a las restricciones simples*

Como las restricciones simples son de la forma  $x_i = \text{cte.}$ , su segunda derivada es de la forma:

$$\ddot{x}_i = 0$$

Por lo que, obviamente, el vector de términos independientes de las ecuaciones de aceleración es nulo.

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 0 \\ \gamma_2 &= 0 \\ \gamma_3 &= 0 \end{aligned}$$

*Vector  $\gamma$  correspondiente a cada junta*

□ Junta n.º 1.

Se trata de una junta de revolución que conecta los elementos 1 y 2, y que da lugar a las ecuaciones de restricción 4 y 5. Por tratarse de una unión de revolución, la forma general de su correspondiente vector de términos independientes de las ecuaciones de aceleración es:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= (x_i^P - x_i) \dot{\varphi}_i^2 - (x_j^P - x_j) \dot{\varphi}_j^2 \\ \gamma_2 &= (y_i^P - y_i) \dot{\varphi}_i^2 - (y_j^P - y_j) \dot{\varphi}_j^2 \end{aligned}$$

En esta junta:

$$\left. \begin{aligned} P &\equiv O_A \\ i &\equiv 1 \\ j &\equiv 2 \end{aligned} \right\}$$

Por ello:

$$\begin{aligned} (x_i^P, y_i^P) &= (x_j^P, y_j^P) \equiv (x^{O_A}, y^{O_A}) = (0, 0) \\ (x_i, y_i) &\equiv (x_1, y_1) = (0, 0) \\ (x_j, y_j) &\equiv (x_2, y_2) = (-0.7071, 0.7071) \\ \dot{\phi}_i &\equiv \dot{\phi}_1 = 0 \quad ; \quad \dot{\phi}_j \equiv \dot{\phi}_2 = 100 \end{aligned}$$

Y sustituyendo estos valores en la expresión general se obtiene:

$$\begin{aligned} \gamma_4 &= -7071 \\ \gamma_5 &= 7071 \end{aligned}$$

□ Junta n.º 3.

Se trata también de una junta de revolución. Proporciona las ecuaciones de restricción 6 y 7. En ella:

$$\left. \begin{aligned} P &\equiv O_B \\ i &\equiv 1 \\ j &\equiv 3 \end{aligned} \right\}$$

Y procediendo del mismo modo que para la junta anterior, se llega a:

$$\begin{aligned} \gamma_6 &= 4370.82 \\ \gamma_7 &= 7118.39 \end{aligned}$$

□ Junta n.º 3.

Se trata de una junta de revolución-revolución que une los elementos 2 y 3, y que proporcionaba la ecuación de restricción n.º 8. Por tratarse de una unión de revolución-revolución, la forma general de su vector de términos independientes de las ecuaciones de aceleración es:

$$\begin{aligned} \gamma &= -2(\dot{x}_i - \dot{x}_j)^2 - 2(\dot{y}_i - \dot{y}_j) - \\ &\quad - 2[(x_i^P - x_i)(x_j^P - x_i) + (y_i^P - y_i)(y_j^P - y_i)]\dot{\phi}_i^2 - \\ &\quad - 2[(x_j^P - x_j)(x_i^P - x_j) + (y_j^P - y_j)(y_i^P - y_j)]\dot{\phi}_j^2 + \\ &\quad + 4[(x_i^P - x_i)(x_j^P - x_j) + (y_i^P - y_i)(y_j^P - y_j)]\dot{\phi}_i\dot{\phi}_j - \\ &\quad - 4[(x_i^P - x_i)(\dot{y}_i - \dot{y}_j) - (y_i^P - y_i)(\dot{x}_i - \dot{x}_j)]\dot{\phi}_i + \\ &\quad + 4[(x_j^P - x_j)(\dot{y}_i - \dot{y}_j) - (y_j^P - y_j)(\dot{x}_i - \dot{x}_j)]\dot{\phi}_j \end{aligned}$$

En esta junta:

$$\left. \begin{aligned} P_i &\equiv A \\ P_j &= B \\ i &\equiv 2 \\ j &\equiv 3 \end{aligned} \right\}$$

Por lo cual:

$$(x_i^P, y_i^P) \equiv (x^A, y^A) = (-1.4142, 1.4142)$$

$$(x_j^P, y_j^P) \equiv (x^B, y^B) = (4.5697, 2.5566)$$

$$(x_i, y_i) \equiv (x_2, y_2) = (-0.7071, 0.7071)$$

$$(x_j, y_j) \equiv (x_3, y_3) = (3.7849, 1.2783)$$

$$(\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{\phi}_i) \equiv (\dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{\phi}_2) = (-70.71, -70.71, 100)$$

$$(\dot{x}_j, \dot{y}_j, \dot{\phi}_j) \equiv (\dot{x}_3, \dot{y}_3, \dot{\phi}_3) = (-95.391, 58.5719, 74.6233)$$

Y sustituyendo estos valores en la expresión general se obtiene:

$$\gamma_8 = -1539.60$$

*Vector  $\gamma$  correspondiente a las restricciones motrices*

La restricción motriz es:

$$\Phi_9 \equiv \varphi_2 - \frac{3}{4} \pi - 100 t = 0$$

Derivando respecto al tiempo:

$$\frac{d \Phi_9}{d t} \equiv \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi_2} \dot{\varphi}_2 - 100 = 0$$

Así pues, la novena ecuación de velocidad es:

$$\dot{\varphi}_2 = 100$$

Y derivando nuevamente, se obtiene la ecuación cinemática de aceleración:

$$\ddot{\varphi}_2 = 0$$

Queda claro, pues, que el vector  $\gamma$  correspondiente a esta ecuación es nulo:

$$\gamma_9 = 0$$

*Vector  $\gamma$  global para el instante  $t = 0$*

Ordenando los valores obtenidos de acuerdo con el orden seguido por las ecuaciones de restricción de las que provienen, se obtiene el siguiente vector de términos independientes de las ecuaciones de aceleración para el mecanismo completo:

$$\gamma = [0, 0, 0, -7071, 7071, 4370.82, 7118.39, 1539.6, 0]^T$$

*Ecuaciones cinemáticas de aceleración, para el instante inicial t = 0*

Cuando se emplea el método de planteamiento de las restricciones motrices adicionales, la expresión general de estas ecuaciones es:

$$\begin{bmatrix} \Phi_q \\ \Phi_q^{(d)} \end{bmatrix} \ddot{q} = \begin{bmatrix} (\Phi_q \dot{q})_q \dot{q} \\ -(\Phi_q^{(d)} \dot{q})_q \dot{q} - 2\Phi_{qt}^{(d)} \dot{q} - \Phi_{tt}^{(d)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma \\ \gamma^{(d)} \end{bmatrix}$$

Y particularizando para este caso, teniendo en cuenta que la matriz jacobiana es la misma que se obtuvo en el ejemplo anterior, se tiene el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= 0 \\ \ddot{y}_1 &= 0 \\ \ddot{\varphi}_1 &= 0 \\ \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 - 0.7071 \ddot{\varphi}_2 &= -7071 \\ \ddot{y}_1 - \ddot{y}_2 - 0.7071 \ddot{\varphi}_2 &= 7071 \\ \ddot{x}_1 - \ddot{x}_3 - 1.2783 \ddot{\varphi}_3 &= 4370.82 \\ \ddot{y}_1 + 3 \ddot{\varphi}_1 - \ddot{y}_3 + 0.7849 \ddot{\varphi}_3 &= 7118.39 \\ -11.968 \ddot{x}_2 - 2.2848 \ddot{y}_2 + 10.0781 \ddot{\varphi}_2 + 11.968 \ddot{x}_3 + 2.2848 \ddot{y}_3 - 13.5053 \ddot{\varphi}_3 &= -1539.6 \\ \ddot{\varphi}_2 &= 0 \end{aligned}$$

*Solución de las ecuaciones cinemáticas de velocidad*

La solución del sistema es:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 0 & ; & \dot{y}_1 = 0 & ; & \dot{\varphi}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 &= 7071 & ; & \dot{y}_2 = -7071 & ; & \dot{\varphi}_2 = 0 \\ \dot{x}_3 &= 2042.03 & ; & \dot{y}_3 = -11056 & ; & \dot{\varphi}_3 = -5016.7 \end{aligned}$$

*Aceleraciones globales de los puntos A y B en el instante inicial*

Haciendo uso de la segunda derivada de las relaciones de transformación pueden determinarse las aceleraciones de cualquier punto del mecanismo, una vez conocidas las coordenadas y aceleraciones del sistema.

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i^P &= \ddot{x}_i + \ddot{\varphi}_i (-\xi_i^P \text{sen } \varphi_i - \eta_i^P \text{cos } \varphi_i) \dot{\varphi}_i^2 - (\xi_i^P \text{cos } \varphi_i - \eta_i^P \text{sen } \varphi_i) \\ \ddot{y}_i^P &= \ddot{y}_i + \ddot{\varphi}_i (\xi_i^P \text{cos } \varphi_i - \eta_i^P \text{sen } \varphi_i) \dot{\varphi}_i^2 - (\xi_i^P \text{sen } \varphi_i + \eta_i^P \text{cos } \varphi_i) \end{aligned}$$

Considerando que para los sistemas de referencia escogidos la segunda coordenada local es siempre nula, pueden simplificarse las ecuaciones anteriores:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i^P &= \ddot{x}_i - \xi_i^P (\ddot{\varphi}_i \text{sen } \varphi_i + \dot{\varphi}_i^2 \text{cos } \varphi_i) \\ \ddot{y}_i^P &= \ddot{y}_i + \xi_i^P (\ddot{\varphi}_i \text{cos } \varphi_i - \dot{\varphi}_i^2 \text{sen } \varphi_i) \end{aligned}$$

□ Velocidad global del punto A (para t = 0).

Si se considera que A es un punto fijo del miembro 2, puede escribirse:

$$\ddot{x}^A = \ddot{x}_2 - \xi_2^A (\ddot{\varphi}_2 \operatorname{sen} \varphi_2 + \dot{\varphi}_2^2 \cos \varphi_2) = 7071 - 100^2 \cos 135^\circ = 14142.068$$

$$\ddot{y}^A = \ddot{y}_2 + \xi_2^A (\ddot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 - \dot{\varphi}_2^2 \operatorname{sen} \varphi_2) = -7071 - 100^2 \operatorname{sen} 135^\circ = -14142.068$$

Y el módulo del vector velocidad es:

$$a^A = \sqrt{(\ddot{x}^A)^2 + (\ddot{y}^A)^2} = \sqrt{(14142.068)^2 + (-14142.068)^2} = 20000$$

□ Velocidad global del punto B (para  $t = 0$ ).

Teniendo en cuenta que B es un punto fijo del elemento 3, se obtiene:

$$\begin{aligned} \ddot{x}^B &= \ddot{x}_3 - \xi_3^B (\ddot{\varphi}_3 \operatorname{sen} \varphi_3 + \dot{\varphi}_3^2 \cos \varphi_3) = \\ &= 2042.03 - 1.5 (5016.7 \operatorname{sen} 238.45^\circ - 74.6233^2 \cos 238.45^\circ) = 4084.136 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}^B &= \ddot{y}_3 + \xi_3^B (\ddot{\varphi}_3 \cos \varphi_3 - \dot{\varphi}_3^2 \operatorname{sen} \varphi_3) = \\ &= -11056 + 1.5 (5016.7 \cos 238.45^\circ + 74.6233^2 \operatorname{sen} 238.45^\circ) = -22111.679 \end{aligned}$$

Y el módulo es:

$$a^B = \sqrt{(\ddot{x}^B)^2 + (\ddot{y}^B)^2} = \sqrt{(4084.136)^2 + (-22111.679)^2} = 22485.696$$

## Referencias

1. C.Vera, B. Suárez, “Fundamentos Teóricos de la Simulación de Sistemas Mecánicos I”, U.N.E.D.
2. P. E. Nikravesh, “Computer-Aided Analysis of Mechanical Systems”, Prentice-Hall, Inc., 1988.