

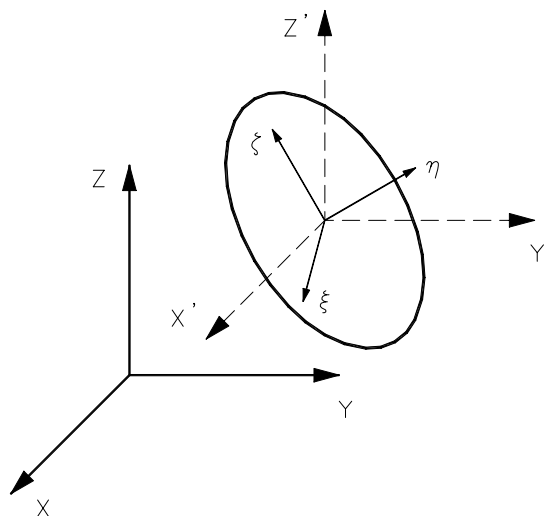
## Cinemática tridimensional

### 14.1 COORDENADAS DE UN CUERPO

Un cuerpo en el espacio tiene seis grados de libertad, y en consecuencia se necesitan seis coordenadas independientes para determinar su situación. De las seis coordenadas, tres son necesarias para especificar los movimientos de traslación y las otras tres para los giros. Las seis coordenadas definen la localización de un sistema de coordenadas cartesiano que está fijado en el cuerpo, respecto a un sistema de coordenadas global fijo que se encuentra fuera del cuerpo.

Las coordenadas de traslación son las que definen la posición del origen del sistema de referencia que se mueve con el cuerpo y las de rotación son las que se necesitan para definir la orientación del sistema local respecto al global.

En la figura 14.1 se muestran un cuerpo y dos sistemas de referencia: el fijo  $XYZ$  en el exterior, al que denominaremos sistema global, y el móvil  $\xi\eta\zeta$  que acompaña al cuerpo en su movimiento y que denominaremos sistema local.



**Figura 14.1.** Sistemas de referencia global,  $XYZ$ , y local,  $\xi\eta\zeta$ .

El paso o transformación de un sistema a otro puede considerarse como la superposición de una traslación del sistema  $\mathbf{XYZ}$  hasta otro  $\mathbf{X'Y'Z'}$  que tiene el mismo punto de origen que  $\xi\eta\zeta$ , y una rotación de  $\mathbf{X'Y'Z'}$  hasta la posición  $\xi\eta\zeta$ .

Vamos a considerar inicialmente, y por simplicidad, que el sistema de referencia global tiene el mismo punto de origen que el sistema local; es decir, que el sistema global es  $\mathbf{X'Y'Z'}$  y el local  $\xi\eta\zeta$ .

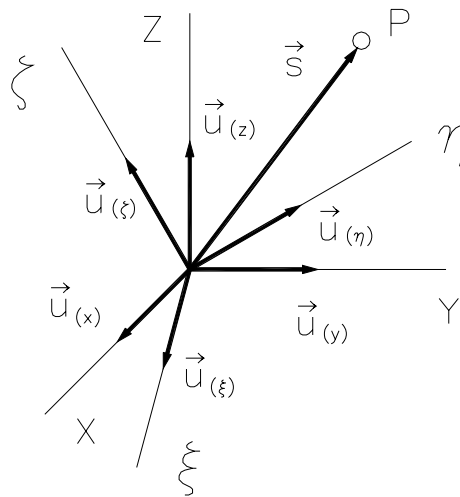
En la figura 14.2 se muestra un punto P definido por el vector de posición  $\vec{s}$  así como dos sistemas de referencia: el  $\mathbf{XYZ}$  y el  $\xi\eta\zeta$ . Definiendo los vectores unitarios  $\vec{u}_{(x)}$ ,  $\vec{u}_{(y)}$ , y  $\vec{u}_{(z)}$  en el sistema  $\mathbf{XYZ}$ , y  $\vec{u}_{(\xi)}$ ,  $\vec{u}_{(\eta)}$ , y  $\vec{u}_{(\zeta)}$  en el sistema  $\xi\eta\zeta$ , el vector  $\vec{s}$  puede expresarse en ambos sistemas de referencia mediante las siguientes ecuaciones:

$$\vec{s} = s_{(x)} \vec{u}_{(x)} + s_{(y)} \vec{u}_{(y)} + s_{(z)} \vec{u}_{(z)} \quad (1)$$

en el sistema de referencia  $\mathbf{XYZ}$ , y:

$$\vec{s} = s_{(\xi)} \vec{u}_{(\xi)} + s_{(\eta)} \vec{u}_{(\eta)} + s_{(\zeta)} \vec{u}_{(\zeta)} \quad (2)$$

en el sistema de referencia  $\xi\eta\zeta$ .



**Figura 14.2.** Vectores unitarios en  $\mathbf{XYZ}$  y  $\xi\eta\zeta$ .

Las magnitudes de las componentes del vector  $\vec{s}$  vienen definidas por los siguientes productos escalares:

$$\begin{aligned} s_{(x)} &= \vec{s} \cdot \vec{u}_{(x)} & ; & & s_{(y)} &= \vec{s} \cdot \vec{u}_{(y)} & ; & & s_{(z)} &= \vec{s} \cdot \vec{u}_{(z)} \\ s_{(\xi)} &= \vec{s} \cdot \vec{u}_{(\xi)} & ; & & s_{(\eta)} &= \vec{s} \cdot \vec{u}_{(\eta)} & ; & & s_{(\zeta)} &= \vec{s} \cdot \vec{u}_{(\zeta)} \end{aligned}$$

Las componentes de los vectores que definen  $\vec{s}$  en los dos sistemas son:

$$s = [s_{(x)}, s_{(y)}, s_{(z)}]^T$$

en el sistema  $\mathbf{XYZ}$ , y

$$s' = [s_{(\xi)}, s_{(\eta)}, s_{(\zeta)}]^T$$

en el sistema  $\xi\eta\zeta$ .

Es claro que hay una relación entre  $\mathbf{s}$  y  $\mathbf{s}'$ , mientras los dos representen al mismo vector  $\vec{s}$ . Para encontrar esta relación, los vectores  $\vec{u}_{(\xi)}$ ,  $\vec{u}_{(\eta)}$ , y  $\vec{u}_{(\zeta)}$  deben ser definidos en términos de los vectores  $\vec{u}_{(x)}$ ,  $\vec{u}_{(y)}$ , y  $\vec{u}_{(z)}$ :

$$\begin{aligned}\vec{u}_{(\xi)} &= a_{11} \vec{u}_{(x)} + a_{21} \vec{u}_{(y)} + a_{31} \vec{u}_{(z)} \\ \vec{u}_{(\eta)} &= a_{12} \vec{u}_{(x)} + a_{22} \vec{u}_{(y)} + a_{32} \vec{u}_{(z)} \\ \vec{u}_{(\zeta)} &= a_{13} \vec{u}_{(x)} + a_{23} \vec{u}_{(y)} + a_{33} \vec{u}_{(z)}\end{aligned}\quad (3)$$

donde  $a_{ij}$ , ( $i,j=1,2,3$ ) son los cosenos directores, que pueden expresarse como:

$$\begin{aligned}a_{11} &= \vec{u}_{(\xi)} \cdot \vec{u}_{(x)} = \cos(\vec{u}_{(\xi)}, \vec{u}_{(x)}) \\ a_{21} &= \vec{u}_{(\xi)} \cdot \vec{u}_{(y)} = \cos(\vec{u}_{(\xi)}, \vec{u}_{(y)}) \\ a_{31} &= \vec{u}_{(\xi)} \cdot \vec{u}_{(z)} = \cos(\vec{u}_{(\xi)}, \vec{u}_{(z)}) \\ a_{12} &= \vec{u}_{(\eta)} \cdot \vec{u}_{(x)} = \cos(\vec{u}_{(\eta)}, \vec{u}_{(x)}) \\ a_{22} &= \vec{u}_{(\eta)} \cdot \vec{u}_{(y)} = \cos(\vec{u}_{(\eta)}, \vec{u}_{(y)}) \\ a_{32} &= \vec{u}_{(\eta)} \cdot \vec{u}_{(z)} = \cos(\vec{u}_{(\eta)}, \vec{u}_{(z)}) \\ a_{13} &= \vec{u}_{(\zeta)} \cdot \vec{u}_{(x)} = \cos(\vec{u}_{(\zeta)}, \vec{u}_{(x)}) \\ a_{23} &= \vec{u}_{(\zeta)} \cdot \vec{u}_{(y)} = \cos(\vec{u}_{(\zeta)}, \vec{u}_{(y)}) \\ a_{33} &= \vec{u}_{(\zeta)} \cdot \vec{u}_{(z)} = \cos(\vec{u}_{(\zeta)}, \vec{u}_{(z)})\end{aligned}\quad (4)$$

Sustituyendo las ecuaciones 3 en la 2 se tiene:

$$\begin{aligned}\vec{s} &= (a_{11}s_{(\xi)} + a_{12}s_{(\eta)} + a_{13}s_{(\zeta)}) \vec{u}_{(x)} + \\ &+ (a_{21}s_{(\xi)} + a_{22}s_{(\eta)} + a_{23}s_{(\zeta)}) \vec{u}_{(y)} + \\ &+ (a_{31}s_{(\xi)} + a_{32}s_{(\eta)} + a_{33}s_{(\zeta)}) \vec{u}_{(z)}\end{aligned}\quad (5)$$

y por lo tanto las componentes del vector  $\vec{s}$  son:

$$\begin{aligned}s_{(x)} &= a_{11}s_{(\xi)} + a_{12}s_{(\eta)} + a_{13}s_{(\zeta)} \\ s_{(y)} &= a_{21}s_{(\xi)} + a_{22}s_{(\eta)} + a_{23}s_{(\zeta)} \\ s_{(z)} &= a_{31}s_{(\xi)} + a_{32}s_{(\eta)} + a_{33}s_{(\zeta)}\end{aligned}\quad (6)$$

o en forma matricial:

$$\mathbf{s} = \mathbf{A} \mathbf{s}'$$

donde la matriz  $\mathbf{A}$  de los cosenos directores es:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\quad (7)$$

Fácilmente el lector podrá comprobar cómo la matriz traspuesta de  $\mathbf{A}$  es igual a su matriz inversa  $\mathbf{A}^{-1}$ .

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}\quad (8)$$

Esta especial propiedad permite una fácil inversión para obtener:

$$s' = A^T s \quad (9)$$

Los nueve cosenos directores en la matriz  $\mathbf{A}$  definen la orientación del sistema  $\xi\eta\zeta$  respecto al sistema  $\mathbf{XYZ}$ , pero los cosenos directores no son independientes.

La matriz  $\mathbf{A}$  cumple también que:

$$A^T A = I \quad (10)$$

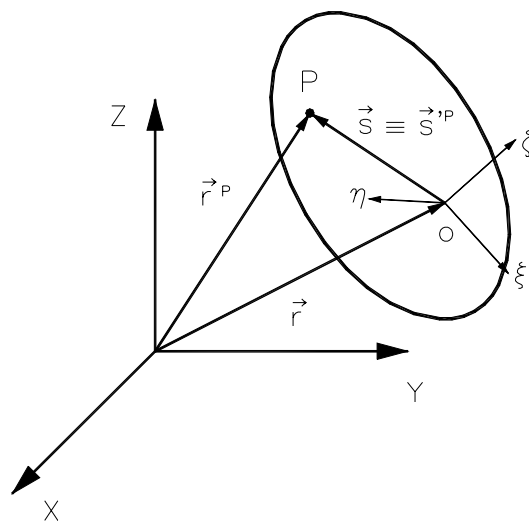
Siendo  $\mathbf{I}$  la matriz identidad (matriz con unos en la diagonal principal y ceros en el resto).

Efectuando la ecuación 10 se observa cómo solamente pueden utilizarse seis ecuaciones, ya que hay tres que se repiten.

Cuando el origen del sistema  $\mathbf{XYZ}$  no coincide con el de  $\xi\eta\zeta$ , como es el caso de la figura 14.3, se plantea la ecuación

$$\vec{r}^P = \vec{r} + A \vec{s}'^P$$

Siendo  $\mathbf{A}$  la matriz de los cosenos directores y  $\vec{s}'^P$  el vector de posición del punto P en el sistema de referencia local.



**Figura 14.3.** Traslación y rotación de un cuerpo en el espacio.

El planteamiento es el mismo que se ha realizado hasta ahora. En coordenadas globales el vector  $\vec{r}^P$  es:

$$\vec{r}^P = \vec{r} + \vec{s}^P$$

y por lo desarrollado hasta ahora se sabe que:

$$\vec{s}^P = A \vec{s}'^P$$

por lo que definitivamente puede ponerse:

$$\vec{r}^P = \vec{r} + A \vec{s}'^P$$

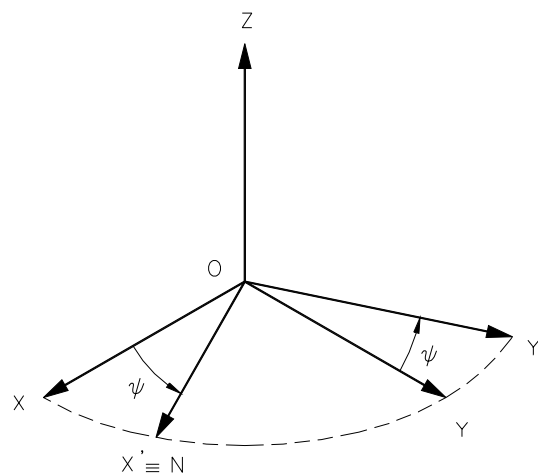
En la práctica resulta bastante complicado el cálculo de los cosenos directores, y por este motivo se han desarrollado otros métodos para obtener las coordenadas de un cuerpo que se mueve en el espacio.

## 14.2 ÁNGULOS DE EULER

La configuración espacial de un sólido con un punto fijo queda perfectamente especificada si se sitúa, respecto a una referencia absoluta, un triedro trirrectángulo cualquiera ligado a él, cuyo origen coincide con el punto fijo.

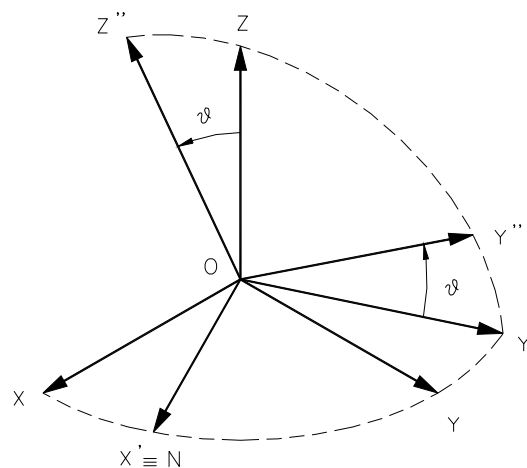
Es usual en geometría definir la orientación de un triedro cartesiano mediante tres ángulos independientes, y de las termas posibles se ha generalizado la constituida por los ángulos de precesión, nutación y rotación propia, conocidos como ángulos de Euler.

Dado el triedro cartesiano  $\mathbf{OXYZ}$ , si se gira un ángulo  $\psi$  alrededor del eje  $\mathbf{OZ}$ , se transforma en el  $\mathbf{OX'Y'Z'}$  como se indica en la figura 14.4. El ángulo  $\psi$  se denomina precesión.



**Figura 14.4.** Giro de precesión.

Un giro  $\theta$  alrededor del eje  $\mathbf{OX'}$  transforma  $\mathbf{Y'}$  en  $\mathbf{Y''}$  y  $\mathbf{Z}$  en  $\mathbf{Z''}$  (figura 14.5). Al ángulo  $\theta$  se le denomina ángulo de nutación y el eje  $\mathbf{OX'}$  recibe el nombre de línea de nodos.



**Figura 14.5.** Giro de precesión-nutación.

Finalmente, el ángulo de rotación propia,  $\phi$ , define el triedro  $\mathbf{OX}_1\mathbf{Y}_1\mathbf{Z}_1$ , respecto al  $\mathbf{OX}'\mathbf{Y}''\mathbf{Z}''$ . Como se observa en la figura 14.6, el giro debido a la rotación propia tiene como soporte el eje  $\mathbf{OZ}''$ .

$$e^{z'} = A^\psi e^z$$

$$e^{x''} = A^\theta e^{x'}$$

$$e^{z'''} = A^\phi e^{z''}$$

Donde:

$$A^\psi = \begin{bmatrix} \cos\psi & \text{sen}\psi & 0 \\ \text{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A^\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \text{sen}\theta \\ 0 & \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, A^\phi = \begin{bmatrix} \cos\phi & \text{sen}\phi & 0 \\ \text{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Y por lo tanto, siendo  $A^{21} = A^\phi A^\theta A^\psi$  o explícitamente con sus abreviaciones  $c^\psi c^\theta$  y  $c^\phi$  para  $\cos\psi$ ,  $\cos\theta$  y  $\cos\phi$  y  $s^\psi$ ,  $s^\theta$  y  $s^\phi$  para  $\text{sen}\psi$ ,  $\text{sen}\theta$  y  $\text{sen}\phi$  respectivamente;

$$A^{21} = \begin{bmatrix} c^\psi c^\phi - s^\psi c^\theta s^\phi & s^\psi c^\phi + c^\psi c^\theta s^\phi & s^\theta s^\phi \\ c^\psi s^\phi - s^\psi c^\theta c^\phi & s^\psi s^\phi + c^\psi c^\theta c^\phi & s^\theta c^\phi \\ s^\psi s^\phi & -c^\psi s^\phi & c^\theta \end{bmatrix}$$

Para las velocidades angulares:

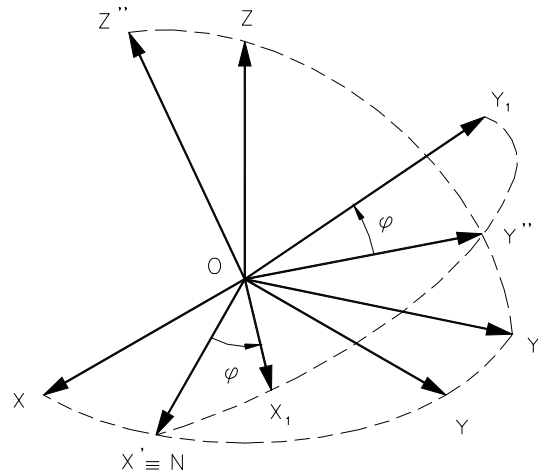
$$\omega = \dot{\psi} e + \dot{\theta} e' + \dot{\phi} e''$$

De donde:

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sen}\theta & \text{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ \text{sen}\theta & \cos\phi & \text{sen}\phi & 0 \\ \cos\theta & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}$$

⇨:

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\text{sen}\phi}{\text{sen}\theta} & \frac{\cos\phi}{\text{sen}\theta} & 0 \\ \cos\phi & \text{sen}\phi & 0 \\ -\text{sen}\phi \text{ctan}\theta & -\cos\phi \text{ctan}\theta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}$$



**Figura 14.6.** Giro de rotación propia.

Cuando se sitúan en el espacio los triedros  $\mathbf{OXYZ}$  y  $\mathbf{OX_1Y_1Z_1}$ , los tres ángulos de Euler se definen con gran facilidad.

- El ángulo formado por  $\mathbf{Z}$  y  $\mathbf{Z}_1$  es el de nutación,  $\theta$ .
- La línea de nodos,  $\mathbf{N}$ , es la semirrecta perpendicular al plano  $\mathbf{ZOZ}_1$ , y desde ella  $\theta$  se observa como positivo.  $\mathbf{ON}$  está, naturalmente, en el plano  $\mathbf{XOY}$ .
- El ángulo de precesión,  $\psi$ , es el  $\mathbf{XON}$ .
- Por último,  $\mathbf{NOX}_1$  es el ángulo de rotación propia,  $\varphi$ .

Los tres ángulos de Euler establecen tres giros consecutivos de la forma siguiente:

$$e^{Z'} = A^\psi e^Z$$

$$e^{X''} = A^\theta e^{X'}$$

$$e^{Z''} = A^\varphi e^{Z'}$$

$$\cancel{e^{Z'} = A^\psi e^Z}$$

$$\cancel{e^{X''} = A^\theta e^{X'}}$$

$$\cancel{e^{Z''} = A^\varphi e^{Z'}}$$

Donde:

$$\cancel{A^\psi = \begin{bmatrix} \cos\psi & \operatorname{sen}\psi & 0 \\ \operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}, \cancel{A^\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}, \cancel{A^\phi = \begin{bmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi & 0 \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$A^\psi = \begin{bmatrix} \cos\psi & \operatorname{sen}\psi & 0 \\ -\operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A^\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, A^\phi = \begin{bmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi & 0 \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Y por lo tanto, siendo  $A^{21} = A^\phi A^\theta A^\psi$  o explícitamente con sus abreviaciones  $c\psi c\theta$  y  $c\phi$  para  $\cos\psi \cos\theta$  y  $\cos\phi$  y  $s\psi s\theta$  y  $s\phi$  para  $\operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\theta$  y  $\operatorname{sen}\phi$  respectivamente:

$$A^{21} = \begin{bmatrix} c\psi c\phi - s\psi c\theta s\phi & s\psi c\phi + c\psi c\theta s\phi & s\theta s\phi \\ -c\psi s\phi - s\psi c\theta c\phi & -s\psi s\phi + c\psi c\theta c\phi & s\theta c\phi \\ s\psi s\phi & -c\psi s\phi & c\theta \end{bmatrix}$$

Para las velocidades angulares:

$$\underline{\omega = \dot{\psi} e + \dot{\theta} e' + \dot{\phi} e''}$$

De donde:

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta & \operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi & 0 \\ \cos\theta & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}$$

O:

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\operatorname{sen}\phi}{\operatorname{sen}\theta} & \frac{\cos\phi}{\operatorname{sen}\theta} & 0 \\ \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi & 0 \\ -\operatorname{sen}\phi \operatorname{ctan}\theta & -\cos\phi \operatorname{ctan}\theta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}$$

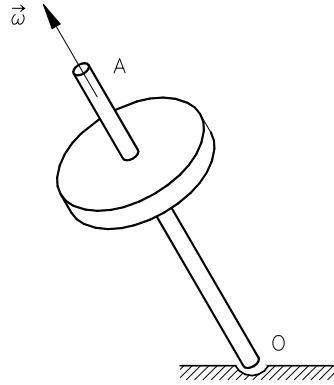
### 14.3 PARÁMETROS DE EULER

#### Definición de los parámetros de Euler

Los ángulos de Euler presentan algunos problemas en su utilización, ya que aparecen posiciones singulares en las que los ángulos no pueden ser determinados unívocamente. Por ejemplo, cuando el ángulo de nutación,  $\theta$ , vale cero, la línea de nodos,  $N$ , no está definida, ya que los ejes  $Z$  y  $Z_1$  coinciden y no pueden formar el plano al que es perpendicular la línea de nodos. Por este motivo, en los programas de simulación por ordenador se suelen utilizar los parámetros de Euler en lugar de los ángulos de Euler.



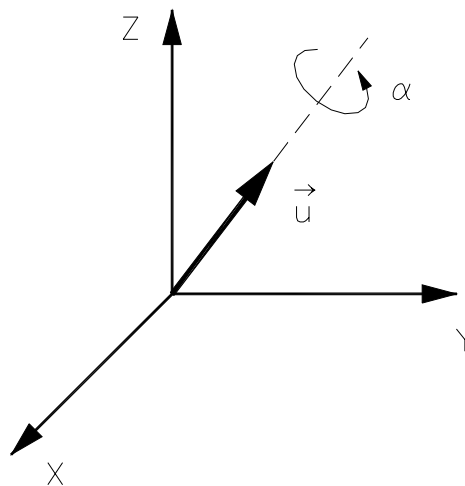
Los parámetros de Euler están basados en que el movimiento instantáneo de un sólido con un punto fijo puede definirse por medio de una rotación instantánea alrededor de un eje que pasa por el punto fijo. A la vista de la figura 14.7 puede decirse que el sólido que se ha representado gira alrededor del eje OA con una velocidad angular  $\omega$ , a la vez que dicho eje se mueve articulado en el punto O por medio de una rótula.



**Figura 14.7.**

Haciendo operaciones, puede demostrarse que la rotación instantánea  $\omega$  es la suma de las velocidades de rotación propia,  $\dot{\phi}$ , de precesión,  $\dot{\psi}$  y de nutación  $\dot{\theta}$ .

Existen cuatro parámetros del sistema que permiten definir la orientación de un triedro móvil respecto a otro fijo, indicando la dirección de cierto eje, así como el ángulo  $\alpha$  que debería girar el triedro fijo para hacerle coincidir con el móvil. La orientación del eje de giro se especifica por medio de sus tres cosenos directores o, lo que es lo mismo, de las tres componentes del vector director del eje,  $\vec{u}$ , que como se sabe es un vector unitario.



**Figura 14.8.** Orientación y movimiento de un eje de rotación.

Teniendo en cuenta que el vector  $\vec{u}$  es unitario, debe cumplirse que:

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1$$

En la práctica se utilizan los cuatro siguientes parámetros, denominados "parámetros de Euler":

$$\begin{aligned}
 e_0 &= \cos \alpha/2 \\
 e_1 &= u_x \operatorname{sen} \alpha/2 \\
 e_2 &= u_y \operatorname{sen} \alpha/2 \\
 e_3 &= u_z \operatorname{sen} \alpha/2
 \end{aligned}$$

Por otra parte es fácil deducir que los cuatro parámetros están relacionados por la siguiente expresión:

$$e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$$

La matriz de transformación  $\mathbf{A}$ , que estaba formada por los cosenos directores, puede expresarse en términos de los parámetros de Euler, y presenta el siguiente aspecto:

$$A = \begin{bmatrix} e_0^2 + e_1^2 - \frac{1}{2} & e_1 e_2 - e_0 e_3 & e_1 e_3 - e_0 e_2 \\ e_1 e_2 - e_0 e_3 & e_0^2 + e_2^2 - \frac{1}{2} & e_2 e_3 - e_0 e_1 \\ e_1 e_3 - e_0 e_2 & e_2 e_3 - e_0 e_1 & e_0^2 + e_3^2 - \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Por otra parte, supuestos conocidos los cosenos directores que forman la matriz  $\mathbf{A}$ :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

se pueden obtener los parámetros de Euler en función de los cosenos directores. Llamando:

$$t = 2(3e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) - 3$$

y operando se obtiene:

$$\begin{aligned}
 e_0^2 &= \frac{p+1}{4} \\
 e_1^2 &= \frac{1+2a_{11}-t}{4} \\
 e_2^2 &= \frac{1+2a_{22}-t}{4} \\
 e_3^2 &= \frac{1+2a_{33}-t}{4}
 \end{aligned}$$

Al contrario de lo que ocurría con la utilización de los ángulos de Euler, ahora no hay casos críticos en los que estas fórmulas sean singulares.

Observando las dos expresiones de la matriz  $\mathbf{A}$ , en función de los cosenos directores y de los parámetros de Euler, pueden obtenerse otras expresiones para los parámetros  $e_1$ ,  $e_2$  y  $e_3$ :

$$\begin{aligned}
 a_{32} - a_{23} &= 4 e_0 e_1 \\
 a_{13} - a_{31} &= 4 e_0 e_2 \\
 a_{21} - a_{12} &= 4 e_0 e_3
 \end{aligned}$$

de donde se deduce que:

$$e_1 = \frac{a_{32} - a_{23}}{4 e_0}$$

$$e_2 = \frac{a_{13} - a_{31}}{4 e_0}$$

$$e_3 = \frac{a_{21} - a_{12}}{4 e_0}$$

Estas expresiones pueden ser utilizadas cuando  $e_0$  sea distinto de cero.

### **Propiedades de los parámetros de Euler**

Existen importantes relaciones entre los parámetros de Euler y sus derivadas respecto al tiempo, con las matrices de transformación y las velocidades angulares.

Definiendo dos matrices de orden  $(3 \times 4)$  denominadas **E** y **G**, en función de los parámetros de Euler, tales que:

$$E = \begin{bmatrix} -e_1 & e_0 & -e_3 & e_2 \\ -e_2 & e_3 & e_0 & -e_1 \\ -e_3 & -e_2 & e_1 & e_0 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} -e_1 & e_0 & e_3 & -e_2 \\ -e_2 & e_3 & e_0 & e_1 \\ -e_3 & e_2 & -e_1 & e_0 \end{bmatrix}$$

Se cumple que:

$$\frac{E p}{G p} = 0$$

siendo **p** el vector de los parámetros de Euler:

$$p = \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

Operando puede comprobarse que, efectivamente,  $E p = 0$ :

$$\begin{aligned} E p &= \begin{bmatrix} -e_1 & e_0 & -e_3 & e_2 \\ -e_2 & e_3 & e_0 & -e_1 \\ -e_3 & -e_2 & e_1 & e_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \\ &= -e_1 e_0 + e_0 e_1 - e_3 e_2 + e_2 e_3 = 0 \end{aligned}$$

que efectivamente es igual a cero.

También puede comprobarse cómo el producto de las matrices  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{G}$  por su matriz traspuesta es igual a la matriz identidad:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \mathbf{E}^T &= \mathbf{I} \\ \mathbf{G} \mathbf{G}^T &= \mathbf{I} \end{aligned}$$

Por otra parte, operando puede comprobarse cómo la matriz de transformación  $\mathbf{A}$  puede ponerse en función de las matrices  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{G}$ :

$$\mathbf{A} = \mathbf{E} \mathbf{G}^T$$

De esta forma, la matriz  $\mathbf{A}$ , que está formada por términos cuadráticos de los parámetros de Euler, puede obtenerse como el producto de dos matrices que están formadas por términos lineales de los parámetros de Euler:

### **Derivadas de los parámetros de Euler respecto al tiempo**

Multiplicando el vector traspuesto de  $\mathbf{p}$  por  $\mathbf{p}$  se tiene:

$$\mathbf{p}^T \mathbf{p} = [e_0 \ e_1 \ e_2 \ e_3] \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2$$

Y es conocido que:

$$e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{p}^T \dot{\mathbf{p}} = 0$$

Derivando respecto al tiempo se tiene:

$$\mathbf{p}^T \dot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{p}}^T \mathbf{p} = 0$$

Y análogamente, derivando la ecuación  $\mathbf{E} \mathbf{p} = 0$ , se tiene:

$$\mathbf{E} \dot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{E}} \mathbf{p} = 0$$

o bien:

$$\mathbf{E} \dot{\mathbf{p}} = -\dot{\mathbf{E}} \mathbf{p}$$

y también,

$$\mathbf{G} \dot{\mathbf{p}} = -\dot{\mathbf{G}} \mathbf{p}$$

Recordando que  $\mathbf{A} = \mathbf{E} \mathbf{G}^T$ , y derivando la igualdad se obtiene:

$$\dot{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{E}} \mathbf{G}^T + \mathbf{E} \dot{\mathbf{G}}^T$$

Por otra parte, operando se puede comprobar que:

$$\mathbf{E} \dot{\mathbf{G}}^T = \dot{\mathbf{E}} \mathbf{G}^T$$

y en consecuencia:

$$\dot{A} = 2E \dot{G}^T$$

Derivando nuevamente respecto al tiempo, se obtiene:

$$\ddot{A} = 2\dot{E} \dot{G}^T + 2E \ddot{G}^T$$

y como

$$E \dot{G}^T = \dot{E} G^T$$

la expresión de  $\ddot{A}$  puede ponerse también como:

$$\ddot{A} = 2\dot{E} \dot{G}^T + 2\ddot{E} G^T$$

Como se verá más tarde en este capítulo, estas ecuaciones son muy utilizadas en la resolución de la cinemática tridimensional.

El lector recordará que para resolver las relaciones de velocidades y aceleraciones en los pares cinemáticos, era necesario obtener la matriz jacobiana. En la cinemática tridimensional ocurre lo mismo, y por este motivo, posteriormente se va a utilizar la derivada parcial del producto de la matriz  $A$  por un vector, respecto a los parámetros de Euler.

Sea  $\bar{a}$  un vector arbitrario cualquiera. Se puede demostrar que:

$$\frac{\partial}{\partial p} (Aa) = 2E\bar{a} + 2ap^T$$

en donde  $\bar{a}$  es una matriz 4x4 definida con las componentes del vector  $a$ :

$$\bar{a} = \begin{bmatrix} 0 & -a^T \\ a & -\bar{b} \end{bmatrix}$$

$$\bar{a} = \begin{bmatrix} 0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & 0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & 0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Así mismo, se puede demostrar que el producto de la matriz  $\ddot{A}$  por un vector arbitrario  $\bar{a}$  es:

$$\ddot{A}\bar{a} = 2\dot{E}\dot{G}^T a + 2E\ddot{a}$$

## 14.4 LIGADURAS ENTRE DOS CUERPOS

### Introducción

En este apartado se van a plantear las relaciones entre dos vectores, que resultan básicas para poder formular las ecuaciones de restricción en cinemática tridimensional. Así, muchas de estas restricciones requieren que dos vectores permanezcan paralelos o perpendiculares. Un vector puede tener una longitud fija, por ejemplo si conecta puntos que están fijos en el mismo cuerpo, o bien tener una longitud variable si conecta puntos que están fijos en diferentes cuerpos.

En la formulación de las ecuaciones de restricción, es necesario expresar las componentes de todos los vectores en el mismo sistema de coordenadas, y lo más natural es hacerlo en la referencia global.

En la figura 14.9, se muestra un vector  $\vec{s}_i$  que está fijo en el cuerpo  $i$ , y por lo tanto su magnitud es constante y su orientación relativa respecto a  $\xi\eta\zeta$  no cambia. Las componentes globales de  $\vec{s}_i$  pueden ser obtenidas en cualquiera de las siguientes formas:

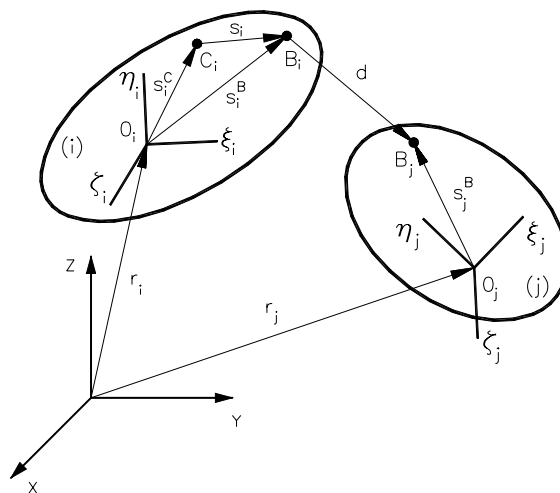
$$\begin{aligned} s_i &= s_i^B - s_i^C = \\ &= A_i s_i'^B - A_i s_i'^C = \\ &= A_i (s_i'^B - s_i'^C) \end{aligned}$$

donde  $s_i'^B$  y  $s_i'^C$  son los vectores de posición de los puntos B y C referidos al sistema  $\xi\eta\zeta$ .

Cuando un vector conecta dos puntos de los cuerpos  $i, j$ , tal como el vector  $\vec{d}$  en la figura 14.9, sus componentes globales pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} d &= (r_j + s_j^B) - (r_i + s_i^B) = \\ &= r_j + A_j s_j'^B - r_i - A_i s_i'^B \end{aligned}$$

En este caso, está claro que el vector que conecta los dos puntos de los cuerpos, depende de la posición global de cada cuerpo y por lo tanto de los vectores  $r_i$  y  $r_j$ .



**Figura 14.9.** Vectores de magnitud constante y vectores de magnitud variable.

### Vectores perpendiculares

Para exigir que dos vectores permanezcan perpendiculares a lo largo del tiempo, se necesita una ecuación de restricción. Si la dirección de un vector está definida, el segundo vector solamente puede trasladarse y girar en un plano perpendicular al primer vector.

Dos vectores  $\vec{s}_i$  y  $\vec{s}_j$  permanecen perpendiculares si su producto escalar es cero. Por lo tanto:

$$s_i^T s_j = 0$$

Si se expresan los vectores en coordenadas locales en lugar de globales, se tiene

$$s_i'^T A_i^T A_j s_j' = 0$$

Al producto escalar de dos vectores, cuya magnitud y orientación respecto a su sistema de referencia local, permanecen constantes, se los identificará más adelante por medio de la ecuación de restricción que producen, que en este caso se denomina  $\Phi^{(n1,1)}$ , por lo tanto:

$$\Phi^{(n1,1)} = s_i^T s_j = 0$$

en donde n1, significa que la ecuación de restricción es del tipo normal 1, y el siguiente 1 significa que este tipo de restricción queda definida por una ecuación.

Si dos vectores como el  $s_i^T$  y el  $d$  en la figura 14.9, van a permanecer perpendiculares a lo largo de todo su movimiento, su producto escalar será nulo. La diferencia con el caso anterior está en que ahora uno de los vectores, el  $d$ , varía su magnitud con el movimiento.

La ecuación de restricción tiene ahora el siguiente aspecto:

$$\Phi^{(n2,1)} = s_i^T d = s_i^T A_i^T (r_j + A_j s_j^B - r_i - A_i s_i^B) = 0$$

A esta ecuación de restricción se le denomina del tipo normal 2, y la restricción queda definida por una única ecuación. Por este motivo se utiliza la nomenclatura (n2,1).

### Vectores paralelos

Para obligar a que dos vectores permanezcan paralelos deben satisfacerse dos ecuaciones de restricción. Como es sabido, el producto vectorial de dos vectores paralelos es cero, siendo esta condición la que proporciona las dos ecuaciones de restricción mencionadas, ya que el producto vectorial conduce a tres ecuaciones algebraicas, de las cuales sólo dos son independientes.

Dados dos vectores  $\vec{s}_i$  y  $\vec{s}_j$ , las ecuaciones de restricción que exigen que ambos vectores ~~permanezcan~~ permanezcan paralelos se obtienen de:

$$\vec{s}_i \times \vec{s}_j = \vec{0}$$

o bien:

$$\tilde{s}_i s_j = 0$$

siendo:

$$\tilde{s}_i = \begin{bmatrix} 0 & -s_{iz} & s_{iy} \\ s_{iz} & 0 & -s_{ix} \\ -s_{iy} & s_{ix} & 0 \end{bmatrix}$$

Si el producto vectorial se realiza con los vectores  $s_i$  y  $s_j$  referidos a sus respectivos sistemas locales se tiene:

$$\Phi^{(p1,2)} = \tilde{s}_i s_j = A_i \tilde{s}_i^T A_i^T A_j s_j^B = 0$$

que es la ecuación de restricción característica, de dos vectores constantes que permanecen siempre paralelos. Esta ecuación de restricción se denomina paralelismo tipo 1, y produce dos ecuaciones independientes. Por este motivo su nomenclatura es (p1,2).

Efectivamente operando se obtiene:

$$\vec{s}_i \times \vec{s}_j = \tilde{s}_i s_j = \begin{bmatrix} 0 & -s_{iz} & s_{iy} \\ s_{iz} & 0 & -s_{ix} \\ -s_{iy} & s_{ix} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{jx} \\ s_{jy} \\ s_{jz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{iy} s_{jz} - s_{iz} s_{jy} \\ s_{iz} s_{jx} - s_{ix} s_{jz} \\ s_{ix} s_{jy} - s_{iy} s_{jx} \end{bmatrix} = 0$$

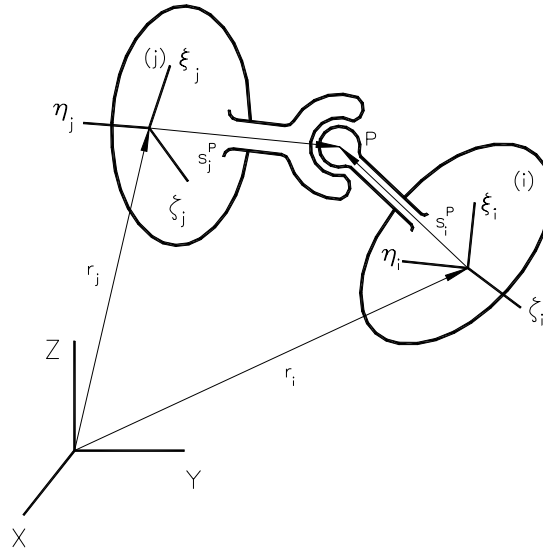
De estas tres ecuaciones sólo son válidas dos, ya que la tercera es combinación lineal de las anteriores.

Si uno de los vectores que va a permanecer paralelo no es constante, la ecuación de restricción se denomina de tipo paralelismo 2 y como en el caso anterior solamente se obtienen dos ecuaciones independientes.

$$\Phi^{(p2,2)} = \tilde{s}_i d = A_i \tilde{s}'_i A_i^T (r_j + A_j s'_j{}^B - r_i - A_i s'_i{}^B) = 0$$

### Junta esférica

En la figura 14.10 se muestra una junta esférica entre dos cuerpos adyacentes i y j. El centro de la junta esférica, punto P, tiene coordenadas constantes respecto a los dos sistemas  $\xi_i \eta_i \zeta_i$  y  $\xi_j \eta_j \zeta_j$ , localizados en cada cuerpo.



**Figura 14.10.** Junta esférica.

Para definir esta junta se necesitan tres ecuaciones algebraicas, que pueden encontrarse a partir de la ecuación vectorial:

$$\vec{r}_i + \vec{s}_i^P - \vec{s}_j^P - \vec{r}_j = \vec{0}$$

donde  $\vec{s}_i^P$  y  $\vec{s}_j^P$  son vectores cuyas coordenadas están expresadas en el sistema de referencia global. Si se trabaja con los vectores  $\vec{s}_i^P$  y  $\vec{s}_j^P$  expresados en términos de sus componentes locales, y que se denotan por  $\vec{s}'_i{}^P$  y  $\vec{s}'_j{}^P$ , se tiene:

$$\Phi^{(s,3)} = \vec{r}_i + A_i \vec{s}'_i{}^P - A_j \vec{s}'_j{}^P - \vec{r}_j = \vec{0}$$

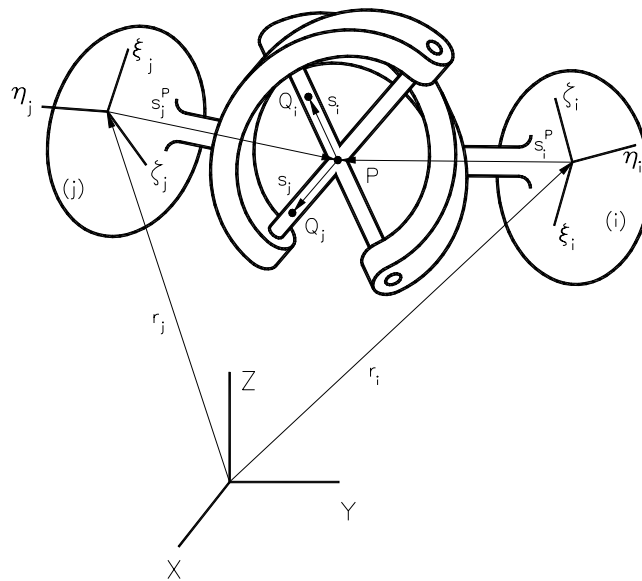


en donde  $A_i$  y  $A_j$  son las matrices de los cosenos directores de los sistemas locales respecto al global. A esta ecuación de restricción, se le denomina (s,3), s de esférica y 3 porque tiene tres ecuaciones escalares de ligadura, que son las que se obtienen a partir de la ecuación vectorial anterior.

### Junta universal

En la figura 14.11 se muestra una junta universal ~~o de Hooke~~ entre dos cuerpos i y j. Una parte de las barras en cruz puede considerarse como perteneciente al elemento i y la otra al j. En la parte correspondiente al cuerpo i se define un punto  $Q_i$ , así como un vector  $\vec{s}_i$  que va desde el punto P, situado en la intersección de las barras, hasta el punto  $Q_i$ . En la otra barra de la cruz se definen otro punto  $Q_j$  y su correspondiente vector  $\vec{s}_j$ , que une P con  $Q_j$ .

Como el punto P tiene coordenadas constantes respecto a los sistemas  $\xi_i\eta_i\zeta_i$  y  $\xi_j\eta_j\zeta_j$ , pueden aplicarse las ecuaciones correspondientes a la junta esférica.



**Figura 14.11.** Junta universal.

Por otra parte, los dos vectores que unen el punto P con  $Q_i$  y  $Q_j$  van a permanecer siempre perpendiculares el uno al otro, y por tanto su producto escalar será nulo, cumpliéndose que:

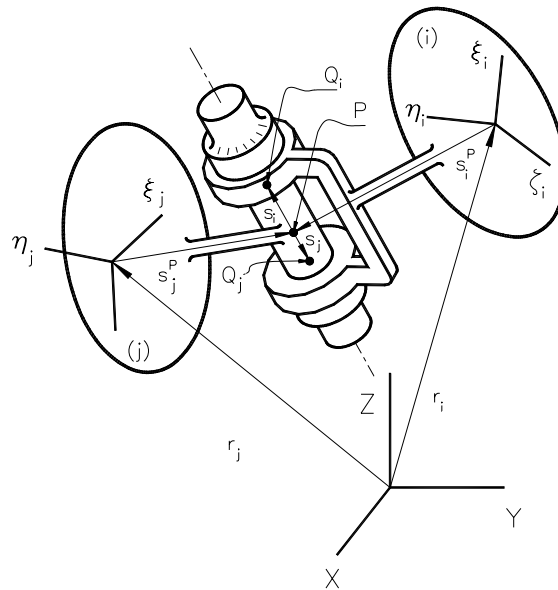
$$s_i^T s_j = 0$$

Esta ecuación, añadida a las que se obtienen del planteamiento en el punto P, dan lugar a cuatro ecuaciones de ligadura o restricción que caracterizan a este tipo de junta. En definitiva se tiene:

$$\begin{aligned} \Phi^{(s,3)} &= \vec{r}_i + A_i \vec{s}_i^P - A_j \vec{s}_j^P - \vec{r}_j = \vec{0} \\ \Phi^{(n1,1)} &= s_i^T s_j = 0 \end{aligned}$$

### Junta de revolución

En la figura 14.12 se muestra una junta de revolución entre dos cuerpos i y j. Cualquier situado sobre el eje de la junta de revolución tiene sus coordenadas constantes respecto a ambos sistemas de coordenadas locales.



**Figura 14.12.** Junta de revolución.

Por el motivo anteriormente expuesto, inicialmente se plantea la ecuación vectorial de igualdad de coordenadas globales sobre el punto P:

$$\Phi^{(s,3)} = \vec{r}_i + A_i \vec{s}_i'^P - A_j \vec{s}_j'^P - \vec{r}_j = \vec{0}$$

Tomando otros dos puntos:  $Q_i$  en el cuerpo i y  $Q_j$  en el j, que están situados en el eje de la junta, resulta evidente que los vectores  $\vec{s}_i$  y  $\vec{s}_j$  que unen P con  $Q_i$  y  $Q_j$  han de permanecer siempre paralelos. Y como la condición de paralelismo implica que su producto vectorial sea nulo, debe satisfacerse la igualdad:

$$\Phi^{(p1,2)} = \vec{s}_i \times \vec{s}_j = \vec{0}$$

De esta forma se obtienen dos nuevas ecuaciones de restricción o ligadura que, unidas a las otras tres resultantes de plantear la igualdad de coordenadas globales del punto P, dan un total de cinco ecuaciones de ligadura que son las que caracterizan a este tipo de junta.

El producto vectorial de los dos vectores  $\vec{s}_i$  y  $\vec{s}_j$  puede expresarse también expresando las componentes de ambos vectores en coordenadas locales, y entonces este producto vectorial toma la forma:

$$\Phi^{(p1,2)} = A_i \vec{s}_i' A_i^T A_j s_j' = 0$$

siendo  $A_i^T$  la matriz traspuesta de  $A_i$ .

### Junta cilíndrica

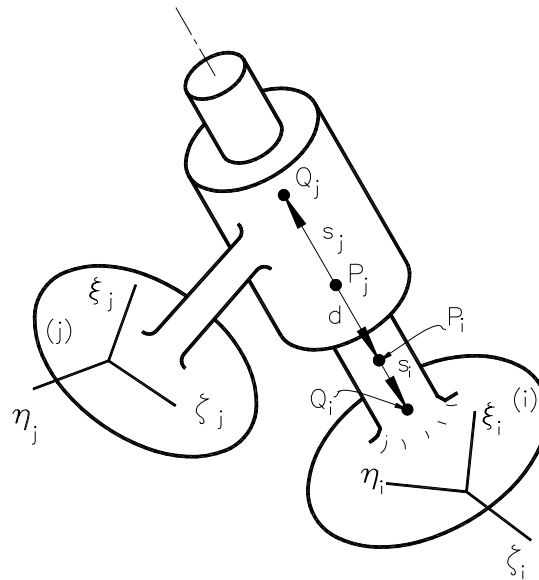
Una junta cilíndrica conecta dos cuerpos i y j que se mueven a lo largo de un eje común y que pueden girar libremente respecto a dicho eje.

Para determinar las ecuaciones de ligadura de este tipo de junta se toman cuatro puntos sobre el eje de revolución:  $P_i$  y  $Q_i$  en el cuerpo i, y  $P_j$  y  $Q_j$  en el cuerpo j, tal como muestra la figura 14.13. En el funcionamiento de la junta, los vectores  $\vec{s}_i$  y  $\vec{s}_j$ , de magnitud constante, y el vector  $\vec{d}$ , de magnitud variable, son colineales en todo momento.

Esta junta necesita cuatro ecuaciones de ligadura, que se obtienen de la condición de colinealidad o paralelismo entre los vectores  $\vec{s}_i$  y  $\vec{s}_j$ , así como de la colinealidad entre  $\vec{s}_i$  y  $\vec{d}$ .

$$\Phi^{(p1,2)} = \vec{s}_i \times \vec{s}_j = \vec{0}$$

$$\Phi^{(p2,2)} = \vec{s}_i \times \vec{d} = \vec{0}$$



**Figura 14.13.** Junta cilíndrica.

### Junta de traslación

La junta de traslación, también denominada junta prismática, es similar a la cilíndrica, con la diferencia de que ahora está impedido el giro relativo entre los dos cuerpos que conecta.

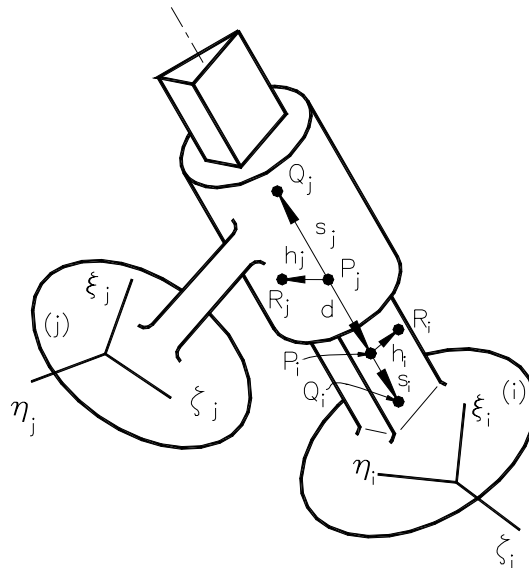
Al no poder existir el giro relativo, se necesita una ecuación más de restricción que las que definían la junta cilíndrica. Para obtenerla, se definen dos nuevos vectores  $\vec{h}_i$  y  $\vec{h}_j$ , que inicialmente son perpendiculares a la línea de traslación y también lo son entre sí (figura 14.14), y que deben permanecer perpendiculares a lo largo de todo el movimiento de la junta.

En definitiva, las cinco ecuaciones de restricción son:

$$\Phi^{(p1,2)} = \vec{s}_i \times \vec{s}_j = \vec{0}$$

$$\Phi^{(p2,2)} = \vec{s}_i \times \vec{d} = \vec{0}$$

$$\Phi^{(n1,1)} = \vec{h}_i \cdot \vec{h}_j = 0$$



**Figura 14.14.** Junta traslación.

## 14.5 ANÁLISIS CINEMÁTICO TRIDIMENSIONAL

El análisis cinemático de los mecanismos tridimensionales, tiene el mismo planteamiento que el que se hacía en el apartado 211.5 para la cinemática plana. ~~En este sentido, a lo largo de este apartado se van a indicar solamente los pasos específicos diferentes de la cinemática plana.~~

Para un mecanismo con  $n$  cuerpos, el vector de coordenadas de todo el mecanismo es de la forma:

$$q = [q_1^T, q_2^T, q_3^T, \dots, q_n^T]^T$$

~~donde cada vector  $q_i$ , si se utilizan los parámetros de Euler, es de la forma:~~

$$\del{q_i = [x, y, z, e_0, e_1, e_2, e_3]^T}_i$$

~~o bien:~~

$$q_i = [r^T, p^T]^T_i$$

~~en donde, como recordará el lector,  $p$  es el vector que contiene todos los parámetros de Euler. Al utilizar estos parámetros, el vector de coordenadas de cada cuerpo tiene siete variables, y no obstante los grados de libertad de un cuerpo que se mueve en el espacio son seis. Por este motivo, además de las ecuaciones de restricción, será necesario plantear por cada cuerpo una ecuación suplementaria entre los parámetros de Euler. Así, para el cuerpo  $i$  la ecuación suplementaria será:~~

$$\del{p_i^T - 1 = 0}$$

Para obtener los desplazamientos, el resto de las ecuaciones se obtienen de igualar a cero todas las ecuaciones de restricción del mecanismo.

$$\Phi = \Phi(q) = 0$$

Para continuar con el análisis cinemático, y encontrar las relaciones entre velocidades y aceleraciones, es necesario obtener la matriz jacobiana de las ecuaciones de restricción.

~~Sea el caso por ejemplo, de la ecuación de restricción normal tipo 1.~~

Como recordará el lector se tenía:

$$\Phi^{(n1,1)} = s_i^T s_j = 0$$

Para obtener la matriz jacobiana, hay que derivar parcialmente las ecuaciones de restricción respecto a las variables.

Comenzando por la derivada de  $\Phi^{(n1,1)}$  respecto al vector  $\mathbf{r}_i$  se tiene:

$$\Phi_{ri}^{(n1,1)} = \frac{\partial \Phi^{(n1,1)}}{\partial r_i} = 0^T$$

Efectivamente, la derivada parcial de  $\Phi^{(n1,1)}$  respecto a las componentes x, y, z del vector  $\mathbf{r}_i$  son todas nulas debido a que los vectores  $\mathbf{s}_i$  y  $\mathbf{s}_j$  no dependen de  $\mathbf{r}_i$ .

Veamos ahora la derivada parcial de esta ecuación de restricción, respecto al vector  $\mathbf{p}_i$  que contiene todos los parámetros de Euler del cuerpo i. Para obtenerla, se parte de la expresión  $s_j^T A_i s_i'$  en lugar de  $s_i^T s_j$ . Por lo tanto, la ecuación de restricción de partida es ahora:

$$\Phi^{(n1,1)} = s_j^T A_i s_i'$$

Para derivar parcialmente respecto a  $\mathbf{p}_i$ , hay que recordar las expresiones finales del apartado 3.3, en la que se obtenía la derivada parcial del producto de la matriz  $\mathbf{A}$  por un vector cualquiera, respecto al vector  $\mathbf{p}$ :

Recordando esta expresión se tenía:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} (A\mathbf{a}) = 2E\bar{\mathbf{a}} + 2\mathbf{a}\mathbf{p}^T$$

Al derivar parcialmente  $\Phi^{(n1,1)}$  respecto a  $\mathbf{p}_i$ , el vector  $\mathbf{a}$  es ahora  $\mathbf{s}_i'$  y en consecuencia se obtiene:

$$\Phi_{pi}^{(n1,1)} = \frac{\partial \Phi^{(n1,1)}}{\partial \mathbf{p}_i} = 2s_j^T (E_i \bar{s}_i' + s_i' \mathbf{p}_i^T)$$

Similarmente, las derivadas parciales de esta ecuación de restricción, respecto a  $\mathbf{r}_i$  y  $\mathbf{p}_j$  son:

$$\Phi_{rj}^{(n1,1)} = 0^T$$

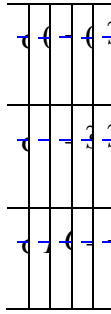
$$\Phi_{pj}^{(n1,1)} = 2s_i^T (E_j \bar{s}_j' + s_j' \mathbf{p}_j^T)$$

Lo mismo que se ha hecho con la ecuación de restricción correspondiente al tipo normal 1, hay que hacerlo sobre todos los demás tipos de ecuaciones de restricción. En la siguiente tabla, se muestran las componentes de la matriz jacobiana de las ecuaciones de restricción más comunes.

**Tabla 14.1.** Componentes de la matriz jacobiana de las más comunes ecuaciones de restricción.

← ← ← ←

←	←	←	←
←	←	←	←



Siendo  $\mathbf{I}$  la matriz de identidad y:

$$\left. \begin{aligned} B_k &= 2(E_k \bar{s}_k^{1B} + s_k^{1B} p_k^T) \\ C_k &= 2(E_k \bar{s}'_k + s'_k p_k^T) \end{aligned} \right\} k = i, j$$

En cuanto se refiere al análisis de las aceleraciones que se producen en un mecanismo, tal y como se hacía en el apartado 211.5 para la cinemática plana, es necesario obtener el vector  $\gamma$ . Veamos como serían los pasos para su obtención, en el caso concreto de la ecuación de restricción normal tipo 1.

Se tenía:

$$\Phi^{(n1,1)} = s_i^T s_j = 0$$

~~derivando~~ Derivando dos veces respecto al tiempo, se obtiene:

$$s_j^T \ddot{s}_i + s_i^T \ddot{s}_j + 2\dot{s}_i^T \dot{s}_j = 0$$

o también:

$$s_j^T \ddot{A}_i s'_i + s_i^T \ddot{A}_j s'_j + 2\dot{s}_i^T \dot{s}_j = 0$$

~~Al final del apartado 3.3 referente a los parámetros de Euler, se obtenía la expresión del producto de la matriz  $\ddot{A}$  por un vector cualquiera  $a$ , en función de las matrices  $E$ ,  $G$  y del vector  $p$  que contiene los parámetros de Euler.~~

~~Se tenía:~~

$$\ddot{A}a = 2\dot{E}\dot{G}^T a + 2E\ddot{a}\ddot{p}$$

~~Teniendo en cuenta que en nuestro caso el vector  $a$  es  $s'_i$  o  $s'_j$ , se obtiene para la ecuación de restricción derivada dos veces respecto al tiempo, la siguiente expresión:~~

$$\left[ 2s_j^T E_i \bar{s}'_i, 2s_i^T E_j \bar{s}'_j \right] \begin{bmatrix} \dot{p}_i \\ \dot{p}_j \end{bmatrix} = 2(s_j^T \dot{E}_i \dot{G}_i s'_i + s_i^T \dot{E}_j \dot{G}_j s'_j + \dot{s}_i^T \dot{s}_j)$$

~~El lado derecho de esta ecuación, constituye el vector  $\gamma$  en la cinemática tridimensional para la ecuación de restricción (n1,1).~~

El mismo planteamiento, podría aplicarse al resto de los tipos de ecuaciones de restricción, pero no se va a hacer en este texto porque se trata de un ejercicio puramente matemático, con el que el lector no incrementa sus conceptos teóricos para la simulación de sistemas mecánicos.

Cuando haya llegado a este punto, el lector comprenderá fácilmente las ventajas que aportan los programas de simulación, que nos permitirán analizar un mecanismo sin necesidad de navegar continuamente por las ecuaciones de restricción, las derivadas parciales de ellas, los parámetros de Euler, los vectores  $\gamma$ , etc.

Podría plantearse entonces, la duda de si ha merecido la pena el esfuerzo empleado en el estudio de los capítulos anteriores, no lo dude, para obtener el máximo de un programa de simulación es necesario tener una base teórica importante, de lo contrario apenas podría resolverse el caso más sencillo.