

## Análisis de mecanismos con bond graph

### 16.1. INTRODUCCIÓN

En la figura 1, se muestra un sólido rígido que se traslada y rota en el espacio. Hay dos sistemas de referencia: uno inercial X, Y, Z y el otro fijo al sólido x, y, z moviéndose con él. El sistema x, y, z tiene su centro en el centro de masas del sólido y está orientado según los ejes principales de inercia. En consecuencia, los valores de las inercias rotacionales permanecen constantes y los productos de inercia son todos nulos.

La utilización de sistemas de referencia fijos al sólido, tiene la ventaja de que no varían los valores de las inercias y el inconveniente de la representación de movimiento global del sólido.

En el instante que se muestra en la figura 1, el sólido tiene una velocidad de traslación  $\vec{V}$  y una velocidad angular  $\vec{\omega}$ . Estos vectores están formados por sus tres componentes  $v_x, v_y, v_z$  y  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ . El conjunto de fuerzas  $\vec{f}$  que actúa sobre el sólido produce cambios en las cantidades de movimiento tal que:

$$F = \frac{d}{dt} P$$

Dónde:

$$P = m v$$

Si v está expresado con respecto al sistema de referencia móvil, se tiene:

$$F = \frac{dp}{dt} + \omega \times p$$

Expresando esta ecuación en forma matricial:

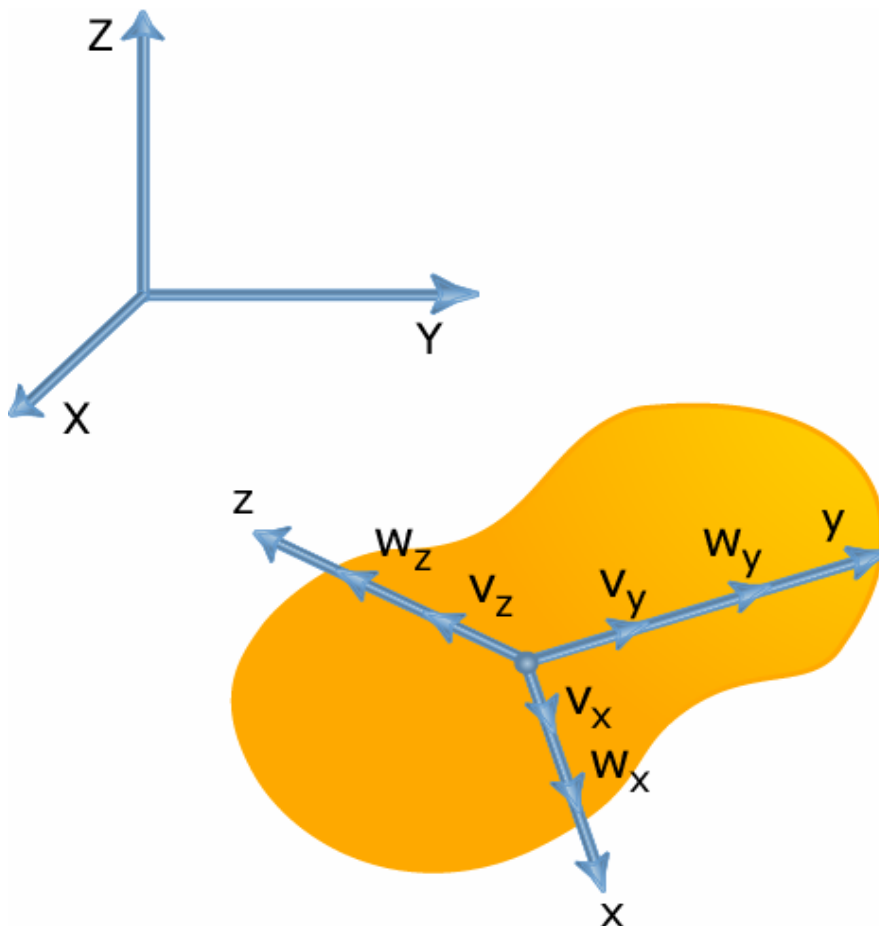
$$\begin{bmatrix} F_X \\ F_Y \\ F_Z \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} m v_x \\ m v_y \\ m v_z \end{bmatrix}$$

Y operando:

$$F_X = m\dot{v}_x + m\omega_x v_z - m\omega_z v_y$$

$$F_Y = m\dot{v}_y + m\omega_z v_x - m\omega_x v_z$$

$$F_Z = m\dot{v}_z + m\omega_y v_x - m\omega_x v_y$$



*Figura 1. Sólido tridimensional en el espacio.*

Al igual que para los movimientos de traslación para la rotación se puede plantear la ecuación:

$$\tau = \frac{d}{dt} h$$

Siendo  $\tau$  el conjunto de pares  $\tau_x, \tau_y, \tau_z$ , aplicados al sólido y  $h$  las cantidades de movimiento angular.

Si el sistema  $x, y, z$ , está alineado con los ejes principales de inercia se tiene que:

$$h = J\omega$$

Siendo  $J$  una matriz diagonal con los momentos de inercia principales  $J_x, J_y, J_z$ . Para  $h$  expresada con respecto al sistema de referencia móvil la expresión de  $\tau$  toma la forma:

$$\tau = \frac{dh}{dt} + \omega \times h$$

Y en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_x & \dot{\omega}_x \\ J_y & \dot{\omega}_y \\ J_z & \dot{\omega}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} J_x \omega_x \\ J_y \omega_y \\ J_z \omega_z \end{bmatrix}$$

Y operando:

$$\tau_x = J_x \dot{\omega}_x + \omega_y J_z \omega_z - \omega_z J_y \omega_y$$

$$\tau_y = J_y \dot{\omega}_y + \omega_z J_x \omega_x - \omega_x J_z \omega_z$$

$$\tau_z = J_z \dot{\omega}_z + \omega_x J_y \omega_y - \omega_y J_x \omega_x$$

Tanto las ecuaciones de fuerzas como las de pares se pueden representar en Bond-Graph mediante sendos triángulos como los mostrados en la figura.

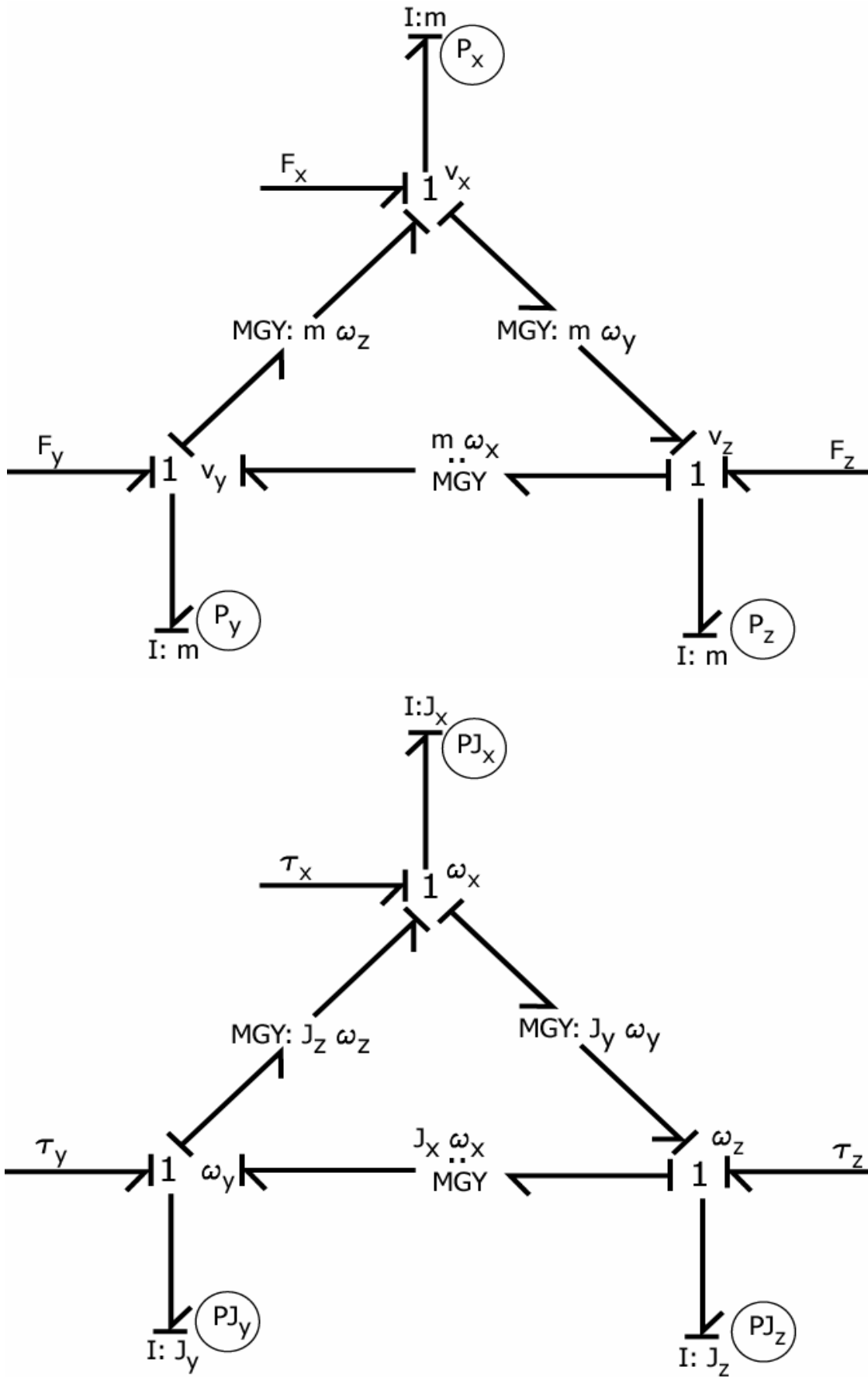


Figura 2. Representación en Bond-Graph de las ecuaciones del sólido rígido en el espacio.

Utilizando como variables del problema, como siempre en Bond-Graph, las cantidades de movimiento asociadas a las puertas inercia con causalidad integral, se deducen de la figura 2 las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{P}_X &= F_X + m\omega_z \frac{P_Y}{m} - m\omega_y \frac{P_Z}{m} = F_X + \frac{P_Z P_Y}{J_Z} - \frac{P_Y P_Z}{J_Y} \\ \dot{P}_Y &= F_Y + m\omega_x \frac{P_Z}{m} - m\omega_z \frac{P_X}{m} = F_Y + \frac{P_X P_Z}{J_X} - \frac{P_X P_Z}{J_Z} \\ \dot{P}_Z &= F_Z + m\omega_y \frac{P_X}{m} - m\omega_x \frac{P_Y}{m} = F_Z + \frac{P_X P_Y}{J_Y} - \frac{P_X P_Y}{J_X} \\ \dot{P}_{J_X} &= \tau_X + J_Y \omega_y \frac{P_{J_Z}}{J_Z} - J_Z \omega_z \frac{P_{J_Y}}{J_Y} = \tau_X + \frac{P_{J_Y} P_{J_Z}}{J_Z} - \frac{P_{J_Z} P_{J_Y}}{J_Y} \\ \dot{P}_{J_Y} &= \tau_Y + J_Z \omega_z \frac{P_{J_X}}{J_X} - J_X \omega_x \frac{P_{J_Z}}{J_Z} = \tau_Y + \frac{P_{J_Z} P_{J_X}}{J_X} - \frac{P_{J_X} P_{J_Z}}{J_Z} \\ \dot{P}_{J_Z} &= \tau_Z + J_X \omega_x \frac{P_{J_Y}}{J_Y} - J_Y \omega_y \frac{P_{J_X}}{J_X} = \tau_Z + \frac{P_{J_X} P_{J_Y}}{J_Y} - \frac{P_{J_Y} P_{J_X}}{J_X} \end{aligned}$$

Siendo:

$$\begin{aligned} v_X &= \frac{P_X}{m} & \omega_X &= \frac{P_{J_X}}{J_X} \\ v_Y &= \frac{P_Y}{m} & \omega_Y &= \frac{P_{J_Y}}{J_Y} \\ v_Z &= \frac{P_Z}{m} & \omega_Z &= \frac{P_{J_Z}}{J_Z} \end{aligned}$$

Los dos triángulos que representan a las ecuaciones del sólido, se pueden mostrar conjuntamente mediante una estrella como la que se presenta en la figura 3.

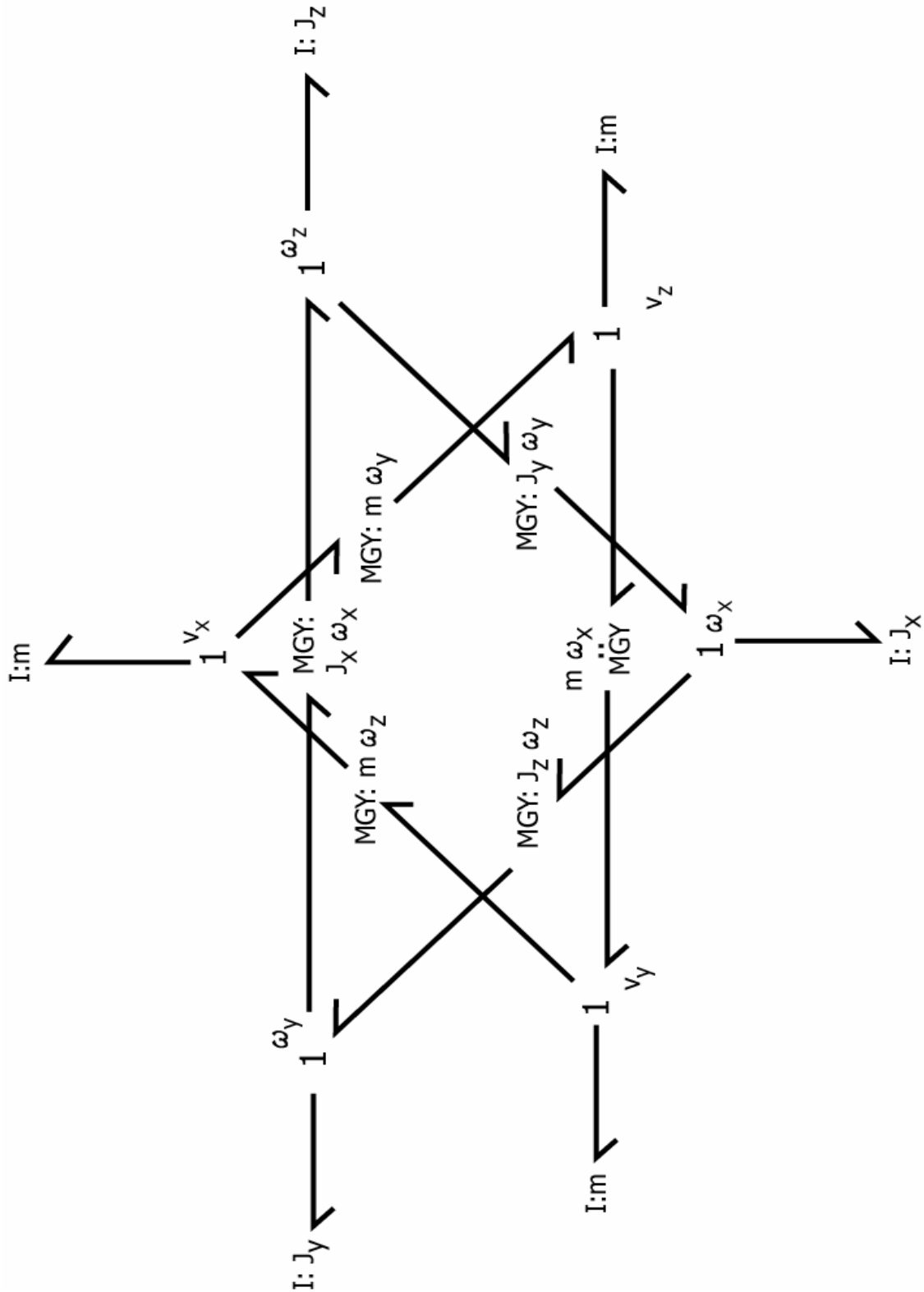


Figura 3. Representación conjunta en Bond-Graph de las ecuaciones de sólido rígido tridimensional

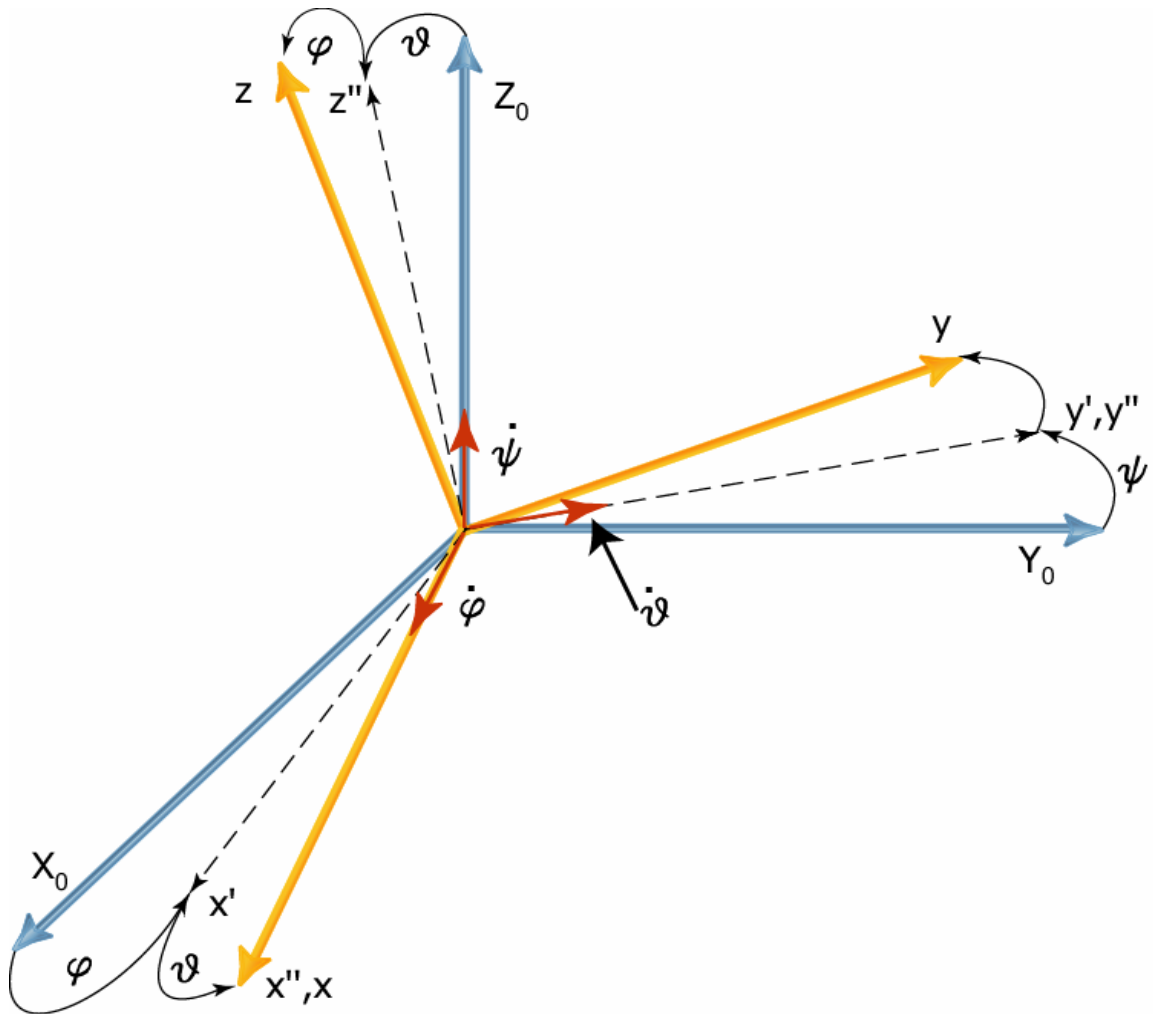
## 16.2. CAMBIO DE SISTEMA DE REFERENCIA

Como se ha comentado en el apartado anterior, el inconveniente de utilizar sistemas de referencia fijos al sólido rígido está en que se analizan muy mal los movimientos globales del

sólido. Para evitar este problema es necesario referir todos los movimientos respecto a un sistema de referencia inercial que en consecuencia se encuentre fijo sobre la tierra

Para el cambio del sistema de referencia se van a utilizar los ángulos de CARDAN. En la figura 4, se muestra un sistema de referencia inercial  $X, Y, Z$  y otro  $x, y, z$  fijado a un sólido móvil que acompaña a este en sus movimientos. Se muestran también dos sistemas de referencia intermedios ( $x', y', z'$  y  $x'', y'', z''$ ).

Para realizar el cambio de sistema de referencia, se parte inicialmente de un giro alrededor del eje  $Z$  de ángulo  $\psi$ . Mediante este giro del sistema  $X, Y, Z$ , se obtiene el sistema  $x', y', z'$ .



**Figura 4. Ángulos de CARDAN para el cambio de sistema de referencia.**

Posteriormente y mediante un giro  $\theta$  alrededor del nuevo eje  $y'$ , se obtiene el nuevo sistema  $x'', y'', z''$ . Por último, con un giro  $\phi$  alrededor del eje  $x''$  se obtiene definitivamente el sistema  $x, y, z$  que se mueve con el sólido.

Como las ecuaciones del movimiento del sólido rígido se plantean sobre el sistema de referencia que se mueve con él, resolviéndolas se pueden obtener por ejemplo las velocidades angulares  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  del sólido respecto a un sistema  $x, y, z$ .

Conocidas  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  respecto a  $x, y, z$ , el problema es hallar estas velocidades pero referidas al sistema inercial  $X, Y, Z$ . Para ello basta con deshacer los giros de los ángulos de Cardan.

Para pasar del sistema  $x, y, z$ , al  $x'', y'', z''$ , basta con aplicar la matriz de transformación del giro  $\varphi$  y se obtienen las velocidades angulares respecto al sistema  $s'', y'', z''$ .

$$\begin{bmatrix} \ddot{\omega}_x \\ \ddot{\omega}_y \\ \ddot{\omega}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\operatorname{sen} \varphi \\ 0 & \operatorname{sen} \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix}$$

Deshaciendo el siguiente giro  $\Theta$ , se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \operatorname{sen} \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen} \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x'' \\ \dot{\omega}_y'' \\ \dot{\omega}_z'' \end{bmatrix}$$

Y por último, deshaciendo el giro  $\psi$  se obtienen definitivamente las velocidades angulares referidas al sistema inercial  $X, Y, Z$ .

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_{x_0} \\ \dot{\omega}_{y_0} \\ \dot{\omega}_{z_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\operatorname{sen} \psi & 0 \\ \operatorname{sen} \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x' \\ \dot{\omega}_y' \\ \dot{\omega}_z' \end{bmatrix}$$

Si las matrices de transformación se determinan como:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\operatorname{sen} \varphi \\ 0 & \operatorname{sen} \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \operatorname{sen} \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen} \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$



$$\Psi = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\operatorname{sen} \psi & 0 \\ \operatorname{sen} \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Las velocidades angulares del sólido  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ , en el sistema x, y, z, pueden obtenerse en el sistema inercial X, Y, Z, tal que;

$$\begin{bmatrix} \omega_{X_0} \\ \omega_{Y_0} \\ \omega_{Z_0} \end{bmatrix} = \Psi \Theta \Phi \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

Igualmente para las velocidades de traslación, se tiene:

$$\begin{bmatrix} v_{X_0} \\ v_{Y_0} \\ v_{Z_0} \end{bmatrix} = \Psi \Theta \Phi \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

Si a la inversa se quieren hallar los esfuerzos y pares en el sistema x, y, z, cuando estos son conocidos en el sistema inercial es necesario plantear:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = (\Psi \Theta \Phi)^t \begin{bmatrix} F_{X_0} \\ F_{Y_0} \\ F_{Z_0} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = (\Psi \Theta \Phi)^t \begin{bmatrix} \tau_{X_0} \\ \tau_{Y_0} \\ \tau_{Z_0} \end{bmatrix}$$

De la figura 4 se deducen sin dificultad las velocidades de Cardan  $\dot{\varphi} \dot{\theta} \dot{\gamma} \dot{\psi}$  en función de las velocidades  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ . Integrando las velocidades de Cardan se obtienen los ángulos  $\varphi \theta \gamma \psi$ .

De la dicha figura se deducen las siguientes expresiones:

$$\omega_x = \dot{\varphi} - \dot{\psi} \operatorname{sen} \theta$$

$$\omega_y = \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \cos \theta \cos \varphi$$

$$\omega_z = -\dot{\theta} \operatorname{sen} \varphi + \dot{\psi} \cos \theta \operatorname{sen} \varphi$$

De donde:

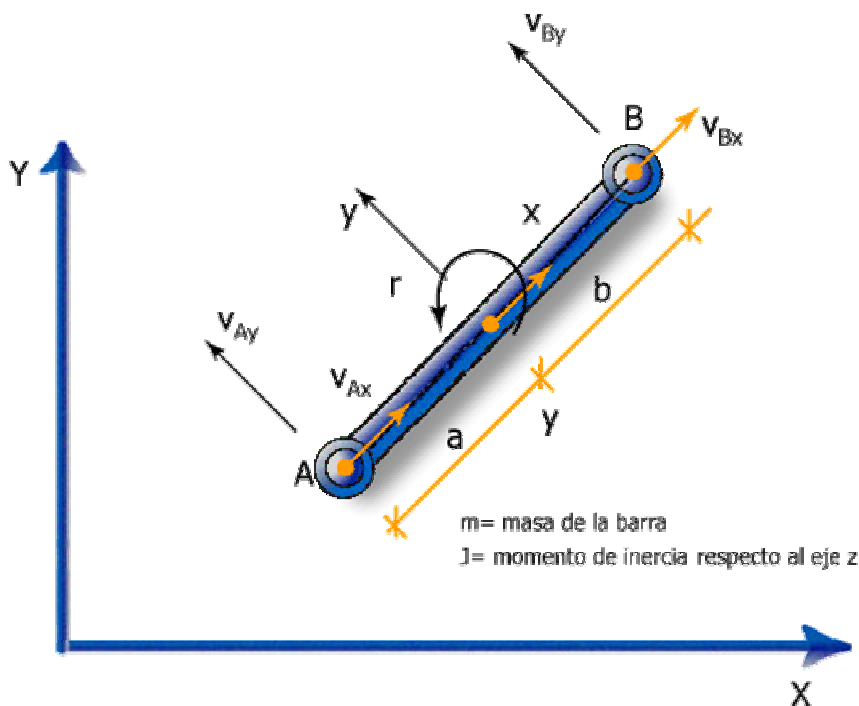
$$\dot{\theta} = \omega_y \cos \varphi - \omega_z \operatorname{sen} \varphi$$

$$\dot{\psi} = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\cos \theta} \omega_y + \frac{\cos \varphi}{\cos \theta} \omega_z$$

$$\dot{\varphi} = \omega_x + \operatorname{sen} \varphi \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} \omega_y + \cos \varphi \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} \omega_z$$

### 16.3. BOND-GRAPH DE LA BARRA QUE SE MUEVE EN EL PLANO

Sea una barra que se mueve en el plano tal y como se muestra en la figura 5. Tiene tres grados de libertad y utilizando un sistema de referencia que se mueve con la barra y está situado en su centro de masas,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , presenta la velocidad  $v_x$  en dirección  $x$ ,  $v_y$  en dirección  $y$ , y por último, una velocidad angular  $r$  respecto al eje  $z$ .



*Figura 5. Barra que se mueve en el plano.*

El Bond-Graph de la barra se obtiene como una simplificación del planteado para el sólido rígido, sin más que anular las velocidades que no existen en el modelo plano que se quiere estudiar.

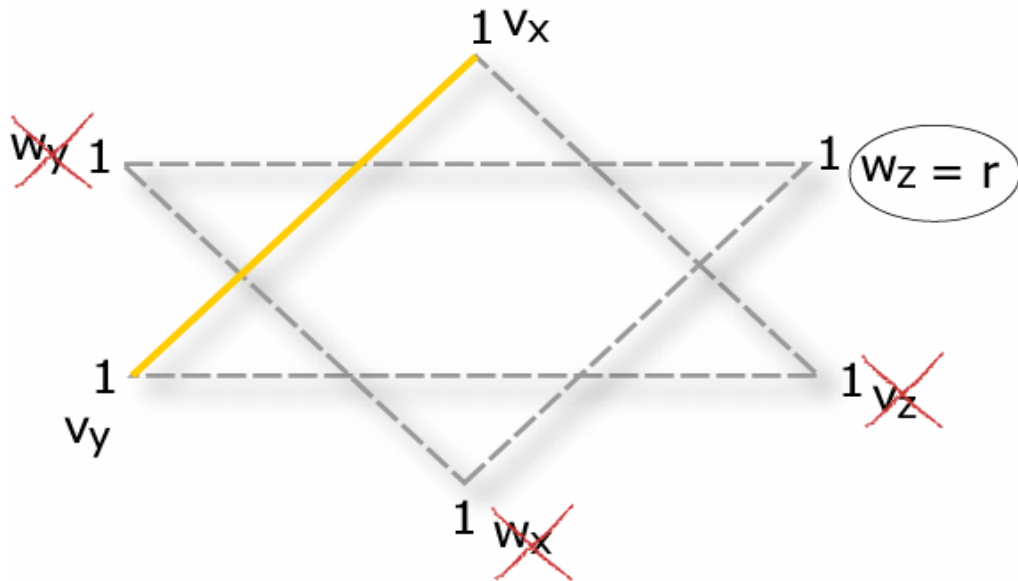


Figura 6. Simplificación del sólido rígido para representar la barra.

Al no existir ni  $v_z$ , ni  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ , en la representación del sólido rígido se anulan todos los lados de los triángulos, excepto el que une  $v_x$  con  $v_y$ .

Teniendo en cuenta esta simplificación en la figura 7, se muestra el Bond-Graph de la barra y la obtención de las velocidades de los puntos A y B respecto al sistema de referencia que se mueve con la barra.

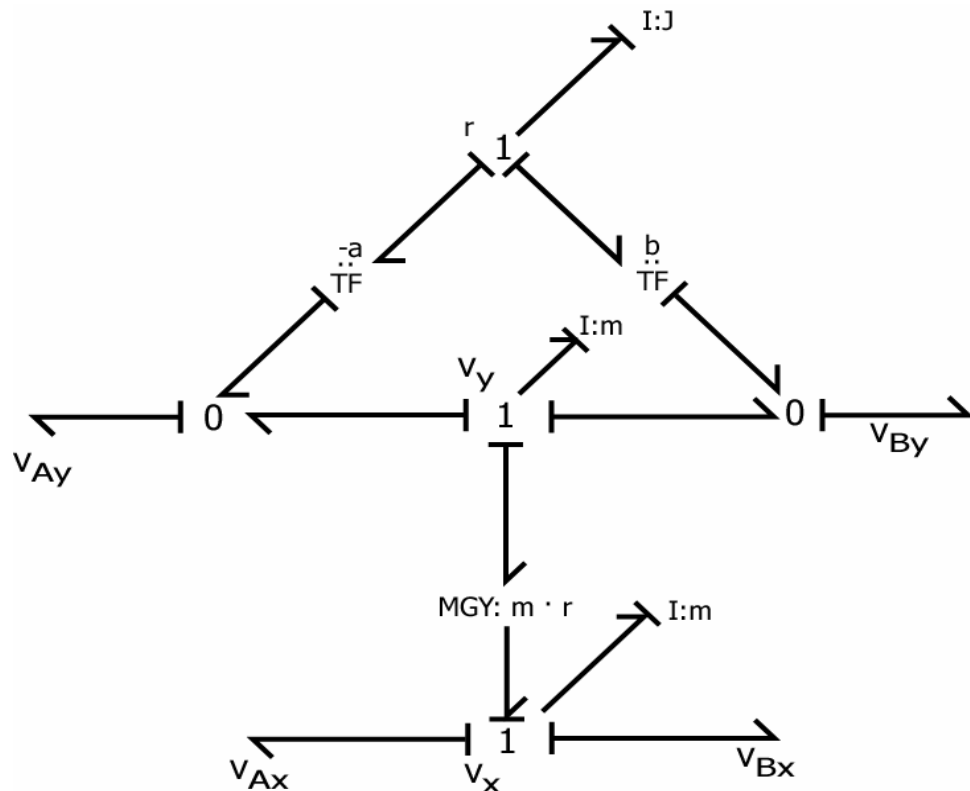


Figura 7. Bond-Graph de la barra en el plano.

### 1.4 CAMBIO DE SISTEMA DE REFERENCIA EN MECANISMOS PLANOS

Tomemos como ejemplo dos barras articuladas en un punto (A). Se pretende desarrollar el diagrama de grafos que permita representar las velocidades del punto A, primero como perteneciente a una de las barras y después respecto a la otra.

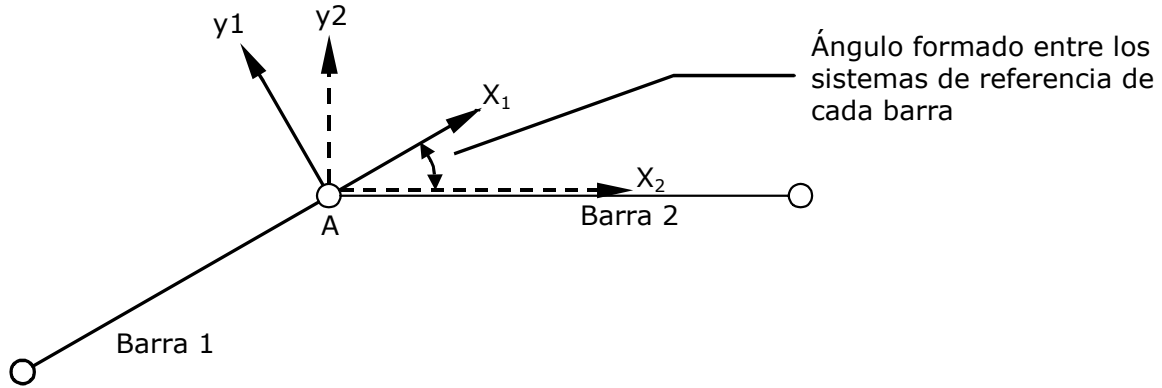


Figura 8

Supongamos que es conocida la velocidad del punto A en el sistema de referencia de la barra 1 y que partiendo de ella se quiere obtener la velocidad de A en el sistema de la barra 2.

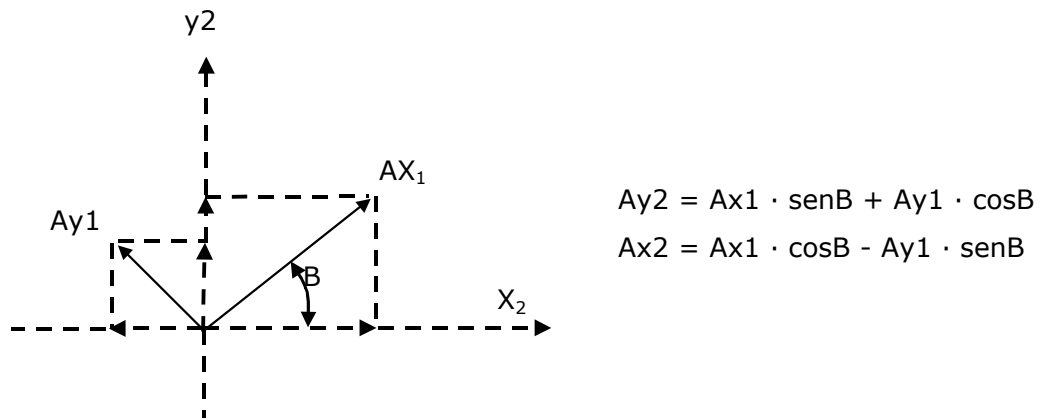


Figura 9

La representación de estas ecuaciones en un diagrama de grafos sería la siguiente:

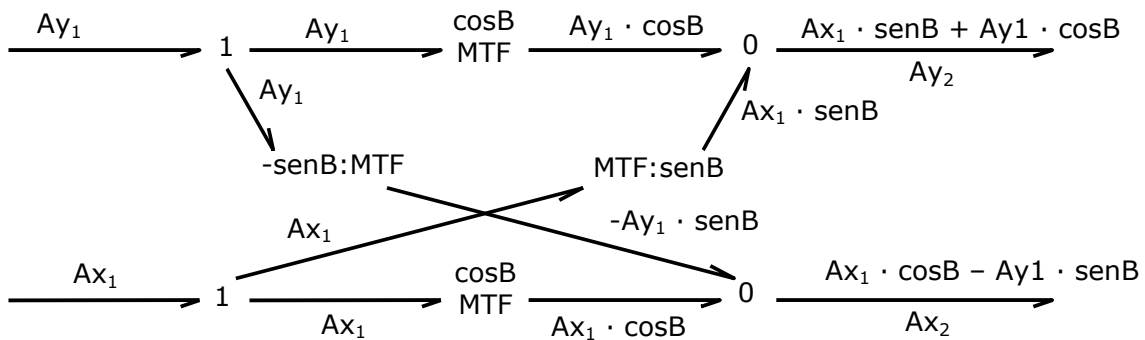


Figura 10

Por el contrario, si lo que se conoce es el esfuerzo en el punto A, referido al sistema de referencia de la barra 1, y se quiere pasar al otro sistema, se tiene igualmente que en el caso de las velocidades:

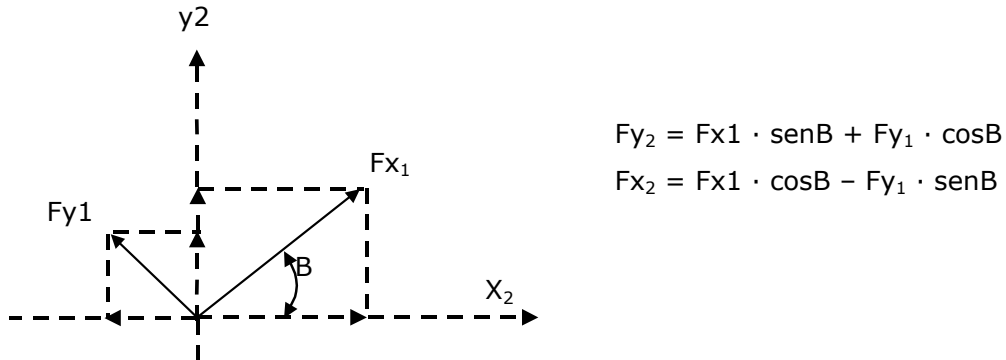


Figura 11

La representación de estas ecuaciones en el diagrama de grafos, teniendo en cuenta que en este caso se trata de esfuerzos, se muestra en la figura 12.

Como puede observarse, el diagrama de grafos que modeliza un cambio de referencia, depende en definitiva de la causalidad de los grafos de entrada, pudiéndose dar los siguientes dos casos:

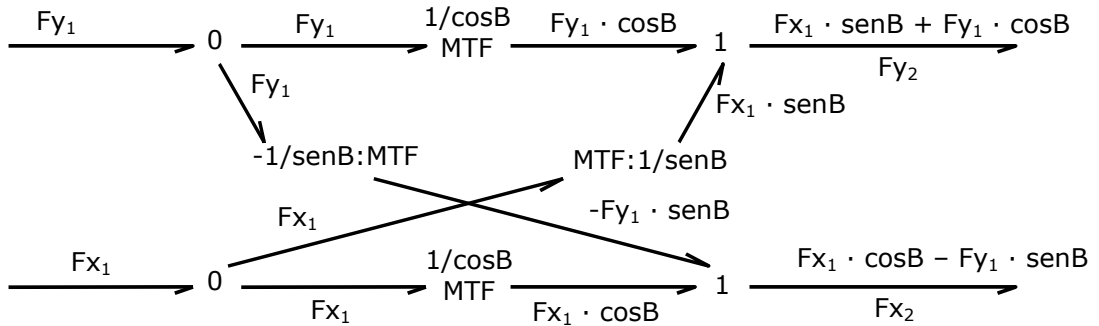


Figura 12

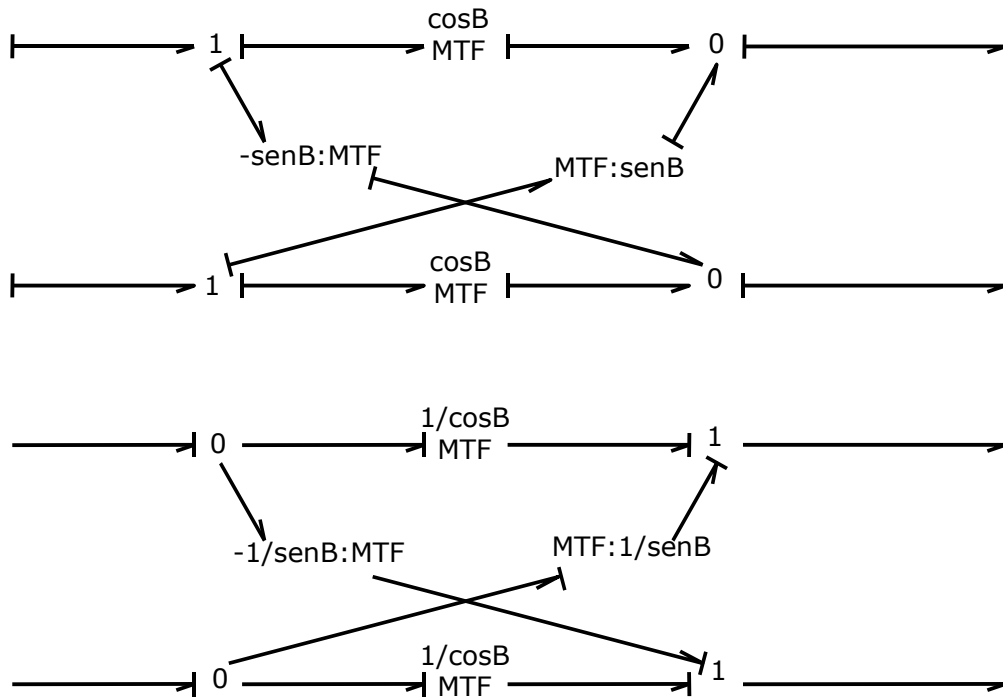


Figura 13

### 16.5. DOS BARRAS ARTICULADAS

Cuando el mecanismo a estudiar está formado por dos barras articuladas, tal y como se muestra en la figura, la representación en Bond-Graph se construye duplicando lo de una barra y añadiendo un cambio de referencia.

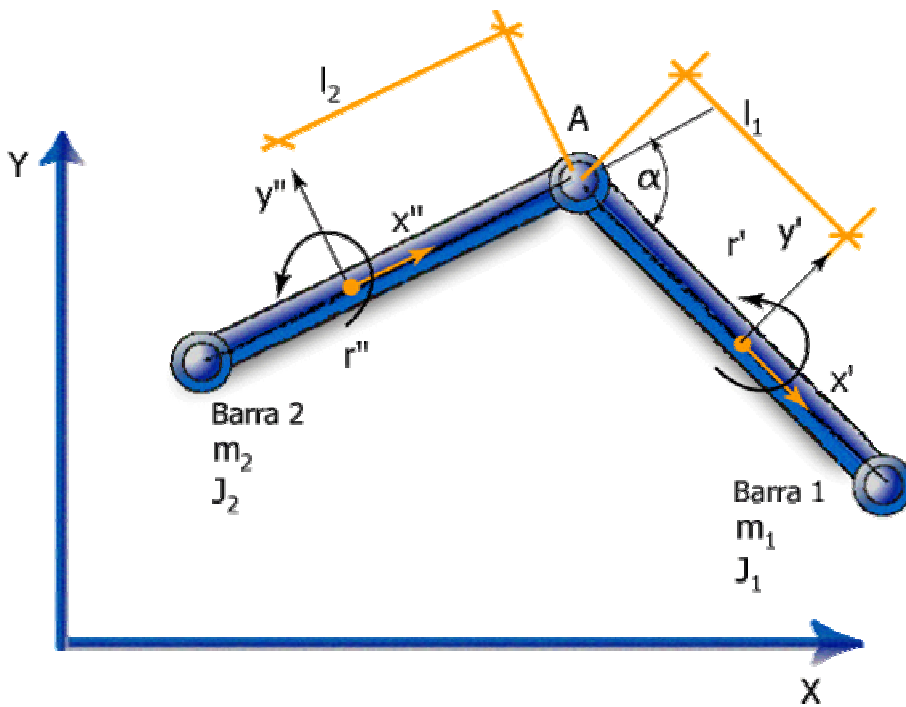


Figura 14. Dos barras articuladas que se mueven en el plano.



articulación entre las dos barras. Una vez obtenidas las dos componentes de su velocidad ( $v_{Ay}$ ,  $v_{Ax}$  referidas al sistema de referencia fijo a la barra 1  $x'$ ,  $y'$ ) se procede a ejecutar el cambio de sistema de referencia para obtener la velocidad del punto A pero respecto al sistema fijo a la barra 2,  $x''$ ,  $y''$ .

Una vez obtenidas las dos componentes de esta velocidad  $v_{Ay''}$ ,  $v_{Ax''}$ , nos encontramos en la barra 2 y ahora basta con ir desde el punto A hasta el centro de gravedad de la barra 2 para nuevamente volver a repetir la representación clásica de las barras. Analizando la construcción del Bond-Graph hay que llamar la atención sobre el hecho de que se comienza en una barra y se va caminando en la construcción hacia la otra barra, es como si se comenzara por un extremo del modelo y se fuera desarrollando el Bond-Graph siempre en una dirección hacia el otro extremo del mecanismo.

Existe otra posible construcción del Bond-Graph (figura 16) que consiste en representar inicialmente ambas barras y después ir a calcular las velocidades del punto de articulación. Una vez calculadas las velocidades del punto de articulación desde ambas barras, basta con colocar una unión 1 que garantiza que por ambos caminos se debe llegar a la misma velocidad.

Observando ambos Bond-Graph puede verse que aunque utilizamos seis variables, solamente cuatro de ellas son variables independientes, mientras que las otras dos son dependientes.

Solamente las inercias con causalidad integral, que son aquellas en las que podemos elegir la causalidad, corresponden con grados de libertad mientras que las inercias con causalidad obligada por el modelo, causalidad diferencial, no corresponden con grados de libertad y son variables dependientes.

Dos barras articuladas que se mueven en el plano constituyen un mecanismo de cuatro grados de libertad; tres correspondientes al movimiento plano de la barra 1 y un cuarto que es el ángulo que forman en cada instante ambas barras.

Con este planteamiento, el sistema de ecuaciones que define el movimiento del mecanismo, está formado por cuatro ecuaciones diferenciales, una por cada grado de libertad más dos ecuaciones algebraicas, una por cada variable dependiente. En definitiva, el sistema de ecuaciones es un sistema algebraico-diferencial.

Las dos ecuaciones algebraicas se denominan también ecuaciones de restricción del sistema y están producidas por la incorporación de la articulación. Efectivamente, un bulón sólo permite el giro relativo entre ambas barras e impide el desplazamiento relativo en  $x$  y en  $y$ . Al impedir dos desplazamientos se están restringiendo dos movimientos y esto hace aparecer dos ecuaciones algebraicas de restricción.



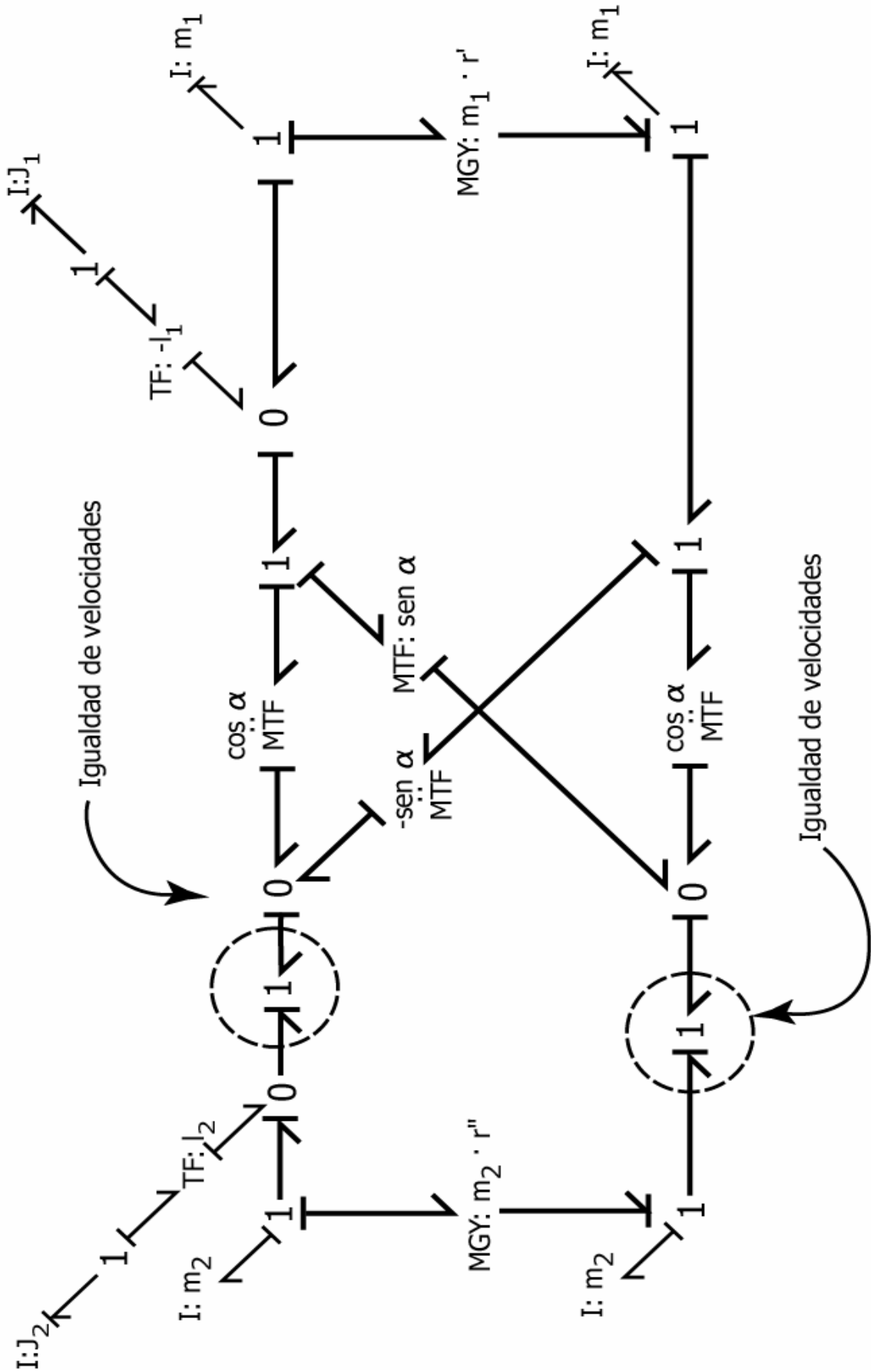


Figura 16. Otro planteamiento del Bond-Graph de dos barras articuladas.

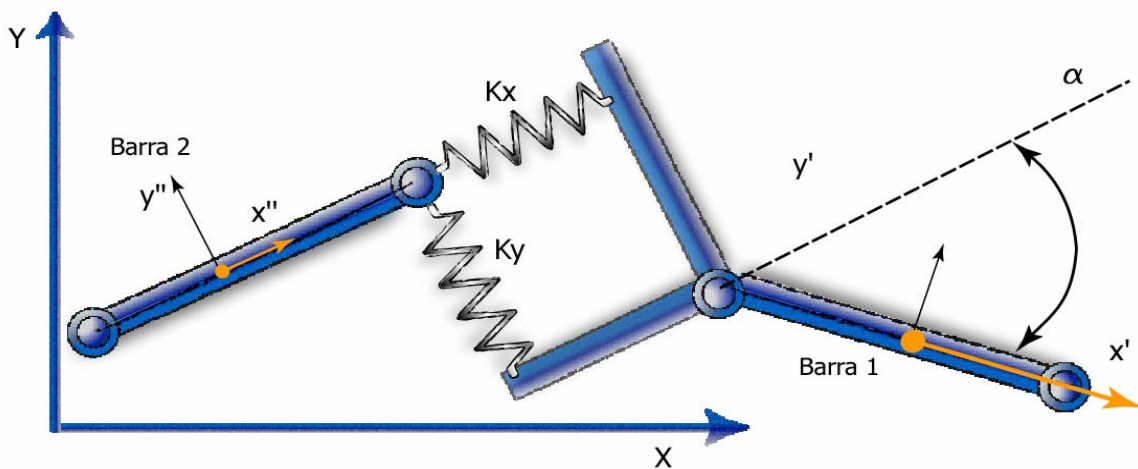
## 16.6. DESACOPLAMIENTO ENTRE BARRAS

Cualquier articulación supone restricciones de movimiento y en consecuencia ecuaciones algebraicas de restricción y variables dependientes que en Bond-Graph, vienen definidas por las inercias con causalidad diferencial.

Como se ha comentado en el apartado anterior, cuando aparecen ecuaciones de restricción el sistema de ecuaciones es algebraico-diferencial, es decir, existen ecuaciones algebraicas y ecuaciones diferenciales.

Para resolver estos sistemas es necesario utilizar algoritmos numéricos especiales que en principio son más complejos que los necesarios para resolver solamente ecuaciones diferenciales.

Si se quiere que en un sistema no existan ecuaciones de restricción, es necesario eliminar las restricciones que producen las articulaciones. En la figura 17, se muestran dos barras cuya articulación ha sido sustituida por dos resortes.



*Figura 17. Sustitución de la articulación por dos resortes.*

Al haberse introducido los dos resortes  $k_x$ ,  $k_y$  en lugar de la articulación, el conjunto de las dos barras tiene 6 grados de libertad, 3 por cada una de las barras. Las restricciones se eliminan siempre introduciendo resortes que permiten el movimiento relativo entre los diferentes elementos de los mecanismos.

Para que la introducción de los resortes no modifique el comportamiento del mecanismo, es necesario que la rigidez de los resortes sea muy alta, ya que en definitiva, estos resortes tienen que reflejar la rigidez a compresión del bulón de la articulación. Cuando se eliminan las ecuaciones de restricción se dice que las barras han sido desacopladas.

En la figura 18 se muestra el Bond-Graph de este modelo y coincide con el de la figura 17, en el que se han introducido los dos nuevos resortes. La ubicación de las puertas resorte depende de como se sitúen los resortes en el mecanismo. En este caso se han colocado en las direcciones  $x''$ ,  $y''$  del sistema de referencia unido a la barra 2. Con la introducción de estos dos resortes, puede observarse cómo ahora todas las inercias tienen causalidad integral y en definitiva todas las variables son independientes y el conjunto presenta 6 grados de libertad.

Al ser todas las variables independientes el sistema de ecuaciones es solamente diferencial.

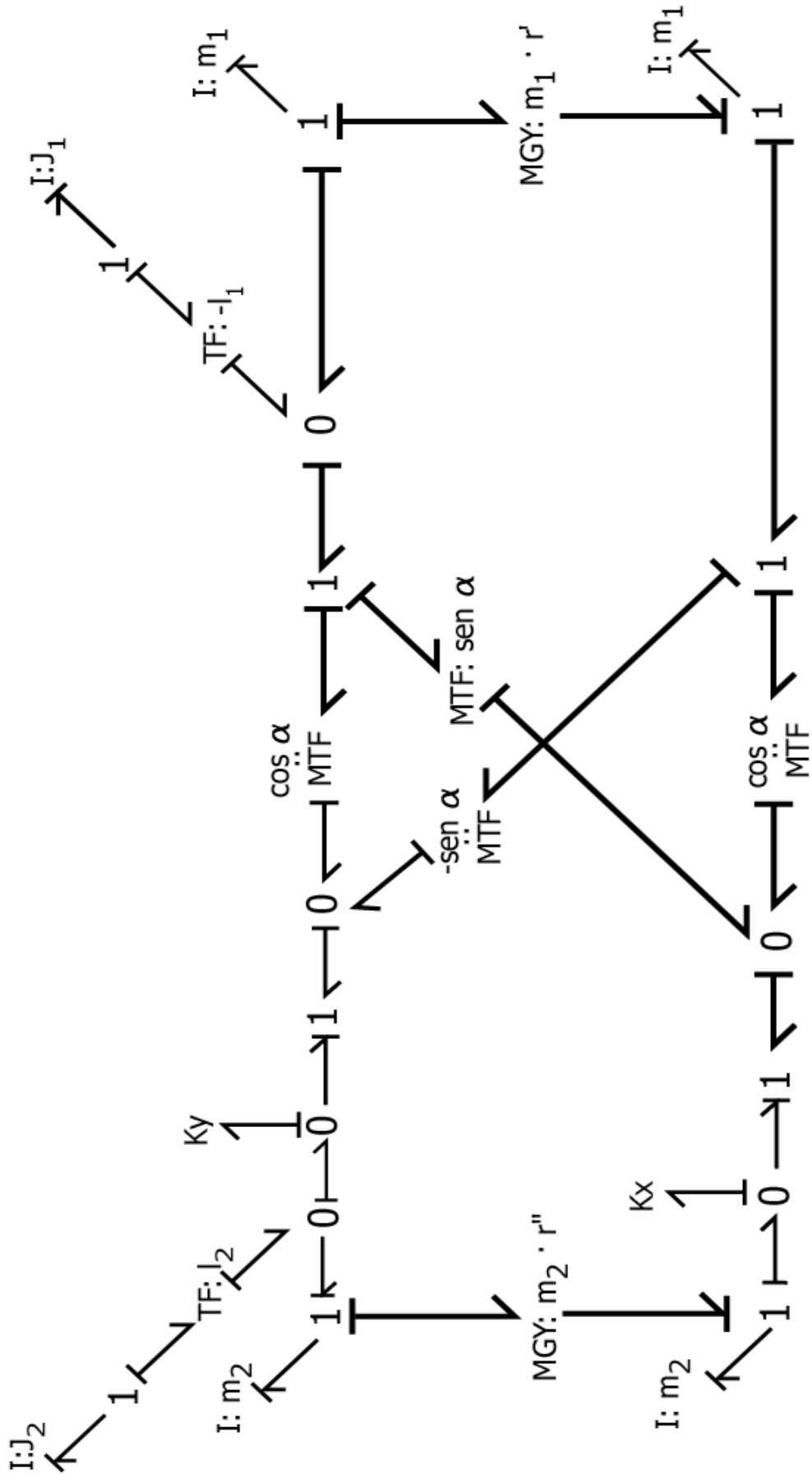
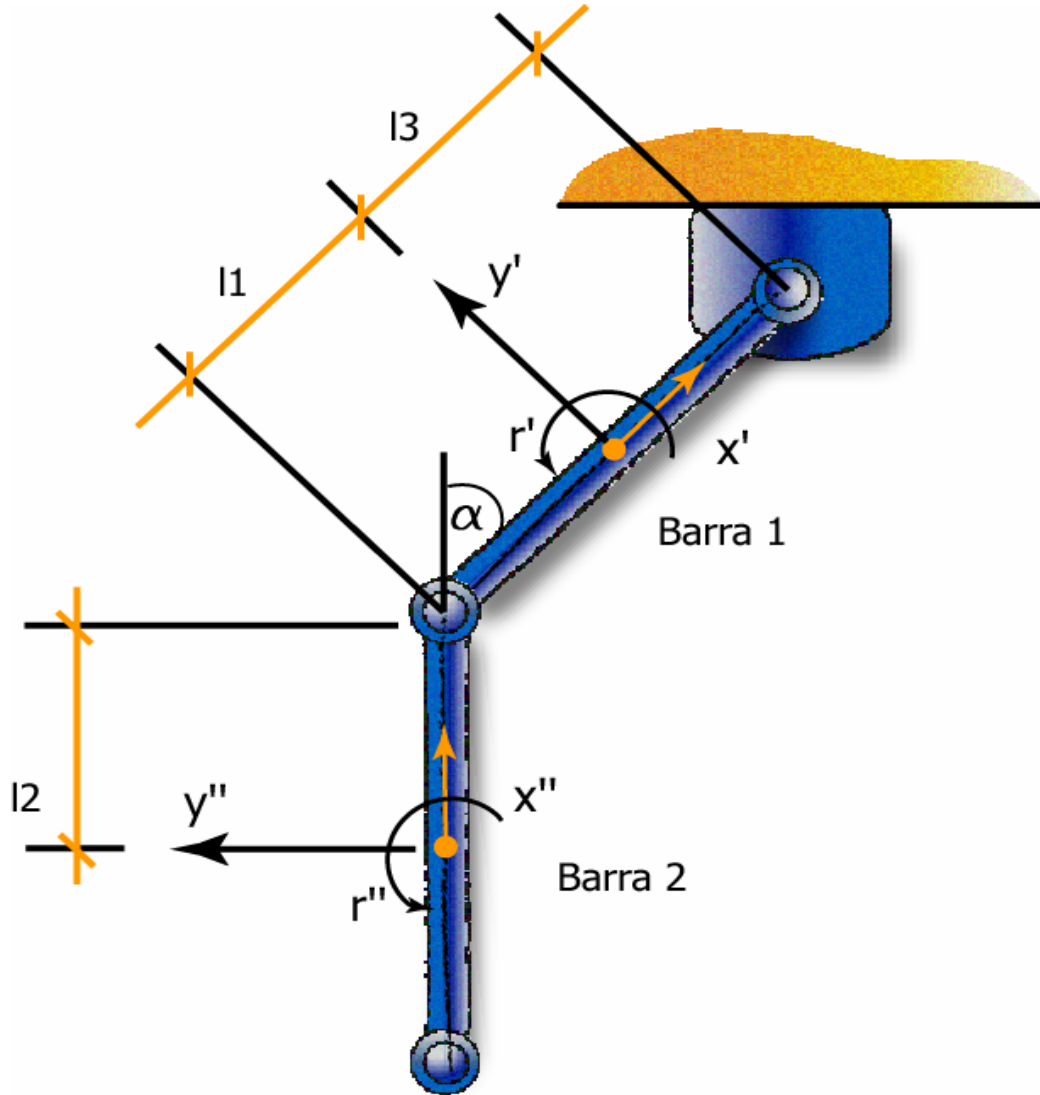


Figura 18. Bond-Graph de dos barras desacopladas.

## 16.7. ARTICULACIONES EN LOS EXTREMOS

La introducción de articulaciones en los extremos resulta en Bond-Graph extraordinariamente sencilla. En síntesis, una articulación en un extremo de la barra es un punto en que las velocidades de desplazamiento son nulas y esto en Bond-Graph, puede representarse mediante fuentes de flujo de valor nulo.



*Figura 19. Barras articuladas formando un péndulo doble.*

El Bond-Graph de este mecanismo se muestra en la figura 20 y como se puede observar es el mismo que el desarrollado para las dos barras articuladas, añadiendo ahora la conexión con el punto de articulación a tierra que se representa con las dos fuentes de flujo nulas.

Un péndulo doble es un mecanismo formado por dos barras y cada barra libre moviéndose en el plano tiene 3 grados de libertad. En consecuencia un mecanismo formado por dos barras libres tendría 6 grados de libertad. La introducción de la articulación entre las barras supone la restricción de dos desplazamientos y en consecuencia, dos barras articuladas tienen solamente 4 grados de libertad.

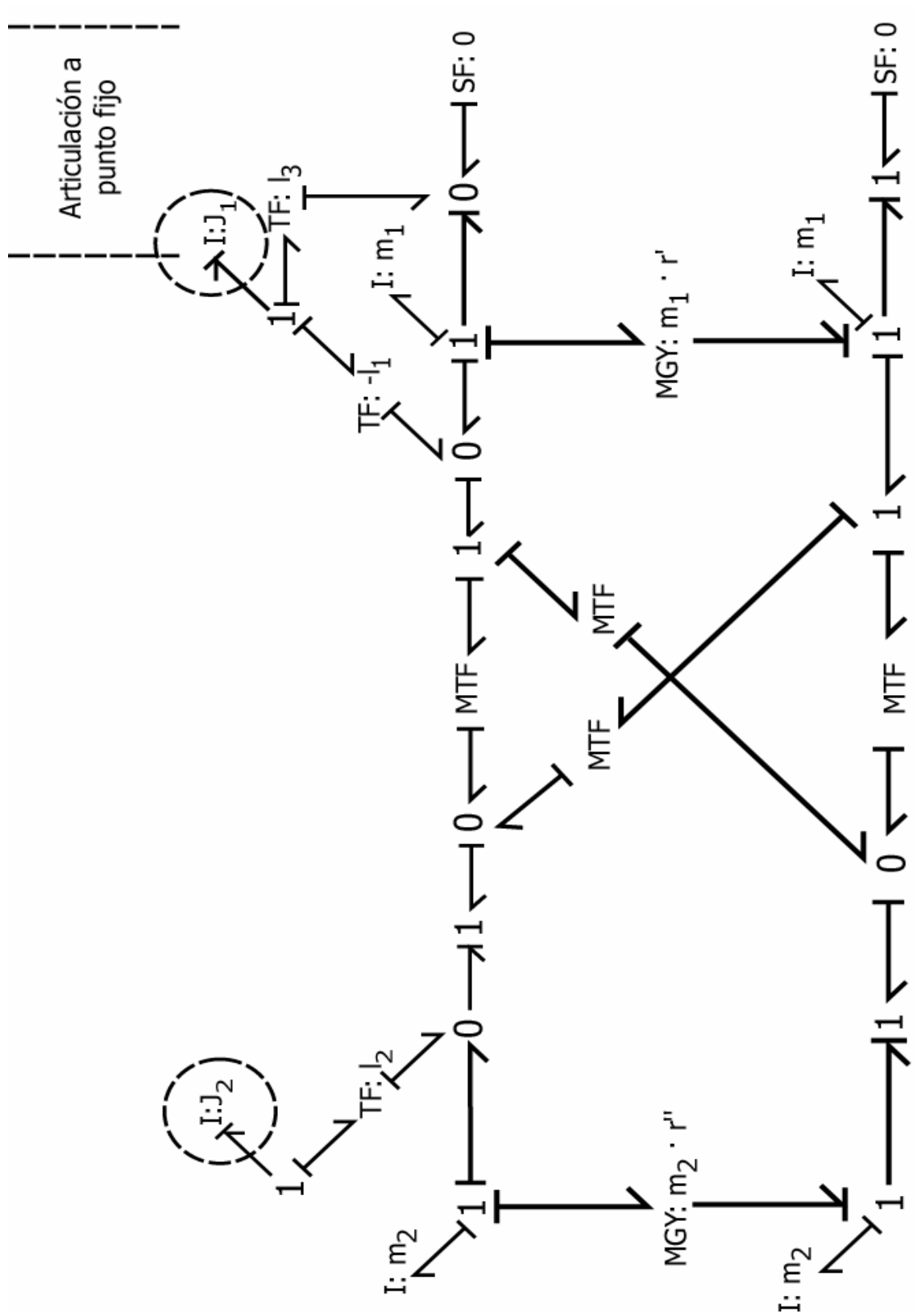


Figura 20. Péndulo doble.

Al añadir la otra articulación al punto fijo, aparecen dos nuevas restricciones y los cuatro grados de libertad quedan definitivamente en dos.

Este hecho se observa perfectamente en el Bond-Graph ya que solamente aparecen dos inercias con causalidad integral, mientras que las otras cuatro inercias con causalidad diferencial reflejan las cuatro variables dependientes.

Si se quiere plantear el péndulo doble como mecanismo desacoplado, será necesario introducir un resorte por cada restricción que se quiera eliminar. En el péndulo doble, como existen cuatro restricciones, necesitaremos cuatro resortes para desacoplarlo. En la figura 21 se muestra el esquema del péndulo doble desacoplado y su Bond-Graph.

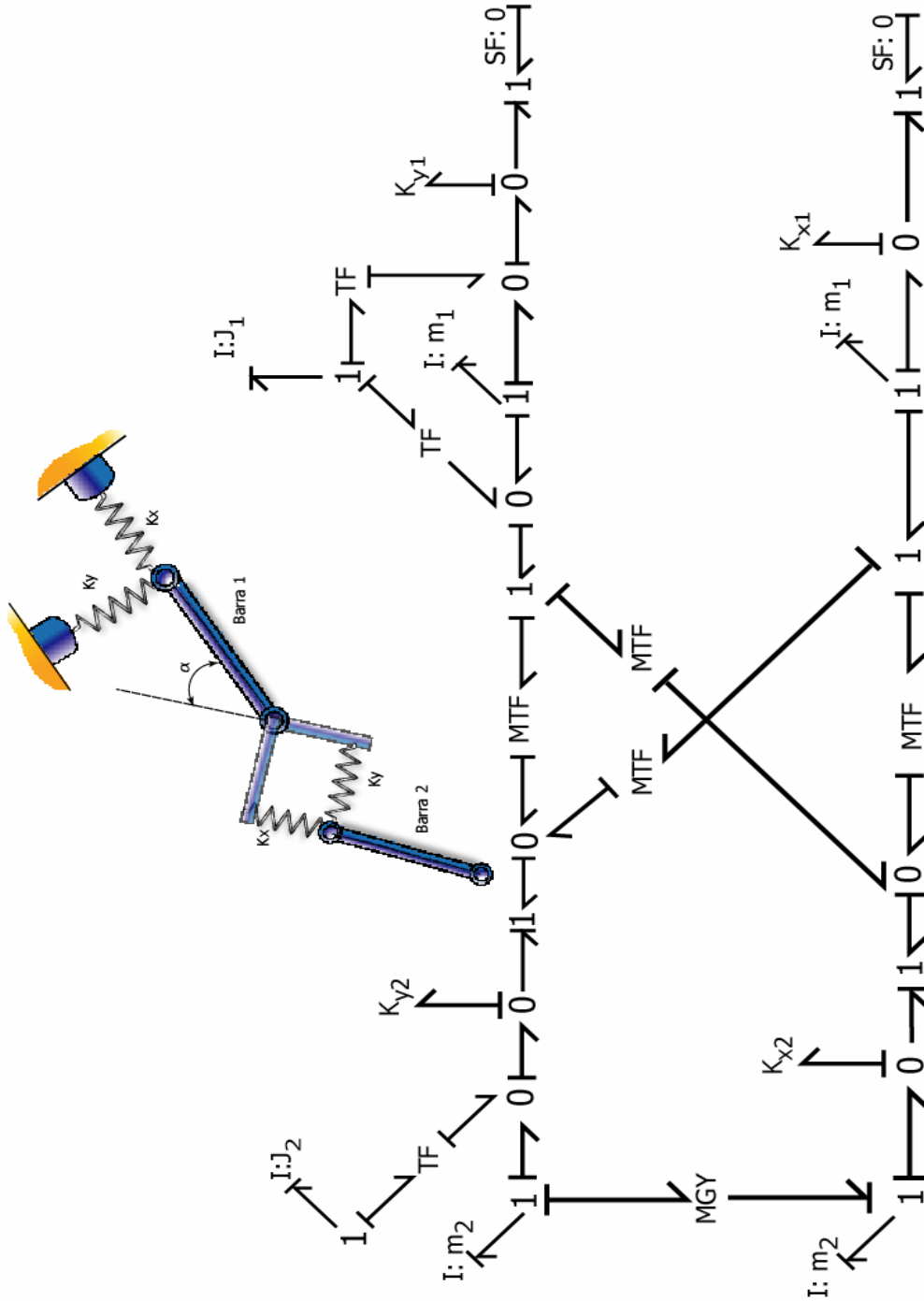


Figura 21. Péndulo doble desacoplado.

Al desacoplar el péndulo doble, el mecanismo tiene seis grados de libertad y todas las inercias presentan causalidad integral.

En todo el planteamiento que se ha hecho en los apartados anteriores respecto a las barras, se han utilizado siempre sistemas de referencia que se mueven con estas. La utilización de estos sistemas de referencia hace que no pueda verse el movimiento del mecanismo desde un sistema de referencia único y fijo en el exterior del mecanismo. En otras palabras, no pueden verse las trayectorias de las barras ni la de ninguno de sus puntos. Para poder obtener esta información, necesitamos disponer de un sistema fijo de referencia en el exterior del mecanismo y realizar los cambios desde los sistemas móviles en cada barra al sistema fijo exterior.

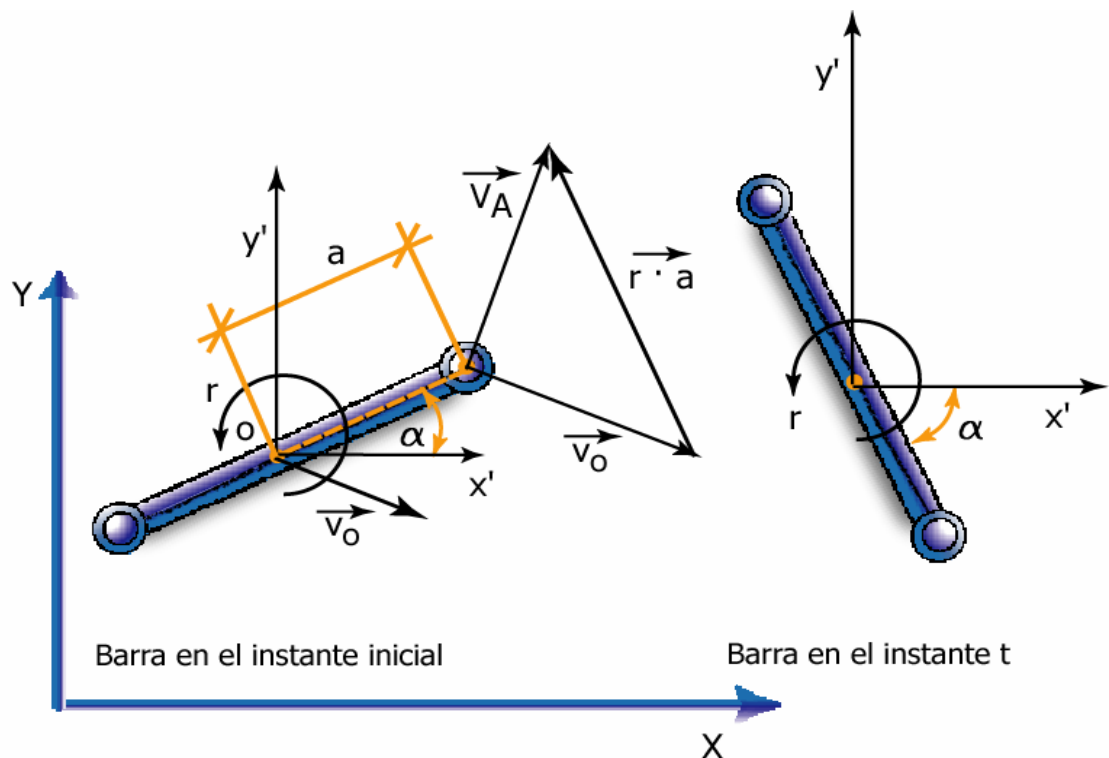
## 16.8. OTRO PLANTEAMIENTO DE LOS MECANISMOS PLANOS

Cuando se estudia el comportamiento de los mecanismos planos es importante elegir adecuadamente el sistema de referencia que se va a utilizar en las diferentes barras.

Veamos a continuación cómo influye en la representación de Bond-Graph la utilización de otros sistemas de referencia.

En la figura 22, se muestra una barra que se mueve en el plano y que utiliza un sistema de referencia situado en el centro de masas que se desplaza con la barra pero sin girar con ella y en consecuencia, se mantiene siempre paralelo a otro sistema de referencia externo y fijo.

La velocidad del centro de masas (punto 0) respecto al sistema de referencia global exterior  $x, y$  es  $\vec{v}_0$ , mientras que la velocidad angular de la barra alrededor del punto 0 es  $r$ . La distancia entre el punto 0 y el punto A es  $a$ .



*Figura 22. Barra con sistema de referencia que se desplaza con la barra sin girar con ella.*

El ángulo formado por la barra con el sistema de referencia que se desplaza con ella  $x', y'$ , se denomina  $\alpha$ .

Utilizando este sistema de referencia las aceleraciones, velocidades y desplazamientos de cualquier punto se pueden obtener fácilmente respecto al sistema de referencia global  $x, y$ .

En la figura 23, se muestra la velocidad del punto A respecto al sistema global, cuyas ecuaciones son:

$$V_{Ax} = V_{Ox} - r \cdot a \cdot \text{sen} \alpha$$

$$V_{Ay} = V_{Oy} - r \cdot a \cdot \text{cos} \alpha$$

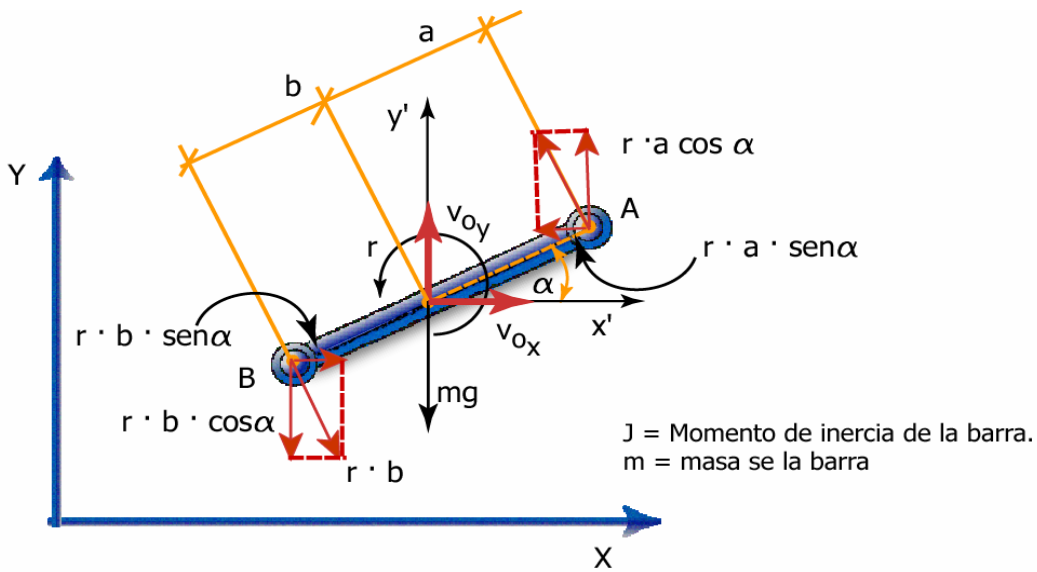


Figura 23. Velocidad del punto A.

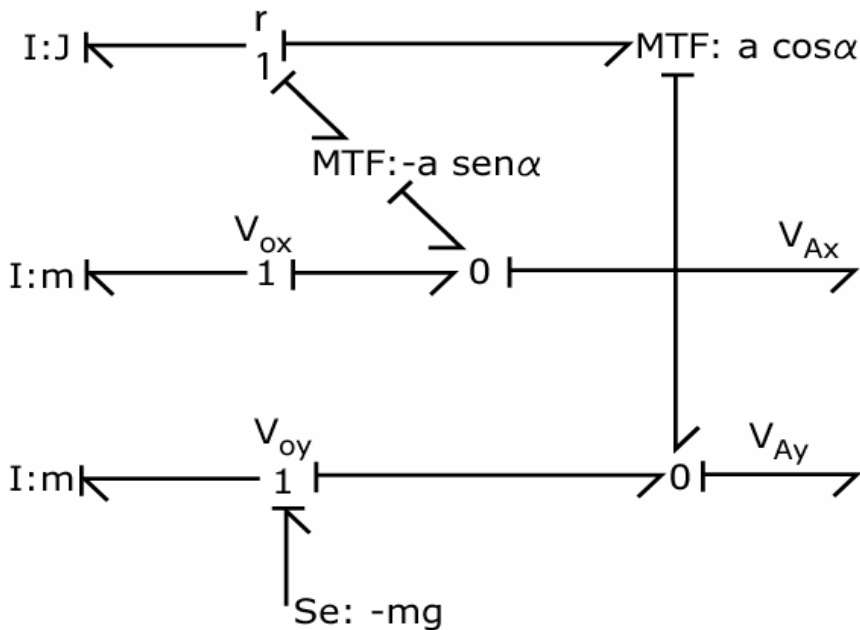
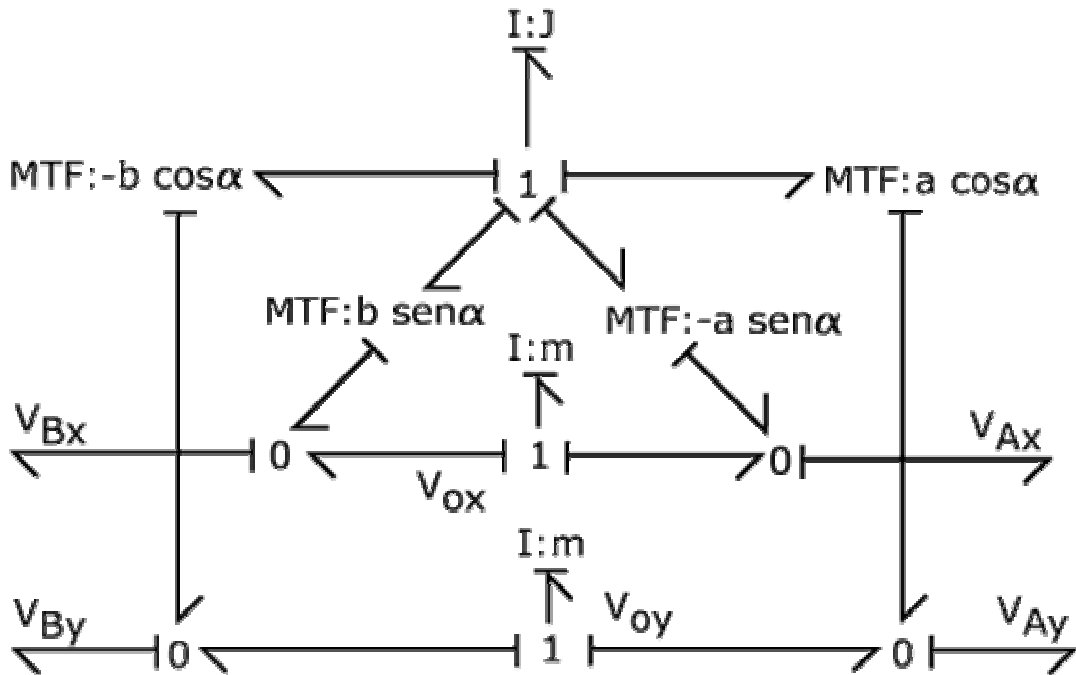


Figura 24. Bond-Graph de la barra con sistema de referencia que se desplaza sin girar.



Como todas las variables dinámicas de la barra están definidas en un sistema de referencia global, la componente sobre el eje  $y'$  de velocidad del centro de gravedad de la barra, siempre se mantiene paralela al eje  $y$  del sistema de referencia global, pudiéndose aplicar la fuente de esfuerzo correspondiente al peso propio directamente sobre el nudo 1 correspondiente a esta velocidad. Normalmente, en las barras se suelen necesitar las características de dos de sus puntos además de las del centro de gravedad.

En la figura 24 se muestra el Bond-Graph de la barra para obtener la velocidad de dos puntos el A y el B.



*Figura 25. Bond-Graph para hallar la velocidad de dos puntos de la barra.*

En las figuras 26 a 29 se muestran diferentes mecanismos, formados por barras así como su BondGraph. En el primer ejemplo se muestra un péndulo simple en que las restricciones de la articulación se han obviado colocando dos resortes. El segundo ejemplo es un péndulo doble en donde también se han sustituido las articulaciones por resortes y por último se muestra el Bond-Graph de un mecanismo biela-manivela.

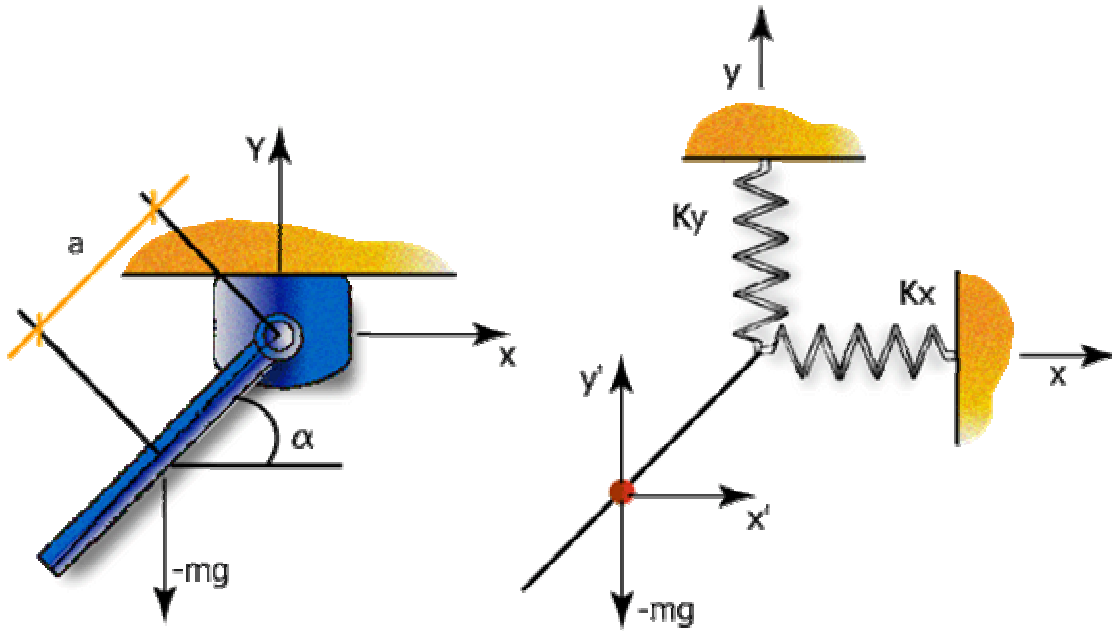


Figura 26. Péndulo simple

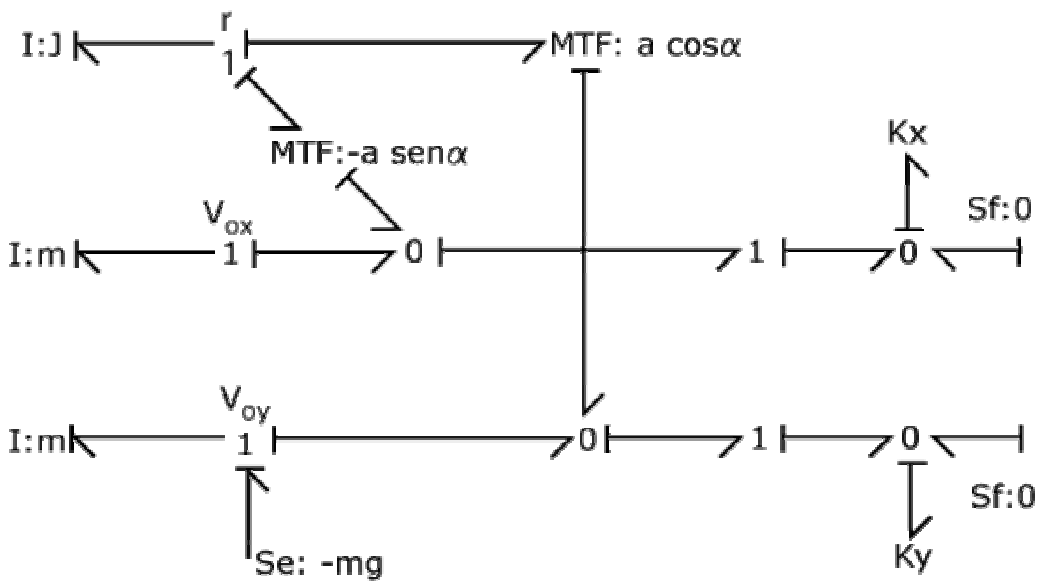


Figura 27. Bond-Graph del péndulo simple

En el modelo de péndulo simple como los extremos de los resortes están unidos a tierra, esta modelización se realiza mediante dos fuentes de flujo de valor 0. Dichas fuentes modelizan la condición de que los extremos de los resortes tienen impedidos sus desplazamientos.

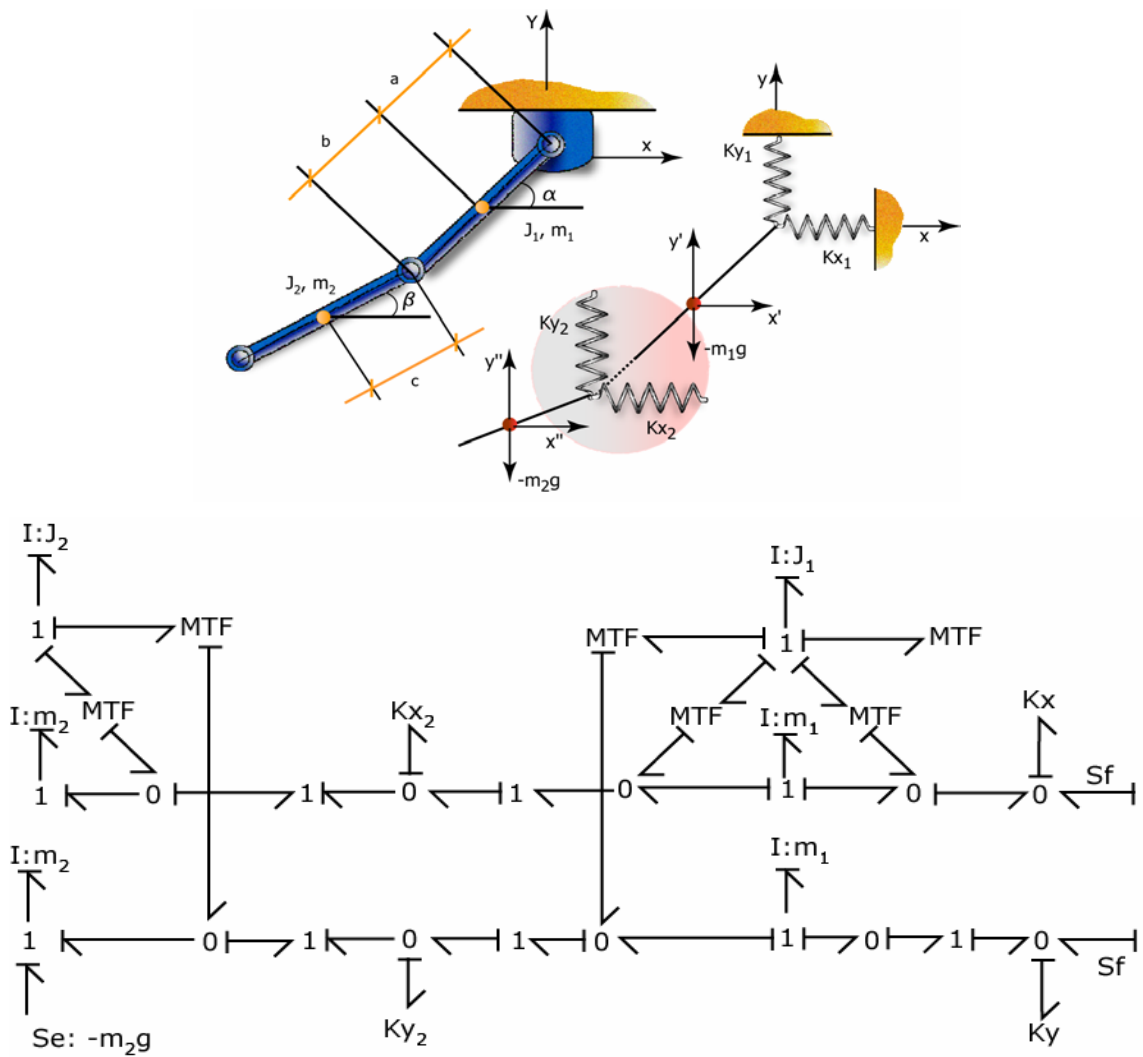


Figura 28. Péndulo doble.

En la figura 29 se muestra el modelo del mecanismo biela manivela que es un sistema fundamental de todos los motores de émbolo. En este mecanismo aparece un nuevo tipo de restricción que es el deslizamiento existente entre el émbolo y el cilindro.

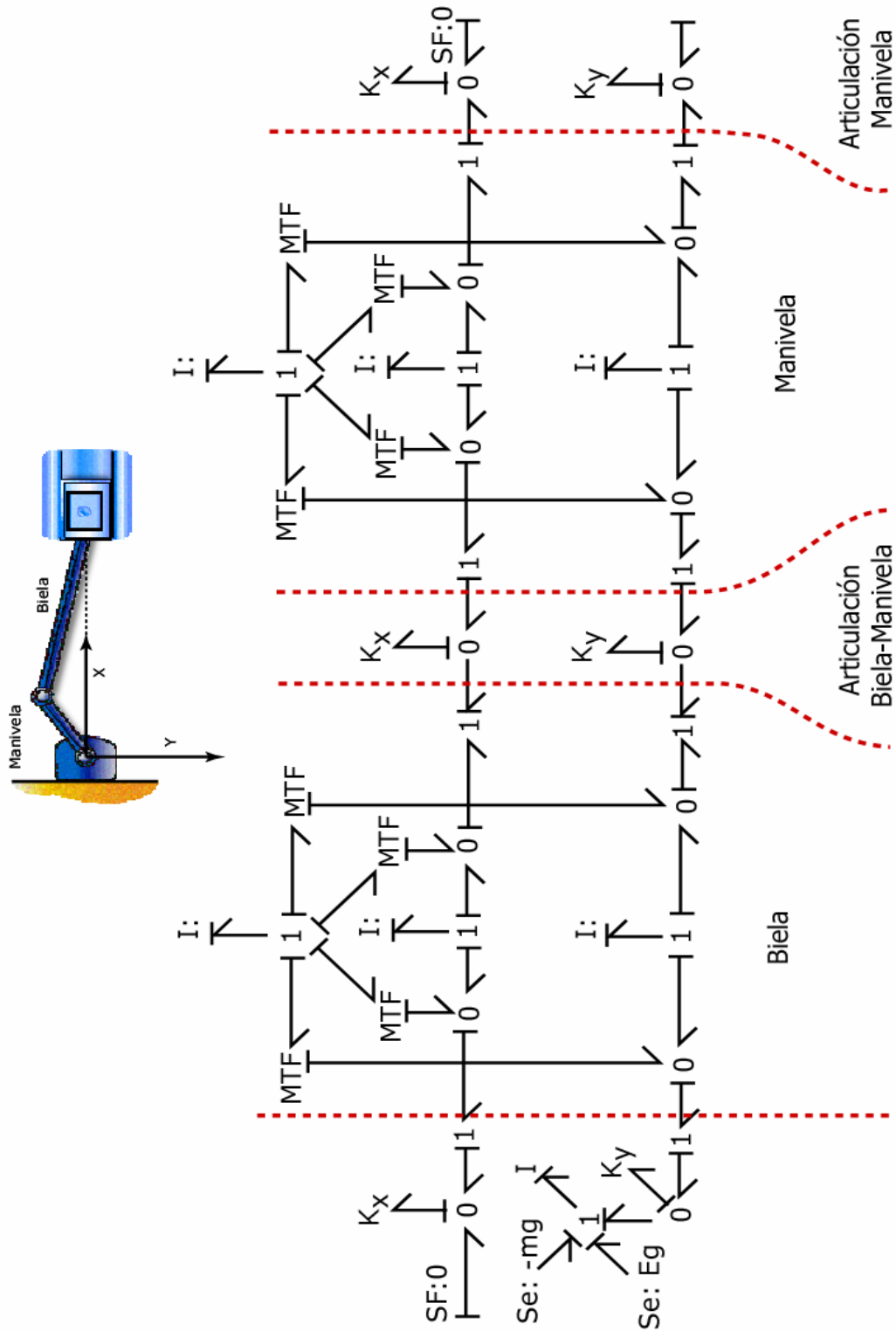


Figura 29. Mecanismo Biela-Manivela.

El movimiento vertical del émbolo, se representa mediante una puerta de inercia que lleva asociada la masa del émbolo y en la unión 1 de donde sale esta puerta de inercia, se encuentran las entradas de dos fuentes de esfuerzo, la del peso propio del émbolo más la correspondiente al esfuerzo generado por la explosión del motor, que en la figura se denomina  $Se:Eg$ .