

12. Funciones B-spline o nodales

[Vídeo de Funciones nodales](#)

Del mismo modo que la aplicación del algoritmo de De Casteljaou conduce a la aparición de los polinomios de Bernstein, el algoritmo de De Boor introduce funciones polinómicas en cada tramo.

Sea una curva de grado n a trozos con polígono B-spline $\{d_0, \dots, d_{n+N-1}\}$ y nudos $\{u_0, \dots, u_{2n+N-2}\}$. Podemos almacenar todos los pasos del algoritmo de De Boor en unas funciones $\{N_0^n(u), \dots, N_{n+N-1}^n(u)\}$ polinómicas a trozos denominadas **funciones nodales o B-spline**,

$$c(u) = \sum_{i=0}^{n+N-1} d_i N_i^n(u). \quad (23)$$

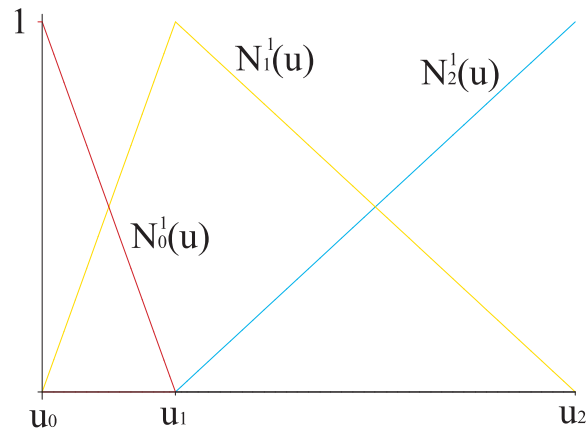


Figura 21: Funciones nodales de grado uno

Las funciones B-spline gozan de una propiedad de recursividad, que permite construirlas de forma iterativa a partir de las de menor grado,

$$\begin{aligned} N_i^n(u) &= \frac{u - u_{i-1}}{u_{i+n-1} - u_{i-1}} N_i^{n-1}(u) + \frac{u_{i+n} - u}{u_{i+n} - u_i} N_{i+1}^{n-1}(u), \\ N_i^0(u) &= \begin{cases} 1 & u \in [u_{i-1}, u_i) \\ 0 & u \notin [u_{i-1}, u_i) \end{cases}, \end{aligned} \quad (24)$$

para una sucesión de índices $\{u_0, \dots, u_{2n+N-2}\}$. **Ejemplo.**

La función nodal $N_i^n(u)$ tiene, pues, soporte en $n+1$ intervalos, $[u_{i-1}, u_{i+n}]$, ya que el vértice d_i controla todos los tramos desde el $i - n + 1$ hasta el $i + 1$, es decir, desde el intervalo $[u_{i-1}, u_i]$ hasta el intervalo $[u_{i+n-1}, u_{i+n}]$. Fuera de esos intervalos la función nodal correspondiente debe anularse.

Por ello, la fórmula de recursión requiere nudos fuera de la sucesión, u_{-1} , para el cálculo de $N_0^n(u)$, y u_{2n+N-1} , para $N_{n+N-1}^n(u)$, como corresponde al hecho de que los intervalos de definición de estas funciones son, respectivamente, $[u_{-1}, u_n]$ y $[u_{n+N-2}, u_{2n+N-1}]$.

Estos nudos no afectan al intervalo de definición, $[u_{n-1}, u_{n+N-1}]$, de la curva, ya que aparecen en factores que multiplican a $N_0^{n-1}(u)$, cuyo intervalo es $[u_{-1}, u_{n-1}]$ y a $N_{n+N-1}^{n-1}(u)$, cuyo intervalo es $[u_{n+N-1}, u_{2n+N-1}]$. Por tanto, podemos tomarlos arbitrarios, tal como se hace en el formato IGES, aunque suponga un exceso de información.