

6. Derivadas

Vídeo de Uniones de curvas y twists

Dado que la base de funciones polinómicas que empleamos, $B_i^m(u)B_j^n(v)$ es separable en las variables u, v , las expresiones de las derivadas parciales de la parametrización no sufren grandes cambios respecto a las estudiadas para curvas de Bézier. Por ejemplo, la derivada con respecto a u ,

$$\frac{\partial c(u, v)}{\partial u} = m \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{m-1} \Delta^{1,0} c_{i,j} B_i^{m-1}(u) B_j^n(v), \quad (16)$$

donde hemos introducido las diferencias en los subíndices,

$$\Delta^{i,j} c_{i,j} = \Delta^{i-1,j} c_{i+1,j} - \Delta^{i-1,j} c_{i,j} = \Delta^{i,j-1} c_{i,j+1} - \Delta^{i,j-1} c_{i,j},$$

cuyos primeros valores son generalización directa de las diferencias en un único índice,

$$\Delta^{1,0} c_{i,j} = c_{i+1,j} - c_{i,j}, \quad \Delta^{0,1} c_{i,j} = c_{i,j+1} - c_{i,j}.$$

De manera análoga, la expresión de la derivada parcial respecto a v es

$$\frac{\partial c(u, v)}{\partial v} = n \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{n-1} \Delta^{0,1} c_{i,j} B_i^m(u) B_j^{n-1}(v), \quad (17)$$

y la generalización a derivadas superiores es inmediata,

$$\frac{\partial^{r+s} c(u, v)}{\partial u^r \partial v^s} = \frac{m! n!}{(m-r)!(n-s)!} \sum_{i=0}^{m-r} \sum_{j=0}^{n-s} \Delta^{r,s} c_{i,j} B_i^{m-r}(u) B_j^{n-s}(v). \quad (18)$$

Especialmente interesantes son las derivadas en los bordes de la superficie, formado por los cuatros tramos $u = 0, u = 1, v = 0, v = 1$. Consideraremos uno de ellos, $u = 0$. Las derivadas parciales con respecto a la variable v corresponden a las derivadas tangenciales a la curva $c(0, v)$, que ya hemos estudiado en el primer tema. La novedad es la aparición de las derivadas transversales al borde, como son las parciales con respecto a u ,

$$\left. \frac{\partial^r c(u, v)}{\partial u^r} \right|_{u=0} = \frac{m!}{(m-r)!} \sum_{j=0}^n \Delta^{r,0} c_{0,j} B_j^n(v). \quad (19)$$

Esta expresión se puede generalizar sin problemas al resto de tramos del borde. Por ejemplo, en $u = 1$,

$$\left. \frac{\partial^r c(u, v)}{\partial u^r} \right|_{u=1} = \frac{m!}{(m-r)!} \sum_{j=0}^n \Delta^{r,0} c_{m-r,j} B_j^n(v). \quad (20)$$

Esta es una curva vectorial de grado n , cuyos vértices son vectores formados por las diferencias entre las primeras filas de puntos de la malla de control, $\{\Delta^{r,0} c_{0,0}, \dots, \Delta^{r,0} c_{0,n}\}$. Este resultado nos permite interpretar las hileras interiores de vértices de la malla. La primera hilera define el borde, la segunda la tangente y así sucesivamente.

Necesitaremos estos resultados para construir superficies polinómicas a trozos. Supongamos que tenemos dos superficies de Bézier parametrizadas respectivamente por $c(u, v)$, $\tilde{c}(u, v)$ en los recintos $[u_0, u_1] \times [v_0, v_1]$, $[u_1, u_2] \times [v_0, v_1]$, con mallas de control $\{c_{0,0}, \dots, c_{m,n}\}$ y $\{\tilde{c}_{0,0}, \dots, \tilde{c}_{m,n}\}$.

Si queremos que las superficies estén unidas por el borde $u = u_1$, la condición de continuidad exige que las curvas $c(u_1, v)$, $\tilde{c}(u_1, v)$ sean idénticas, lo cual se consigue si sus polígonos de control son los mismos, es decir, si la última fila de la malla de la primera superficie y la primera fila de la segunda son coincidentes,

$$c(u_1, v) = \tilde{c}(u_1, v) \Rightarrow c_{m,j} = \tilde{c}_{0,j}, \quad j = 0, \dots, n. \quad (21)$$

Como las superficies comparten el borde $u = u_1$, todas las derivadas parciales con respecto a la variable v son iguales en ambas superficies a lo largo del borde. Por ello, para establecer la clase de diferenciabilidad, sólo tenemos que preocuparnos de las derivadas transversales.

La condición para que la superficie compuesta sea de clase C^1 se obtiene a partir de (19-20),

$$\left. \frac{\partial c(u, v)}{\partial u} \right|_{u=u_1} = \left. \frac{\partial \tilde{c}(u, v)}{\partial u} \right|_{u=u_1} \Rightarrow \frac{\Delta^{1,0} c_{m-1,j}}{\Delta u_0} = \frac{\Delta^{1,0} \tilde{c}_{0,j}}{\Delta u_1}, \quad j = 0, \dots, n, \quad (22)$$

que es una generalización directa de la condición equivalente para curvas. Podemos interpretarla pensando en las columnas de las mallas $\{c_{0,j}, \dots, c_{m,j}\}$, $\{\tilde{c}_{0,j}, \dots, \tilde{c}_{m,j}\}$ como polígonos de control de curvas compuestas a las cuales estamos imponiendo la condición de tener derivada continua.

De este modo, la condición de ser de clase C^1 afecta a la franja de vértices de las mallas formada por las dos últimas filas de la primera superficie y las dos primeras filas de la segunda.

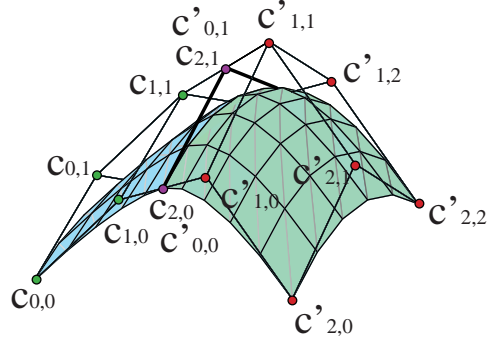


Figura 14: Superficie de clase C^1 compuesta de dos tramos bicuadráticos

Cuando estudiamos la diferenciabilidad de las curvas de Bézier, admitimos que esta condición era demasiado restrictiva, que para que una curva compuesta tuviera tangente continua, bastaba que los vectores Δc_m , $\Delta \tilde{c}_0$ fueran paralelos.

Sin embargo, esta buena propiedad se pierde en las superficies. Si imponemos en lugar de (22) que las parejas de vectores $\Delta^{1,0} c_{m,j}$, $\Delta^{1,0} \tilde{c}_{0,j}$ sean paralelas dos a dos, obtenemos una superficie que, en general, no tiene ni siquiera plano tangente bien definido en los puntos del borde, salvo en los extremos, como se comprueba calculando la normal en el borde.

Generalizando este resultado, imponer que la superficie compuesta sea de clase C^r involucra a las $r + 1$ filas adyacentes de cada malla de control y se refleja en la condición,

$$\frac{\Delta^{r,0} c_{m-r,j}}{(\Delta u_0)^r} = \frac{\Delta^{r,0} \tilde{c}_{0,j}}{(\Delta u_1)^r}, \quad j = 0, \dots, n. \quad (23)$$

Otras derivadas interesantes son las derivadas segundas cruzadas, que normalmente en el diseño se suelen llamar *twists*. En función de los vértices de la malla de control,

$$\frac{\partial^2 c(u, v)}{\partial u \partial v} = mn \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \Delta^{1,1} c_{i,j} B_i^{m-1}(u) B_j^{n-1}(v), \quad (24)$$

podemos escribir los coeficientes de manera que tengan una interpretación geométrica sencilla,

$$\Delta^{1,1} c_{i,j} = c_{i+1,j+1} - a_{i,j} = c_{i+1,j+1} - c_{i+1,j} - c_{i,j+1} + c_{i,j},$$

$$a_{i,j} = c_{i+1,j} + c_{i,j+1} - c_{i,j} = c_{i,j} + \mathbf{c}_{i,j}\mathbf{c}_{i+1,j} + \mathbf{c}_{i,j}\mathbf{c}_{i,j+1}.$$

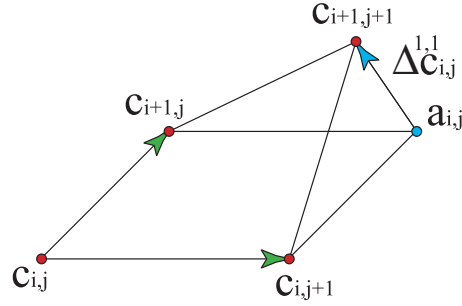


Figura 15: Twist

El vector $\Delta^{1,1}c_{i,j}$ representa la separación del vértice $c_{i+1,j+1}$ respecto del paralelogramo que determinan $c_{i,j}$, $c_{i+1,j}$, $c_{i,j+1}$, $a_{i,j}$.

En las esquinas del borde de la superficie, por ejemplo, en $c_{0,0}$, el *twist* es proporcional a $\Delta^{1,1}c_{0,0}$ y, como los vectores $\mathbf{c}_{0,0}\mathbf{c}_{1,0}$, $\mathbf{c}_{0,0}\mathbf{c}_{0,1}$ determinan el plano tangente a la superficie en $c_{0,0}$, tenemos que dicho twist mide la separación del vértice $c_{1,1}$ del plano tangente a la superficie en $c_{0,0}$.

Pensemos en una superficie de Bézier bicúbica. Su malla de control posee dieciséis vértices, de los cuales doce, los externos, están determinados por las curvas que delimitan su borde. Sólo quedan libres los cuatro vértices interiores, que quedan determinados precisamente si fijamos los *twists* de las esquinas. Por tanto, la elección de los *twists* es fundamental para determinar la superficie que llena el espacio entre las cuatro curvas. De ahí su importancia. [Ejemplo](#). [Ejemplo](#).

La opción más sencilla para escoger los *twists* es tomarlos nulos. Las superficies con todos los *twists* nulos se denominan **superficies traslacionales**. [Ejemplo](#). Las estudiaremos más adelante.

Las derivadas de la parametrización nos sirven asimismo para construir vectores normales en cada punto de la superficie. Dado que las derivadas parciales con respecto a u y a v definen vectores tangentes a la superficie, su producto vectorial define un vector normal en el punto $c(u, v)$,

$$n(u, v) = \frac{\partial c(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial c(u, v)}{\partial v}$$

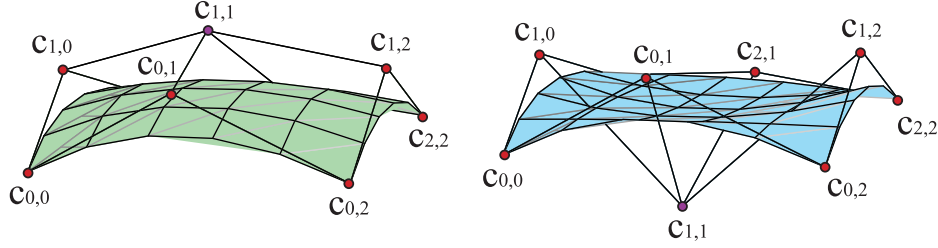


Figura 16: Variación del *twist* de una superficie bicuadrática

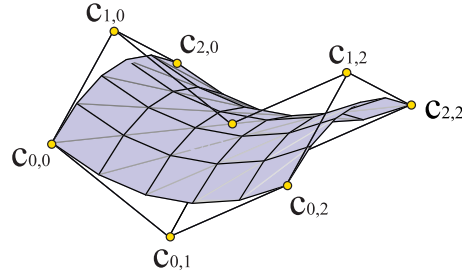


Figura 17: Superficie traslacional

$$= \sum_{i,k=0}^{m-1} \sum_{j,l=0}^{n-1} \Delta^{1,0} c_{i,j} \times \Delta^{0,1} c_{k,l} B_i^{m-1}(u) B_j^{n-1}(v) B_k^{m-1}(u) B_l^{n-1}(v),$$

que podemos hacer unitario dividiéndolo por su norma.

Esta expresión supone un aumento considerable del grado con respecto al de la superficie. No es válida en los puntos en los que las derivadas parciales sean paralelas o nulas, lo cual no siempre quiere decir que la normal no esté bien definida, sino que puede ser un problema de la parametrización empleada.

Por ejemplo, en la figura 11, la esfera tiene normal definida en el polo, pero no la podemos calcular ingenuamente por culpa del vértice múltiple.

La expresión se simplifica notablemente en las esquinas de la superficie, ya que involucran pocas diferencias de vértices. Por ejemplo, en $c_{0,0} = c(0, 0)$,

$$n(0, 0) = \Delta^{1,0} c_{0,0} \times \Delta^{0,1} c_{0,0}, \quad (25)$$

si hubiera dos vértices iguales o los vértices $c_{0,0}$, $c_{0,1}$, $c_{1,0}$ estuvieran alineados, la fórmula anterior no nos proporcionaría la normal.

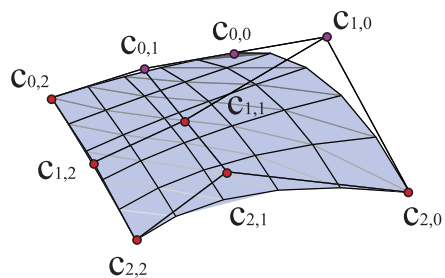


Figura 18: Superficie regular con vértices alineados