Investigación Operativa en Ingeniería

GRAFOS

Profª. Esperanza AYUGA TÉLLEZ

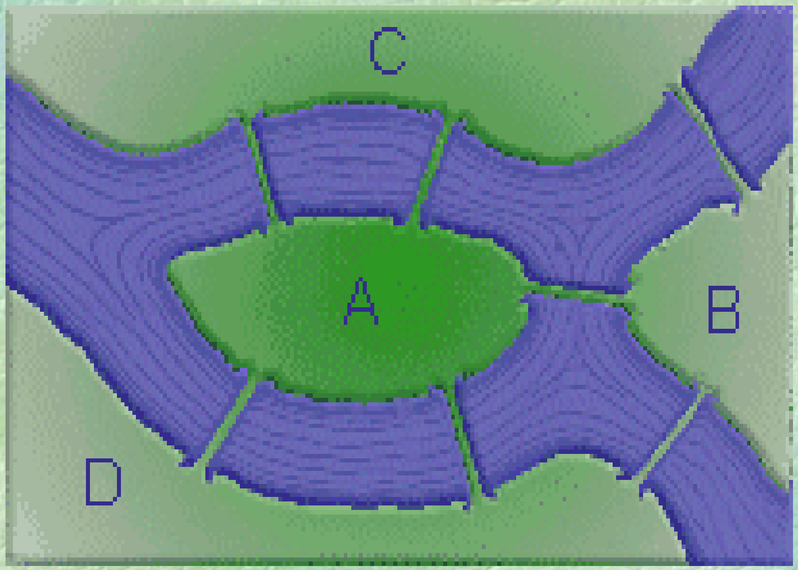
CONTENIDO

- **INTRODUCCIÓN**
- **¿QUÉ ES UN GRAFO?**
- **CONCEPTOS IMPORTANTES**
- **GRAFOS DIRIGIDOS**
- **GRAFOS NO DIRIGIDOS**
- **METODOS DE BUSQUEDA**

INTRODUCCIÓN

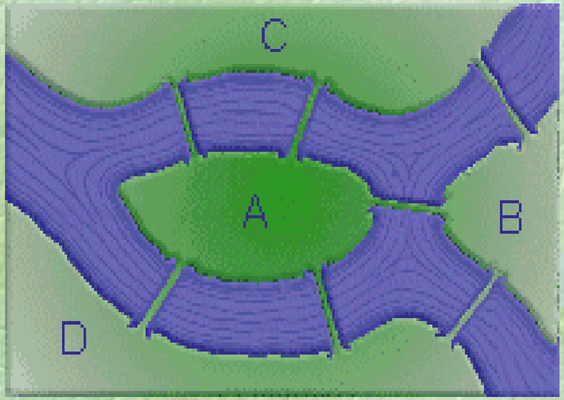
La Teoría de Grafos nace del análisis sobre una inquietud presentada en la isla Kueiphof en (Pomerania) ya que el río que la rodea se divide en dos brazos.

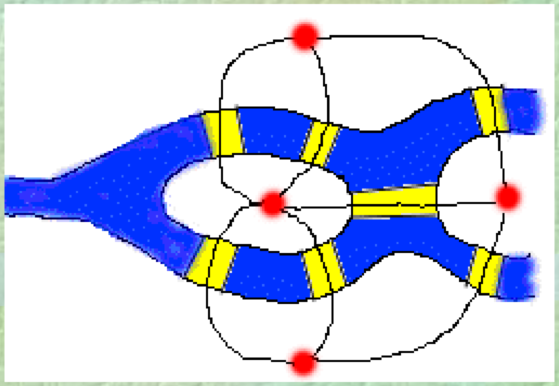
Sobre los brazos estaban construidos *siete puentes* y para los habitantes era motivo de distracción descubrir un itinerario de manera que pudieran regresar al punto de partida, después de haber cruzado por los siete puentes pero pasando sólo una vez por cada uno de ellos.

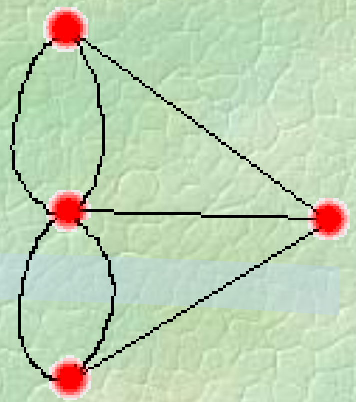


INTRODUCCIÓN

El problema reducido a puntos y líneas equivale a un grafo.







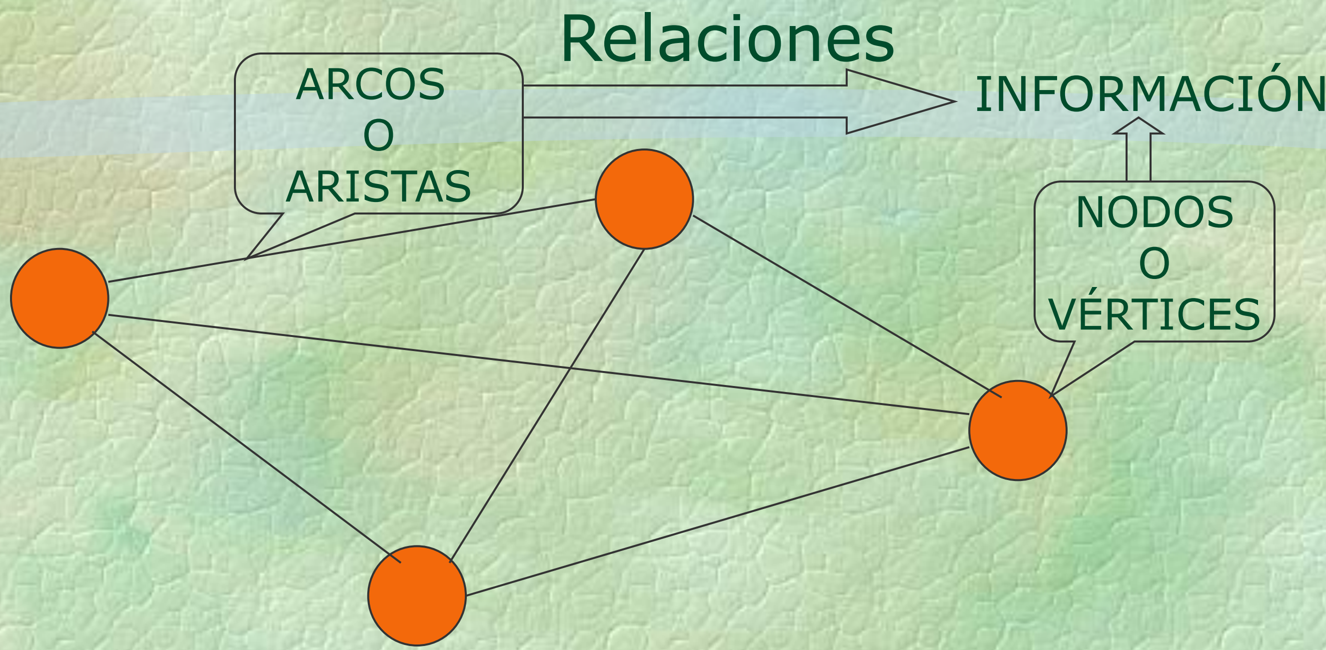
X **Y** **Z**

El problema ahora se convierte en dibujar Z, partiendo de un punto, sin volver a pasar sobre cualquier línea y sin levantar el lápiz del papel.

NO TIENE SOLUCIÓN

DEFINICIÓN

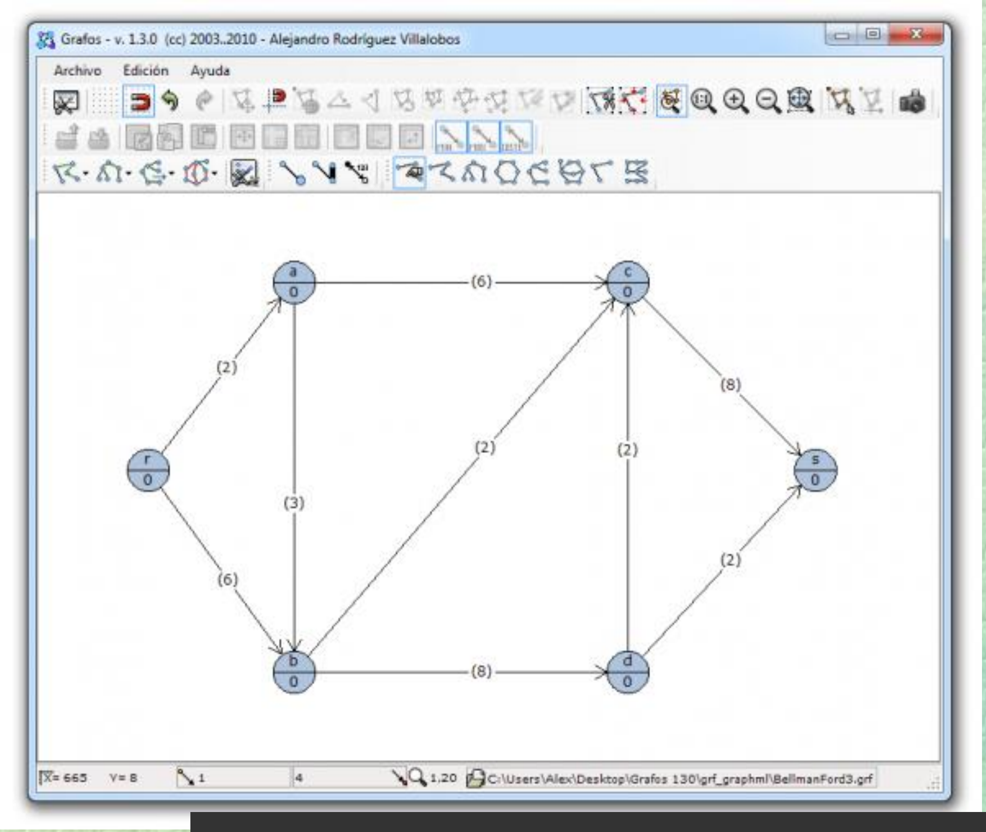
Un GRAFO es una estructura de datos dinámica que permite representar diferentes tipos de relaciones entre objetos de manera gráfica.



DEFINICIÓN

Muchos de los problemas de Investigación Operativa pueden modelizarse y resolverse sobre un grafo (conjunto de vértices o nodos conectados con arcos y/o aristas).

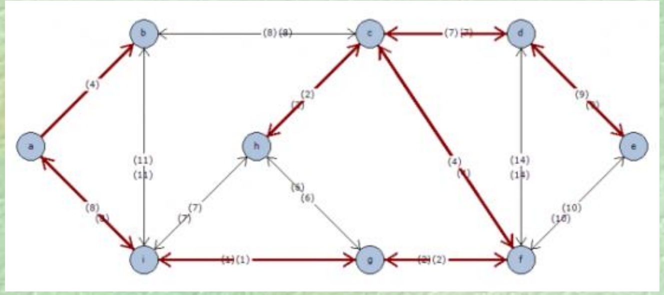
1. Árbol generador de coste mínimo.
2. Camino más corto.
3. Problema de flujo máximo.
4. Camino crítico (CPM).



http://arodrigu.webs.upv.es/grafos/doku.php

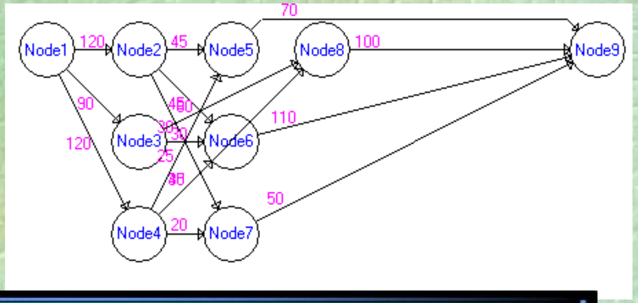
EJEMPLOS

Árbol generador de coste mínimo: Diseñar el trazado de una red de fibra óptica de manera que se cubran ciertos puntos de la manera más económica posible.

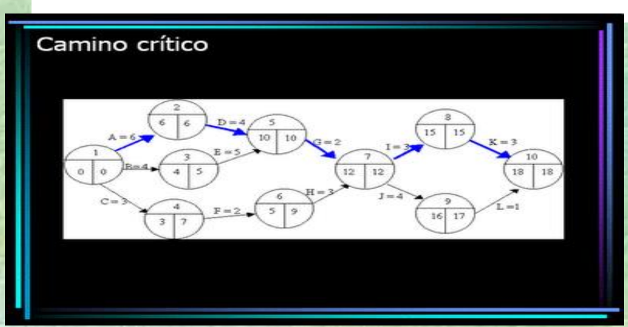


Camino más corto: Determinar la ruta más corta entre dos ciudades.

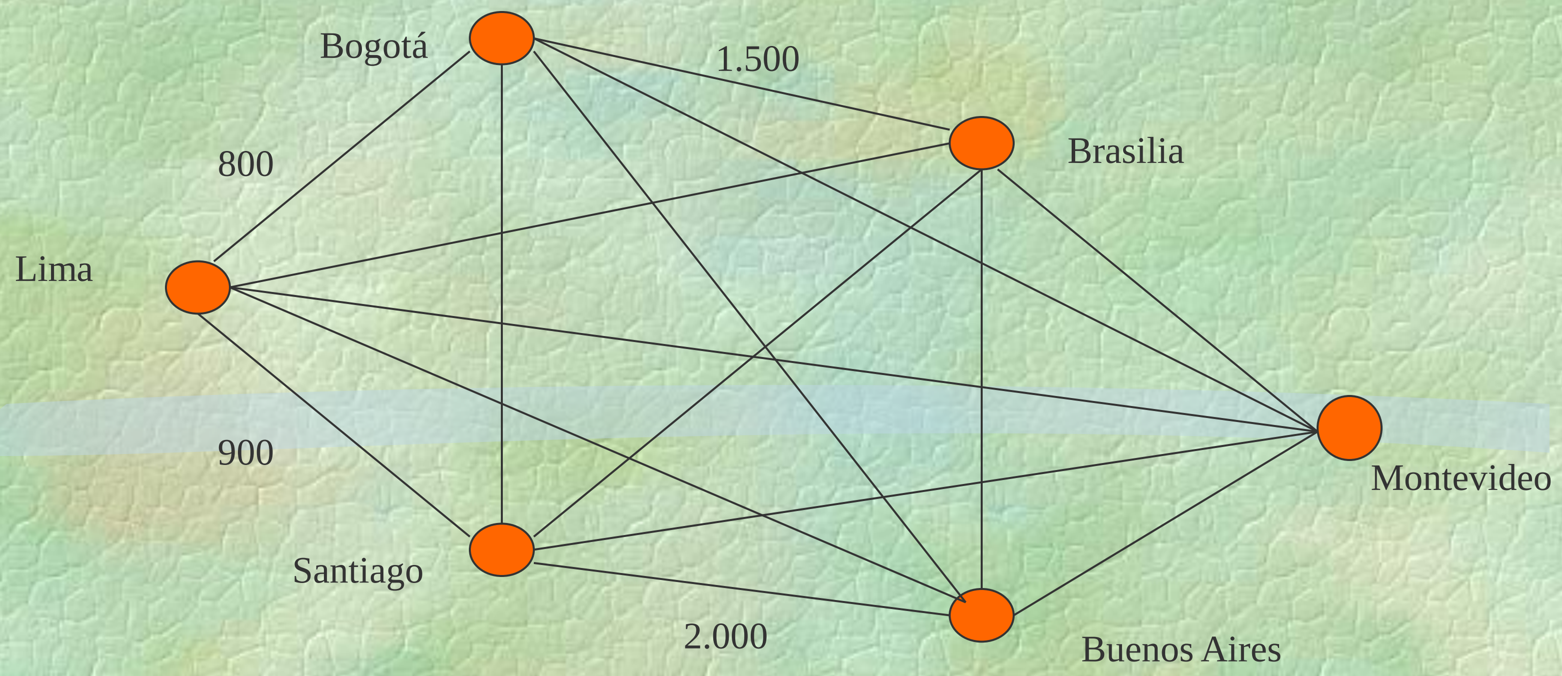
Problema de flujo máximo: Determinar la cantidad máxima de electricidad que se puede enviar a través de una red eléctrica.



Camino crítico (CPM): Decidir el programa de fechas en el que deben iniciarse y terminarse una serie de tareas para llevar a cabo un proyecto.



EJEMPLO



G = (V, A)

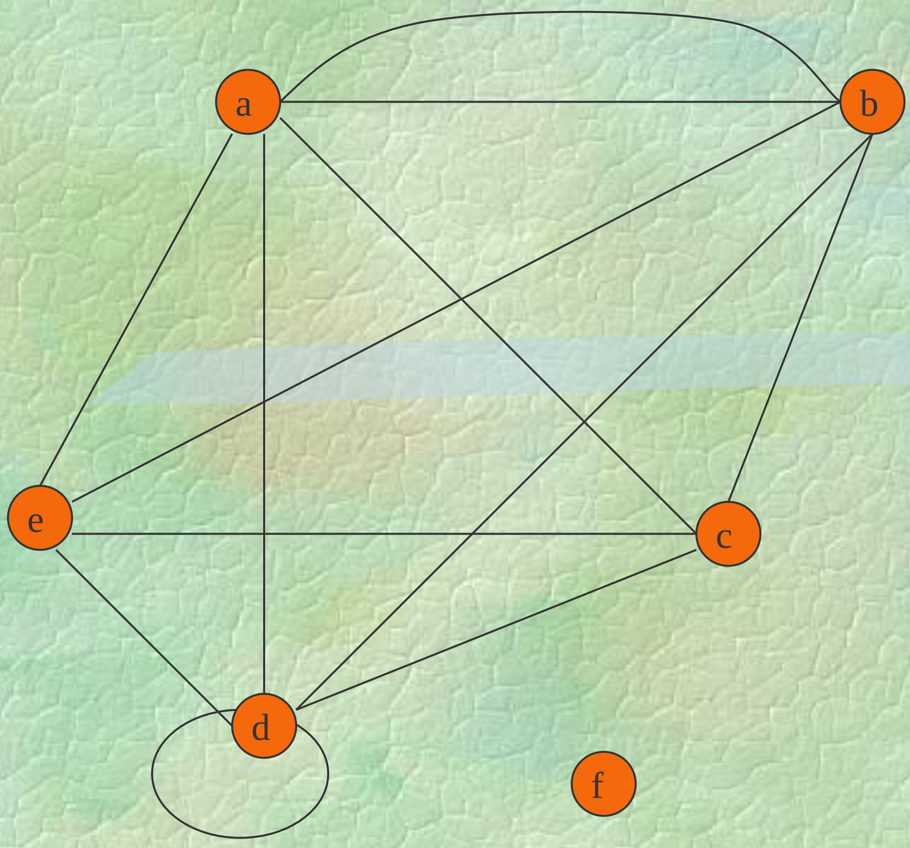
V(G) = nodos o vértices
(ciudades)

A(G) = arcos o aristas
(medio de conexión)
(pe. Km de carretera, costo de viaje en avión, etc.)

CONCEPTOS IMPORTANTES

- Grado de un nodo
- Grafo árbol
- Lazo o bucle
- Grafo completo
- Camino
- Grafo etiquetado
- Grafo conexo
- Multigrafo
- Subgrafo

EJEMPLO



- Los nodos c y e tienen grado 4, el nodo d tiene grado 6 y los demás nodos tiene grado 5
- Existe un lazo o bucle en el nodo d
- Es multigrafo ya que existen dos aristas que unen los vértices a y b
- Existen varios caminos que unen el nodo a y el nodo d Ej. a-b-c-d, a-e-d, a-d o a-c-d
- El camino a-c-d-a es un camino cerrado o ciclo
- El camino a-c-d-a es un camino simple, mientras que a-c-b-d-c no lo es.
- Es un Grafo conexo ya que todos los nodos tiene al menos un camino a otro nodo
- Es un Grafo completo ya que todos los nodos se conectan con los demás
- El nodo f es un nodo aislado

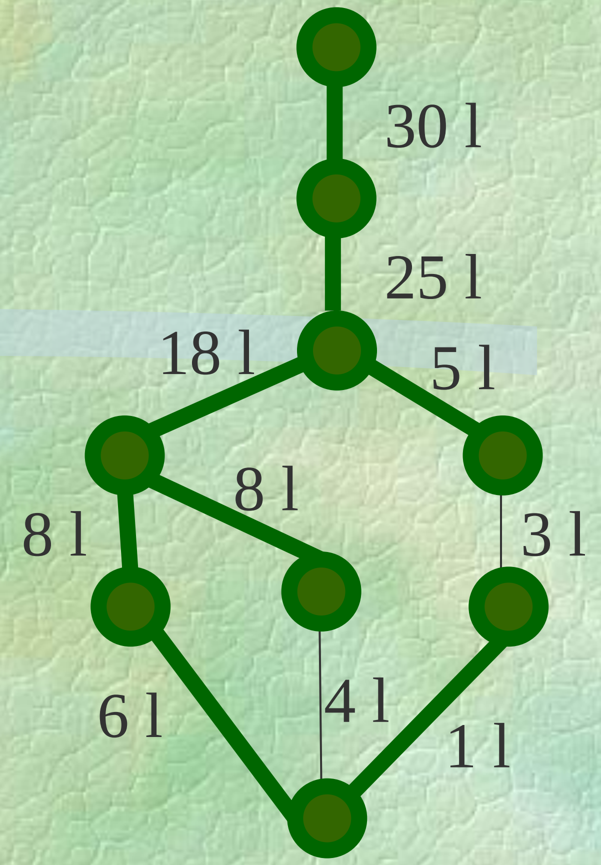
CONCEPTOS IMPORTANTES

Se denomina flujo a cualquier "bien" (tangible o no) que circule por las conexiones del grafo (o red) (electricidad, vehículo, mensaje, tiempo).

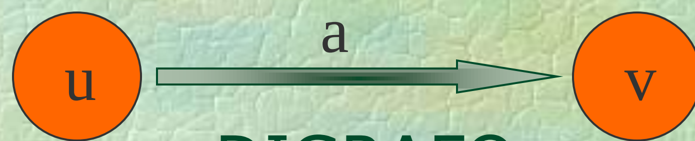
Una ruta o camino es una secuencia de arcos y/o aristas que unen dos vértices.

Un grafo es completo o conexo si cualquier pareja de vértices puede unirse con una ruta sobre el grafo.

Un árbol generador es un subconjunto de $|V| - 1$ arcos que conecta todos los vértices del grafo y no contiene ciclos.



GRAFOS DIRIGIDOS



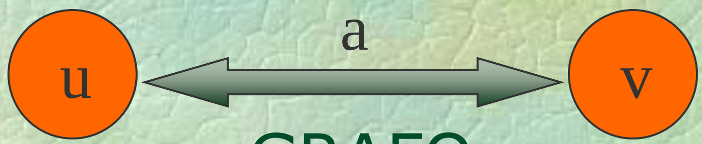
DIGRAFO

REPRESENTACION

- Matriz de Adyacencia
- Listas de Adyacencia

OBTENCIÓN DE CAMINOS

GRAFOS NO DIRIGIDOS



GRAFO

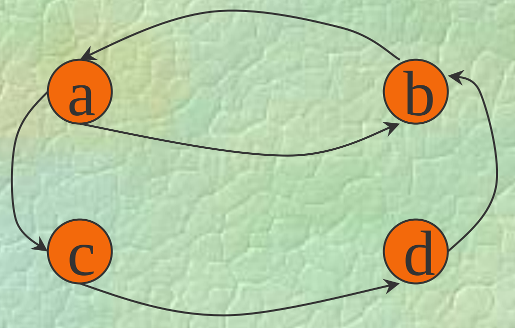
G = (V,A)

Si *a* es una arista no dirigida:

(u,v) = (v,u)

Matriz de Adyacencia

- Booleana
- Orden arbitrario a los vértices
- Filas y columnas el mismo orden
- Ventaja: tiempo de acceso
- Desventaja: espacio de almacenamiento
- Se puede determinar si existe un camino entre dos nodos



$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\
\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Obtención de Caminos

Llegar desde un vértice origen a un destino recorriendo la menor distancia posible o con el menor costo.

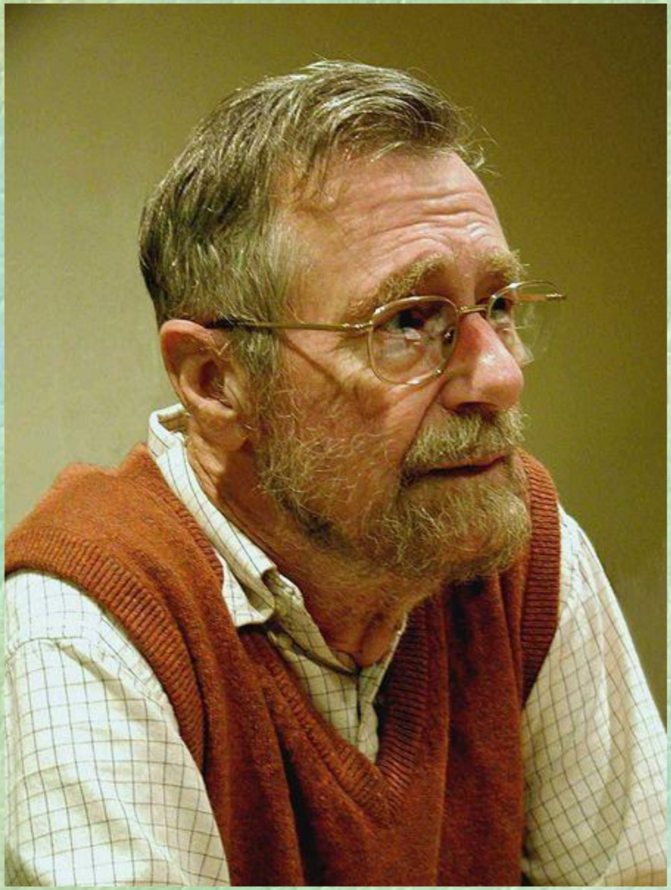
Los algoritmos más usados para este fin son:

- **DIJSKSTRA**
- **FLOYD- WARSHALL**

Otros algoritmos se pueden encontrar explicados en:
http://arodrigu.webs.upv.es/grafos/doku.php

Algoritmo de Dijskstra

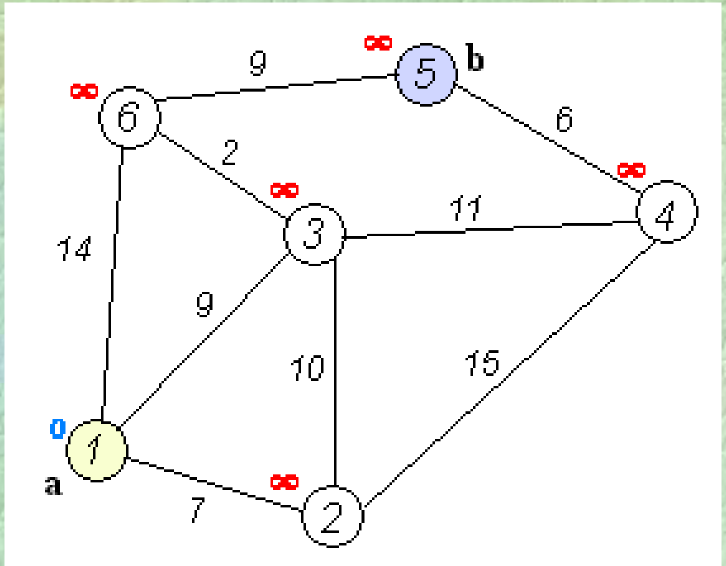
El algoritmo de Dijkstra, también llamado algoritmo de caminos mínimos, es un algoritmo para la determinación del camino más corto dado un vértice origen al resto de vértices en un grafo dirigido y con pesos en cada arista. Su nombre se refiere a Edsger Dijkstra, quien lo describió por primera vez en 1959.



http://en.wikipedia.org/wiki/Edsger_W._Dijkstra

Algoritmo de Dijskstra

Consiste en ir explorando todos los caminos más cortos que parten del vértice origen y que llevan a todos los demás vértices; cuando se obtiene el camino más corto desde el vértice origen, al resto de vértices que componen el grafo, termina la búsqueda.

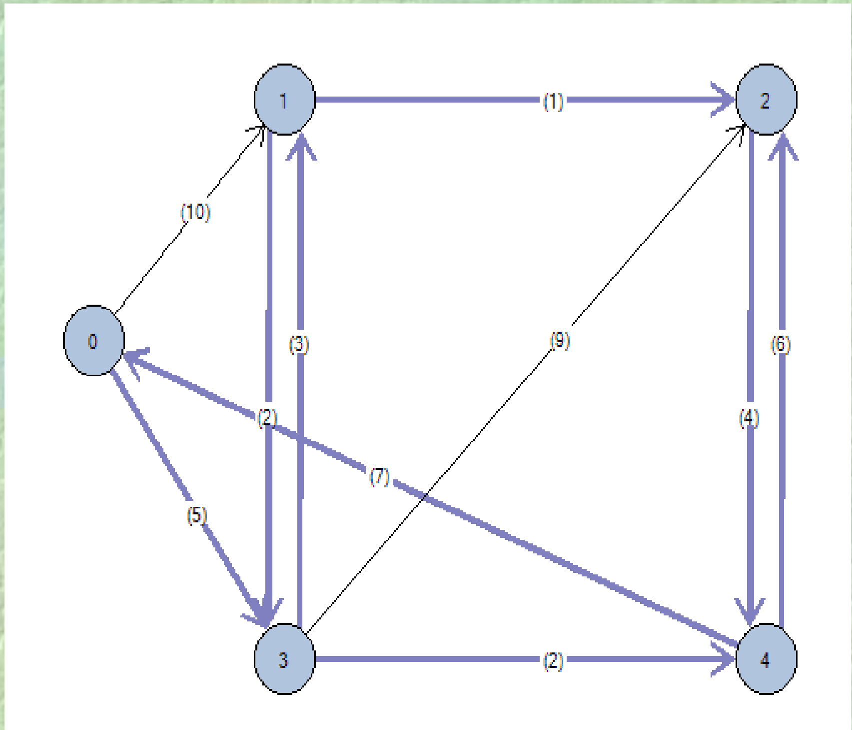


http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/45/Dijksta_Anim.gif

No funciona en grafos con aristas de valor negativo (al elegir siempre el nodo con menor valor, pueden quedar excluidos de la búsqueda nodos que en próximas iteraciones bajarían el valor general del camino al pasar por una arista con valor negativo).

Algoritmo de Floyd- Warshall

Este algoritmo proporcionará todos los posibles caminos mínimos entre cada par de nodos origen y destino. En cierto modo es equivalente a ejecutar n × n veces el algoritmo de Dijkstra eligiendo a cada paso el nodo origen y destino i-j correspondiente.



Funciona en grafos con aristas de valor negativo.

Referencias y enlaces

- Ejercicios resueltos::
http://wainu.ii.uned.es/WAINU/grados/optativas-de-cuarto/MaDi/ejercicios/Grafos%20(resueltos).doc/at_download/file

- Teoría de grafos. Campus Cuernavaca, 2008. Tecnológico de Monterrey. México.
http://campus.cva.itesm.mx/nazira/Tc1003/PDF/TODO/0701_Tc1003_TODO_Grafos.pdf

- Curso de teoría de Grafos: http://mate.dm.uba.ar/~spuddu/teo_de_grafos/grafo1.doc
- Ejercicios autoevaluación: http://www2.udec.cl/~grafos/grafos/ejerc/ejerc1/ejerc1.htm

REDES

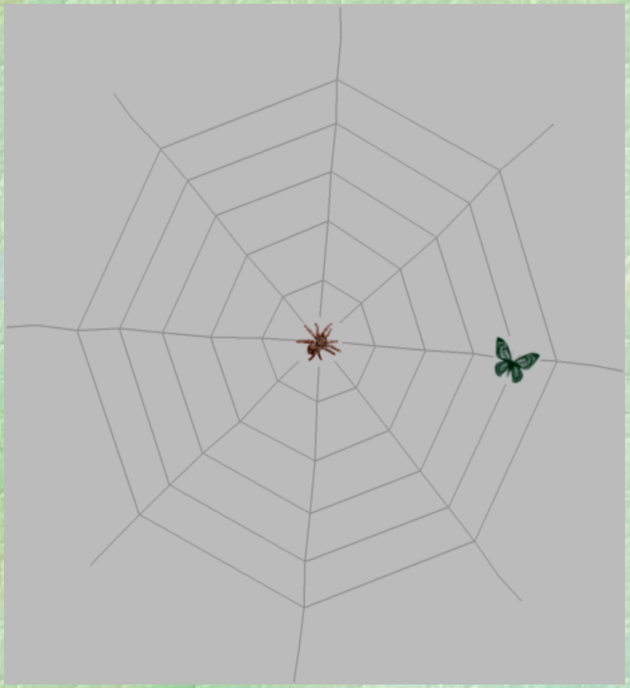
Profª. Esperanza AYUGA TÉLLEZ

CONTENIDO

- **INTRODUCCIÓN**
- **MODELO DE TRANSPORTE**
- **CAMINO MÁS CORTO**
- **FLUJO MÁXIMO**
- **FLUJO ÓPTIMO**
- **CONTROL DE PROYECTOS**
- **MÉTODOS DE CONTOL**

INTRODUCCIÓN

La teoría de grafos se aplica a la resolución de una serie de problemas tipo: **transporte, asignación, flujo, camino más corto y control de proyectos**.



La representación en redes proporciona un panorama general muy poderoso y una ayuda conceptual para visualizar las relaciones entre las componentes de un sistema.

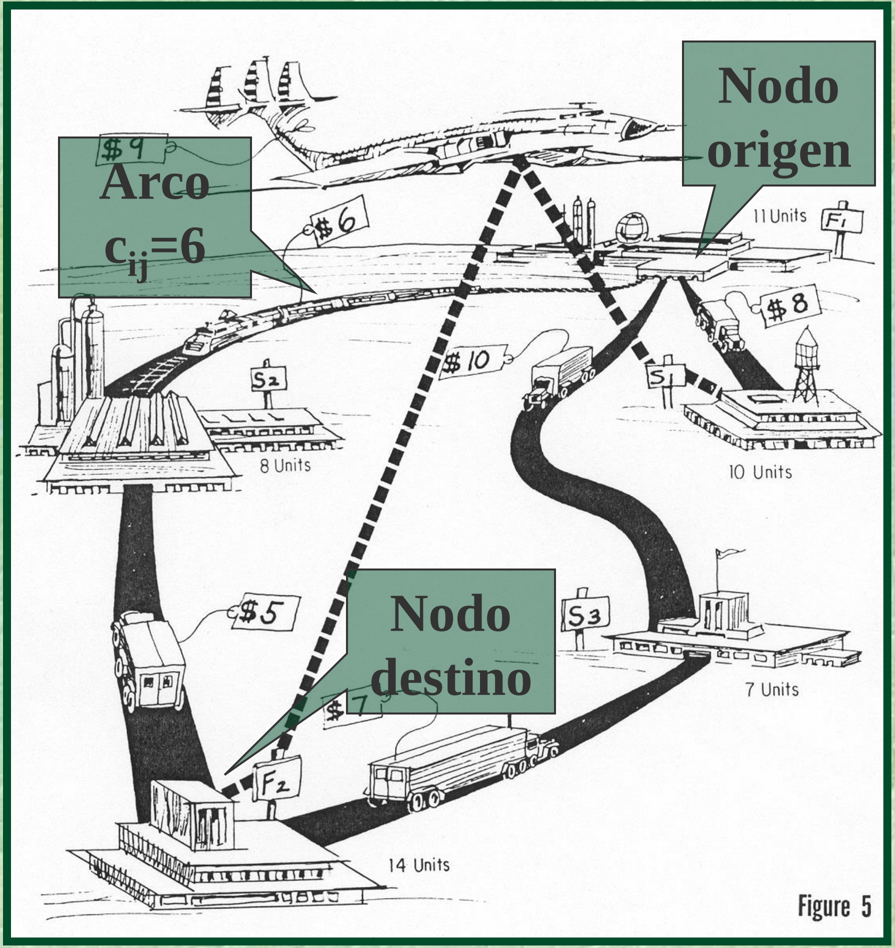
CONCEPTOS IMPORTANTES

Dado G = (V,A) grafo dirigido,
V = {1, . . . ,m} el conjunto de vértices y
A = {(i, j), . . . , i, j ∈ V }, conjunto de arcos. En el que, cada vértice tiene asociado un número b_i que representa la **oferta** o **demanda** en ese vértice de un determinado bien.

- Si $\mathbf{b_i > 0}$, se dice que i es un vértice **origen**
- Si $\mathbf{b_i < 0}$, se dice que i es un vértice **destino**
- Si $\mathbf{b_i = 0}$, se dice que i es un vértice de **transbordo**

Cada arco tiene asociada una variable $\mathbf{x_{ij} \geq 0}$ que indica el **flujo enviado** desde i hasta j, y una cantidad $\mathbf{c_{ij}}$ que indica el **coste de enviar** una unidad desde i a j.

MODELO DE TRANSPORTE



Consideramos un conjunto de lugares llamados orígenes (nodos origen) y otros destinos (nodos destino). Sobre los arcos (aristas) se colocan dos valores si la red es una red valuada (c_{ij}, C), donde el primer argumento es el coste por unidad para ir del nodo i-ésimo al nodo j-ésimo y el segundo la capacidad del arco.

MODELO DE TRANSPORTE

Para resolverlos se suelen fijar las siguientes hipótesis:

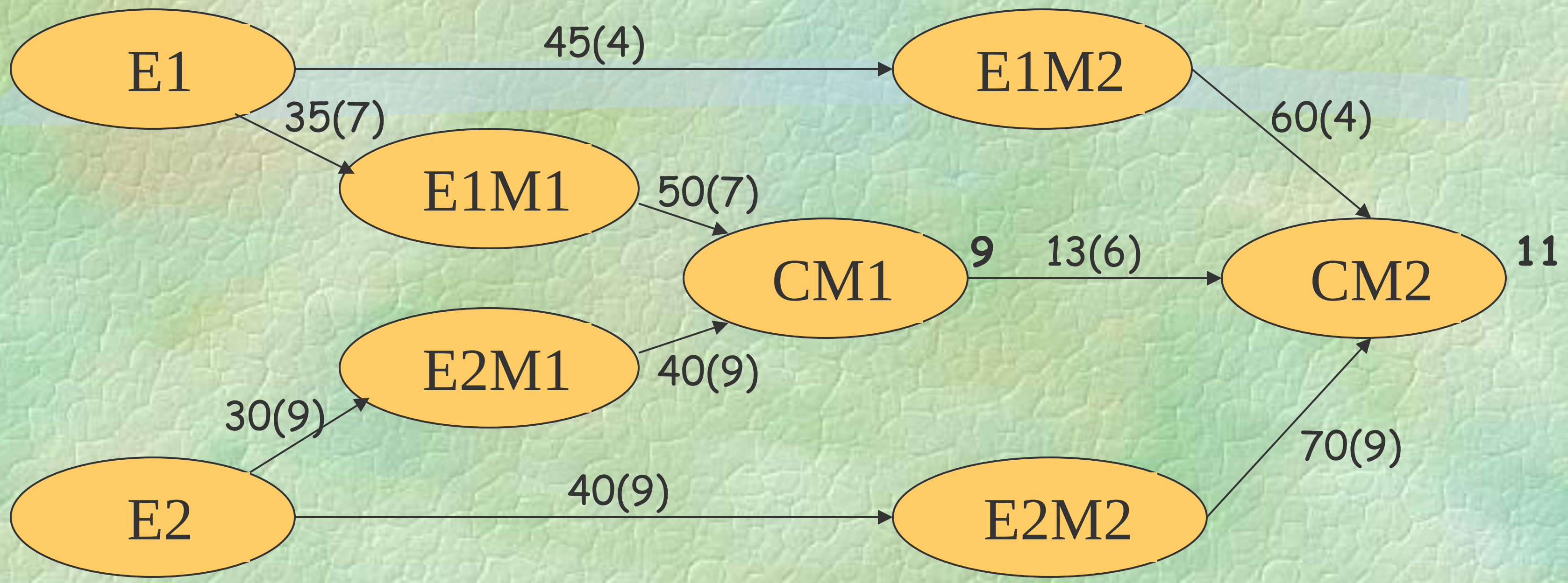
- Independencia de los arcos
- La red es acumulativa

Ejemplo: Dos empresas suministran tableros a un cliente, en dos meses. El coste de producción, el de envío por unidad, y la capacidad es:

Empresa	M1			M2		
	Coste Prod/u.	Coste envío/u.	Capac.	Coste Prod/u.	Coste envío/u.	Capac.
Empresa 1	35	50	7	45	60	4
Empresa 2	30	40	9	40	70	9

REDES

Ejemplo: una vez producido, se envía de inmediato al cliente. Si se produce y envía el M1, se puede utilizar para satisfacer la demanda del M2, pero con coste de inventario de 13 u. Al final del M1 como max puede haber 6u en inventario. El cliente necesita 9 en M1 y 11 en M2.



Ejemplo: si x_{ij} es lo que pasa del nodo i al j

$$\text{Min } 45x_{16} + 35x_{13} + 30x_{24} + 40x_{27} + 50x_{35} + 40x_{45} + 13x_{58} + 60x_{68} + 70x_{78}$$

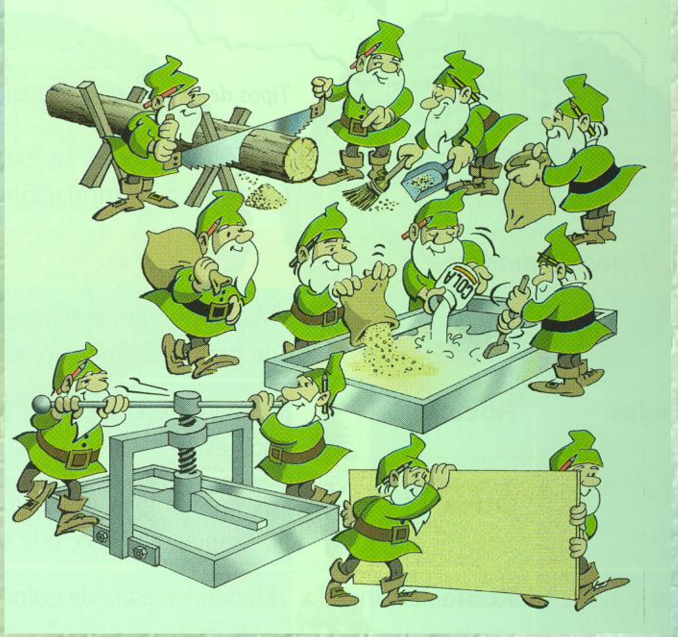
$x_{16} \leq 4 \quad x_{13} \leq 7 \quad x_{24} \leq 9 \quad x_{27} \leq 9 \quad x_{35} \leq 7$

$x_{45} \leq 9 \quad x_{58} \leq 6 \quad x_{68} \leq 4 \quad x_{78} \leq 9$

$x_{16} + x_{13} \leq 11; \quad x_{24} + x_{27} \leq 18$

$x_{35} + x_{45} - x_{58} = 9; \quad x_{58} + x_{68} + x_{78} = 11$

$x_{13} = x_{35}; \; x_{24} = x_{45}; \; x_{16} = x_{68}; \; x_{27} = x_{78}$

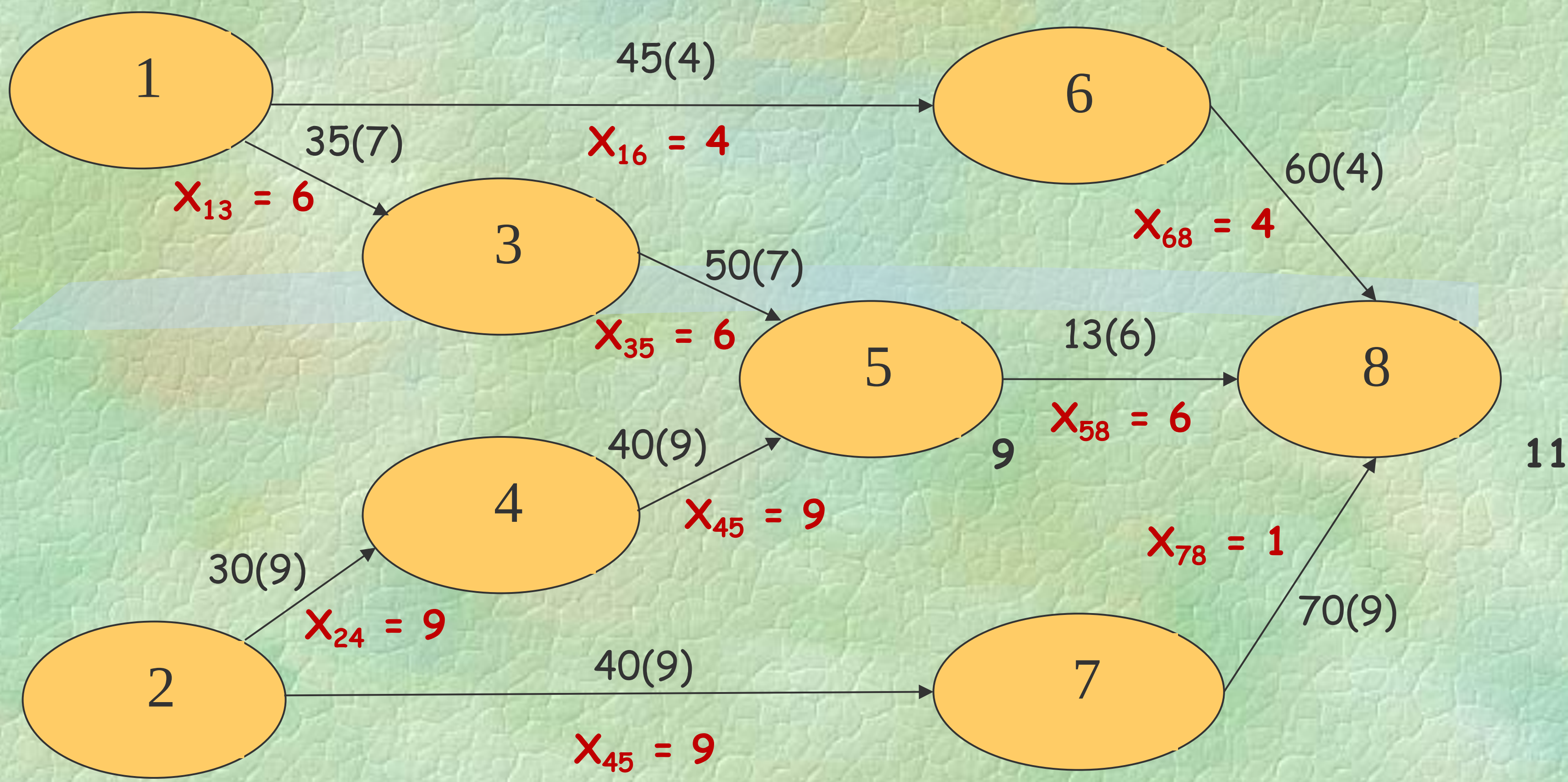


SOLUCIÓN CON LINDO: z=1748

$x_{16} = 4 \quad x_{13} = 6 \quad x_{24} = 9 \quad x_{27} = 1 \quad x_{35} = 6$

$x_{45} = 9 \quad x_{58} = 6 \quad x_{68} = 4 \quad x_{78} = 1$

Ejemplo:


1
2
3
4
5
6
7
8
45(4)
X16 = 4
35(7)
X13 = 6
60(4)
X68 = 4
50(7)
X35 = 6
13(6)
X58 = 6
9
11
40(9)
X45 = 9
30(9)
X24 = 9
X78 = 1
70(9)
40(9)
X45 = 9

CAMINO MÁS CORTO

Este problema consiste en determinar el trayecto más corto desde un nodo origen a un nodo destino. Supongamos una red con m nodos y n arcos, con un coste asociado a cada arco c_{ij}.

Definamos la variable binaria: $$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si existe arco} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Formulado como un problema de PL:

Min $z=\Sigma\Sigma c_{ij}x_{ij}$ (se suman todos los arcos)

Nodo origen: $\Sigma x_{ij} - \Sigma x_{ij}=1$ (arcos que salen- arcos que entran)

Nodo intermedio: $\Sigma x_{ij} - \Sigma x_{ij}=0$ (arcos que salen- arcos que entran)

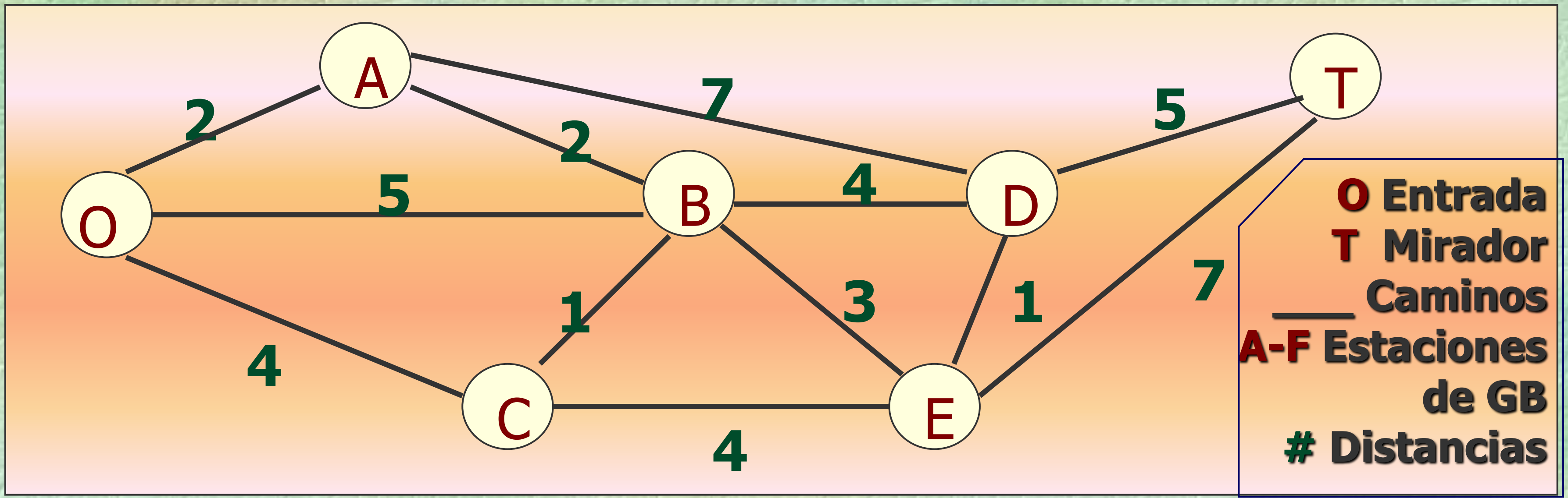
Nodo destino: $\Sigma x_{ij} - \Sigma x_{ij}= - 1$ (arcos que salen- arcos que entran)

$x_{ij} \geq 0$

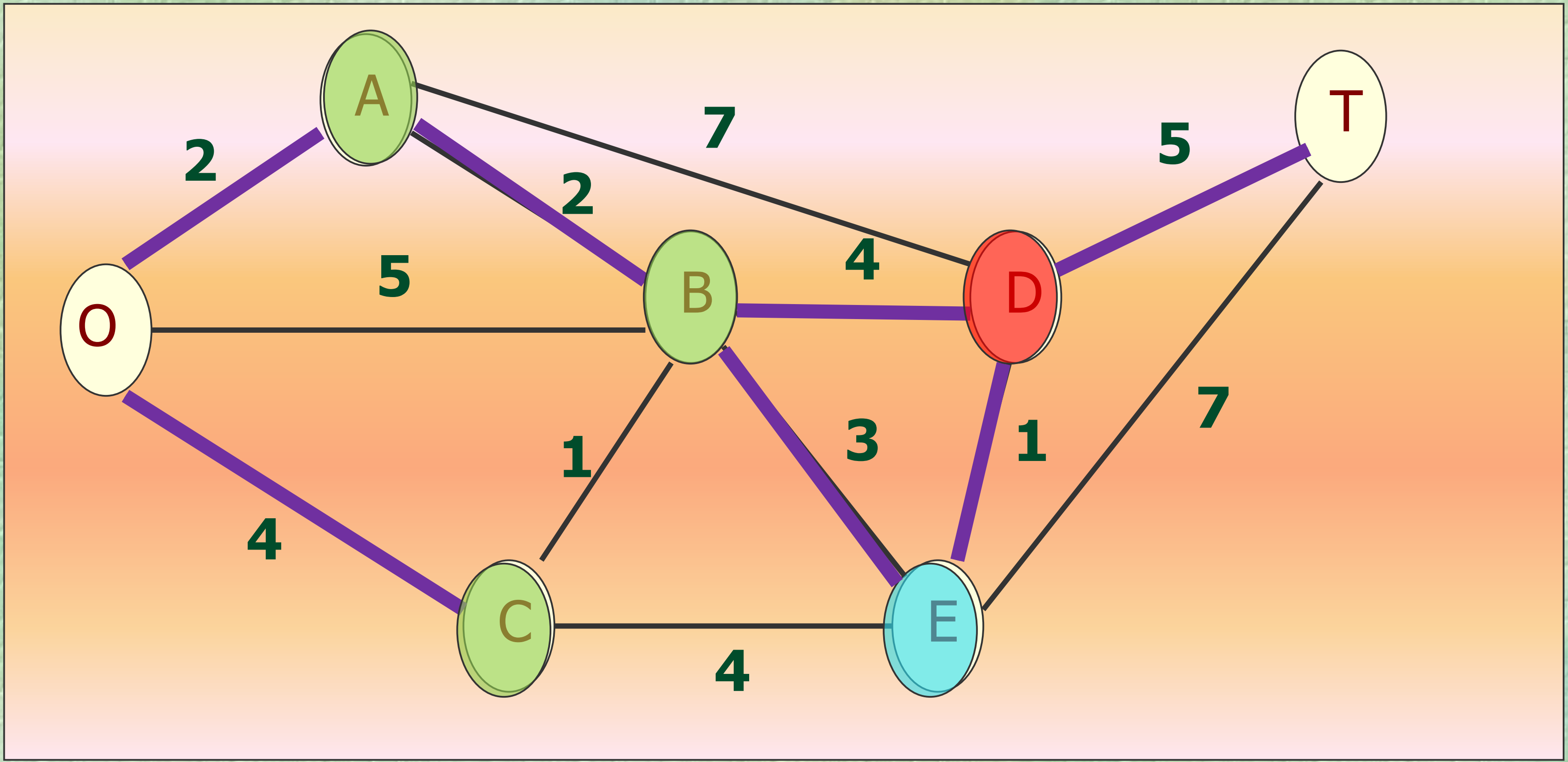
CAMINO MÁS CORTO

Problema Seervada Park

En fecha reciente se reservó el área de SEERVADA PARK para paseos y campamentos. No se permite la entrada de automóviles pero existe un sistema de caminos angostos con curvas para tranvías y "jeeps" conducidos por los guardabosques. El parque contiene un mirador a un hermoso paisaje en la estación T. Unos cuantos tranvías transportan a los visitantes desde la entrada a la estación T y de regreso.



CAMINO MÁS CORTO



Problema Seervada Park

Determinar la distancia más corta desde la entrada al mirador.

n	Nodos resueltos	Nodo no resuelto más cercano	Distancia total involucrada	n-ésimo nodo más cercano	Distancia Mínima	Última conexión
1	O	A	2	A	2	OA
2	O A	C B	4 2+2=4	C B	4 4	OC AB
3	A B C	D E E	2+7=9 4+3=7 4+4=8	E	7	BE
4	A B E	D D D	2+7=9 4+4=8 7=1=8	D D	8 8	BD ED
5	D E	T T	8+5=13 7+7=14	T	13	DT

Ruta 1

$$O \to A \to B \to E \to D \to T$$

Ruta 2

$$O \to A \to B \to D \to T$$

FLUJO MÁXIMO EN REDES

Este problema consiste en determinar el trayecto más corto desde un nodo origen a un nodo destino. Supongamos una red con m nodos y n arcos, con un coste asociado a cada arco c_{ij}.

Definamos la variable binaria: $$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si existe arco} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Formulado como un problema de PL:

Min $z=\Sigma\Sigma c_{ij}x_{ij}$ (se suman todos los arcos)

Nodo origen: Σx_{ij}- Σx_{ij}=1 (arcos que salen- arcos que entran)

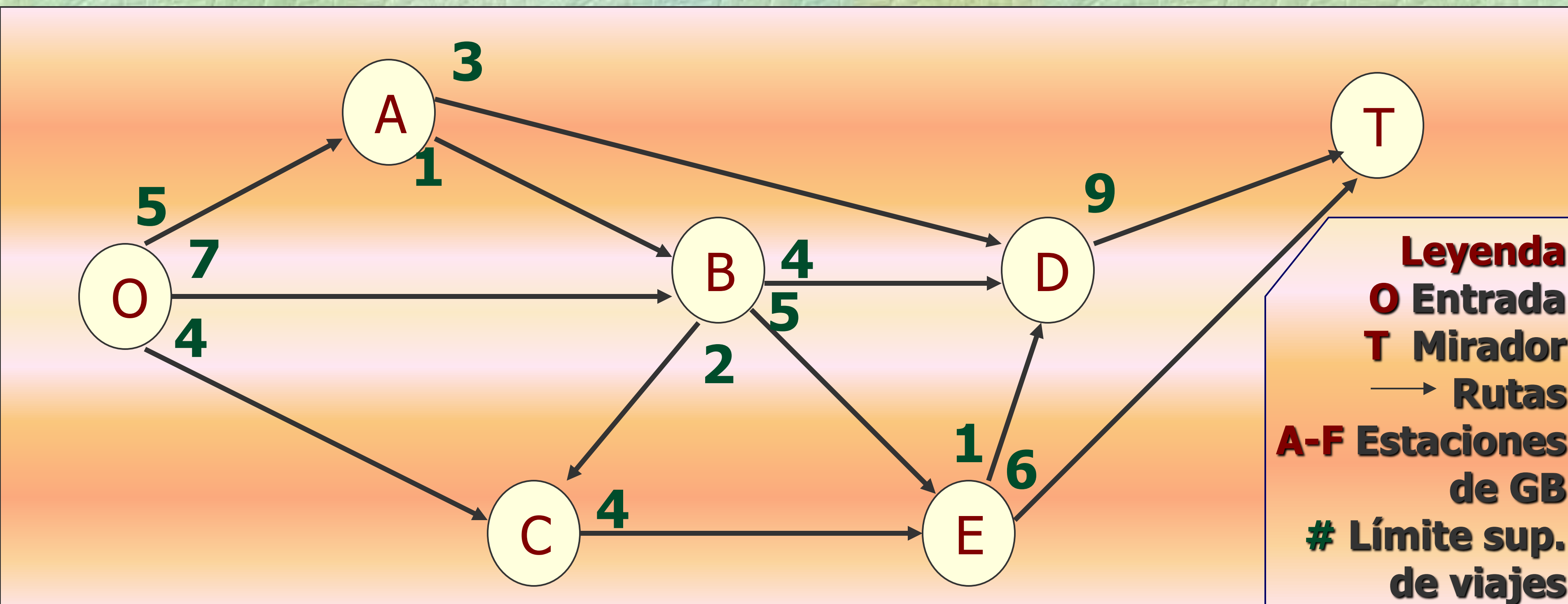
Nodo intermedio: Σx_{ij}- Σx_{ij}=0 (arcos que salen- arcos que entran)

Nodo destino: Σx_{ij}- Σx_{ij}=1 (arcos que salen- arcos que entran)

$x_{ij} \geq 0$

Problema Seervada Park

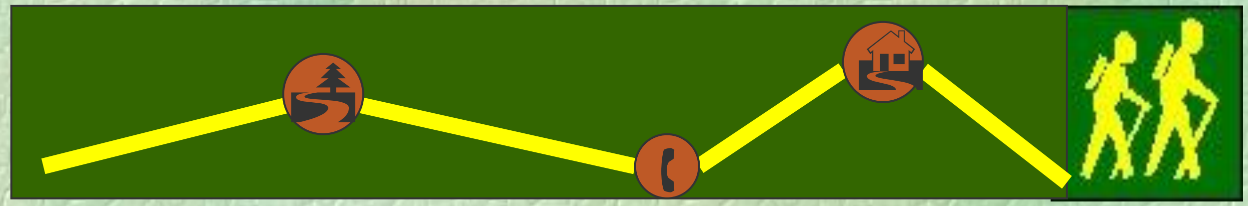
En temporada alta, encontrar alternativas de O a T que maximicen número total de viajes sin saturar capacidades de caminos



Problema Servaada Park

Todo flujo a través de una red conexa dirigida se origina en un nodo, llamado **fuente** y termina en otro nodo llamado **destino** (O y T resp para S. Park)

1. Los nodos restantes son de transbordo (A,B,C,D,E para S. Park)
2. Se permite el flujo a través de un arco sólo en la dirección indicada por la flecha, donde la cantidad máxima de flujo está dada por la capacidad del arco.
3. El objetivo es maximizar la cantidad total de flujo de la fuente al destino. Esta cantidad se mide en cualquiera de las dos maneras equivalente, esto es, la cantidad que sale de la fuente o la cantidad que entra al destino.



Solución en Excel SEERVADA PARK Flujo Máximo

Desde	Hasta	Ruta		Flujo máx
O	A	3	<=	5
O	B	7	<=	7
O	C	4	<=	4
A	B	0	<=	1
A	D	3	<=	3
B	C	0	<=	2
B	D	4	<=	4
B	E	3	<=	5
C	E	4	<=	4
D	T	8	<=	9
E	D	1	<=	1
E	T	6	<=	6
FLUJO MÁXIMO		14		

Nodos	Flujo		Origen /Demanda
0	14		
A	0	=	0
B	0	=	0
C	0	=	0
D	0	=	0
E	0	=	0
T	-14		

FLUJO ÓPTIMO EN REDES

Este problema consiste en determinar el trayecto más corto desde un nodo origen a un nodo destino. Supongamos una red con m nodos y n arcos, con un coste asociado a cada arco c_{ij}.

Definamos la variable binaria:
$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si existe arco} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Formulado como un problema de PL:

Min $z=\Sigma\Sigma c_{ij}x_{ij}$ (se suman todos los arcos)

Nodo origen: Σx_{ij}- Σx_{ij}=1 (arcos que salen- arcos que entran)

Nodo intermedio: Σx_{ij}- Σx_{ij}=0 (arcos que salen- arcos que entran)

Nodo destino: Σx_{ij}- Σx_{ij}=-1 (arcos que salen- arcos que entran)

$x_{ij} \geq 0$

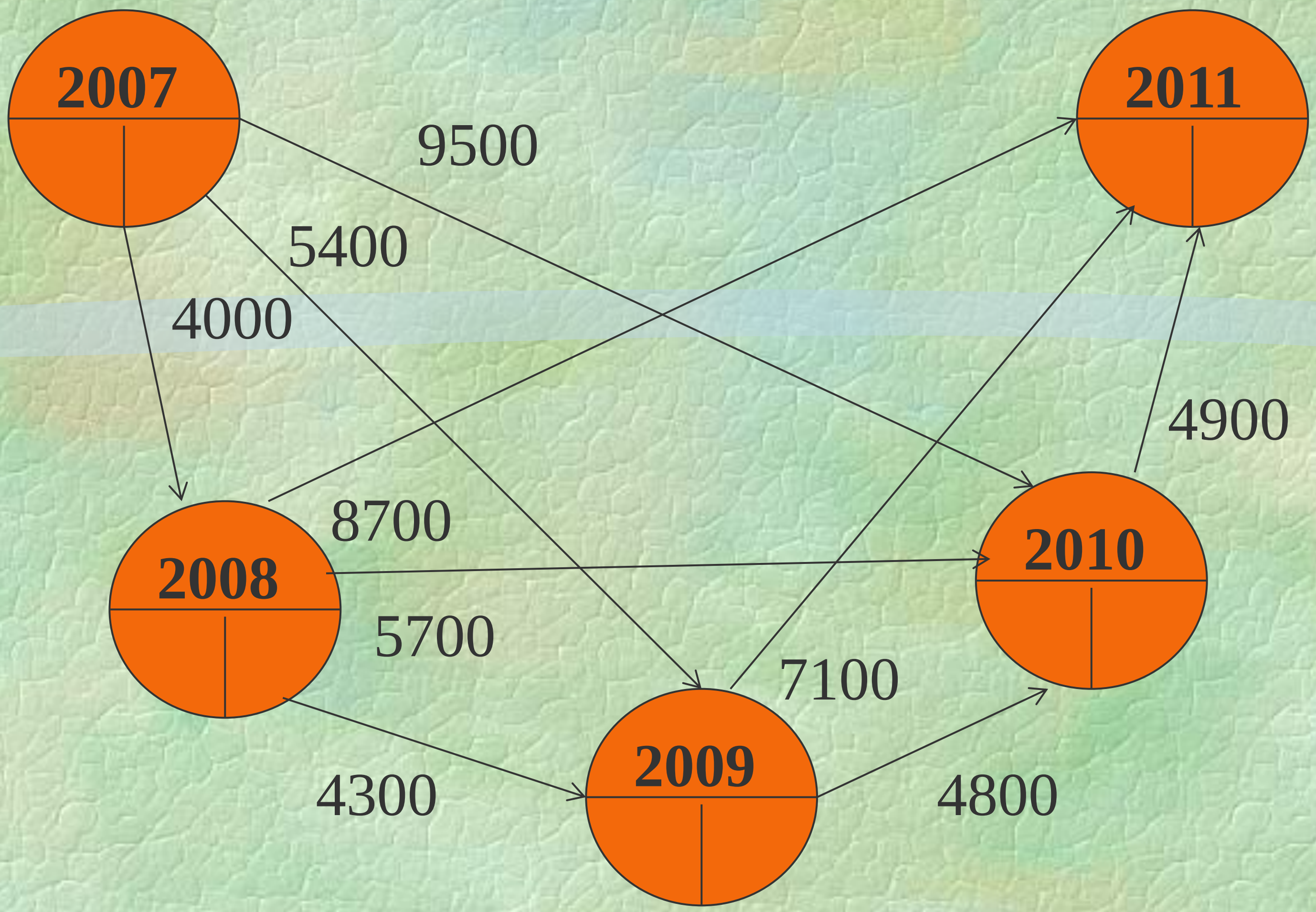
FLUJO ÓPTIMO EN REDES

Ejemplo: RentaCar quiere diseñar un plan renove para su flota de automóviles para los próximos cinco años. Al principio de cada año debe decidirse si se reemplaza un automóvil o si por el contrario conviene dejarlo en activo. Un automóvil debe estar en servicio por lo menos un año, pero debe reemplazarse después de tres años.

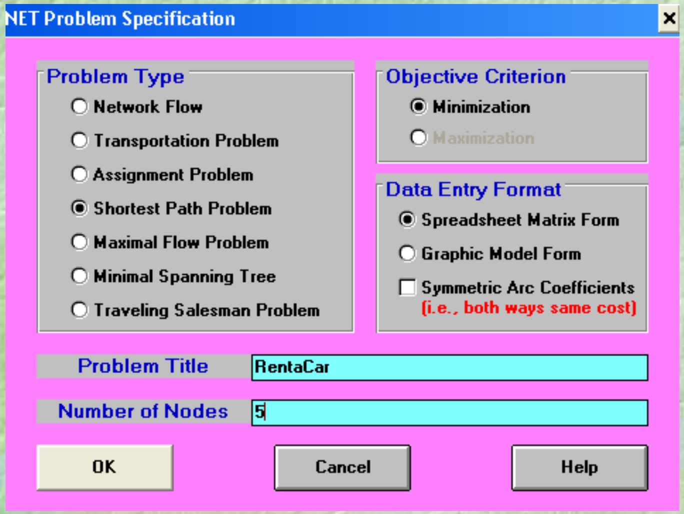
La siguiente tabla proporciona el coste en euros de reemplazar un vehículo en función del año en el que se adquiere y del número de años que lleva en funcionamiento.

	Coste de reemplazamiento		
Año Compra	1	2	3
2007	4000	5400	9800
2008	4300	6200	8700
2009	4800	7100	
2010	4900		

Ejemplo RentaCar: ¿Cuándo reemplazar el coche del 2003?



Ejemplo RentaCar: Solución con WinQSB 2.0



Renovar en 2009 los coches de 2007 y éstos en 2011

From/To	2007	2008	2009	2010	2011	
2007		4000	5400	9800		
2008			4300	6200	8700	**12700**
2009				4800	7100	**12500**
2010					4900	**14700**
2011						

CONTROL DE PROYECTOS

Proyecto: conjunto de actividades interrelacionadas, en el cuál la realización de cada actividad requiere tiempo y recursos.

CPM: método de ayuda en la planificación, programación y control de proyectos, cuando se conoce con certeza la duración de las actividades.

El objetivo suele ser llevar a cabo el proyecto en el menor tiempo posible.

Procedimiento:

1. Definir las actividades del proyecto
2. Diseñar la red que representa el proyecto
3. Resolver el problema
4. Traducir la solución a un programa de tiempo

CONTROL DE PROYECTOS

1. Elaborar una lista con todas las actividades del proyecto indicando para cada una de ellas:

- Las actividades predecesoras.
- La duración y cantidad de recursos necesarios para su ejecución.

CONTROL DE PROYECTOS

2. Diseñar la red que representa el proyecto:

Cada actividad se representa mediante un vértice.

Se añaden dos vértices ficticios que representan, respectivamente, las actividades principio y final del proyecto.

Las relaciones de precedencia entre actividades se modelizan mediante arcos. Cada arco (i, j) tiene asociado un coste que indica el tiempo de ejecución de la actividad i.

Cada vértice puede tener asociado un peso que representa la cantidad de recursos que consume la actividad i.

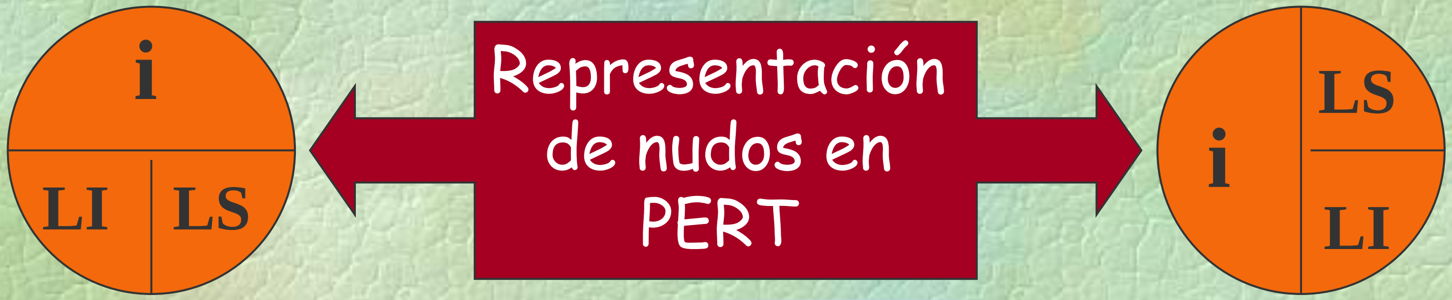
RED PERT (Program Evaluation and Review Technique)

El grafo PERT se utiliza para calcular la duración del proyecto y para evaluar la importancia de las diferentes tareas:

- Tiempo "early" = tiempo mínimo necesario para alcanzar un nudo= LI
- Tiempo "last" = tiempo máximo que podemos tardar en alcanzar un nudo sin que el proyecto sufra un retraso=LS

Los tiempos LI y LS dependen de la relación entre las diferentes tareas, y podemos calcularlos a través del grafo PERT

RED PERT (Program Evaluation and Review Technique)



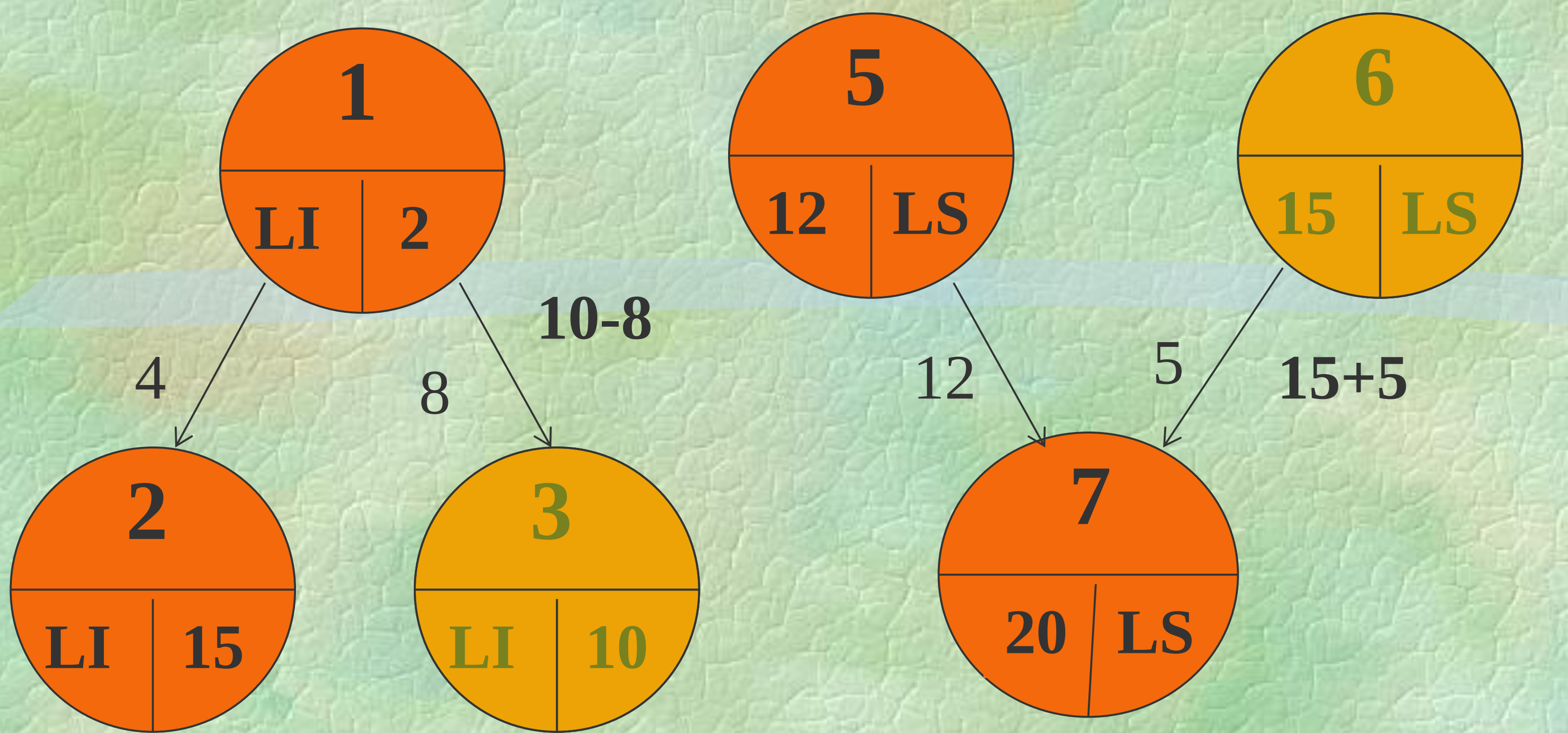
LI del nudo i+1 =LI del nudo i + duración de i

Con varios nudos anteriores a i+1, tomamos el LI máximo de los nudos i

LS del nudo i = LS del nudo i+1 - duración de i

Con varios nudos posteriores a i, tomamos el LI mínimo de los nudos i+1

RED PERT (Program Evaluation and Review Technique)



Mínimo LS de 1 desde 2 y 3 es 10 (partiendo de 3)

Máximo LI de 7 desde 5 y 6 es 15 (pasando por 6)

CONTROL DE PROYECTOS

Ejemplo: New Computer está a punto de lanzar una oferta de nuevos ordenadores. Cada ordenador consta de dos partes, una pantalla y un pack formado por, la CPU, el teclado y el ratón.

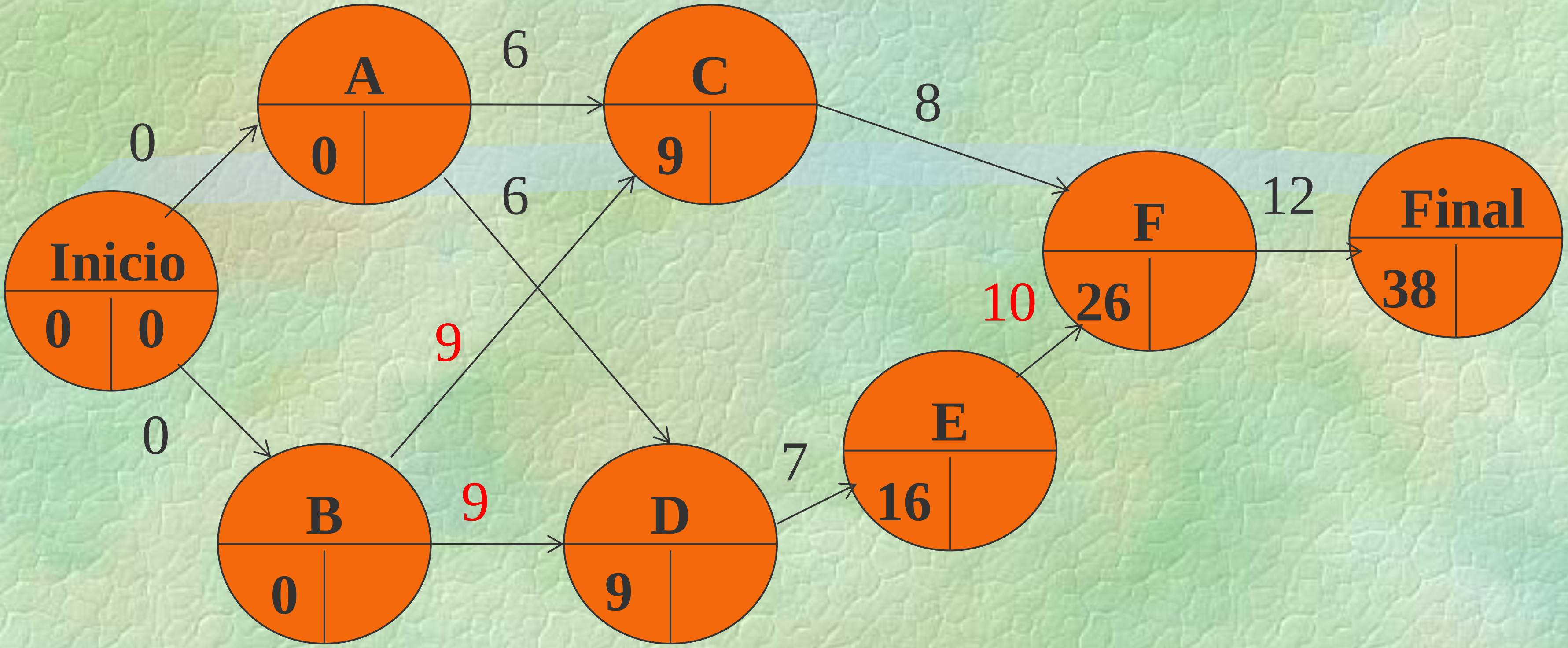
Antes de producir cualquiera de las componentes es necesario conseguir los materiales y formar a los trabajadores que deben realizar el montaje. El pack que incluye la CPU requiere pasar por un control de calidad antes de ser embalado con la pantalla.

Ejemplo: La siguiente tabla indica la duración de cada actividad y sus predecesores.

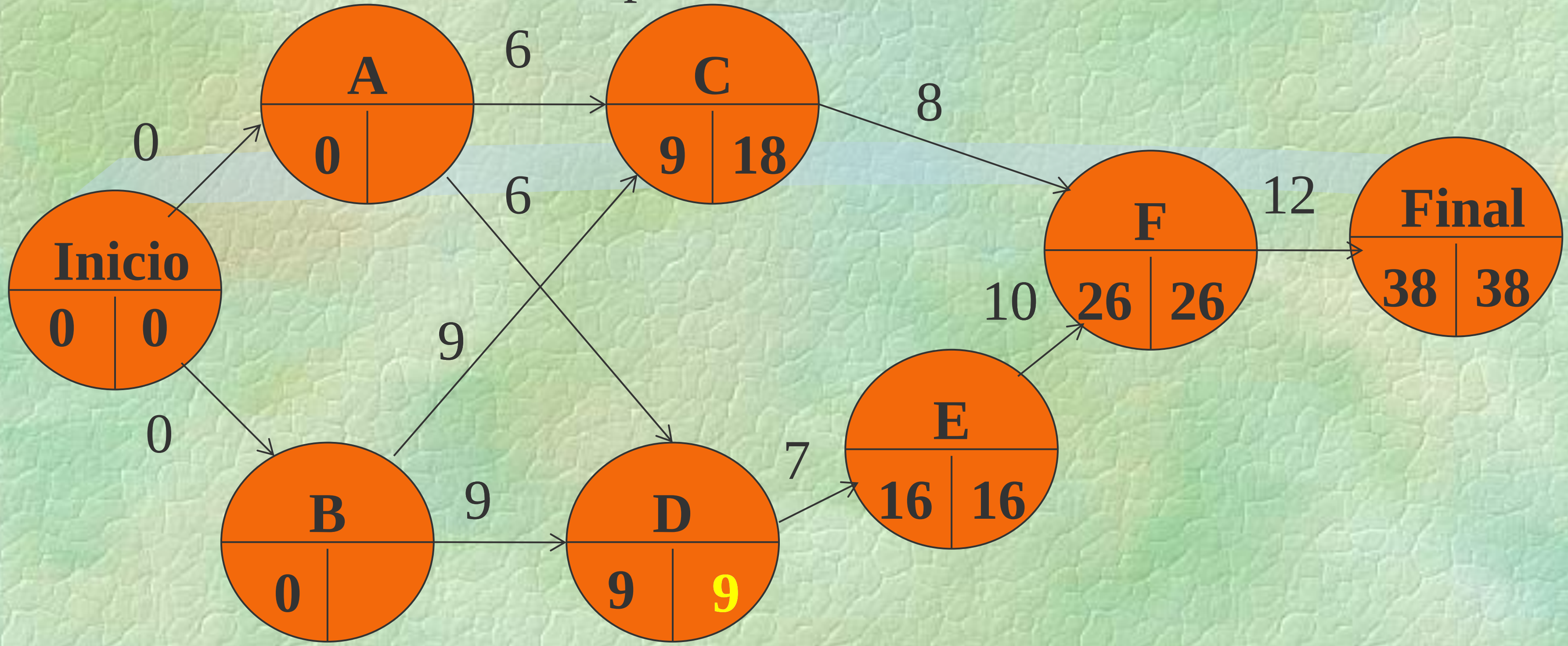
Actividad	Predecesores	Duración
A=Formación de trabajadores	Ninguno	6
B=Conseguir materiales	Ninguno	9
C=Producción de 1 pantalla	A, B	8
D=Producción de 1 pack	A, B	7
E=Control de calidad de 1 pack	D	10
F=Embalaje	C, E	12

Diseñar la red que permite describir el proyecto de New Computer.

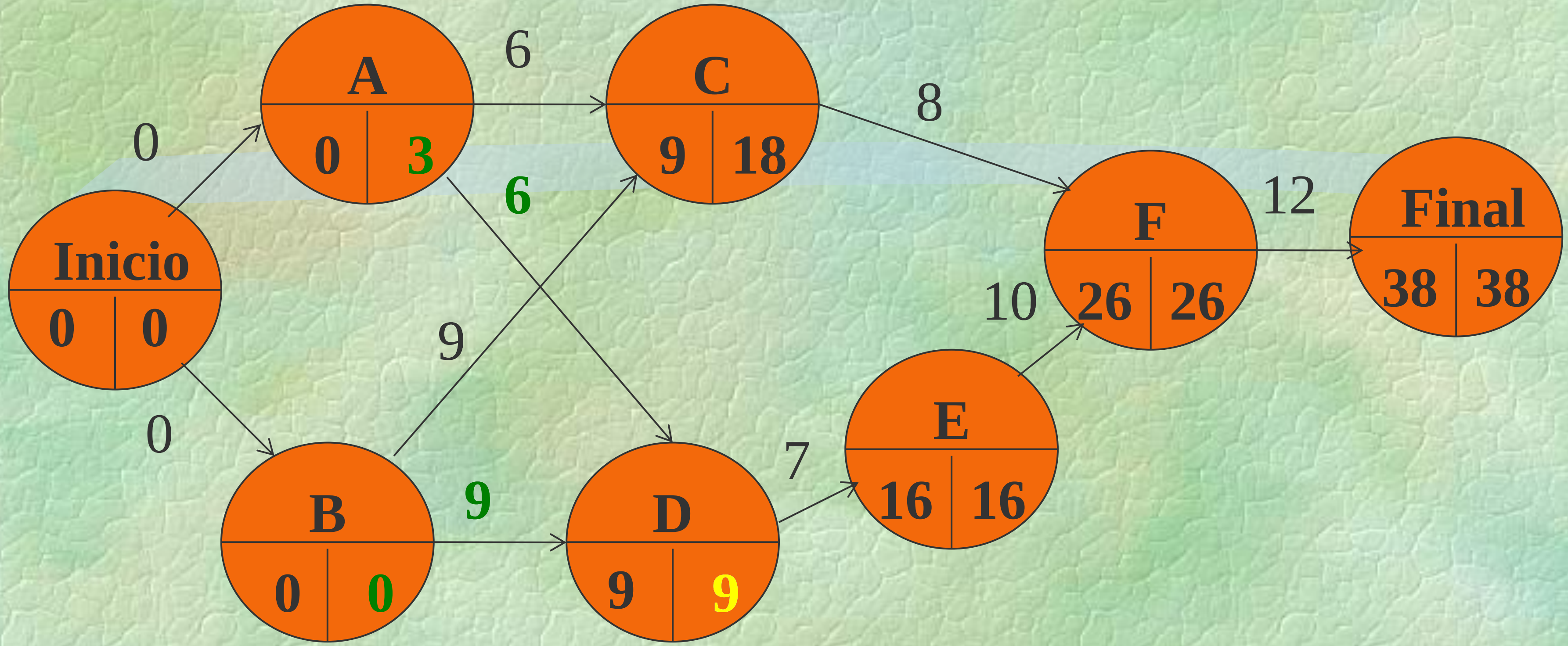
Ejemplo New Computer : La red muestra la duración de cada actividad y en rojo, la duración del camino elegido para calcular el LI.



Ejemplo New Computer : Para el cálculo de LS se recorre el camino contrario. Empezando desde el final. Hasta el nudo C o D no hay diferencia en los caminos. Pasar por D es el camino con menor tiempo.



Ejemplo New Computer : Tanto a B como a A se puede ir desde C o D.. Se marca en verde el camino con menor LS. De nuevo se debe pasar por el nudo D.



Ejemplo New Computer: **Solución, para cada actividad definimos instantes de comienzo y fin de la actividad .**

Acti-vidad	Fase crítica	Duración	LI inicio	LS inicio	LI fin	LS fin	Holgura LS-LI (inicio)
A	No	6	0	3	6	9	3
B	Sí	9	0	0	9	9	0
C	No	8	9	18	17	26	9
D	Sí	7	9	9	16	16	0
E	Sí	10	16	16	26	26	0
F	Sí	12	26	26	38	38	0

MÉTODOS DE CONTOL

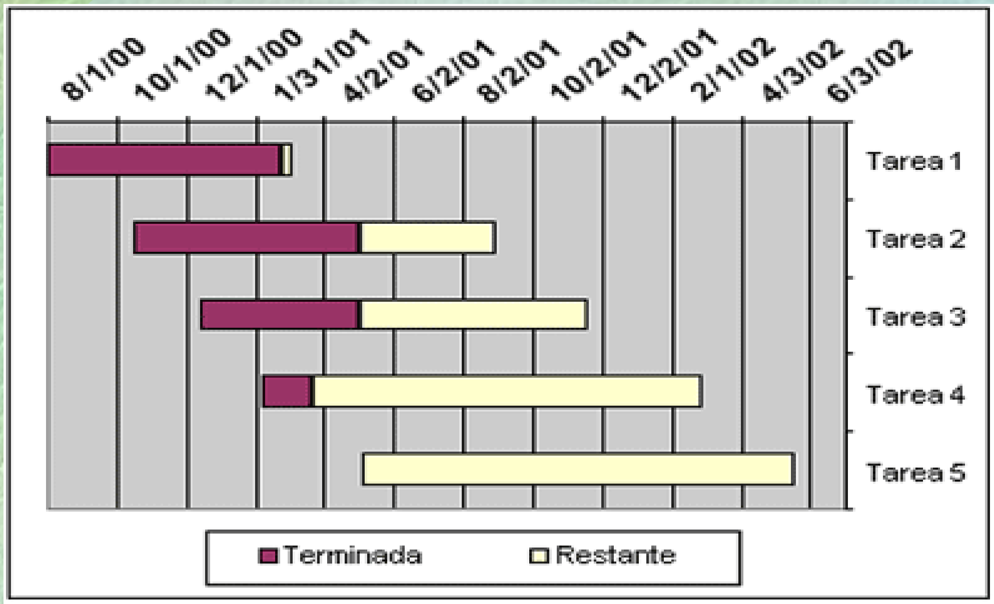
El control de una obra o proyecto consiste en medir el avance de ésta, registrarlo y compararlo continuamente con lo estimado en la programación.

Lo más importante en el control de un proyecto es administrar el costo del mismo y el tiempo empleado en las actividades.

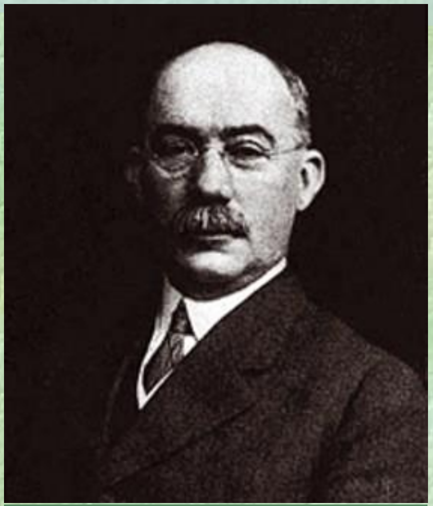
- ✍ **DIAGRAMA DE GANTT**
- ✍ **CURVAS DE PRODUCCIÓN ACUMULADA**

MÉTODOS DE CONTOL

El **diagrama de Gantt** es una popular herramienta gráfica cuyo objetivo es mostrar el tiempo de dedicación previsto para diferentes tareas o actividades a lo largo de un tiempo total determinado. Fue Henry Laurence Gantt quien, entre 1910 y 1915, desarrolló y popularizó este tipo de diagrama.



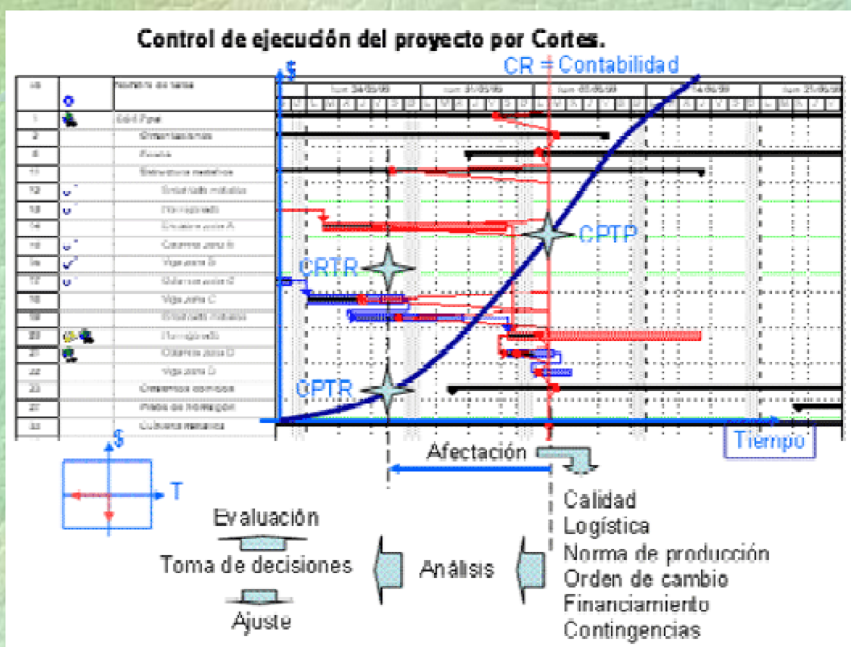
http://www.valoryempresa.com/archives/tutoriales/diagGantt_1.htm

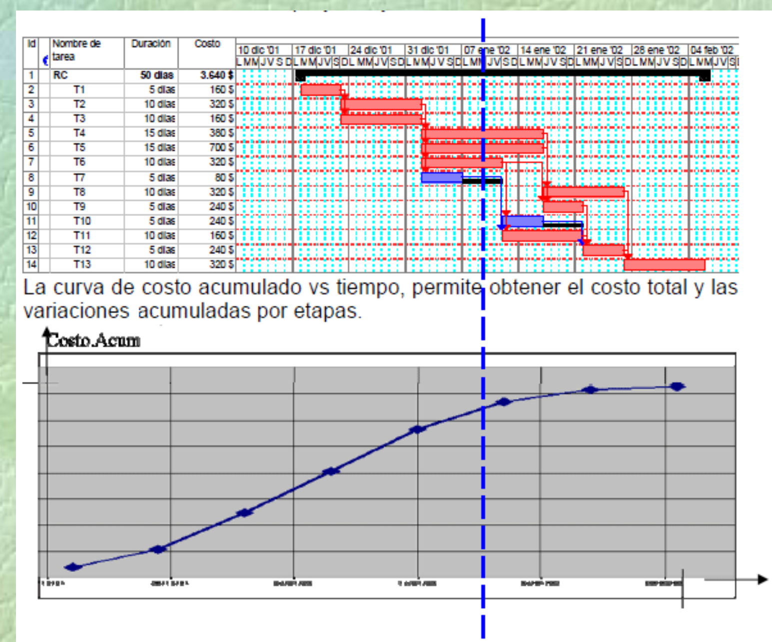


http://www.gannt-chart.com/gnImages/H_L_Gannt.jpg

MÉTODOS DE CONTOL

Las **curvas de producción acumulada** son gráficos para medir la tasa de productividad o velocidad del avance del proyecto. Relaciona las unidades de producción en el "eje Y" frente a tiempo empleado en el "eje X".





Referencias y enlaces:

Teoría de redes. Universidad Nacional de Ingeniería . Sede UNI-NORTE, Méjico. http://www.itescam.edu.mx/principal/sylabus/fpdb/recursos/r89433.PDF

Domínguez González, A. S. 2004. Programación, Planeación y control de una obra. Tesis de Licenciatura. Universidad de las Américas Puebla. http://catarina.udlap.mx/u_dl_a/tales/documentos/lic/dominguez_g_as/capitulo3.pdf

Alonso Revenga, JU. M. 2008. Flujo en Redes y Gestión de Proyectos. Teoría y Ejercicios Resueltos. Netbiblio, La Coruña, España.

Hibbard, T. N. 2010. Grafos. Matemática discreta. http://www.unsa.edu.ar/~hibbard/discreta/grafos.pdf

Rodríguez, R. 2011. Técnicas Gantt, PERT y CPM. http://alfredocarneiro.files.wordpress.com/2011/09/tecnicas-gantt-pert-y-cpm.pdf