Investigación Operativa en Ingeniería

Introducción a los Métodos probabilísticos: Procesos estocásticos y aplicaciones

Profª. Concepción GONZÁLEZ GARCÍA

Métodos estocásticos

Estocástico, ca. (www.rae.es) (Del gr. στοχαστικός, hábil en conjeturar).

1. adj. Perteneciente o relativo al azar.

2. f. Mat. **Teoría estadística de los procesos cuya evolución en el tiempo es aleatoria, tal como la secuencia de las tiradas de un dado.**

El antónimo: "determinísta", "seguro", "cierto"

Término introducido por Kolmogorov (1903 – 1987)

Algunos Ejemplos de aplicaciones: (accesos 25/05/2014)

- Modelización estocástica de las redes sociales. (López Serrano, 2010, Universidad de Granada,

http://masteres.ugr.es/moea/pages/tfm-1213/tfm_lopezserranorafael/! (acceso dic/2015)

- Economia y finanzas:

González S. & Nave P. (2010) Valoración de derivados sobre el clima a partir de la modelización estocástica de la temperatura en el Aeropuerto Eldorado de Bogotá. *Cuad. Adm.* Bogotá (Colombia), 23 (41): 261-283.
http://revistas.javeriana.edu.co/index.php/cuadernos_admon/article/view/3615

- Procesos estocásticos, aleatorios o probabilísticos (defs).

Un ***proceso estocástico*** es un conjunto (o familia) de variables aleatorias indexadas por un conjunto *T*,

$$\{ X_t \text{ ó } X(t) \,/\, t \in T \},\ T \text{ de } R^n \}$$

Si n=1 y $\boldsymbol{T} \in R$ *(conjunto de los números Reales), será variación en una dimensión:*

$t \in T$, suele representar "tiempo", ej. Series de tiempo

Pero puede representar "distancia" desde cierto punto origen arbitrario, p.e.: X_t *= nº de defectos en (0, t] a lo largo de una cinta,*

X_t *= nº de individuos de cierta especie a lo largo de un recorrido (transecto).*

…

•Procesos estocásticos, aleatorios o probabilísticos (defs).

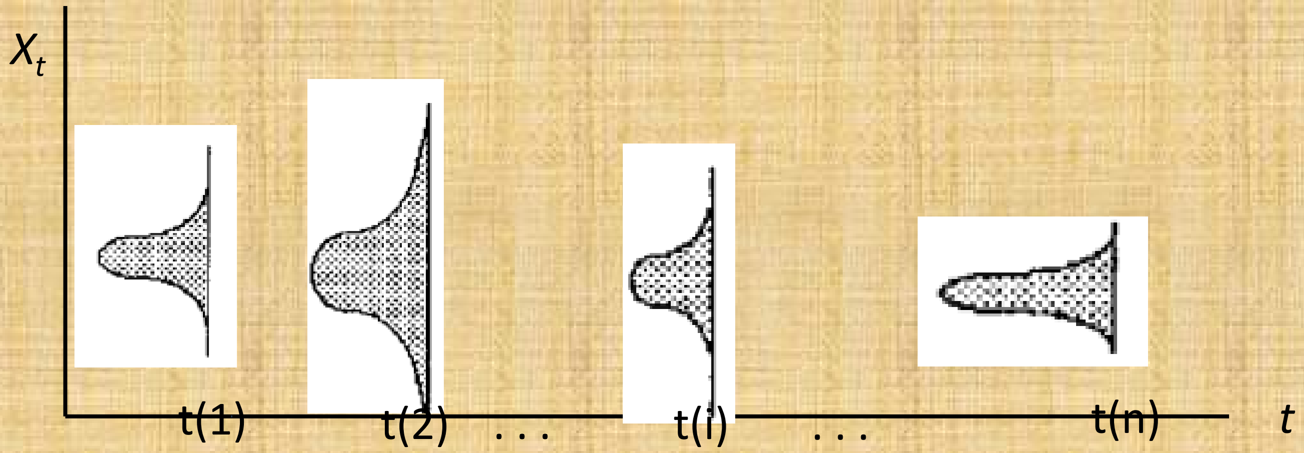
Un ***proceso estocástico*** se caracteriza por

-> Su "*espacio de estados*" o rango de posibles valores de la variable aleatoria (v. a.) X_t

-> el "*conjunto de índices*", *T* *y*

-> las "*relaciones de dependencia*" entre las vv. aa. X_t

Si el conjunto de índices es R , y se identifica con la variable tiempo *t,* para cada instante habrá una v.a. distinta X_t de manera que la evolución de las distribuciones de probabilidad a lo largo del tiempo se puede representar como



- Procesos estocásticos, aleatorios o probabilísticos

Clasificación de procesos estocásticos según: conjunto de subíndices *T y tipo de variable aleatoria* X_t

Conjunto de subíndices (*T*) **Espacio de estado (X)**	*t Discreto*	*t Continuo*
Discreto	*Proceso de estado y tiempo discretos:* ***Cadena*** (Ej.: Nº unidades producidas/semana)	***Proceso de Saltos Puros*** (Ej.: Nº unidades producidas hasta el instante *t*)
Continuo	*Proceso Continuo y tiempo discreto* (Ej.: Toneladas de producción diaria de un producto)	***Proceso Continuo*** (Ej.: velocidad de un vehículo en el instante *t*)

http://www.dmae.upct.es/~mcruiz/Telem06/Teoria/apuntes_procesos.pdf

- Procesos estocásticos, aleatorios o probabilísticos.

Para su estudio y aplicación se requieren conocimientos de:

- **Cálculo de probabilidades**: sucesos y probabilidad, variable aleatoria, distribuciones de probabilidad, independencia y probabilidad condicionada, funciones de variables aleatorias (cambio de variable) y obtención de sus distribuciones de probabilidad. Momentos y valores esperados.

El ejemplo más sencillo y frecuente de función de vv.aa. es la *Suma de vv.aa.*:

$X = \xi_1 + \ldots + \xi_N$, siendo N aleatorio.

Algunos ejemplos de aplicaciones en,

- Teoría de colas (http://personales.upv.es/jpgarcia/LinkedDocuments/Teoriadecolasdoc.pdf, 2015-16)
- Teoría de riesgo (Lectura (2010): http://www.fmi.uni-sofia.bg/sms/fam/insurance-risk-theory-lectures/InsuranceRisk.pdf)
- Modelización de Poblaciones biológicas y Biometría

(Lectura (2010): http://bioinformatics.oxfordjournals.org/content/26/1/104.full.pdf ;
Lectura (2013): http://cs.uef.fi/~lamehtat/documents/lecture_notes.pdf)

Últimos accesos 12/febr./2016)

- Procesos estocásticos, aleatorios o probabilísticos.

Suma de variables aleatorias (vv.aa.):

$$X = \xi_1 + \ldots + \xi_N$$

N , aleatorio

Sea una secuencia $\xi_1, \xi_2, \ldots$ de vv.aa., independientes e idénticamente distribuidas, y N v.a. discreta, independiente de las ξ_i, con función de masa,

$$p_N(n) = P[N = n] \quad , \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

La suma X es,

$$X = \begin{cases} 0 & \text{si } N = 0 \\ \xi_1 + \ldots + \xi_N & \text{si } N > 0 \end{cases}$$

Métodos estocásticos

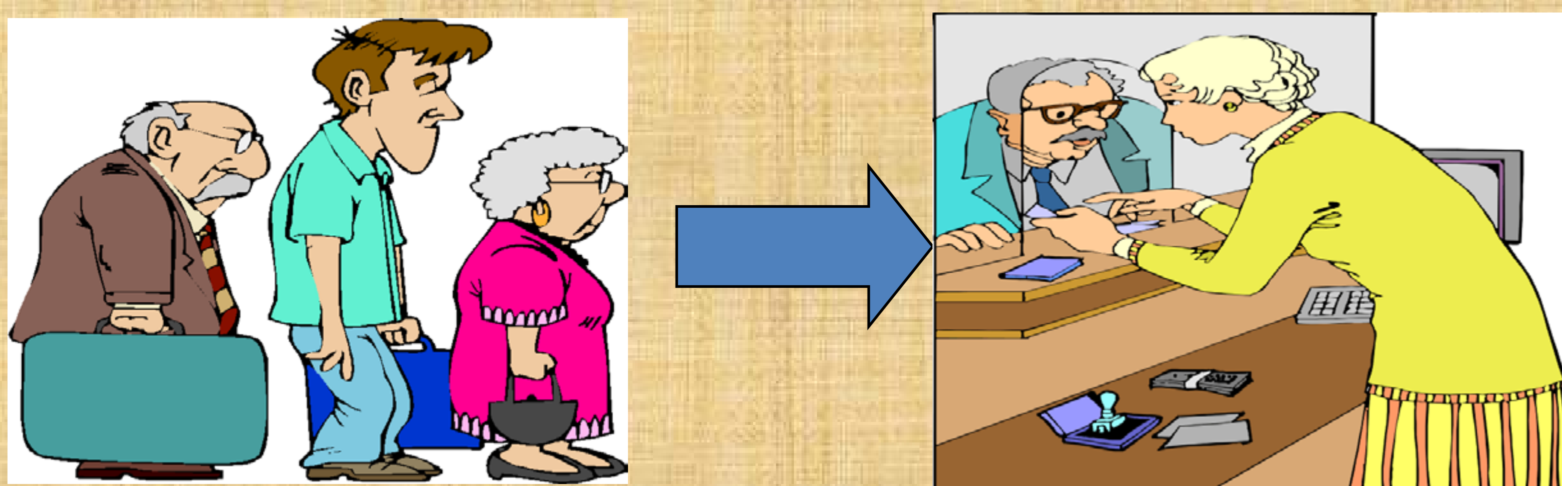
- Procesos estocásticos, aleatorios o probabilísticos.

Ejemplo: en teoría de colas

N = nº de clientes que llegan a un servicio en cierto período de *t*

ξ_i = *t* de servicio que requiere el cliente *i*

$X = \xi_1 + \ldots + \xi_N$ Demanda total de "tiempo de servicio"



Lectura (2015): teoría de colas, control de inventario en un sistema de producción

http://link.springer.com/article/10.1007/s40092-015-0115-9

Acceso mayo 2016

•Procesos estocásticos, aleatorios o probabilísticos. APLICACIONES de suma de vv.aa.

El Análisis de Riesgos es uno de los más importantes temas del mundo financiero, pero también juega un papel destacado en análisis de seguridad en ingeniería y en ciencias de la vida, en particular en Ecología y Genética. La base para un adecuado análisis de riesgos es el planteamiento de modelos estocásticos apropiados.

(http://www.tum-ias.de/focus-groups/alumni-focus-groups/risk-analysis-and-stochastic-modeling.html) Acceso jun. 2016

Planteamiento básico,

N = nº de reclamaciones que llegan a una compañía de seguros en 1 semana.

ξ_i = importe de la reclamación i.

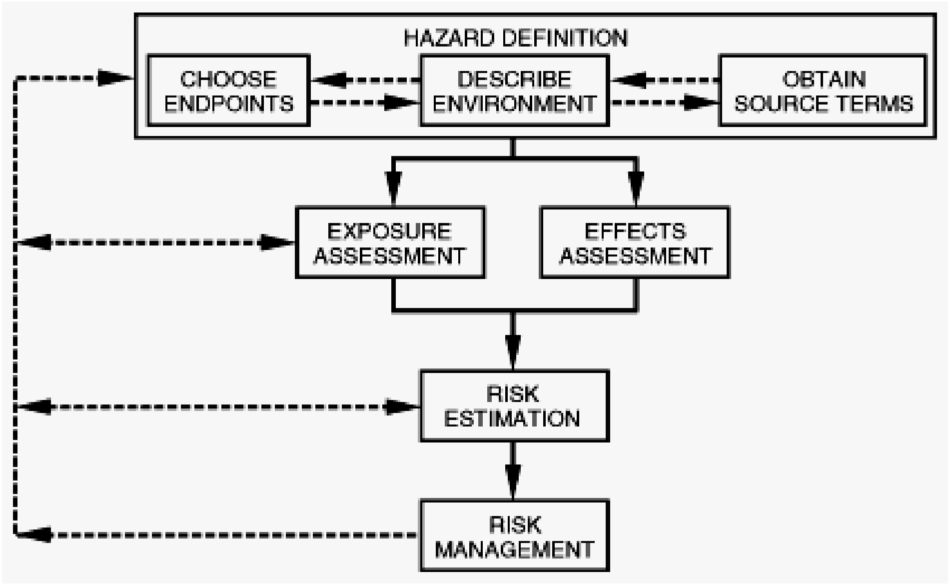
$X = \xi_1 + \ldots + \xi_N$ Riesgo total de la compañía

Lectura (2007): Modelos de Markov para fiabilidad y seguridad en ingeniería
http://www.acad.bg/rismim/itc/sub/archiv/Paper3_2_2007.PDF

Acceso jun. 2016

•Procesos estocásticos, aleatorios o probabilísticos. APLICACIONES de suma de vv.aa.

La evaluación del Riesgo ecológico surge en los años 80.



Paradigm for ecological risk assessment.

(http://www.esd.ornl.gov/iab/iab6-2.htm) Acceso jun. 2016

El paradigma de riesgo ecológico, se basa en el paradigma para la evaluación del riesgo para la salud humana, integrando la mayor complejidad de los sistemas ecológicos.

Aplicación en ingeniería, estimación riesgo sísmico :
Cardona, O.D. (2001) Estimación Holística del Riesgo Sísmico utilizando Sistemas Dinámicos Complejos. Tesis doctoral, ETSI C.C.P. UPC

•Procesos estocásticos, aleatorios o probabilísticos. APLICACIONES de suma de vv.aa.

Modelos de Poblaciones:

N = nº de individuos de cierta especie vegetal en una zona determinada.
ξ_i = nº de semillas producidas por la planta *i*

$X = \xi_1 + . . . + \xi_N$ Nº total de semillas producidas en la zona

http://projecteuclid.org/download/pdfview_1/euclid.aos/1132936555

Biometría: En un muestreo de fauna silvestre (sp. de caza) mediante trampas

N = nº de ejemplares de la especie dada.
ξ_i = peso del individuo *i*

$X = \xi_1 + . . . + \xi_N$ Peso total capturado

http://projecteuclid.org/download/pdfview_1/euclid.aos/1132936555

acceso febr.,2016

•Procesos estocásticos, aleatorios o probabilísticos. Aplicaciones.

De la teoría de cálculo de probabilidades, los modelos de distribución de probabilidad **exponencial**, los **procesos de Poisson** y las **cadenas de Markov** tanto de tiempo discreto como de tiempo continuo, son la base de muchas aplicaciones, por ejemplo la modelización de sistemas de colas

(http://www.it.uc3m.es/pablo/teoria-colas/introduccion-teoria-colas.pdf, acceso febr.,2016)

- Una variable aleatoria sigue un **modelo exponencial** si su función de densidad tiene la siguiente expresión: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ para $x \geq 0$

  Y su función de distribución es $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$

Ejemplos de variables que siguen esta distribución son las que representan "tiempos de vida o de duración" de elementos o piezas de algún sistema.

La función complementaria $F^C(x) = 1 - F(x)$ se llama *función de supervivencia*.
Si $x = t$, es exponencial y representa "tiempo de vida", la función complementaria sirve para calcular probabilidad de que la pieza o el elemento sobreviva para valores > t.

•Procesos estocásticos, aleatorios o probabilísticos. Aplicaciones.

- Una variable aleatoria "*no tiene memoria*" si se cumple la siguiente propiedad,

$$P[x > t + s \,/\; x > t] = P[x > s] \;, \qquad \forall s, t$$

Las variables con distribución exponencial que representan "tiempos de vida" tienen esta propiedad. Lo cual significa que la probabilidad de que una pieza siga funcionando durante un tiempo *t* + *s*, si ya lleva funcionando un tiempo *t*, es igual a la probabilidad de que sobreviva un tiempo *s* (partiendo desde 0, es decir, como si acabase de ser puesto en funcionamiento). Por tanto, la distribución del tiempo restante de vida no depende del tiempo *t* que lleve funcionando.

La distribución exponencial es la única distribución de probabilidad continua sin memoria.

Comparación y suma de v.a. exponenciales: Si se tienen *r* variables aleatorias x_i exponenciales independientes, cada una con media $1/\lambda_i$,
- el mínimo de todas ellas es otra variable aleatoria exponencial, de media $(\sum \lambda_i)^{-1}$
- la probabilidad de que la variable aleatoria *i-ésima* sea menor que las otras viene dada por el cociente: $\lambda_i / \sum_j \lambda_j$

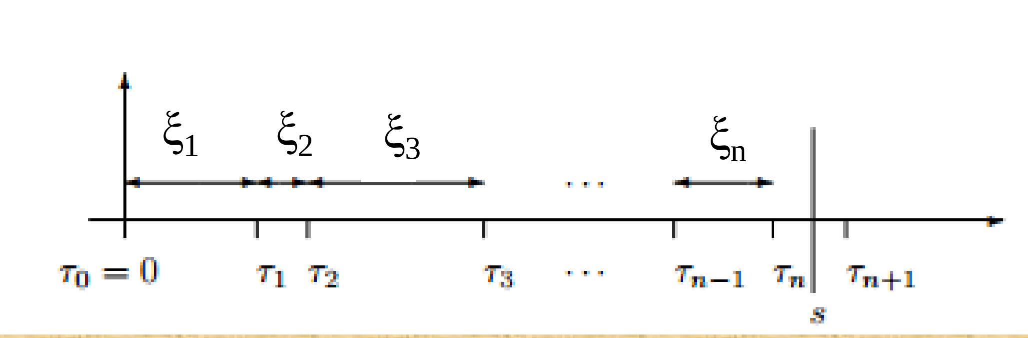
$$P[X_i < (X_1, \ldots X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots X_r] = {\lambda_i}\Big/{\sum_1^r \lambda_j}$$

•Procesos estocásticos, aleatorios o probabilísticos. Aplicaciones.

- **Proceso de Poisson:** Sean ξ_1 , ξ_2, … v.a.independientes e idénticamente distribuidas con distribución exponencial de parámetro λ. Sea $\tau_0 = 0$ y $\tau_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ para $n \geq 1$, se define el proceso de Poisson de parámetro (intensidad) λ por

$$N(s) = máx\{n : \tau n \leq s\}, s \geq 0$$

Las variables ξ_n representan los intervalos de tiempo entre eventos sucesivos (llegadas de clientes a una cola, de llamadas a una central telefónica, de tramas a un router en internet, etc.).
$\tau_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ es el instante en el que ocurre el *n*-ésimo evento y *N*(*s*) es el número de eventos que han ocurrido hasta el instante *s*.



•Procesos estocásticos, aleatorios o probabilísticos. Aplicaciones.

- El proceso de Poisson definido antes se conoce como proceso de conteo ya que caracteriza la forma en la que se van sucediendo "eventos" en un sistema. Si estos eventos son *llegadas* se habla de un *proceso de llegada.*

- Un proceso de Poisson de tasa λ es un proceso de llegadas con incrementos independientes y estacionarios.

Se puede definir de tres formas equivalentes:

1- El número de llegadas en un intervalo de tiempo t sigue una distribución discreta de Poisson de media λt.
2- El tiempo medio entre llegadas sigue una variable aleatoria exponencial de media $1/\lambda$.
3- La probabilidad de una llegada en un intervalo h es $\lambda h + o(h)$.

Aplicaciones:
http://www.cse.wustl.edu/~jain/cse567-06/ftp/traffic_models1.pdf (acceso 15/05/2106)

•Procesos estocásticos, aleatorios o probabilísticos. Aplicaciones.

- **Cadenas de Markov (tiempo discreto):** (del matemático ruso Andrei Markov).

Si se tiene una familia de vv.aa. discretas finitas, $X_{\{t\}}$, siendo t el tiempo y X_t el estado del proceso en el instante t, se dice que es una cadena de Markov, si la sucesión de vv.aa. x_0, x_1, ..., $x_{t, \ldots}$, verifican:

Andrei Markov (1856 – 1922)

$$P[X_{t+j} = x_{t+j} / X_0 = x_0, \ldots, X_t = x_t, \ldots, X_{t+j-1} = x_{t+j-1}] =$$

$$= P[X_{t+j} = x_{t+j} / X_{t+j-1} = x_{t+j-1}] \quad \text{(Propiedad markoviana)}$$

Es decir que la dependencia entre variables sólo se produce con respecto al estado inmediatamente anterior.

Si el estado actual es $X_t = x_t$ y la probabilidad del estado siguiente es $P[X_{t+1} = x_{t+1} / X_t = x_t]$ esto indica que conocer la historia del proceso no aporta información para predecir el valor futuro en el instante t, basta con conocer el estado en el instante inmediatamente anterior.

•Procesos estocásticos, aleatorios o probabilísticos. Aplicaciones.

Cadenas de Markov (tiempo discreto):

Un proceso se llama 'markoviano' si la probabilidad de cualquier suceso futuro, dado cualquier suceso pasado y el estado actual $X_t = i$, es independiente del suceso pasado y solamente depende del estado actual.

De los distintos tipos de procesos estocásticos (ver tabla en pg. 5) los llamados,procesos de Markov (que pueden ser de tipo cadena o de *t* continuo) tienen multitud de aplicaciones, por lo que existe abundante bibliografía sobre las mismas: vienen a ser un modelo simplificado de proceso de toma de decisión complejo.
(http://www.ingenieria.unam.mx/javica1/ingsistemas2/Simulacion/Cadenas_de_Markov.htm)

Aplicaciones:
En Biología, Economía, internet (construcción del PageRank que usa el buscador Google)
Lectura (2013): http://www.stat.cmu.edu/~ryantibs/datamining/lectures/03-pr.pdf

Acceso abril/2106

Cadenas de Markov (tiempo discreto):

Matriz de transiciones y diagrama de estados

Cadenas de Markov **homogéneas**: Una cadena de Markov es homogénea si las probabilidades de que el proceso pase de un estado a otro no dependen del instante de tiempo *t*, sino que son constantes.

$$P[X_t = x_i / X_{t-1} = x_j] = P[X_r = x_i / X_{r-1} = x_j] \text{ , } \forall\, t, r$$

En estas condiciones se define la probabilidad de transición

La **probabilidad de transición** (p_{ij}): es la probabilidad de que el proceso pase al estado x_j en el instante t estando en el estado x_i en el instante $t - 1$

La *matriz de transiciones* (P): es la matriz constituida por las probabilidades de transición, donde la componente p_{ij} representa la probabilidad de pasar al estado x_j estando en el estado x_i

La fila de la matriz representa el estado actual y la columna el posible estado siguiente.

La matriz de transiciones también se denomina *matriz de probabilidad*, *matriz de Markov* o *matriz estocástica*.

Cadenas de Markov (tiempo discreto):

EJEMPLO:
En un pueblo, al 90% de los días soleados le siguen días soleados, y al 80% de los días nublados le siguen días nublados.
Con esta información, modelar el clima del pueblo como una cadena de Markov.

Cadena de Markov con dos estados {Soleado (S), Nublado (N)}

Matriz de probabilidades de transición:

$$P = \begin{bmatrix} p_{SS}=0{,}9 & p_{SN}=0{,}1 \\ p_{NS}=0{,}2 & p_{NN}=0{,}8 \end{bmatrix}$$

la probabilidad de que mañana sea soleado si hoy está nublado: $p_{NS} = 0{,}2$

Cadenas de Markov (tiempo discreto):

Propiedades de las probabilidades de transición:

$$p_{ij}^{(n)} \geq 0 \quad \forall i, j; \quad n = 0,1,2,\ldots$$

$$\sum_{j=0}^{N} p_{ij}^{(n)} = 1 \quad , \quad \forall i$$

N es el número de estados posibles que *X* puede tener.

Para representar la cadena de Markov, además de la matriz de transiciones, se puede emplear el *diagrama de estados* de la cadena. Se trata de un diagrama donde cada estado se representa con un círculo, y las transiciones entre estados con flechas acompañadas por la correspondiente probabilidad de transición, salvo que dicha probabilidad sea nula (en este caso no se dibuja la flecha).

Del ejemplo anterior:

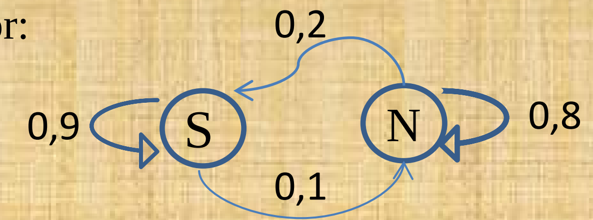


Diagrama de estados de la cadena: días soleados y nublados

Cadenas de Markov (tiempo discreto):

Matriz de transición en un solo paso: Dada una cadena de Markov con *k* estados posibles $s_1, \ldots, s_N$ y probabilidades de transición estacionarias, si

$$p_{ij} = P\left\{X_{t+1} = s_j \mid X_t = s_i\right\} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & \cdots & p_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} \end{bmatrix}$$

Enlaces de referencia: Acceso abril/2106

http://www.ugr.es/~bioestad/_private/cpfund10.pdf

http://www.it.uc3m.es/pablo/teoria-colas/introduccion-teoria-colas.pdf

Cadenas de Markov (tiempo discreto):

Generalización de probabilidades hasta el n-ésimo estado,

$$P\{X_{t+1} = j \mid X_t = i\} = p_{ij}$$

$$P\{X_{t+1} = j \mid X_t = i\} = P\{X_1 = j \mid X_0 = i\}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$P\{X_{t+n} = j \mid X_t = i\} = P\{X_n = j \mid X_0 = i\} = p_{ij}^{(n)}$$

Cadenas de Markov (tiempo discreto):

Matriz inicial de probabilidades de transición :

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \text{Estado futuro} \\
 & & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & \dots & \mathrm{N} \end{array} \\
\begin{array}{c}\text{Estado} \\ \text{actual}\end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ \mathrm{N} \end{array} & \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots & p_{0N} \\ p_{10} & p_{11} & \cdots & p_{1N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{N0} & p_{N1} & \cdots & p_{NN} \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Cadenas de Markov (tiempo discreto):

Matriz de transición después de ***n pasos***:

$$P^{(n)} = \begin{bmatrix} p^{(n)}_{00} & p^{(n)}_{01} & \dots & p^{(n)}_{0N} \\ p^{(n)}_{10} & p^{(n)}_{11} & \dots & p^{(n)}_{1N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ p^{(n)}_{N0} & p^{(n)}_{N1} & \dots & p^{(n)}_{NN} \end{bmatrix}$$

Cadenas de Markov (tiempo discreto):

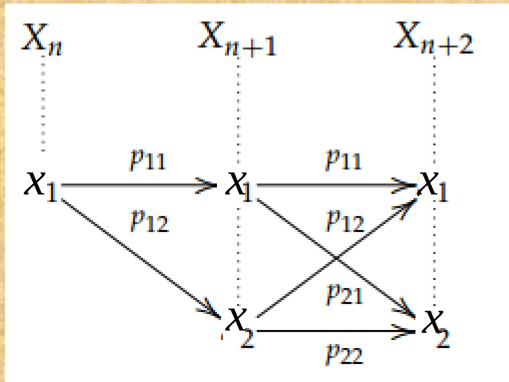
Evolución en el tiempo de una cadena:

Por la propiedad de Markov, la probabilidad de que la cadena cambie de un estado a otro (o repita estado) en el paso del instante n al $n + 1$, sólo depende del estado en que se encuentre, y no de la historia del proceso.
Si se conocen estas probabilidades para todos los estados, y el estado (X_n) de la cadena en el instante n, es posible calcular la probabilidad de estar en cada posible estado en el $n+1$, es decir
$P\,[X_{n+1} = x_i \mid X_n\,]$ para todo x_i

A partir de estos valores, se puede calcular con qué probabilidad estará en cada estado en $n + 2$, y así sucesivamente.

Por ejemplo, en una cadena con dos estados $\{x_1, x_2\}$ que parta de $X_n = x_1$, la probabilidad de $X_{n+2} = x_2$ vendrá dada por

$$P\,[X_{n+2} = x_2 \mid X_n = x_1] = p_{11}\, p_{12} + p_{12}\, p_{22}$$



Cadenas de Markov (tiempo discreto):

Vector de probabilidades de estado

Dada una cadena de Markov de K estados, la probabilidad con la que dicha cadena se encuentra en el instante n en cada uno de esos estados se puede representar con el siguiente vector fila:

$$\pi(n) \triangleq (P(X_n = s_1), P(X_n = s_2), \ldots, P(X_n = s_k))$$

La componente *i*-ésima de dicho vector se representa como

$$\pi_i^{(n)} \triangleq P[X_n = s_i]$$

Que siempre deben sumar 1:
$$\sum_{i=1}^{k} \pi_i^{(n)} = 1$$

Siguiendo el **ejemplo** del clima,
Si hoy ($n = 0$) está "*Soleado*", será
$$\pi^{(0)} = \left(P[X_0 = S], P[X_0 = N]\right) = (1, 0)$$

Con los valores de las probabilidades de *Soleado* o *Nublado* en el día n (esto es, $\pi^{(n)}$), y la matriz de transiciones P, se puede calcular el valor de $\pi^{(n+1)}$ por la ley de la probabilidad total,

$$P[X_{n+1} = S] = P[X_{n+1} = S / X_n = S]P[X_n = S] + P[X_{n+1} = S / X_n = N]P[X_n = N]$$

$$P[X_{n+1} = N] = P[X_{n+1} = N / X_n = S]P[X_n = S] + P[X_{n+1} = N / X_n = N]P[X_n = N]$$

Cadenas de Markov (tiempo discreto):

Las anteriores igualdades se pueden escribir también como,

$$\pi_1^{(n+1)} = p_{11}\pi_1^{(n)} + p_{21}\pi_2^{(n)}$$

$$\pi_2^{(n+1)} = p_{12}\pi_1^{(n)} + p_{22}\pi_2^{(n)}$$

que permite calcular la probabilidad de que el día sea *Soleado* o *Nublado* de forma iterativa.

Dada la matriz

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

En la tabla se muestra el cálculo de probabilidades en instantes n = 0,1,2,…, teniendo en cuenta que hoy (n =*0*) está "*Soleado*". Sólo dos estados (subíndice): i = 1 (*Soleado*), 2 (*Nublado*)

instante

n	$\pi_1^{(n)}$	$\pi_2^{(n)}$
0	1	0
1	0,9 = (0,9x1+0,2x0)	0,1 = (0,1x1+0,8x0)
2	0,83 = (0,9x 0,9+0,2x0,1)	0,089 = (0,1x 0,9+0,8x0,1)
3	0,0843 = (0,9x0,83+0,2x0,089)	0,089 = (0,1x 0,83+0,8x0,089)

Cadenas de Markov (tiempo discreto)

En la tabla anterior se observa que, para obtener $\pi^{(n+1)}$ a partir de $\pi^{(n)}$ basta con multiplicar cada componente por el valor correspondiente de p_{ij} y sumar.

La formalización de esta regla la proporcionan las *ecuaciones de Chapman-Kolmogorov.*

Por el teorema de la probabilidad total, en una cadena de Markov se cumple que

$$P[X_n = s_i] = \sum_j P[X_n = s_i \,/\, X_{n-1} = s_j]\, P[\, X_{n-1} = s_j]$$

Esta relación, para todos los estados s_i , si P es la matriz de transiciones y $\pi^{(n)}$ el vector de probabilidades de estado, se puede expresar como $\pi^{(n)} = \pi^{(n-1)} P$

Y de la misma manera, $\pi^{(n-1)} = \pi^{(n-2)} P$, con lo que, $\pi^{(n)} = \pi^{(n-1)} P = \pi^{(n-2)} P^2$
resultado que se puede generalizar para obtener cualquier $\pi^{(n)}$ a partir de potencias de la P y de un vector inicial $\pi^{(0)}$.

Este resultado se conoce como las *ecuaciones de Chapman-Kolmogorov* : Dada una cadena de Markov $\{X_n\}$ con espacio de estados $S = \{s_1, . . . ,s_k\}$, matriz de transiciones P y vector inicial de probabilidades de estado $\pi^{(0)}$, para cualquier $\pi^{(n)}$ se cumple que $\pi^{(n)} = \pi^{(0)} P^n$

Cadenas de Markov (tiempo discreto) R E S U M E N

Una **cadena de Markov** es un proceso aleatorio $\{X_t\}$ en un espacio S en el que, para cualquier t la probabilidad de que el proceso pase al estado $X_t = s_j$ solo depende del estado en el que se encuentre en X_{t-1} .

Cadena de Markov homogénea: Si esas probabilidades son constantes la cadena se puede caracterizar con una matriz de probabilidades de transición P que no depende del instante de tiempo t.

Cadena de Markov finita: Es una cadena de Markov para la que existe sólo un número finito k de estados posibles $X_1,..., X_k$ y en cualquier instante de tiempo la cadena está en uno de estos k estados.

Probabilidad de transición: Es la probabilidad condicionada

$$P\{X_{t+1} = j \mid X_t = i\} = p_{ij}$$

Probabilidad de transición estacionaria: Una cadena de Markov tiene probabilidades de transición estacionarias si para cualquier par de estados s_i , s_i existe una probabilidad de transición p_{ij} tal que

$$P\{X_{t+1} = s_j \mid X_t = s_i\} = p_{ij} \qquad \text{para } t = 1, 2, \ldots$$

Matriz de transición (matriz estocástica) : Es una matriz cuadrada cuyos elementos son no negativos y tal que la suma de los elementos de cada fila es igual a 1.

Vector de probabilidades de estado $\pi^{(t)}$ representa la probabilidad de que en el instante t la cadena se encuentre en cada uno de los posibles estados, y cumple que $\pi^{(t+1)} = \pi^{(t)} P$

Cadena irreducible: Los estados que se comunican constituyen una clase. Si en una cadena todos los estados se comunican, la cadena es irreducible

Cadenas de Markov (tiempo discreto) R E S U M E N

Periodicidad: Un estado es periódico si fuera de determinados instantes de tiempo, múltiplos del periodo, resulta imposible que la cadena pase por dicho estado. Si el periodo es 1, el estado es aperiódico.

Estacionariedad: Un vector de distribuciones de estado es estacionario si cumple que

$$\pi = \pi P.$$

Cadena irreducible y aperiódica: es aquella que tiene un único vector π al que converge según $t \to \infty$.

Número medio de iteraciones para llegar desde el estado s_i al estado s_j

$$n_{ij} = 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik} n_{kj}$$

Cadenas de Markov (tiempo discreto)

APLICACIONES en Ingeniería Ambiental y del Medio Natural

-Estudios sobre la evolución de usos del suelo y del paisaje mediante Sistemas de Información Geográfica (SIG): (accesos Marzo/2106)

Lecturas:

Año 2002: http://tesis.ula.ve/postgrado/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=3779

Año 2003: http://geofocus.rediris.es/docPDF/Articulo2_2003.pdf

Año 2009: http://orton.catie.ac.cr/REPDOC/A3792E/A3792E.PDF

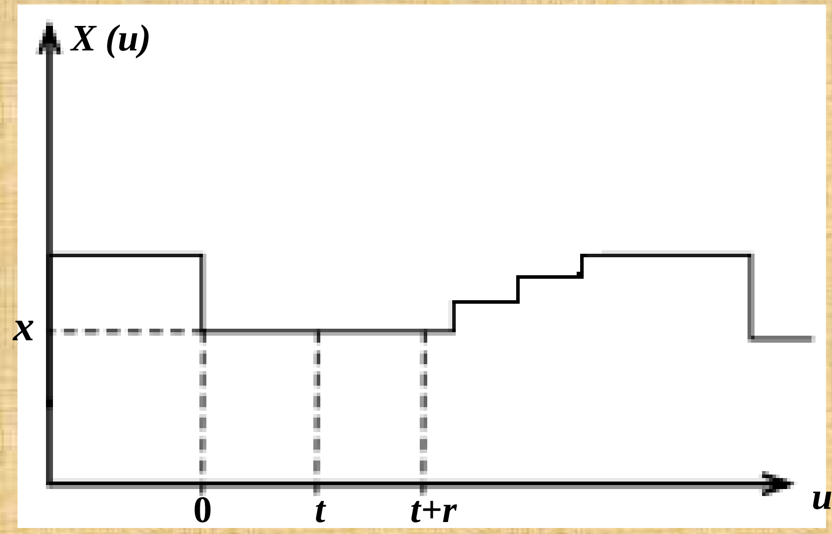
Cadenas de Markov (de tiempo continuo)

Una cadena de Markov de tiempo continuo se puede interpretar como una "extensión" de las cadenas de tiempo discreto, donde el cambio de estado no sucede en instantes de tiempo bien definidos, sino tras instantes aleatorios que siguen una **variable aleatoria (v.a.) exponencial**.

Una cadena de Markov de tiempo continuo es un proceso aleatorio en un espacio de estados contable, donde fijado un instante de tiempo t, la probabilidad de que en un instante $t + r$ esté en un estado j sólo dependerá del estado i en el que se encuentre el proceso en el instante t, y no de la historia antes de t.

Tiempo de permanencia en un estado:
es una v.a. exponencial.

Si Tx es la v.a. que representa el **tiempo de estancia en el estado *x***, (fig.1) la probabilidad de que la cadena permanezca en x más de un tiempo $t+r$, suponiendo que permanece más de un tiempo t, se puede expresar como,



(fig. 1)

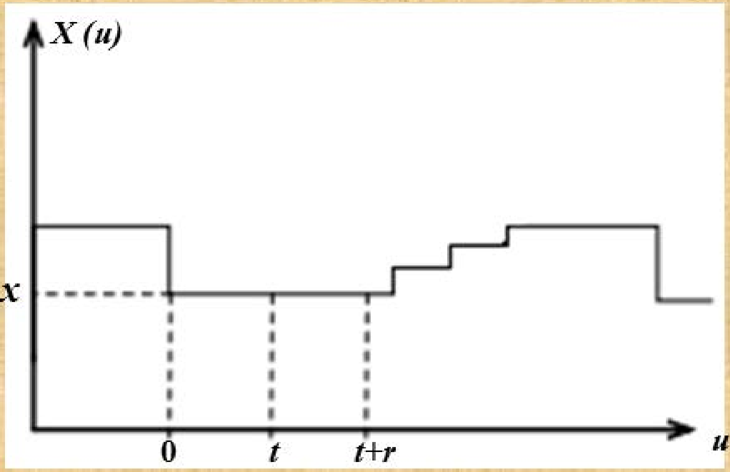
$$P\ (Tx > t + r \ / \ Tx > t) = P(X(u) = x, \text{ para } u \in [t, t+r] \ / \ X(u) = x, \text{ para } u \in [0,t])$$

Cadenas de Markov (de tiempo continuo)

Aplicando la propiedad de Markov a la expresión anterior:

$$P\ (Tx > t + r\ /\ Tx > t) = P(X(u) = x, \text{ para } u \in [t, t+r]\ /\ X(t) = x)$$

es decir, el estado en $(t+r)$ sólo dependerá del estado en el que se encuentre el proceso en el instante t de referencia.



Si la cadena **es homogénea**, la probabilidad no dependerá del valor de t y se cumplirá que

$$P[X(u) = x, \text{ para } u \in [t, t+r] \mid X(t) = x] = P[X(u) = x, \text{ para } u \in [0, t] \mid X(0) = x]$$

probabilidad que es $P[Tx > t]$, por lo que la v.a. Tx no tiene memoria y se trata de una v.a. exponencial.
Este tipo de v.a. tiempo Tx permite decir que una cadena de Markov "sale" de un estado x según un proceso de Poisson a tasa $1/Tx$.

http://www.it.uc3m.es/pablo/teoria-colas/introduccion-teoria-colas.pdf

Cadenas de Markov (de tiempo continuo)

Aplicaciones en **teoría de colas**:
La distribución exponencial se emplea en algunos modelos de colas para describir el patrón de los tiempos de prestación de servicios.

Esquema del proceso de colas

Lectura: 2012 (acceso, mayo 2106)

http://www.ueubiobio.cl/adecca/entregas/archivos3/c7264_m66289_id70249/tarea_teoria_de_colas.pdf

Cadenas de Markov (de tiempo continuo)

En el caso discreto, la matriz de transición en "n" etapas se puede expresar en términos de la m. de transición en una etapa *P*.

En el caso continuo, la matriz de transición equivalente a la *P*, se representa por *Q*, considerando unidades infinitesimales de tiempo *dt* entre transiciones.

$Q =$ matriz de tasas de transición o generador infinitesimal de la cadena

----

Condiciones:

- Como en el caso discreto, si $p_{ij} = P[pasar\ a\ estado\ j\ /el\ proceso\ está\ en\ estado\ i]$ se verifica que $\sum_{j \neq i} p_{ij} = 1$

- El tiempo que transcurre hasta el siguiente estado desde el estado *i*, es independiente del tiempo que pasó en el estado *i*.

Cadenas de Markov (de tiempo continuo)

Propiedades de *estado estable*:

Una cadena de Markov de tiempo continuo es *irreducible* si todos los estados forman una sola clase.

Probabilidades de "*estado estable*" o "*estacionarias*":

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \pi_j$$

Que cumplen: $\pi_j = \sum_{i=0}^{N} \pi_i p_{ij}(t)$ para $j = 1, 2, \ldots N$ y $t \geq 0$

Otras expresiones:

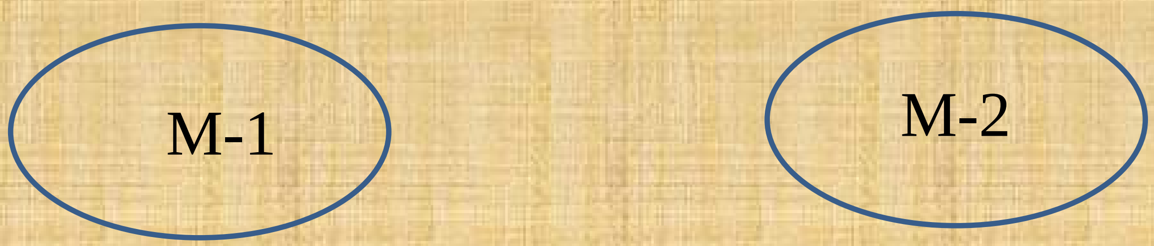
$$\begin{cases} \pi_j q_j = \sum_{i \neq j} \pi_i q_{ij} \quad \text{para } j = 1,2,\ldots,N \\ \sum_{j=0}^{N} \pi_j = 0 \end{cases}$$

Ecuaciones de balance ➡ Tasa de salidas de un estado = Tasa de entradas a ese estado

Cadenas de Markov (de tiempo continuo)

Ejemplo:

En un taller funcionan dos máquinas idénticas de manera continua excepto cuando falla alguna de ellas o las dos.



El tiempo *t* requerido para reparar una máquina es *Exp* (λ), siendo λ = 0,5 día.

Una vez reparada, el tiempo que transcurre hasta el siguiente fallo se distribuye de forma exponencial con media λ' = 1 día. (Las distribuciones en cada período de tiempo entre ocurrencia de fallos, son independientes).

La variable aleatoria:

X(r) = Nº de máquinas estropeadas en el tiempo *r*, está definida en {0,1,2}

Si el tiempo *r* varía de manera continua, desde el instante 0, se puede obtener la evolución en el tiempo del nº de máquinas estropeadas.

Cadenas de Markov (de tiempo continuo)

Ejemplo:

Esto es un proceso estocástico de tiempo continuo: $\{X(r), r \geq 0\}$

Cadena de Markov de tiempo continuo: El tiempo de reparación y el tiempo que transcurre hasta la siguiente reparación tienen distribución Exponencial.

Se emplean las probabilidades estacionarias para hallar la distribución de estado estable para el nº de máquinas estropeadas.

Para $i, j = 0, 1, 2$

q_i = Tasa de transición hacia afuera del estado i por unidad de tiempo que permanece en i

q_{ij} = Tasa de transición del estado i al j por unidad de tiempo que permanece en i

Cadenas de Markov (de tiempo continuo)

Ejemplo:

El estado (nº de máquinas estropeadas o que fallan):

→ Aumenta en 1 cuando ocurre el fallo (deja de funcionar)

→ Disminuye en 1 cuando hay una reparación

Como los fallos y las reparaciones ocurren a la vez:

$$\begin{cases} q_{02} = 0 \\ q_{20} = 0 \end{cases}$$

El tiempo esperado de reparación es de 0,5 días:

⇨ La tasa a la que se terminan las reparaciones (si hay máquinas estropeadas) es de 2 máquinas/día.

$$\begin{cases} q_{21} = 2 \\ q_{10} = 2 \end{cases}$$

Cadenas de Markov (de tiempo continuo)

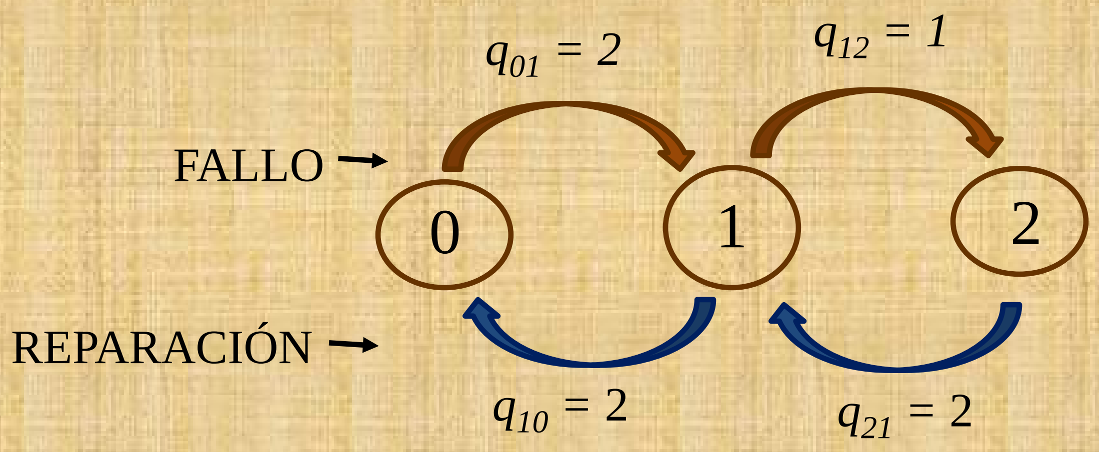
Ejemplo:

El tiempo esperado hasta que falla una máquina es 1 día:

⇨ La tasa a la que fallan las máquinas (si están funcionando) es 1 por día.

⟶ $q_{12} = 1$

En el tiempo en que las dos máquinas están funcionando, los fallos ocurren a una tasa de 1+ 1 = 2 /día ⟶ $q_{01} = 2$



Cadenas de Markov (de tiempo continuo)

Ejemplo:

Estas tasas de transición se pueden usar para calcular la tasa total de transición hacia afuera del estado

$$\begin{cases} q_0 = q_{01} = 2 \\ q_1 = q_{10} + q_{12} = 3 \\ q_2 = q_{21} = 2 \end{cases}$$

Ecuaciones de balance ➡ $\boxed{\text{Tasa de salidas de un estado}} = \boxed{\text{Tasa de entradas a ese estado}}$

Cadenas de Markov (de tiempo continuo)

Ejemplo:

$$\begin{cases} 2\pi_0 = 2\pi_1 & \text{para el estado 0} \\ 3\pi_1 = 2\,\pi_0 + 2\,\pi_2 & \text{para el estado 1} \\ 2\pi_2 = \pi_1 & \text{para el estado 2} \end{cases}$$

La suma de probabilidades: $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$

Cualquiera de estas ecuaciones se puede eliminar por redundante, obteniendo

$$(\pi_0\ , \pi_1\ , \pi_2\ ) = (2/5\ , 2/5\ , 1/5)$$

Ambas máquinas estarán estropeadas a la vez el 20 % del tiempo; una máquina estará estropeada el 40 % del tiempo; las dos estarán funcionando el 40 % del tiempo.

Fiabilidad de sistemas

Un sistema es una colección de componentes/subsistemas dispuestos de acuerdo a un diseño dado con el propósito de lograr el cumplimiento de unas determinadas funciones con una adecuación y fiabilidad aceptables.

El tipo de componentes, su cantidad, su calidad y el modo en que están dispuestas tiene un efecto directo en la fiabilidad del sistema.

El comienzo histórico de la aplicación de las técnicas de fiabilidad se inicia en 1713 con Jacob Bernoulli que formuló la ley de probabilidad de dos sucesos independientes. Sin embargo su inicio definitivo se produce en 1943 con la II Guerra Mundial en Peenemunde, base de las bombas volantes V1 y V2. Para mejorar el éxito de las misiones (no llegaba el 30%), el matemático Erich Pieruschka asumió que los componentes técnicos seguían las mismas leyes que las sustancias radiactivas y los seres vivos. Suponiendo una tasa media de fallos de 10^{-5} fallos/hora y un nº de componentes de 100.000, la tasa de fallos del sistema era de: 100.000 10^{-5} = 1 fallo/hora

Por tanto, una misión de 1,5 horas tendría una probabilidad de éxito de

$$R = e^{-\lambda t} = e^{-lx1,5} = 0,22$$

Creus Solé, A. (2005). Fiabilidad y Seguridad. Su aplicación en procesos industriales. Marcombo, 2ª edición. Barcelona.

Fiabilidad de sistemas

E.Pieruschka consideró que la probabilidad de éxito de un sistema es el producto de las probabilidades de éxito de cada uno de sus componentes. Asumió que los fallos producidos en dispositivos con soluciones sencillas y débiles en apariencia, eran menos frecuentes que algunas soluciones más complejas ideadas para corregir dichos fallos. En principio, parece falso suponer que "una cadena con muchos eslabones fuertes puede ser más débil que otra con menos eslabones más débiles", pero no deja de ser cierto al considerar que el producto de las probabilidades de unos pocos factores de poco valor (<1) puede ser mayor que el producto de muchos factores de mayor valor (<1).

Por ejemplo: si tenemos 5 componentes con probabilidad individual de éxito de 0,895 frente a otros 10 cuya probabilidad individual de éxito es 0,93, montados todos en serie, resulta que

$$0{,}895^{5} > 0{,}93^{10} \quad \text{es} \quad 0{,}574 > 0{,}484$$

Esto sirvió para mejorar la fiabilidad media de los componentes, mejorando notablemente la fiabilidad del sistema. Fue el principio del desarrollo de estas técnicas.

Creus Solé, A. (2005). Fiabilidad y Seguridad. Su aplicación en procesos industriales. Marcombo, 2ª edición. Barcelona.

Fiabilidad: concepto

El concepto más conocido de Fiabilidad es: *La probabilidad de que un equipo o sistema opere sin fallos durante un tiempo (t) determinado, en unas condiciones ambientales dadas.*

Para los sistemas y productos de un solo servicio, (como un misil o los motores de un cohete de combustible sólido), la definición se reduce a la probabilidad de funcionar en las condiciones previstas.

Si no existe posibilidad de reparación, la fiabilidad "es la probabilidad de que un aparato o dispositivo trabaje correctamente durante un tiempo determinado y en las condiciones de servicio que encuentre"

La teoría de la fiabilidad es el conjunto de teorías y métodos matemáticos y estadísticos, procedimientos y prácticas operativas que, mediante el estudio de las leyes de ocurrencia de fallos, están dirigidos a resolver problemas de previsión, estimación y optimización de la probabilidad de supervivencia, duración de vida media y porcentaje de tiempo de buen funcionamiento de un sistema.

(Ros Moreno, 2013) http://myslide.es/documents/analisis-de-fiabilidad-de-equipos-industriales.html

Fiabilidad: concepto

La fiabilidad **no es una predicción**, es la probabilidad de la actuación correcta de un dispositivo (o de una persona). Es posible que el dispositivo falle inmediatamente después de su puesta en servicio, o que lo haga, incluso más allá del final de su vida útil.

El valor de la fiabilidad cambia con el conocimiento que se va adquiriendo del sistema.
P.ej.: Si un controlador electrónico industrial, tiene de vida útil 5 años, y pasados los 5, sigue funcionando perfectamente, la deducción del usuario será que "el aparato es más fiable de lo indicado por el fabricante".

Desde el punto de vista de la ingeniería:

La fiabilidad es la probabilidad de que un aparato o dispositivo o una persona desarrolle una determinada función bajo condiciones fijadas durante un período de *t* determinado, $t \in [0, t]$ (Creus, 2005)

Lectura (Ros Moreno, 2013):
http://myslide.es/documents/analisis-de-fiabilidad-de-equipos-industriales.html

(acceso junio, 2106)

Fiabilidad. Tasa de fallos

- Sea *t* "el tiempo hasta que el elemento falla" (período al que se refiere la fiabilidad y variable independiente)

f(t) es la función de densidad de probabilidad del tiempo hasta que se produce el fallo de un dispositivo,

La probabilidad de que el elemento falle en el instante *t* es: *f(t) dt*

Fiabilidad: Tasa media de fallos

El periodo de *t* esperado antes de que haya fallo viene dado por:

$$E[t] = \int_0^t t f(t) dt$$

representa el "Tiempo entre fallos" o

MTBF = Mean Time Between Failure

MUT = Mean Up Time (Tiempo de Buen Funcionamiento.)

El tipo de modelos de distribución para las *f(t)* corresponde a la familia de la exponencial,

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

Fiabilidad: Expresión matemática

λ representa la frecuencia con que aparecen los fallos en los componentes del sistema,

Se suele expresar en *fallos/hora*, o bien, en *fallos/10*^{6} *horas*

la inversa de λ, la MTBF, *1/* λ, serán "horas/fallo"

f(t) = densidad de probabilidad de fallo de un dispositivo

F(t) = función de distribución de fallos. Probabilidad de fallo entre el inicio (instante 0) y *t*.

R(t) = complementaria de la *F(t)* , (del inglés, Reliability)

Fiabilidad. Tasa de fallos

La probabilidad de que el elemento falle en el instante *t* ó antes (infiabilidad):

$$F(t) = \int_0^t f(t)dt$$

F(t) es la función de distribución, que cumple

$\int_0^\infty f(t)dt = 1$ (todo elemento acaba por fallar)

Fiabilidad ***R(t)*** : Probabilidad de que funcione todavía en el instante *t*

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - \int_0^t f(t)dt$$

Tasa de fallos ***λ(t)*** : es la función de distribución de probabilidad de que un elemento falle en el período *[t, t+dt]* habiendo funcionado bien hasta el instante *t*

Fiabilidad: Expresión matemática

Resumen

Función de densidad de fallos $f(t) = \lambda(t)\, e^{-\int_0^t \lambda(t) dt}$

Fiabilidad $R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t) dt}$

Infiabilidad $F(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(t) dt}$

Fiabilidad.Tasa de fallos

Utilizando la expresión de probabilidad condicionada: la probabilidad de que un sistema falle en el instante t_2 (suceso A), cuando ha llegado al instante anterior t_1 (suceso B) sin fallar, es

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

La probabilidad de que el sistema falle en el intervalo $t_2 - t_1$ es,

$$P(A \cap B) = F(t_2) - F(t_1)$$

sabiendo que hasta el instante t_1 no ha habido fallo.

El denominador es, $P[B] = 1 - F(t_1)$

Y la probabilidad condicionada queda:

$$\text{P[A/B]} = \frac{F(t_2 - F(t_1)}{1 - F(t_1)}$$

Fiabilidad.Tasa de fallos

Utilizando como estimador de la distribución real de fallos, el cociente entre el nº de fallos producidos hasta el instante de tiempo *t*, (N_F) y el nº total de fallos (NT_F), la probabilidad de que se produzca un fallo antes del instante *t* viene dada por,

$$F(t) \approx \frac{N_F(t)}{NT_F}$$

La expresión de P(A/B) puede ponerse de la forma:

$$P(A/B) = \frac{N_F(t_2) - N_F(t_1)}{NT_F - N_F(t_1)}$$

Haciendo $t = t_1$ y $t + \Delta t = t_2$, y dividiendo entre Δt en los dos miembros de la expresión anterior, se obtiene la denominada "Tasa de fallos", que se indica por $\lambda(t)$.

Fiabilidad: Tasa de fallos

$$\lambda(t) = \frac{(N_F(t+\Delta t) - N_F(t)) \big/ {NT_F - N_F(t)}}{\Delta t}$$

Esta expresión representa la **proporción de fallos** en Δt

Si, de nuevo, en la expresión de *P(A/B)*, se sustituye $t = t_1$, y $t + \Delta t = t_2$, y se hace tender $\Delta t \rightarrow 0$, de modo que $\Delta t \rightarrow dt$, al dividir en los dos miembros por *dt*,

$$\frac{P(A/B)}{dt} = \frac{F(t+dt) - F(t)}{dt(1 - F(t))}$$

Así, la *tasa de fallos* vendrá expresada en función del modelo de distribución escogido, de acuerdo con la siguiente expresión.

Fiabilidad: Tasa de fallos

$$\lambda(t) = \frac{dF(t)/dt}{1 - F(t)} = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

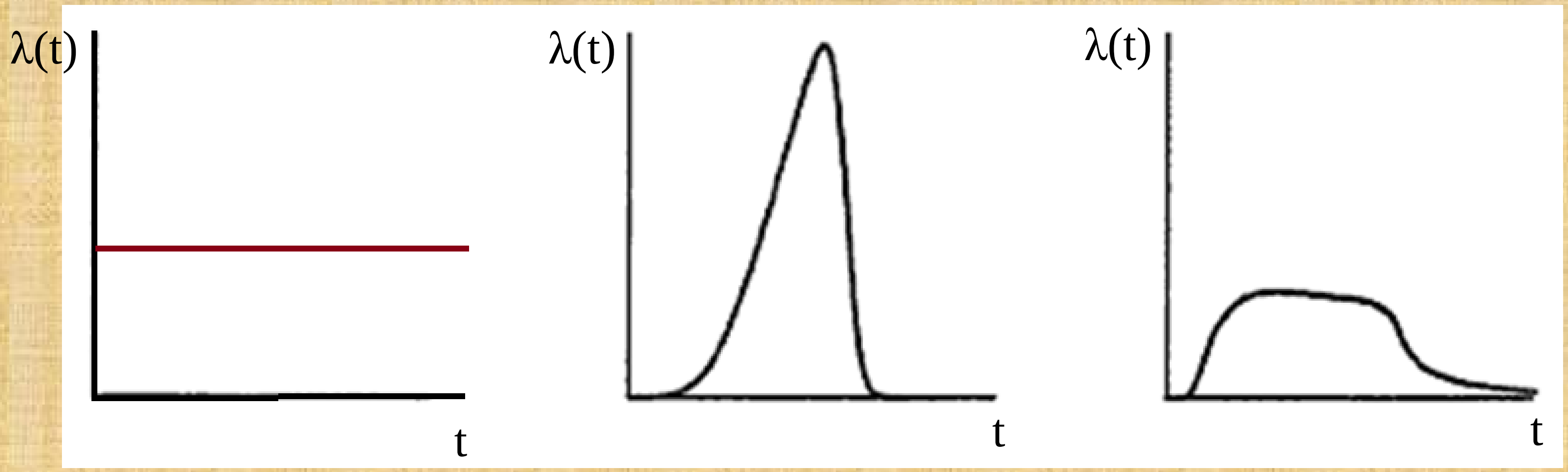
Expresada así *λ(t)*, se suele denominar "*tasa instantánea de fallos*". Es una densidad de probabilidad condicional:
Probabilidad de que se produzca el fallo del dispositivo en un instante *t*, sin que antes hubiera fallado

Si la distribución de fallos es exponencial, la tasa instantánea es constante: $\lambda\ (t) = \lambda$, y la MTBF (Mean Time Between Failure), $E[t] = 1/\lambda$,

(Gómez de León, 1998)

Fiabilidad: Tasa de fallos

Representaciones gráficas de la "*tasa instantánea de fallos*" en función del tiempo, para los modelos de distribución de fallos usuales.



Tasa de fallos para la función de distribución Exponencial

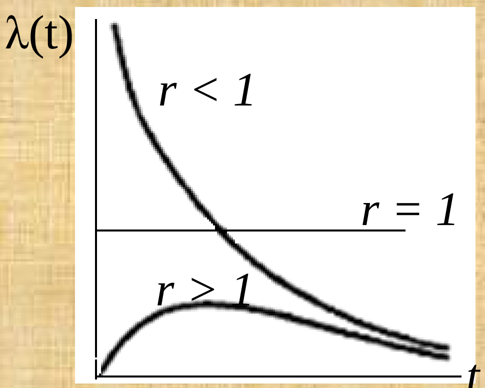
Tasa de fallos para la función de distribución Normal

Tasa de fallos para la función de distribución Log-Normal

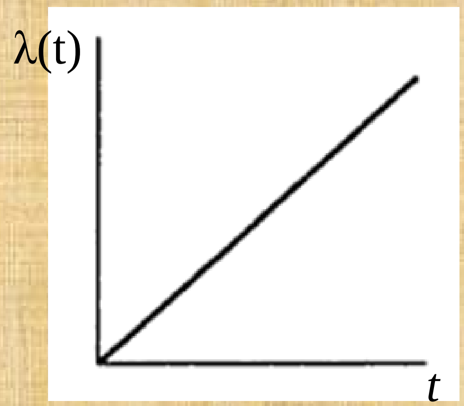
(Gómez de León, 1998)

Fiabilidad: Tasa de fallos

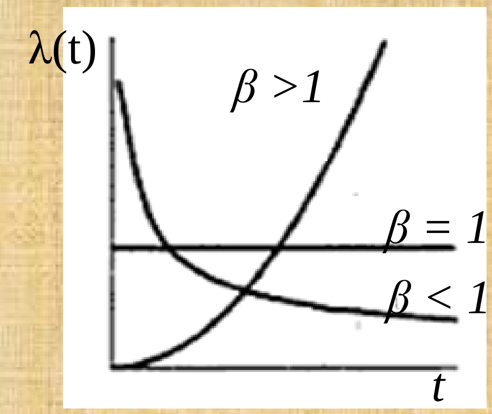
Representaciones gráficas de la "*tasa instantánea de fallos*" en función del tiempo, para los modelos de distribución de fallos usuales.



Tasa de fallos para la función de distribución Gamma



Tasa de fallos para la función de distribución de Rayleigh

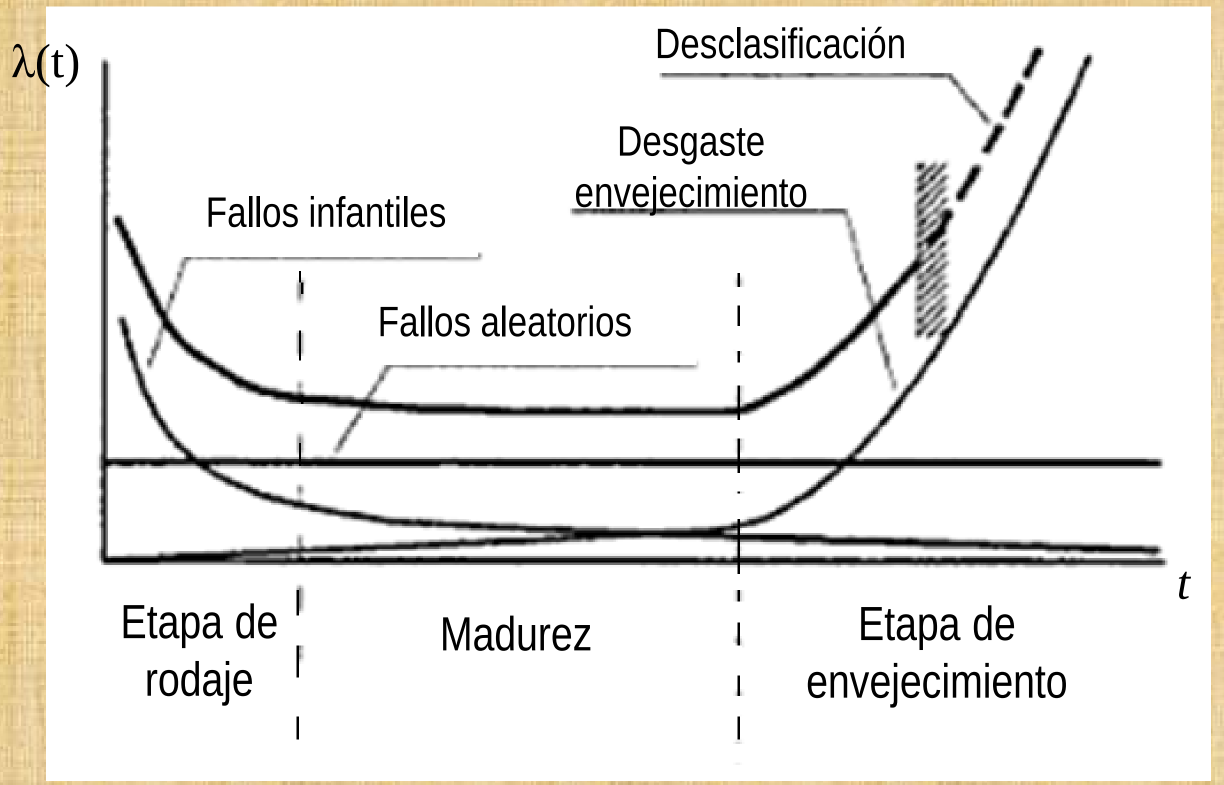


Tasa de fallos para la función de distribución Weibull

(Gómez de León, 1998)

Fiabilidad: Curva de la bañera

Al variar la tasa instantánea de fallos con el tiempo, su representación gráfica tiene forma de bañera (bathtube curve), con 3 etapas diferenciadas,
Fallos iniciales (etapa infantil, período de rodaje), Operación normal y Fallos de desgaste (envejecimiento).



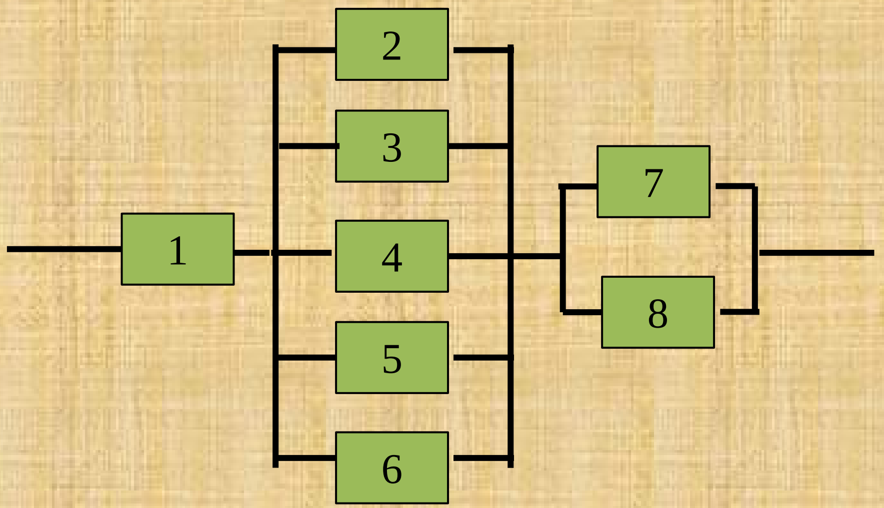
(Gómez de León, 1998)

Fiabilidad: Cadenas de Markov

Las técnicas de procesos, como las cadenas de Markov, permiten calcular fiabilidad de sistemas.

Un sistema está compuesto por *n* elementos unidos en paralelo o en serie.

Ejemplo:



(Lyonnet, 1991)

Fiabilidad: Cadenas de Markov

Ejemplo:

- ***Hipótesis***

El estado (*i*) en el que se encuentra un sistema en un instante *t* depende sólo de los estados (*i* -1) o (*i* +1).
El paso de un estado a otro se realiza según una ley exponencial, con índice de fallos (λ) e índice de reparación (μ) constantes.

Gráfico de transición

Un sistema está compuesto por un nº determinado *n* de elementos. El sistema está

- en el estado *i* si hay *i* elementos en funcionamiento.
- en el estado *n* si funcionan todos.
- en el estado *0* si la avería es total.

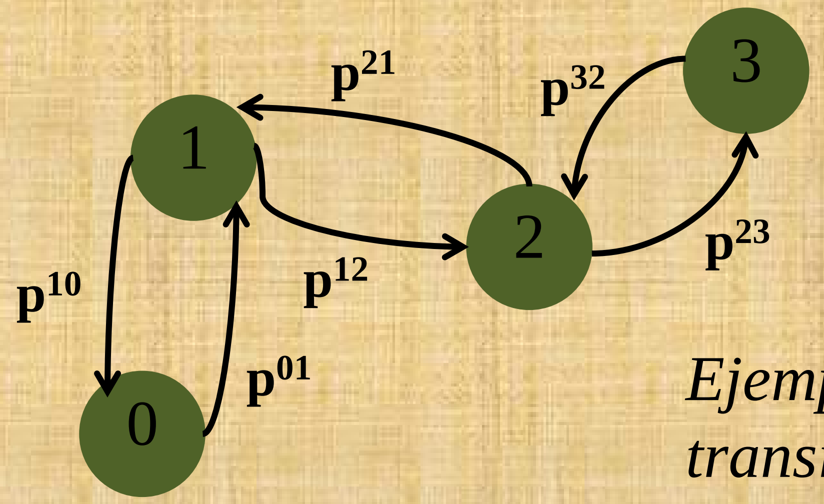
(Lyonnet, 1991)

Fiabilidad: Cadenas de Markov

Ejemplo:

Gráfico de transición

Describir dichos estados mediante un gráfico resulta muy ilustrativo ya que en él se muestran las posibilidades de paso de un estado a otro. Este gráfico se llama de *transición*.



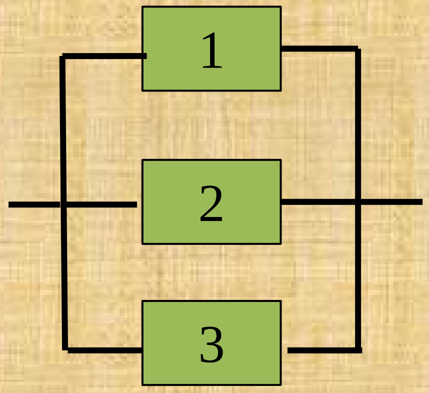
Ejemplo de gráfico de transición.

(Lyonnet, 1991)

Fiabilidad: Cadenas de Markov

Ejemplo:

Este sistema está compuesto por tres elementos. Las probabilidades de paso de un estado a otro vienen dadas por los $p_{i,j}$.



De forma general, se puede formular la probabilidad de encontrarse en el estado i en el instante (t+dt) como:

$$P_{(i,t+dt)} = P_{(i+1,t)} \cdot p(i+1,i)dt +$$
$$+P_{(i,t)}(1 - p(i+1,i)dt) \cdot (1 - p(i-1,i)dt) + P_{(i-1,t)} \cdot p(i-1,i)dt$$

(Lyonnet, 1991)

Fiabilidad: Cadenas de Markov

Ejemplo:

De donde

$$\frac{P(i,t+dt)-P(i,t)}{dt} = P_{(i+1,t)} \cdot p(i+1,i) + P_{(i-1,t)} \cdot p(i-1,i) -$$
$$-P_{(i,t)} \cdot \big(p(i+1,i) + p(i-1,i)\big)$$

Cuando dt tiende a 0, obtenemos:

$$\frac{dP(i,t)}{dt} = P_{(i+1,t)} \cdot p(i+1,i) + P_{(i-1,t)} \cdot p(i-1,i) -$$
$$-P_{(i,t)} \cdot \big(p(i+1,i) + p(i-1,i)\big)$$

Para un sistema dado se tiene:

$$\sum_{i=1}^{n} P(i,t) = 1$$

(Lyonnet, 1991)

Fiabilidad: Cadenas de Markov

Ejemplo:

De donde

$$\frac{P(i,t+dt)-P(i,t)}{dt} = P_{(i+1,t)} \cdot p(i+1,i) + P_{(i-1,t)} \cdot p(i-1,i) -$$
$$-P_{(i,t)} \cdot \left(p(i+1,i) + p(i-1,i)\right)$$

Cuando dt tiende a 0, obtenemos:

$$\frac{dP(i,t)}{dt} = P_{(i+1,t)} \cdot p(i+1,i) + P_{(i-1,t)} \cdot p(i-1,i) -$$
$$-P_{(i,t)} \cdot \left(p(i+1,i) + p(i-1,i)\right)$$

Para un sistema dado se tiene:

$$\sum_{i=1}^{n} P(i,t) = 1$$

Y derivando tenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt} P(i,t) = 0$$

(Lyonnet, 1991)

Fiabilidad: Cadenas de Markov

Ejemplo:

Como condición inicial para *t=0*, $P_{(n,0)} = 1$ *y* $P_{(i,0)} = 0\ (i \neq n)$. Esto define las ecuaciones generales para el estudio de los estados de un sistema. Para resolver los sistemas de ecuaciones diferenciales se pueden utilizar transformadas de Laplace.

Para escribir el sistema de ecuaciones que permite el cálculo de disponibilidad se puede emplear el método de bucles en los gráficos de transición, añadiendo a cada estado un bucle que contenga la suma de probabilidades para pasar de un estado i a otro p(i,j) con el signo contrario. Se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales haciendo:

$$\frac{dP(i,t)}{dt}$$

igual a la suma de los productos de las probabilidades de transición que llega a i por las probabilidades de los estados de partida

(Lyonnet, 1991)

Fiabilidad: Simulación

En Fiabilidad también se aplican métodos de Simulación que permiten contemplar varias situaciones.

El método más conocido es el de Montecarlo

El principio de la simulación es constituir una muestra a partir de una función de reparto *F(x)* tomada al azar. Esta muestra (en este caso, la duración *td*) se compara con el esfuerzo (tiempo de servicio supuesto t_s), lo que nos da la proporción de elementos superiores a una duración deseada y, por tanto, un cálculo de la fiabilidad, con la expresión:

$$\hat{R}(t) = \frac{Nb \cdot (td_i > t_s)}{N}$$

(Lyonnet, 1991)

R e s u m e n

- Procesos estocásticos.
- Cadenas de Markov. Aplicaciones.
- Fiabilidad de sistemas.

Referencias y enlaces:

Cadenas de Markov y Teoría de Colas:

http://operativa7107.awardspace.com/cadenas%20de%20markov%20y%20teoria%20de%20colas.htm (acceso, junio 2016)

Creus Solé, A. (2005). *Fiabilidad y Seguridad. Su aplicación en procesos industriales*. Marcombo, 2ª edición. Barcelona.

Gómez de León, C. (1998). *Tecnología del Mantenimiento Industrial*. Servicio de Publicaciones, Universidad de Murcia.

Lyonnet, P. (1991). *Los Métodos de la Calidad total*. Ed. Díaz de Santos, Madrid.

- Teoría de colas

Gross , D., Shortle, J.F., Thompson, J.M., Harris, C.M. (2008) *Fundamentals of Queueing Theory*, Wiley, 4th Edition. ISBN: 978-0-471-79127-0. 528 pgs.

Gross , D., Shortle, J.F., Thompson, J.M., Harris, C.M. (2008) *Solutions Manual to Accompany Fundamentals of Queueing Theory*, Wiley, 4th Edition. ISBN: 978-0-470-07796-2.

- Teoría de riesgo

Suter, G. W. (1993) *Ecological Risk Assessment*. Lewis Publishers, Boca Raton, Florida.