Capítulo 8

APÉNDICE B

Autor: Francisco Sierra Gómez

8 APÉNDICE B

8.1 Función Exponencial

Se llama función exponencial de variable real a la siguiente correspondencia:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\exp_a} \mathbb{R}^+$$

$$x \longrightarrow y = a^x$$

El número *a* (positivo y distinto de la unidad) se llama base de la función.

Es una función continua. Es una función monótona creciente si *a*>0 y decreciente si *a*<0. Por lo tanto, es un isomorfismo entre el grupo aditivo ($\mathbb{R}$, +) y el grupo multiplicativo ($\mathbb{R}^+$, •).

8.2 Función Logarítmica

A la correspondencia recíproca de la función exponencial se la denomina función logarítmica:

$$\mathbb{R}^+ \xrightarrow{\log_a} \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow y = \log_a x$$

de modo que se cumpla que $a^y = x$. Se dice que *y* es el logaritmo en base *a* del número *x*.

La función se define con *a* positivo y distinto de la unidad. A *a* se le llama base de la función logarítmica. A *x* se le llama antilogaritmo de *y* en base *a*.

El logaritmo en base *a* de un número *x* es otro número *y* que se obtiene elevando a *x* la base *a*.

Las bases más usuales son *a* = 10 y *a* = *e*. Los logaritmos con base 10 se llaman logaritmos decimales o de Briggs, y se escribe "log *x*", sin indicar la base. Los logaritmos con base *e* se denominan logaritmos naturales o Neperianos, y se escribe "L *x*" o bien "ln *x*", también sin indicar la base.

Como recíproca que es de la función exponencial, la función logarítmica también es continua y monótona, creciente o decreciente según que *a*>1 o *a*<1, respectivamente.

Por lo tanto, la función logarítmica es un isomorfismo entre el grupo multiplicativo ($\mathbb{R}^+$, •) y el grupo aditivo ($\mathbb{R}$, +). Veamos de forma explícita las propiedades que contiene el párrafo anterior.

8.2.1 Logaritmo de un Producto

$$\text{Si} \qquad \left.\begin{array}{l} x_1 \to y_1 = \log_a x_1 \\ x_2 \to y_2 = \log_a x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow\ x_1 \cdot x_2 \ \to\ y_1 + y_2$$

Demostración:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = \log_a x_1 \Rightarrow a^{y_1} = x_1 \\ y_2 = \log_a x_2 \Rightarrow a^{y_2} = x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 \rightarrow \mathrm{a}^{y_1} \cdot a^{y_2} = a^{(y_1+y_2)}$$

es decir:

$$y_1 + y_2 = \log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

El logaritmo de un producto se obtiene sumando los logaritmos de los factores.

8.2.2 Logaritmo de un Cociente

$$\text{Si} \qquad \left.\begin{array}{l} x_1 \rightarrow y_1 = \log_a x_1 \\ x_2 \rightarrow y_2 = \log_a x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} \rightarrow y_1 - y_2$$

Demostración:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = \log_a x_1 \Rightarrow a^{y_1} = x_1 \\ y_2 = \log_a x_2 \Rightarrow a^{y_2} = x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} \rightarrow a^{y_1} : a^{y_2} = a^{(y_1-y_2)}$$

es decir:

$$y_1 - y_2 = \log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$$

El logaritmo de un cociente es la diferencia entre el logaritmo del numerador y el logaritmo del denominador.

8.2.3 Logaritmo de una Potencia y de una Raíz

De forma semejante se demuestra que el logaritmo de una potencia es:

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

y que el logaritmo de una raíz es:

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x$$

El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base.	El logaritmo de la raíz de un número es igual al cociente entre el logaritmo del número y el índice de la raíz.

8.2.4 Cambio de Base en la Logaritmación

Si solamente se dispone de medios de cálculo para obtener los logaritmos de números en una cierta base, digamos decimal, el logaritmo de un número en otra base cualquiera se puede obtener por el siguiente procedimiento.

Deseamos calcular:

[8.1] $$y = \log_a x$$

y conocemos o podemos hallar:

[8.2] $$y_1 = \log x$$

De [8.2] obtenemos que:

$$a^y = x$$

y tomando logaritmos decimales:

[8.3] $$y \log a = \log x$$

Dividiendo [8.3] entre [8.2]:

$$\frac{y \log a}{y_1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = \frac{y_1}{\log a} = \frac{\log x}{\log a}}$$