Capítulo 4

MEDIDA DE MAGNITUDES

Autor: Santiago Ramírez de la Piscina Millán

4 MEDIDA DE MAGNITUDES

4.1 Introducción

El hecho de hacer experimentos implica la determinación **cuantitativa** de las magnitudes que intervienen en ellos. Es decir, de alguna forma (directa o indirecta) hay que medirlas. Y medir implica comparar el estado de una magnitud con un patrón.

La cuantificación del estado de una magnitud física mediante su medida nunca nos conduce a su "valor verdadero". Ni nuestros sentidos, ni las circunstancias en que se realiza la medida, ni los aparatos que utilizamos son "ideales". Hay cierta probabilidad de que la medida sea la estimada. Cuando nos encontramos con una expresión del tipo $L = 138 \pm 2$ cm esperamos que la medida esté dentro del rango de valores comprendido entre 136 y 140 centímetros. Es, en realidad, una declaración de probabilidad. Ni siquiera estamos seguros de que la medida se encuentre dentro de esos límites. Simplemente estamos expresando nuestra "esperanza" de que, con una cierta probabilidad, esto sea cierto. La conclusión es que toda medida viene acompañada de un cierto grado de incertidumbre.

Es necesario estimar cuantitativamente esta incertidumbre para que la información que se pretende proporcionar con la medida sea más completa y para que los que vayan a utilizar la medida con posterioridad tengan una idea de lo fiable que ésta puede llegar a ser. Esta estimación cuantitativa de la incertidumbre de una medida es lo que conocemos como error.

En definitiva, la expresión correcta de una medida conlleva la especificación precisa de tres elementos: la medida propiamente dicha, el error que acompaña al proceso de obtención de la misma y la unidad en la que está expresada.

4.2 Medidas Directas e Indirectas

Se dice que una medida es directa cuando el valor de la magnitud que busca el experimentador viene directamente indicado en el aparato de medida, como por ejemplo cuando se miden longitudes con un metro o calibre, cuando se miden temperaturas con un termómetro, etc.

Una medida es indirecta cuando el valor de la magnitud se obtiene midiendo los valores de otras magnitudes relacionadas con aquélla mediante alguna fórmula o ley física.

Así, por ejemplo, la medida del valor de la superficie de un campo de fútbol utilizando una cinta métrica, es una medida indirecta ya que el valor de la superficie se obtiene de la fórmula $S = a \times b$ midiendo las longitudes a y b de los lados del campo.

Otras veces se utilizan las mediciones de magnitudes para encontrar una dependencia funcional lineal entre ellas (también no lineal), y las medidas se encaminan a encontrar los valores de los parámetros de tal dependencia, los cuales, en la mayoría de los casos, tienen significados físicos importantes. Este problema se trata mediante la regresión lineal, de la que trataremos más adelante.

4.3 Aparatos de Medida

Cuatro son las cualidades que caracterizan a un aparato de medida:

FIDELIDAD:

Un aparato de medida es "fiel" cuando si se realizan medidas de un mismo estado de una misma magnitud en idénticas condiciones se obtienen los mismos resultados

EXACTITUD:

Un aparato de medida es "exacto" cuando el resultado de la medida que se realiza con él da justamente el valor de la magnitud. Es decir, será tanto más "exacto" cuanto menor sea el error absoluto que se comete en la medida. La exactitud se puede cuantificar como la inversa del error absoluto.

PRECISIÓN:

Un aparato de medida es tanto más "preciso" cuanto menor sea el error relativo que se comete en las medidas que se realizan con él. La precisión se puede cuantificar como la inversa del error relativo.

SENSIBILIDAD:

Un aparato de medida es tanto más "sensible" cuanto más pequeñas son las variaciones que puede apreciar en la magnitud medida. La sensibilidad se puede cuantificar como el cociente entre la mínima división de la escala y la medida que se realiza.

4.4 Tipos de Errores en las Medidas

Desde el punto de vista de la Teoría de Errores, éstos se clasifican en:

- ERRORES SISTEMÁTICOS
- ERRORES DE ESCALA
- ERRORES ACCIDENTALES O CASUALES

Los errores sistemáticos, si existen, aparecen en todas las medidas que se hagan de la misma magnitud y con el mismo aparato, son del mismo sentido y se deben a la misma causa. No son fáciles de detectar ni existe una teoría general para tratarlos. Sin embargo, son importantes, y en cada experimento y cada medición es necesario realizar un análisis de los aparatos de medida y del método utilizado con objeto de detectar la aparición o presencia de este tipo de errores y, consecuentemente, proceder a su corrección o eliminar la fuente de error. Por ejemplo, cambiando un aparato de medida o realizando la corrección en los resultados. Este tipo de errores no se corrige ni se detecta repitiendo muchas veces las medidas. Siempre que se realizan mediciones es necesario calibrar el o los aparatos e instrumentos que intervienen en las mediciones para evitar algunos de los errores sistemáticos.

Algunos autores consideran la existencia de otro tipo de error llamado error instrumental o de escala que es del orden del mínimo valor que es capaz de suministrar el instrumento de medida utilizado (Apreciación). Este puede ser reducido cambiando de aparato, pero nunca eliminado.

Los errores accidentales se deben, en general, a pequeñas variaciones en las condiciones del experimento, tales como vibraciones, fluctuaciones de condiciones ambientales, errores aleatorios del experimentador, etc. Este tipo de errores será el que trataremos principalmente en todo lo que sigue.

4.5 Expresión del Error

Como ya se ha dicho, realizar una medida del valor de una cierta magnitud física consistirá en obtener un número (con sus unidades correspondientes) que se aproxime lo más posible al valor verdadero de la magnitud, junto con una estimación del error cometido en su determinación.

La dificultad inicial estriba en que no conocemos el valor verdadero al cual hemos de aproximarnos. Es norma generalmente aceptada que esta dificultad se obvia realizando la medición un número suficiente de veces y expresando como valor de la magnitud medida el valor medio de todas las mediciones efectuadas. Esta afirmación se basa en que los errores accidentales son, en general, pequeños comparados con el valor que se mide y, al ser casuales, pueden darse tanto en un sentido como en otro, con lo que efectuando la medición muchas veces y hallando la media aritmética, se minimizan los errores.

El valor medio que se da como resultado de la medida debe ir acompañado del error correspondiente, es decir, debemos expresar el grado de aproximación del resultado. Para ello, podemos actuar de dos formas diferentes. La primera consiste en señalar una cota de error, que garantice que la diferencia entre el valor verdadero y la medida no excede de dicha cota.

La segunda forma de indicar el error se basa en la Teoría Estadística para el tratamiento de datos obtenidos de muchas mediciones del valor de una misma magnitud. Tiene la ventaja de que los datos se manejan de forma objetiva, pero tiene el inconveniente de que no se acota realmente el valor verdadero de la magnitud, sino que lo que se hace es atribuir, mediante el error expresado, un cierto grado de probabilidad al resultado.

Trataremos en primer lugar la cota del error, y con posterioridad en este mismo capítulo la teoría estadística.

En cualquier caso, el error puede expresarse de dos formas que se conocen con los nombres de error absoluto y error relativo.

4.5.1 Error Absoluto y Error Relativo

ERROR ABSOLUTO es la diferencia entre el valor medido y el valor verdadero. Se expresa en las mismas unidades que la magnitud a la que acompaña.

Como el valor verdadero no se conoce, tampoco se puede conocer el error absoluto. Para evitar esta dificultad, se conviene, para el cálculo del error absoluto, tomar como valor verdadero la media aritmética de los valores de un número suficiente de mediciones.

El resultado de una medida se expresará:

[4.1]

$$L = (L_{media} \pm \Delta L)\ u$$

donde L_{media} es la media de las medidas realizadas, ΔL es el error absoluto y u la unidad correspondiente.

En general, el error absoluto no sirve para expresar la calidad de una medida. Basta un ejemplo para corroborar esta afirmación.

Si medimos la longitud de un automóvil con error menor de 1 mm podemos decir que la medida es buena, pero si cometemos el mismo error de 1 mm en la medición del diámetro de un émbolo del motor, tal error es inadmisible.

Las longitudes quedaran expresadas de la forma:

$$L = (4310 \pm 1)\ \text{mm}$$

$$L' = (75 \pm 1)\ \text{mm}$$

donde estamos afirmando que el valor verdadero de las longitudes (en milímetros) cumple, con una cierta probabilidad, que:

$$4309 \leq L \leq 4311$$

$$74 \leq L' \leq 76$$

Por ello, se recurre al concepto de ERROR RELATIVO, que es el cociente entre el error absoluto y el valor verdadero. Como se deduce de su definición es un número adimensional y, habitualmente, se expresa en tantos por ciento.

[4.2]

$$\textit{Error relativo} = \frac{\Delta L}{|L|}$$

$$\textit{Error relativo}\left(\%\right) = 100\frac{\Delta L}{|L|}$$

Volviendo al ejemplo anterior, un error absoluto de 1 mm en la medida de la longitud de un automóvil es un error relativo de 0,02%, mientras que en la medida del émbolo es de 1,5%.

Para que se pueda considerar que la medida tiene cierta calidad, el error relativo debe ser mucho menor que la unidad.

4.5.2 Cifras Significativas

Las cifras significativas de un número son aquellas capaces de aportar algún tipo de información. Como su nombre indica hay cifras dentro de un número que “significan” algo y otras que no “significan” nada. Éstas últimas aparecen como consecuencia de los cálculos efectuados en el proceso de obtención del número en cuestión.

El hecho de utilizar cifras no significativas puede llevar a interpretaciones erróneas del resultado de una medida. Se hace necesario “redondear” el número hasta conseguir que únicamente contenga cifras significativas. Se conoce con el nombre de redondeo al proceso de eliminación de las cifras no significativas de un número.

¿Cómo decidir qué cifras son significativas y qué cifras no lo son?. Diremos que sólo tienen sentido aquellas cifras que ocupan una posición igual o superior al orden del error. Esto nos lleva a identificar previamente aquellas cifras del error que son significativas. Se nos plantea entonces un interrogante, ¿cómo se determinan las cifras significativas del error?. Teniendo en cuenta el hecho de que el error indica siempre una cierta probabilidad de que nuestra medida se encuentre dentro de ciertos límites, se acepta por convenio que el error sólo puede tener una cifra significativa (excepto cuando la primera cifra significativa es 1, que se permiten dos cifras, un 1 seguido de un 5).El redondeo de los errores se hace siempre por exceso.

Hay que hacer constar que estos criterios no son únicos y que cualquier otro debidamente fundamentado será igualmente válido.

Cuando los ceros aparecen como primeras cifras en un resultado no se consideran como cifras significativas. Así el resultado es independiente de la unidad en la que esté expresado.

Por ejemplo, 23 g tiene dos cifras significativas y esta misma cantidad, expresada en kg (0,023), también tiene dos cifras significativas.

Cuando los ceros aparecen como últimas cifras en un resultado pueden ser o no cifras significativas.

Por ejemplo, 320 mm puede tener dos o tres cifras significativas porque no sabemos con certeza si esa cantidad procede de una medida directa con un aparato capaz de apreciar 1 mm o de un cambio de unidades desde la medida original realizada con un aparato que apreciara 1 cm (medida=32 cm). Para estar seguros de que lo son, el resultado deberá expresarse con notación científica.

Es decir, si la medida fue realizada con el segundo aparato, la expresión correcta de la medida en milímetros sería 32×10 mm, y esto nos indicaría que sólo hay dos cifras significativas.

El número de cifras significativas de una medida indirecta nunca puede ser mayor que el de cualquiera de las medidas de las que procede. La eliminación de las cifras no significativas de una medida se hará según las siguientes reglas:

- Si la cifra que se va a eliminar es menor que 5, se quita sin más.
- Si la cifra que se va a eliminar es mayor que 5, se quita y se aumenta en una unidad la última cifra que queda.
- Si la cifra que se va a eliminar es 5, se quita y la última cifra que queda se deja como está si es par o se aumenta en una unidad si es impar.

4.5.3 Notación Científica

La notación científica se basa en la representación de números en función de las potencias de 10. Esta notación simplifica los cálculos y la escritura.

El uso de las potencias de 10 está muy arraigado en las ciencias debido, por una parte a que el uso cotidiano es el de la numeración en base 10 y por otra a que el sistema de unidades empleado por los científicos e ingenieros es el sistema métrico, el cual se basa en la notación decimal.

Hay números como 1000000000 y 0,0000001 que no son fáciles de escribir. Dado que números muy grandes o muy pequeños son comunes en la ciencia, con frecuencia se escriben utilizando potencias de 10. Son ejemplos del uso de la notación científica:

1 000 000 000 = 1×10^{9} = 1E9
0.000 001 = 1×10^{-6} = 1E-6
60 200 000 000 000 000 000 000 = $6{,}02\times10^{23}$ = 6,02E23

Se acostumbra expresar un número en notación científica con un dígito diferente de cero a la izquierda del punto decimal, por ejemplo $1{,}5\times10^{8}$, aunque es evidente que a efectos de cálculo es válida cualquier otra forma de expresión equivalente (15×10^{7}).

4.5.4 Notación Científica Normalizada

En el sistema decimal, cualquier número real puede expresarse mediante la denominada *notación científica normalizada*. Para expresar un número en notación científica normalizada multiplicamos o dividimos por 10 tantas veces como sea necesario para que todos los dígitos aparezcan a la derecha del punto decimal y de modo que el primer dígito después del punto no sea cero. Por ejemplo: $654{,}4076 = 0{,}6544076\times10^{3}$.

En general, un número real x distinto de cero, se representa en notación científica normalizada en la forma:

[4.3] $$x = \pm\, r \times 10^{n}$$

donde r es un número tal que $\frac{1}{10} \le r < 1$ y n es un entero (positivo, negativo o cero).

4.6 Error en Medidas Directas

Para establecer una cota superior del error en el valor de una magnitud se deberá tener en cuenta, en cada caso, el máximo error cometido, bien de las medidas efectuadas o bien de las limitaciones del propio equipo de medida.

Como ejemplo consideremos un aparato óptico cuya escala más fina tiene divisiones de 0,01 mm (esta será su apreciación). Se ha medido cinco veces (N = 5) la misma longitud L, con los siguientes resultados:

L_1 = 6,19 mm
L_2 = 6,21 mm
L_3 = 6,23 mm
L_4 = 6,20 mm
L_5 = 6,22 mm

El valor medio es:

[4.4] $$\overline{L} = \frac{\sum L_i}{N} = 6{,}21 \text{ mm}$$

Con respecto a este valor medio, las desviaciones en cada lectura son:

Δ_1 = - 0,02 mm
Δ_2 = 0,00 mm
Δ_3 = +0,02 mm
Δ_4 = - 0,01 mm
Δ_5 = +0,01 mm

por lo que una cota máxima del error sería Δ = 0,02 y escribiríamos como resultado:

L = 6,21 ± 0,03 mm

donde a la cota del error se ha añadido la apreciación del aparato (error instrumental).

El experimentador, al realizar cada medida, escribiría:

L_1 = 6,19 ± 0,01 mm
L_2 = 6,21 ± 0,01 mm
....

considerando como error absoluto;la apreciación del aparato, pero en este caso, no podemos expresar el resultado de la medida como:

$$L = 6{,}21 \pm 0{,}01 \text{ mm}$$

ya que la apreciación del aparato no nos acota los errores en este caso.

Ahora bien, si las cinco lecturas que hacemos valen todas 6,21 mm, o si hacemos una única medida, sí es razonable escribir como resultado:

L = 6,21 ± 0,01 mm = (621 ± 1)E-2 mm

Aunque todas las lecturas en un aparato de medida sean iguales, no podemos decir que el resultado es el “valor exacto” de la medida (no podemos decir que no hay error). Al menos, siempre ha de estar afectado por la apreciación del aparato de medida y **NUNCA** la cota de error puede ser menor que tal apreciación. Es decir, manejando números con error, **NUNCA** podremos pretender aumentar la resolución de un aparato. Con una regla graduada en milímetros para medir longitudes, ni podemos considerar un error menor de 1 mm ni podemos expresar los resultados con más cifras significativas que la que ocupe la posición de los milímetros.

4.7 Error en Medidas Indirectas

Cuando la magnitud cuyo valor se desea determinar depende funcionalmente de otras magnitudes que son las que realmente se miden para después, por cálculo, obtener la citada en primer lugar, estamos en el caso de medidas indirectas.

El error, tanto absoluto como relativo, con que vendrá afectado el valor de la magnitud original, dependerá de los errores cometidos en la medida de los valores de las magnitudes de las que depende. Veamos varios casos.

1. Magnitud *A* que es suma (resta) de otras dos, *B* y *C*

[4.5] $$A = B \pm C$$

Supongamos que hemos determinado B mediante el valor medio, b, de un cierto número de mediciones y que tal valor medio viene afectado por un error límite Δ_b, es decir:

$$B = b \pm \Delta b$$

y lo mismo para la magnitud C:

$$C = c \pm \Delta c$$

entonces tendremos:

[4.6] $$A = B \pm C = (b \pm \Delta b) \pm (c \pm \Delta c) = (b \pm c) \pm (\Delta b + \Delta c)$$

y llamando:

[4.7] $$a = b \pm c$$

[4.8] $$\Delta A = \Delta a = \Delta b + \Delta c$$

resulta:

$$A = a \pm \Delta a$$

con lo que vemos que el error absoluto en la suma es la suma de los errores absolutos de los sumandos.

Para el error relativo, dado que A . a, podemos considerar:

[4.9] $$\frac{\Delta A}{A} \approx \frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b + \Delta c}{a} = \frac{\Delta b + \Delta c}{b \pm c}$$

2. Magnitud *A* que es producto de otras dos

[4.10] $$A = B \cdot C$$

Con la misma nomenclatura utilizada en el caso anterior:

[4.11] $$A = B \cdot C = \left(b \pm \Delta b\right)\left(c \pm \Delta c\right) = bc \pm c\Delta b \pm b\Delta c \pm \Delta b\Delta c$$

y como Δb y Δc son pequeños frente a b y c, se puede despreciar su producto en la expresión anterior, con lo que:

[4.12] $$A = B \cdot C = bc \pm c\Delta b \pm b\Delta c$$

y el error absoluto es, en el caso más desfavorable:

[4.13] $$\Delta A = BC - bc = \pm c\Delta b \pm b\Delta c = c\Delta b + b\Delta c$$

y el error relativo:

[4.14] $$\frac{\Delta A}{A} = \frac{c\Delta b + b\,\Delta c}{cb} = \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c}$$

es decir, el error relativo, en el caso de un producto, es igual a la suma de los errores relativos de los factores.

3. Funciones Monomias

En el caso de funciones monomias, y dado que los errores se consideran pequeños frente al valor de la medida, el procedimiento anterior se puede generalizar utilizando el cálculo diferencial igualando los diferenciales a los errores absolutos.

Así, si queremos determinar el valor de una magnitud *A* que depende funcionalmente de otras *B*, *C*,... y es de la forma, por ejemplo:

[4.15] $$A = \frac{BC^2}{DE}$$

Tomando logaritmos neperianos:

[4.16] $$\ln A = \ln B + 2\ln C - \ln D - \ln E$$

diferenciando:

[4.17] $$\frac{dA}{A} = \frac{dB}{B} + 2\frac{dC}{C} - \frac{dD}{D} - \frac{dE}{E}$$

y pasando las diferenciales a incrementos finitos, tomados en valor absoluto, ya que el error puede tener uno u otro signo y deberemos situarnos siempre en el caso más desfavorable, tenemos:

[4.18]
$$\frac{\Delta A}{A} \approx \frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b} + 2\frac{\Delta c}{c} + \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta e}{e}$$

que nos permite calcular el error relativo de la magnitud *A* en función de los errores relativos de las magnitudes *B*, *C*, ... que se miden experimentalmente.

Esta última fórmula pone, además, de manifiesto cual es el error relativo que más influye en la suma, con lo que podremos, en todos los casos, poner especial cuidado en minimizar todo lo posible el error de mayor influencia.

4. Otras relaciones

De la misma forma se obtendría:

[4.19]
$$A = \frac{B}{C} \qquad \frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c}$$

[4.20]
$$A = \sqrt[n]{B} \qquad \frac{\Delta A}{A} = \frac{1}{n}\frac{\Delta b}{b}$$

[4.21]
$$A = B^n \qquad \frac{\Delta A}{A} = n\frac{\Delta b}{b}$$

5. Método general

Una función cualesquiera:

[4.22]
$$A = f(B, C, D, \ldots)$$

se puede desarrollar en serie de Taylor:

[4.23]
$$A = f(b,c,d,...) + \frac{\partial f(b,c,d,...)}{\partial B} dB + \frac{\partial f(b,c,d,...)}{\partial C} dC + ...$$

y el error sería:

[4.24]
$$\Delta A = A - f(b,c,d,...) = \left|\frac{\partial f(b,c,d,...)}{\partial B}\right| \Delta b + \left|\frac{\partial f(b,c,d,...)}{\partial C}\right| \Delta c + ...$$

donde los valores absolutos se toman para ponerse en el caso más desfavorable.