Tema 8:Método de Intersección Múltiple

ÍNDICE

. Resolución.

2.4 Resolución del método de intersección **inversa** múltiple por mínimos cuadrados .

. Coordenadas aproximadas del punto a determinar.

. Planteamiento de las relaciones de observación.

. Resolución.

2.5 Resolución del método de intersección **mixta** múltiple por mínimos cuadrados .

. Coordenadas aproximadas del punto a determinar.

. Planteamiento de las relaciones de observación.

. Resolución.

2.6 Resolución de la intersección angular múltiple **con más de un punto** a determinar, por mínimos cuadrados.

. Coordenadas aproximadas de los puntos a determinar.

. Planteamiento de las relaciones de observación.

. Resolución.

3. LA INTERSECCIÓN MÚLTIPLE CON ANGULOS Y CON DISTANCIAS.

3.1 Introducción.

3.2 Expresión de la relación de observación por dirección angular observada.

3.3 Expresión de la relación de observación por distancia observada.

3.4 Metodología general de cálculo por mínimos cuadrados.

. Coordenadas aproximadas del punto a determinar.

. Planteamiento de las relaciones de observación.
- Observaciones angulares.
- Observaciones de distancia.

. Asignación de pesos.

. Resolución del sistema de ecuaciones por mínimos cuadrados.
- Relaciones normales.
- Solución al sistema de ecuaciones de observación.

. Coordenadas ajustadas del punto a determinar.

1. DESCRIPCIÓN GENERAL

1.1 Método general de observación.

1.2 Clasificación de las intersecciones múltiples.

. Según puntos de estación.

- Directa.
- Inversa.
- Mixta.

. Según tipo de observación

. Angular.
. Angular más distancias.

1.3 Obtención de la solución final como media aritmética o ponderada de las intersecciones simples posibles.

1.4 Metodología general de cálculo por mínimos cuadrados.

A) Las medidas topográficas y el modelo matemático.

B) Introducción a los ajustes de las medidas topográficas por mmcc.

C) Modelos de relaciones de observación en las medidas topográficas.

E) Método de ajuste mmcc.

E) Matriz de pesos.

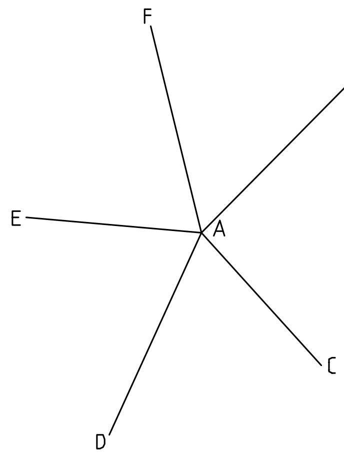
G) Precisión de las coordenadas ajustadas.

1.1 MÉTODO GENERAL DE OBSERVACIÓN

El método de observación en la intersección múltiple es el mismo que el que estudiamos en la intersección simple: método de vueltas de horizonte. Este método tenemos que relacionarlo siempre con la observación angular múltiple, ya que nunca se realiza una observación para resolver un método simple. No olvidemos que todas las observaciones de campo han de ser siempre redundantes.

Recordemos que el método de vueltas de horizonte consiste en estacionar el instrumento en el vértice, por ejemplo en A y en posición C.D. visar a todas las direcciones, volver a mirar a la visual de origen, y comprobar si su lectura, llamada de *cierre*, es la misma que al comienzo, lo que probara que el instrumento no ha sufrido ningún tipo de movimiento durante la observación.

Se procede a situar el equipo en posición C.I. y se repiten las observaciones girando en sentido contrario al anterior y comprobando igualmente el cierre. Si es correcto se dice que se ha observado *una serie o vuelta de horizonte* en caso contrario se ha de repetir todo desde el principio.



No debemos olvidar tampoco el método de pares sobre una referencia. Consiste en elegir una dirección de referencia R, que este bien definida, y que puede ser o no alguna de las direcciones a observar. Se hacen las lecturas correspondientes sobre R y B como si se tratase de una vuelta de horizonte compuesta nada más que por dicho *par* de direcciones. A continuación se visan de igual modo a R y C, que constituirán el segundo par, y así, sucesivamente hasta haber combinado con R todas las direcciones. Como la observación de cada par se hace en muy poco tiempo se evitan posibles movimientos del equipo.

Si el numero de direcciones es grande, se tarda bastante en la observación de las direcciones por pares a una referencia, por lo que para abreviar se pueden utilizar el método mixto que consiste en dividir las direcciones totales en varias de tal manera que se vise a la referencia y a unas direcciones y luego se vuelta a visar a la referencia y al resto de las direcciones. Para refundir las vueltas de horizonte en una sola se disponen de distintas lecturas a la referencia R en cada una de ellas.

1.2 CLASIFICACIÓN DE LAS INTERSECCIONES MÚLTIPLES.

. *Según puntos de estación.*
- *Directa.*
- *Inversa.*
- *Mixta.*

. *Según tipo de observación*
. *Angular.*
. *Angular más distancias.*

A) SEGÚN EL PUNTO DE ESTACIÓN

Las intersecciones podemos clasificarlas atendiendo a dos criterios. El primero de ellos distingue si el punto de estación, desde el que se obtienen las observaciones es o no conocido de antemano. El análisis de esta situación en las intersecciones simples nos permitía distinguir entre intersecciones directas (punto de estación de coordenadas ya conocidas), inversas (punto de estación cuyas coordenadas se desean determinar) y mixtas (se ha estacionado tanto en puntos de coordenadas ya conocidas como en aquel cuyas coordenadas se desea determinar). Esta misma clasificación se mantiene en las intersecciones múltiples.

Es muy importante recordar la gran característica que extraíamos del análisis de las intersecciones directas. En una intersección directa siempre conocemos el acimut (u orientación si estamos en proyección UTM) al punto desconocido. Realizando cálculos básicos, el acimut pasa a ser un dato "casi" de campo. Basta con determinar la desorientación en el punto de estación a partir de las visuales de orientación a otros puntos conocidos.

En inversa, sin embargo, al estar estacionados en un punto no conocido, el acimut a cualquier otro punto es una incógnita hasta que se haya realizado el cálculo completo, y se hayan obtenido las coordenadas del punto problema.

B) SEGÚN EL TIPO DE OBSERVACIÓN

El segundo criterio nos permite diferenciar en las intersecciones aquellas en las que se dispone solo de observaciones angulares, y aquellas en las que además se han realizado mediciones de distancias.

La facilidad con la que se realiza la medida de distancias con los actuales equipos, ha hecho que este segundo caso sea el más usual en Topografía. Cuando lo estudiéis dadle toda la importancia que tiene. Las intersecciones mixtas con observaciones angulares y de distancias son en la actualidad el método líder de nuestra especialidad.

1.3 OBTENCIÓN DE LA SOLUCIÓN FINAL COMO MEDIA ARITMÉTICA O PONDERADA DE LAS INTERSECCIONES SIMPLES POSIBLES.

La resolución de las intersecciones múltiples podría hacerse descomponiendo el problema en todas las intersecciones simples que lo componen, pero el método general que se aplica en su resolución es el método de ajuste por mínimos cuadrados.

Durante todo el curso os hemos ido recordando reiteradamente la necesidad de tener comprobación de los resultados y redundancia en las observaciones. Esta superabundancia de datos puede analizarse y resolverse fácilmente mediante el método de MMCC.

1.4 METODOLOGÍA GENERAL DE CÁLCULO POR MÍNIMOS CUADRADOS.

A) Las medidas topográficas y el modelo matemático.

B) Introducción a los ajustes de las medidas topográficas por mmcc.

C) Modelos de relaciones de observación en las medidas topográficas.

D) Método de ajuste mmcc.

E) Matriz de pesos.

F) Precisión de las coordenadas ajustadas.

A) MEDIDAS TOPOGRÁFICAS Y MODELO MATEMÁTICO.

En topografía nos encontramos con tres tipos de observaciones:

- direcciones angulares,
- distancias,
- desniveles.

El problema en los métodos topográficos derivaba de la necesidad de redundancia de datos de campo, y de la posibilidad de obtener observaciones topográficas con los nuevos equipos de medida, al incorporar la distanciometría a los teodolitos. Los avances en la tecnología de medida fueron demandando nuevos sistemas de cálculo.

Se trata de un proceso simultáneo: necesidad de redundancia en las observaciones, equipos que las hacen cada vez más posibles en aplicaciones topográficas, avances informáticos que permiten su cálculo.

Para resolver esta situación, es suficiente con:

- a partir de los datos de campo,
- crear un sistema de ecuaciones,
- dejar que la metodología de ajuste mmcc nos dé una solución única.

Los datos de campo se han de encontrar representados de forma única en los sistemas de ecuaciones, y las incógnitas de las ecuaciones nos han de conducir a las coordenadas de los puntos que queremos determinar.

Analicemos estos tres aspectos.

Respecto a los **datos de campo**. A cada tipo de observación le deberá corresponder un tipo de ecuación. Si hay tres modelos de datos de campo habrá tres modelos de ecuación. Deberá ser posible hablar de:

- Ecuación para direcciones angulares.
- Ecuación para distancias.
- Ecuación para desniveles.

Al decir que los datos de campo se encuentren representados de forma única, lo que estamos exigiendo en la Modelización, es que métodos de campo redundantes, dén lugar a sistemas de ecuaciones redundantes, y que métodos de campo simples, dén lugar a sistemas de ecuaciones simples. Analizando ecuaciones, analizo métodos y resolviendo ecuaciones resuelvo métodos.

Respecto a los **sistemas de ecuaciones**

- deberán relacionar las observaciones de campo con las incógnitas. En cada ecuación aparecerá la observación de campo (convenientemente tratada) y como incógnitas, parámetros que nos lleven a obtener la solución a nuestro problema, es decir a determinar las coordenadas del punto o puntos desconocidos.

- Se resolverán matemáticamente. En este sentido si el sistema es lineal y determinado (igual número de ecuaciones que de incógnitas) tendrá una solución única, es decir estaremos en un método topográfico simple. Y si el sistema es lineal y no determinado (sobredeterminado: mayor número de ecuaciones que de incógnitas) la solución no es única y puede estimarse el valor más probable aplicando la herramienta de cálculo denominada mmcc.

Nos queda buscar la forma de esas ecuaciones, cómo son exactamente.

En el caso en que me encuentre con que la ecuación que relaciona el dato de campo con las incógnitas no es lineal, ¿qué hacemos?, ¿nos quedamos sin la potencia de resolución de sistemas de ecuaciones que nos proporciona el cálculo por mmcc?. No, como mmcc no resuelve sistemas no lineales, lo que sí podremos hacer es linealizar la ecuación correspondiente.

Para linealizar una ecuación se aplica el método de Taylor. Este método se denomina también método de aproximaciones sucesivas. Y debido a ello, no debemos olvidarnos que cuando el sistema de ecuaciones lineales al que se aplica mmcc procede de una linealización, la resolución final se realiza por aproximaciones sucesivas, el método es iterativo. Se resuelve el sistema aplicando mínimos cuadrados, pero la solución permite re-entradas en el cálculo. Se procederá a la resolución iterativa del sistema a partir de unos valores iniciales de las incognitas que deberán ser estimados de algún modo. En este caso nos encontramos con una terminología en mmcc, similar a la siguiente:

- Parámetros aproximados que se introducen en el primer cálculo:

$$X_A^0 \, , \, Y_A^0 \, , \, H_A^0$$

- Parámetros aproximados que se introducen en el segundo cálculo, en la primera iteración:

$$X_A^1 \, , \, Y_A^1 \, , \, H_A^1$$

- Parámetros aproximados que se introducen en el tercer cálculo, en la segunda iteración:

$$X_A^2 \, , \, Y_A^2 \, , \, H_A^2$$

- Y así sucesivamente.

El **método de mmcc** es el que és. Se trata de una herramienta de cálculo que resuelve sistemas lineales redundantes, sistemas con más ecuaciones que incógnitas.

Recuperando nuestra ubicación en las metodologías topográficas, nos planteamos que para resolver las intersecciones múltiples vamos a recurrir a un método en el que:

- a partir de los datos de campo,
- creamos un sistema de ecuaciones,
- que resolveremos por ajuste mmcc,

- para obtener una única solución.

B) INTRODUCCION A LOS AJUSTES DE LAS MEDIDAS TOPOGRAFICAS POR MMCC.

Los ajustes mínimo cuadráticos en Topografía están muy bien tratados, en el capítulo 14 "*Survey Measurement Adjustments by Least Squares*" de Raul R. Wolf, del libro *The Surveying Handbook* de Russell Brinker y Ray Minnick, que se ha indicado como referencia en la bibliografía complementaria. Los contenidos que siguen a continuación son la traducción al español de este capítulo.

En este libro de referencia se describen las condiciones fundamentales que conforman el ajuste por mínimos cuadrados, y se ofrecen ejemplos elementales; se explican los procedimientos sistemáticos que deben seguirse para formar y resolver las ecuaciones en el método de MMCC, incluyendo los métodos matriciales; finalmente se explican los procedimientos específicos de ajuste de redes de nivelación, trilateración, triangulación y poligonación, y se explican ejemplos de problemas.

Para comenzar el análisis de los ajustes en las medidas en el tema que nos ocupa, debemos recordar que en Topografía, siguiendo la terminología clásica, se definen dos clases de errores: sistemáticos y accidentales. Los errores sistemáticos siguen leyes físicas, y si se miden las causas que lo producen, se pueden cuantificar y aplicar las correcciones que los eliminan. Los errores accidentales existen siempre en los valores observados.

Experimentalmente se ha demostrado que los errores accidentales en Topografía siguen leyes matemáticas de probabilidad, y que una serie de medidas contienen errores accidentales que responden a la distribución normal. Respecto a la misma, se aprecia que los errores accidentales tienen las siguientes características:

1. Los errores pequeños se dan con más frecuencia que los grandes.
2. Los errores positivos y negativos del mismo valor, se dan con igual frecuencia.
3. Los errores grandes rara vez aparecen.

Debemos tener en cuenta que las equivocaciones no son errores y no pueden ser consideradas como tales. Debe evitarse cometer equivocaciones teniendo cuidado y tomando la precaución de contrastar todos los valores medidos.

En los trabajos topográficos, tras eliminar equivocaciones y hacer las correcciones de los errores sistemáticos, se hace evidente la presencia de los errores accidentales, que son los que nos sirven de referencia para cuantificar las incertidumbres finales.

Por ejemplo, en nivelación se cierra en puntos de altitud conocida. Los errores de cierre de la línea pueden calcularse, ofreciendo un indicador de los errores accidentales remanentes. De igual modo, en la medida de ángulos, la suma de los ángulos medidos en una vuelta de horizonte debe ser de 360º, y en Topografía plana la suma de los ángulos de una poligonal debe ser múltiplo de 200^g .

Las discrepancias existentes con respecto a esas condiciones indican la presencia de errores accidentales en los valores medidos.

En Topografía, los ajustes se aplican para determinar los valores que distribuyen los errores de cierre y que permiten que se cumplan las condiciones geométricas matemáticas. Se usan diversos procedimientos. El primero de ellos podría ser determinar las correcciones simples, de igual valor para todos los valores medidos, que se obtendría dividiendo el error de cierre total por el número de medidas. Otra forma consistiría en introducir correcciones de distinto valor según el origen del error detectado.

En Topografía los errores responden a la "distribución normal" y están conformes con las leyes matemáticas de probabilidad. Para aplicar procedimientos de ajuste más rigurosos que los mencionados, hay que tener en cuenta esta teoría de distribución. El método de ajuste por mínimos cuadrados se apoya en las leyes de probabilidad.

C) MODELOS DE RELACIONES DE OBSERVACIÓN EN LAS MEDIDAS TOPOGRÁFICAS.

Como hemos indicado anteriormente, en topografía tenemos tres tipos de observaciones:

- direcciones angulares.
- distancias.
- desniveles.

Tendremos tres modelos de ecuaciones. A cada tipo de observación de campo le corresponde un modelo de ecuación. Deberá ser posible hablar de:

- Relación de observación por dirección angular.
- Relación de observación de distancias.
- Relación de observación de desnivel.

Y tal como hemos planteado, para cada dato de campo se construirá una única ecuación.

c.1) EXPRESIÓN DE LA RELACIÓN DE OBSERVACIÓN POR DIRECCIÓN ANGULAR OBSERVADA.

Se trata de obtener ecuaciones a partir de los datos de campo. Para las observaciones de dirección (medidas angulares acimutales) obtenemos el modelo de ecuación a partir de la expresión del acimut.

$$\theta_1^2 = (\theta_1^2)' + \partial\theta_1^2$$

$$\partial\theta_1^2 + (\theta_1^2)' - \theta_1^2 = V_1^2$$

(Valor aproximado + corrección) – valor observado = residuo

El acimut puede expresarse en función de las coordenadas de la siguiente forma:

$$tag\ \theta_1^2 = \left(\frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1} \right)$$

Donde el acimut es función de cuatro términos:

$$\theta_1^2 = f(X_1, X_2, Y_1, Y_2)$$

La ecuación

$$\partial\theta_1^2 + (\theta_1^2)' - \theta_1^2 = V_1^2$$

no es lineal, ya que la tangente no lo es. Si queremos poder resolver el sistema de ecuaciones por mmcc, tendremos que linealizarla para convertirla en nuestro modelo de relación de observación por dirección angular.

Para ello operamos de la siguiente forma:

$$\theta_1^2 = f(X_1, X_2, Y_1, Y_2)$$

$$\partial\theta_1^2 = \frac{\partial f}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial f}{\delta X_1} dX_1 + \frac{\partial f}{\partial Y_2} dY_2 + \frac{\partial f}{\partial Y_1} dY_1$$

$$\frac{\partial f}{\partial X_2} = \frac{1}{1+\left(\frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1}\right)^2} \cdot \frac{1}{(Y_2 - Y_1)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial X_1} = \frac{1}{1+\left(\frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1}\right)^2} \cdot \frac{(-1)}{(Y_2 - Y_1)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial Y_2} = \frac{1}{1+\left(\frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1}\right)^2} \cdot \frac{(-1)(X_2 - X_1)}{(Y_2 - Y_1)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial Y_1} = \frac{1}{1+\left(\frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1}\right)^2} \cdot \frac{(-1)(X_2 - X_1)}{(Y_2 - Y_1)^2} \cdot (-1)$$

Y sustituyendo:

$$\partial\theta_1^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1}\right)^2} \cdot \left[\frac{1}{(Y_2 - Y_1)} dX_2 - \frac{1}{(Y_2 - Y_1)} dX_1 - \frac{(X_2 - X_1)}{(Y_2 - Y_1)^2} dY_2 + \frac{(X_2 - X_1)}{(Y_2 - Y_1)^2} dY_1\right]$$

Ahora multiplicamos y dividimos por $(Y_2 - Y_1)$

$$\partial\theta_1^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{X_2-X_1}{Y_2-Y_1}\right)^2}\cdot\left[\frac{(Y_2-Y_1)}{(Y_2-Y_1)^2}dX_2 - \frac{(Y_2-Y_1)}{(Y_2-Y_1)^2}dX_1 - \frac{(X_2-X_1)}{(Y_2-Y_2)^2}dY_2 + \frac{(X_2-X_1)}{(Y_2-Y_1)^2}dY_1\right]$$

$$\partial\theta_1^2 = \frac{(Y_2-Y_1)^2}{D^2}\cdot\left[\frac{(Y_2-Y_1)}{(Y_2-Y_1)^2}dX_2 - \frac{(Y_2-Y_1)}{(Y_2-Y_1)^2}dX_1 - \frac{(X_2-X_1)}{(Y_2-Y_2)^2}dY_2 + \frac{(X_2-X_1)}{(Y_2-Y_1)^2}dY_1\right]$$

$$\partial\theta_1^2 = \frac{1}{D^2}\cdot\left[(Y_2-Y_1)dX_2 - (Y_2-Y_1)dX_1 - (X_2-X_1)dY_2 + (X_2-X_1)dY_1\right]$$

Esta ecuación está en radianes, como vamos a estar utilizando valores de acimutes en unidades centesimales, vamos a cambiar el sistema de unidades. La utilizaremos en segundos centesimales:

$$\partial\theta_1^2 = \frac{r^{CC}}{D^2}\cdot\left[(Y_2-Y_1)dX_2 - (Y_2-Y_1)dX_1 - (X_2-X_1)dY_2 + (X_2-X_1)dY_1\right]$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$\partial\theta_1^2 + (\theta_1^2)' - \theta_1^2 = V_1^2$$

$$\frac{r^{CC}}{D^2}\cdot\left[(Y_2-Y_1)dX_2 - (Y_2-Y_1)dX_1 - (X_2-X_1)dY_2 + (X_2-X_1)dY_1\right] + \left[(\theta_1^2)' - \theta_1^2\right]^{CC} = v$$

En estas ecuaciones $(\theta_1^2)'$ es el obtenido mediante coordenadas, mientras que θ_1^2 es el obtenido mediante lecturas sumándole a éstas la desorientación de la estación.

$$\theta_1^2 = L_1^2 + \Sigma_1$$

Cuando no conozcamos la desorientación en el punto de estación, es decir cuando hemos estacionado y hemos obtenido las lecturas desde el propio punto a determinar (desconocido) la Σ_1, será una incógnita más a determinar. Normalmente no introducimos esta incógnita como tal, sino que calculamos un valor aproximado, y planteamos como incógnita la variación de desorientación:

$$\theta_1^2 = L_1^2 + (\Sigma_1{}' + d\Sigma)$$

Sustituyendo en el modelo anterior obtenemos:

$$\frac{r^{CC}}{D^2}\cdot\left[(Y_2-Y_1)dX_2 - (Y_2-Y_1)dX_1 - (X_2-X_1)dY_2 + (X_2-X_1)dY_1\right] + \left[(\theta_1^2)' - (L_1^2 + \Sigma'_1 + d\Sigma_1)\right]^{CC} = v$$

Finalmente, ordenamos las incógnitas y el término independiente:

$$\boxed{\frac{r^{CC}}{D^2}\cdot\left[(Y_2-Y_1)dX_2-(Y_2-Y_1)dX_1-(X_2-X_1)dY_2+(X_2-X_1)dY_1\right]-d\Sigma_1+\left[(\theta_1^2)'-(L_1^2+\Sigma'_1)\right]^{CC}=v}$$

EXPRESIÓN GENERAL DE LA RELACIÓN DE OBSERVACIÓN POR DIRECCIÓN ANGULAR OBSERVADA

Los incognitas son cinco:

- La variación de coordenadas del punto de estación: dX_1, dY_1
- La variación de coordenadas del punto visado: dX_2, dY_2,
- La variación de desorientación del punto de estación: $d\Sigma_1$

No olvidemos que las unidades de los residuos son los segundos centesimales**.**

Este es nuestro modelo de relación de observación por cada dirección acimutal obtenida en campo. Bastará con obtener unas coordenadas aproximadas del punto de estación y del punto visado, y hacer los cambios de subíndice para aplicarla a la observación concreta.

Imaginemos que el punto de estación es el punto CT, que el punto observado es el punto 22, y que el dato obtenido en campo es una observación acimutal: L_{CT}^{22}. La ecuación que podemos plantear es:

Punto de estación 1 ≡ CT
Punto visado 2 ≡ 22

$$\frac{r^{CC}}{(D_{CT}^{22})^2}\cdot\left[(Y_{22}-Y_{CT})dX_{22}-(Y_{22}-Y_{CT})dX_{CT}-(X_{22}-X_{CT1})dY_{22}+(X_{22}-X_{CT})dY_{CT}\right]-d\Sigma_{CT}$$

$$+\left[(\theta_{CT}^{22})'-(L_{CT}^{22}+\Sigma'_{CT})\right]^{CC}=v$$

Y de modo análogo podría realizarse para el conjunto de observaciones de campo.

Si se conocieran las coordenadas de cualquiera de los puntos, sus respectivos diferenciales serían igual a cero, con lo cual quedaría reducida la expresión anterior.

c.2) EXPRESIÓN DE LA RELACIÓN DE OBSERVACIÓN POR DISTANCIA OBSERVADA.

Para cada distancia podremos plantear:

$$D=D'+\partial D$$

o lo que es lo mismo:

$$\partial D + D' - D = 0$$

Al ajustar no se cumplirá la igualdad, si el sistema es redundante, y podremos introducir el concepto de residuo.

$$\partial D + D' - D = v$$

La distancia, en un sistema cartesiano, viene dada por:

$$D_1^2 = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$

$$D^2 = (X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2$$

Como no es una ecuación lineal, para poder aplicar el método de ajustes mínimo cuadráticos, tendremos que proceder a linealizarla.

Diferenciando:

$$2D \cdot \partial D = 2 \cdot (X_2 - X_1) \cdot \partial (X_2 - X_1) + 2 \cdot (Y_2 - Y_1) \cdot \partial (Y_2 - Y_1)$$

$$\partial D = \frac{(X_2 - X_1)}{D} \cdot \partial (X_2 - X_1) + \frac{(Y_2 - Y_1)}{\mathrm{D}} \cdot \partial (Y_2 - Y_1)$$

$$\partial D = \frac{1}{D}\left[-(X_2 - X_1)dX_1 - (Y_2 - Y_1)dY_1 + (X_2 - X_1)dX_2 + (Y_2 - Y_1)dY_2\right]$$

Sustituyendo en la expresión anterior obtenemos:

$$\partial D + D' - D = v$$

$$\frac{1}{D_{CAL}}\left[-(X_2 - X_1)dX_1 - (Y_2 - Y_1)dY_1 + (X_2 - X_1)dX_2 + (Y_2 - Y_1)dY_2\right] + D_{CAL} - D_{OBS} = V$$

El modelo de relación de observación por cada distancia observada (y tratada convenientemente para reducirla al sistema cartesiano correspondiente) queda:

$$\boxed{\frac{1}{D_{CAL}}\left[-(X_2 - X_1)dX_1 - (Y_2 - Y_1)dY_1 + (X_2 - X_1)dX_2 + (Y_2 - Y_1)dY_2\right] + D_{CAL} - D_{OBS} = V}$$

EXPRESIÓN GENERAL DE LA RELACIÓN DE OBSERVACIÓN POR DISTANCIA OBSERVADA

Si se conocieran las coordenadas de cualquiera de los puntos, sus respectivos diferenciales seríaN igual a cero, y quedaría reducido el número de incognitas.

Imaginemos que el punto de estación es el punto CT, que el punto observado es el punto 22, y que el dato obtenido en campo es la distancia entre ambos. La distancia observada hay que reducirla al sistema cartesiano correspondiente:

- Hay que calcular la distancia reducida si estamos en un sistema de coordenadas topográficas.
- Hay que calcular la distancia UTM, si estamos trabajando en este sistema.

Con esta distancia, la ecuación que podemos plantear es:

Punto de estación 1 ≡ CT
Punto visado 2 ≡ 22

$$\left[\frac{1}{D_{CAL}}\left[-(X_{22}-X_{CT1})dX_{CT}-(Y_{22}-Y_{CT})dY_{CT}+(X_{22}-X_{CT})dX_{22}+(Y_{22}-Y_{CT})dY_{22}\right]+D_{CAL}-D_{OBS}\right]=V$$

Algunos autores sugieren variaciones en la ecuación de distancia con el fin de tener en cuenta la posible introducción de errores sistemáticos en la medida de distancias. Por ello incluyen un factor de escala para tratar de eliminar posibles errores debidos a una elección inadecuada del índice de refracción, reducción altimétrica incorrecta, factor de escala de la proyección cartográfica inadecuado o incluso errores sistemáticos en la definición del datum de la red.

c.3) EXPRESIÓN DE LA RELACIÓN DE OBSERVACIÓN POR DESNIVEL OBSERVADO.

Finalmente vamos a deducir el modelo de relación de observación para observaciones de desnivel.

En cada desnivel podremos plantear:

$$\Delta H_1^2 = (\Delta H_1^2)' + d(\Delta H)$$

o lo que es lo mismo:

$$d(\Delta H) + (\Delta H_1^2)' - \Delta H_1^2 = 0$$

Al ajustar no se cumplirá la igualdad, si el sistema es redundante, y podremos introducir el concepto de residuo.

$$d(\Delta H) + (\Delta H_1^2)' - \Delta H_1^2 = v$$

El desnivel entre dos puntos viene expresado por la diferencia de altitud :

$$\Delta H_1^2 = H_2 - H_1$$
$$d(\Delta H_1^2) = dH_2 - dH_1$$

El modelo de relación de observación queda:

$$\boxed{dH_2 - dH_1 + (\Delta H_1^2)' - \Delta H_1^2 = v}$$

Donde dH_1 y dH_2, son las incógnitas.

D) MÉTODO DE AJUSTE MMCC.

La realización de ajustes de valores medidos, por el método de MMCC no es nueva. A finales del S. XVIII la realizó el matemático alemán Karl Gauss. Hasta la llegada de los ordenadores, sin embargo, las técnicas de MMCC rara vez se empleaban, debido al tamaño de los cálculos que implicaban. Ahora los procedimientos de cálculo se ejecutan de forma rutinaria. El método de MMCC, se aplica en los ajustes, independientemente de la naturaleza de las medidas topográficas realizadas, incluyendo desniveles, distancias reducidas y ángulos horizontales y cenitales.

Para un grupo de observaciones de igual peso, la condición fundamental que se aplica en el ajuste por MMCC es que la suma de los cuadrados de los residuos sea mínima. Esta condición, que ha sido desarrollada a partir de las ecuaciones de la curva de distribución normal, proporciona los valores más probables de las cantidades ajustadas.

Supongamos un grupo de **m** medidas de igual peso cuyos residuos son V_1 , V_2 , V_3 ....V_m. En forma de ecuación paramétrica, la condición fundamental del ajuste por MMCC ,se expresa como sigue:

$$\sum (V_i)^2 = (V_1)^2 + (V_2)^2 + (V_3)^2 + \ldots\ldots + (V_m)^2 = \text{MINIMO.}$$

Si los valores medidos son de distinto peso, en el ajuste por MMCC, la condición fundamental que se impone, es que la suma de los pesos **p** por su correspondientes residuos al cuadrado, sea mínima, o en forma de ecuación:

$$\sum p_i(V_i)^2 = p_1(V_1)^2 + p_2(V_2)^2 + p_3(V_3)^2 + \ldots\ldots + p_m(V_m)^2 = \text{MINIMA}$$

Debemos tener en cuenta las siguientes consideraciones básicas, que sustentan la teoría de MMCC:

1. Las equivocaciones y los errores sistemáticos han sido eliminados previamente, así que sólo quedan errores accidentales.
2. El número de observaciones que van a ser ajustadas es grande.
3. La frecuencia de la distribución de los errores, es normal .

Aunque no se cumplan siempre estas condiciones, el ajuste por MMCC proporciona el tratamiento más riguroso de los errores, y se ha convertido en la Topografía actual, en un método muy importante y de uso frecuente. Además de proporcionar los valores más probables de las incógnitas, el ajuste por MMCC permite:

1. Determinar la precisión de las cantidades ajustadas.

2. Manifiesta la presencia de errores grandes y equivocaciones, así que pueden tomarse acciones para eliminarlas.
3. Hace posible el diseño óptimo de las procedimientos topográficos en gabinete, antes de ir al campo a realizar las mediciones.

Este último tópico está en discusión, pero hay autores que lo defienden.

Hay dos métodos básicos para el uso de MMCC en ajustes topográficos :

1. Método de ecuaciones de observación
2. Método de ecuaciones de condición.

En el método de ecuaciones de observación, las ecuaciones se obtienen relacionando los valores medidos con sus errores residuales y con los parámetros desconocidos. Se establece una ecuación de observación por cada medida. Para que la solución sea única el número de ecuaciones debe ser igual al número de incógnitas. Si se realizan observaciones redundantes, se pueden escribir más ecuaciones de observación de las que se necesitan para una solución única y se pueden determinar los valores más probables de las incógnitas por el método de MMCC. Para un grupo de observaciones de igual peso, se obtiene una expresión del error residual por cada ecuación de observación. Los residuos se elevan al cuadrado y se suman para obtener la función que se expresa en la ecuación fundamental del ajuste mínimo cuadrático.

Para minimizar la función, las derivadas parciales de la expresión, con respecto a cada una de las variables incógnita, se igualan a cero. Esto forma un conjunto de ecuaciones que se denominan ecuaciones normales, que son igual en número, al número de incógnitas. Se resuelven las ecuaciones normales y se obtienen los valores más probables para las incógnitas.

En sistemas de ecuaciones de observación grandes, ayuda utilizar procedimientos sistemáticos, en la formulación de las ecuaciones normales.

Consideremos el siguiente sistema de **m** ecuaciones de observación lineales de igual peso que contienen **n** incógnitas :

$$
\begin{gathered}
a_1 A + b_1 B + c_1 C + \dots\dots\dots + n_1 N - L_1 = V_1 \\
a_2 A + b_2 B + c_2 C + \dots\dots\dots + n_2 N - L_2 = V_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_m A + b_m B + c_m C + \dots\dots\dots + n_m N - L_m = V_m
\end{gathered}
$$

En estas ecuaciones las **a, b ,** etc. son los coeficientes de las incógnitas **A,B,C,** etc. Las **L** son las constantes y las **V** son los residuos.

Elevando al cuadrado los residuos y sumándolos, se forma la función $\sum \mathbf{V^2}$.

Tomando las derivadas parciales de $\sum V^2$ con respecto a cada incógnita A,B,C, etc; se forman las **n** ecuaciones normales.

En forma matricial, las ecuaciones de observación vendrían expresadas del siguiente modo:

$$ {}_mA_n \; {}_nX_1 = {}_mL_1 + {}_mV_1 $$

donde

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & n_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & n_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_m & b_m & c_m & \ldots & n_m \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ \ldots \\ N \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \ldots \\ L_m \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \ldots \\ V_m \end{bmatrix}$$

Analizando la siguiente representación matricial, se comprueba que reproduce exactamente las ecuaciones normales

$$A^T A X = A^T L$$

En esta ecuación $A^T A$ es la matriz de los coeficientes de las incógnitas de las ecuaciones normales. Multiplicando ambos miembros de la ecuación por $(A^T A)^{-1}$ y simplificando, se obtiene:

$$(A^T A)^{-1} (A^T A) X = (A^T A)^{-1} A^T L$$

$$I X = (A^T A)^{-1} A^T L$$

$$\mathbf{X = (A^T A)^{-1} A^T L}$$

En donde I es la matriz identidad. Esta ecuación es la expresión fundamental del método de ajuste por MMCC para observaciones de igual precisión. La matriz X está formada por los valores más probables de las incógnitas A,B,C,...., N.

Para un sistema de ecuaciones con pesos, la siguiente ecuación matricial proporciona los valores de la matriz X :

$$\boxed{\mathbf{X = (A^T P A)^{-1} A^T P L}}$$

La matriz P es una matriz diagonal de pesos que se define de la siguiente manera:

$$P = \begin{vmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_m \end{vmatrix}$$

En la matriz P, todos los elementos fuera de la diagonal principal son **0**. Esta situación corresponde a observaciones independientes y no correlacionadas. Este es generalmente el caso de la Topografía.

La ecuación:

$$\mathbf{X = (A^T PA)^{-1} A^T PL}$$

responde al caso general, y puede usarse tanto en ajustes con pesos como sin ellos. En un ajuste, si las observaciones son todas de igual peso, la matriz P se convierte en una matriz identidad con todos los elementos de la diagonal principal iguales a **1**, lo que la reduce a la ecuación:

$$\mathbf{X = (A^T A)^{-1} A^T L}$$

Supongamos el siguiente sistema de 3 ecuaciones con dos incógnitas.

$$\begin{aligned} &2x - 3y - 1 = 0 \\ &-x - y - 2 = 0 \\ &3x - 2y - 7 = 0 \end{aligned}$$

Si resolvemos el sistema dará unas soluciones que sustituidas en el sistema dará un resultado que en general será distinto de cero luego, a esa diferencia la llamaremos residuo:

$$\begin{aligned} &2x - 3y - 1 \neq 0 = V_1 \\ &-x - y - 2 \neq 0 = V_2 \\ &3x - 2y - 7 \neq 0 = V_3 \end{aligned}$$

La condición del ajuste mmcc en este caso será:

f(x,y) = $(2x - 3y - 1)^2 + (-x - y - 2)^2 + (3x - 2y - 7)^2$

Ello conlleva que la derivada parcial con respecto a cada una de las incógnitas sea igual a cero, constituyendo el sistema de ecuaciones normales:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(2x - 3y - 1)\cdot 2 + 2(-x - y - 2)\cdot(-1) + 2(3x - 2y - 7)\cdot 3 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2(2x - 3y - 1)\cdot(-3) + 2(-x - y - 2)\cdot(-1) + 2(3x - 2y - 7)\cdot(-2) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} 28x - 22y - 42 = 0 \\ 11x + 14y + 19 = 0 \end{aligned}\right\} \;=\; x = 1.33\,; \quad y = \text{-}0.46$$

En general si tenemos un sistema:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3 = 0 \end{aligned}$$

Las ecuaciones normales son:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = [aa]x + [ab]y + [ac] = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = [ba]x + [bb]y + [bc] = 0$$

Siendo:

$$[aa] = a_1a_1 + a_2a_2 + a_3a_3$$
$$[ab] = a_1b_1 + a_2b_2 + a_2b_2$$
$$[ba] = b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3$$
$$[ac] = a_1c_1 + a_2c_2 + a_3b_3$$
$$[bb] = b_1b_1 + b_2b_2 + b_3b_3$$
$$[bc] = b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3$$

E) MATRIZ DE PESOS.

La materialización del modelo estadístico se produce a través de la denominada matriz de pesos, que se construye a partir de las varianzas y covarianzas de las observaciones implícitas en el ajuste.

La matriz diagonal de pesos P se define de la siguiente manera:

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & p_n \end{bmatrix}_n^n$$

Una observación de mucha precisión tendrá un peso en el ajuste alto, dependiendo de la calidad de todas las observaciones.

Los criterios de asignación de pesos pueden ser:

- Considerar todas las observaciones de la misma precisión, es decir la matriz de pesos es la identidad.
- Desconocida la varianza se pueden aplicar criterios topográficos. Por ejemplo se puede construir la matriz de pesos considerando que el peso de la observación es inversamente proporcional a la distancia del tramo

$$p = \frac{k}{D}$$

K es una constante que podemos calcular asignando peso igual a 1 a uno de los valores, por ejemplo al primero. A partir de él calculamos los demás pesos.

$$p_1 = \frac{k}{D_1}$$

$$p_1 = \frac{k}{D_1} = 1 \longrightarrow K = 1\,x\,D_1$$

$$p_2 = \frac{k}{D_2} \longrightarrow p_2 = \frac{1\,.\,D_1}{D_2}$$

Y así sucesivamente.

- Conocida la varianza, el peso p de una cierta medida se define como una cantidad inversamente proporcional a su varianza. La relación entre el peso y la varianza es:

$$P = k / \sigma^2$$

Siendo K una constante de proporcionalidad.

Si una observación tiene peso unidad, entonces la constante anterior K = σ_0^2 y se denomina varianza de referencia, varianza de la unidad de peso o varianza de la observación de peso unidad.

A partir de ella el peso de cada observación será:

$$P = \sigma_0^2 / \sigma^2$$

Podemos poner los pesos y las varianzas de cada una de las observaciones en forma matricial. Tal como hemos definido el concepto de peso:

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & P_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_0^2}{\sigma_2^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sigma_0^2}{\sigma_m^2} \end{bmatrix} = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_m^2} \end{bmatrix} = \sigma_o^2\,\Sigma^{-1}$$

Σ es la matriz varianza.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^{\;2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^{\;2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2{}_n \end{bmatrix}$$

Por tanto la expresión que relaciona los conceptos pesos y varianzas.

$$P = \sigma_0^2 \;\; \Sigma^{-1}$$

Por ejemplo si la la desviación estandar de cada acimut se considera que es igual al cuadrado de la distancia correspondiente, la matriz de pesos a partir de estos valores de las desviaciones estándar, recordando la relación entre pesos y varianzas.

$$P = k / \sigma^2$$

Siendo K una constante de proporcionalidad. Si una observación tiene peso unidad, entonces la constante anterior $K = \sigma_0^2$ y se denomina varianza de referencia. A partir de ella el peso de cada observación será:

$$P = \sigma_0^2 / \sigma^2$$

Se elige la varianza de referencia a priori y con ella se calculan los pesos.

La matriz varianza se puede construir a partir de las precisiones de los equipos utilizados.

$$\Sigma_{\theta} = \begin{bmatrix} \sigma^2{}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2{}^2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2{}_n \end{bmatrix}$$

Se toma el valor 1 como varianza de referencia para construir la matriz de pesos.

$$P = \sigma_0^2 \;\; \Sigma^{-1}$$

Y se obtiene P para el ajuste.

F) PRECISIÓN DE LAS COORDENADAS AJUSTADAS

En la resolución del problema por mínimos cuadrados tenemos que distinguir dos modelos:

- Modelo matemático: permite el planteamiento del problema a través de un sistema de ecuaciones cuya resolución conlleva la obtención de una única solución que corresponde al problema topográfico.
- Modelo estocástico: permite obtener parámetros indicadores de la calidad de las observaciones y de las relaciones mutuas entre ellas (correlación).

El modelo estocástico es el método de estimación de precisiones del ajuste. Una vez resuelto el ajuste es necesario comprobar la calidad del mismo. Para ello se analiza la precisión y la fiabilidad.

Por precisión puede entenderse el modo en que la calidad de las observaciones afecta a los resultados del ajuste a través de la geometría de la red y mide las características de la red en lo que respecta a la propagación de los errores aleatorios. La fiabilidad de una red se refiere a la robustez de la misma es decir a la capacidad de resistir errores groseros indetectables en las observaciones. Para valorar estos aspectos es posible emplear múltiples indicadores. Son frecuentes las elipses de error locales y relativas como indicadores de precisión y los números de redundancia interna y los parámetros λ_0 para la fiabilidad.

Para determinar las precisiones de las cantidades ajustadas, se calculan los residuos después del ajuste. Sea el ajuste con o sin pesos, los residuos vienen dados por:

$$V = Ax - L$$

Cálculamos de la varianza de referencia a posteriori:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T \, P \, V}{r}$$

donde V es el vector de residuos, P la matriz de pesos y **r** es el número de grados de libertad del ajuste y es igual al número de ecuaciones de observación (n) menos el número de incógnitas (n_o), es decir expresa la redundancia del modelo:

$$\mathbf{r = n - n_o.}$$

Si la varianza de referencia no se da como dato puede calcularse a posteriori con este cálculo. Si la varianza de referencia se conoce al comienzo del ajuste a posteriori se calculará este valor también para hacer una comprobación estadística de los dos valores.

La matriz cofactor asociada al vector de parámetros por el método paramétrico, puede calcularse a partir de los residuos

$$Q_{xx} = N^{-1} = (A^T \, P \, A)^{-1}$$

Y a partir de esta matriz obtenemos la matriz covarianza, que contiene las precisiones buscadas. La desviación típica de las cantidades individuales ajustadas son:

$$\Sigma_{xx} = \hat{\sigma}_0^2 \; N^{-1} = \hat{\sigma}_0^2 \; Q_{xx}$$

Análisis estadísticos posteriores al ajuste se concentran en la estimación de la calidad global del ajuste mediante el Test de bondad y la detección de errores groseros de pequeña magnitud. Los errores de magnitudes grandes son fácilmente detectables puesto que producen grandes residuos en las observaciones de una zona concreta de la red. Este análisis se basa en la realización de tests estadísticos sobre los residuos de las observaciones.

Como test de bondad del ajuste se utiliza χ^2. Es conocido como test global y sirve para determinar si la varianza de referencia a posteriori es compatible con la varianza de referencia a priori.

El test de Baarda es una técnica que combina la detección de residuos anormalmente grandes bajo un cierto criterio estadístico, la localización del error grosero y su determinación.

Elipse de Error estándar

En las observaciones topográficas se utiliza normalmente el modelo de distribución normal bidimensional. Si el estudio de los errores se centra unicamente en las componentes de los errores aleatorios se puede tomar una distribución normal centrada en el origen (0,0).

Los parámetros principales serán los semiejes a y b y la orientación θ.

$$a = \sigma_{x'}$$
$$b = \sigma_{y'}$$

Para calcular los parámetros de la elipse de error estandar es necesario obtener primero la matriz covarianza de los parámetros (que contiene las precisiones).

$$\Sigma_{xy} = \hat{\sigma}_0^2 \; Q_{xy}$$

La matriz cofactor asociada al vector de parámetros por el método paramétrico, puede calcularse a partir de los residuos

$$Q_{xx} = N^{-1}$$

Y a partir de esta matriz obtenemos la matriz covarianza de la siguiente forma:

$$\Sigma_{xy} = \hat{\sigma}_0^2 \; N^{-1}$$

Y los parámetros de la elipse son las raíces de los valores propios de la matriz covarianza:

Semieje mayor a= $\sqrt{\lambda_1}$

Semieje menor b= $\sqrt{\lambda_2}$

Y la orientación:

$$tg\, 2\theta = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}$$

Según los signos de numerador y denominador se deduce el cuadrante, y por tanto la solución.

2. LA INTERSECCIÓN ANGULAR MULTIPLE.

2.1 INTRODUCCIÓN

En este apartado vamos a analizar el método de intersección angular múltiple, método por el que pueden determinarse las coordenadas de un punto habiendo o no estacionado en él. El método exige que haya redundancia de observaciones.

El método de observación es el de vueltas de horizonte o pares sobre una referencia, dependiendo de la precisión que debamos obtener o de las condiciones de observación. La resolución numérica se realiza aplicando la teoría de ajustes mínimo cuadráticos.

El método de mmcc, permite obtener una solución única en un sistema de ecuaciones lineales sobredeterminado. Esta solución tiene la característica, por la condición que le imponemos al sistema para configurar las ecuaciones normales, que hace que la suma de los cuadrados de los residuos sea mínima.

El método exige conocer unas coordenadas iniciales de todos los puntos, tanto estacionados como observados. A partir de ellas se calcula la variación de coordenadas que conlleva la solución mínimo cuadrática.

El procedimiento de cálculo consistirá en obtener coordenadas iniciales de todos los puntos, con ellas y a partir de los datos de campo obtener las ecuaciones de observación de dirección, una ecuación por cada observación de dirección, y finalmente resolver el sistema.

Las ecuaciones de observación son:

$$A\,x = L$$

Las ecuaciones normales:

$$A^T P\,Ax = A^T P\,L$$

Podemos cambiar la nomenclatura, y llamar

$$N = A^T P\,A$$
$$t = A^T P\,L$$

quedando el sistema de ecuaciones normales de la siguiente forma:

$$N\,x = t$$

La solución al sistema se obtiene calculando:

$$x = (A^T P\,A)^{-1} A^T P\,L$$

con la sustitución anterior queda:

$$x = N^{-1} t$$

Para calcular las precisiones del ajuste, se calcula el vector residuos a posteriori, es decir una vez resuelto el problema:

$$V = A\,x - L$$

Y se obtiene:

$$Q_{xx} = N^{-1} = (A^T PA)^{-1}$$

Y la matriz Σ_{xx} ,que contiene las precisiones:

$$\Sigma_{xx} = \sigma_0^2\, Q_{xx} = \sigma_0^2\, N^{-1}$$

2.2 EXPRESIÓN DE LA RELACIÓN DE OBSERVACIÓN POR DIRECCIÓN ANGULAR OBSERVADA.

El modelo de relación de observación por cada dirección acimutal obtenida en campo es el siguiente:

$$\boxed{\frac{r^{CC}}{D^2}\cdot\left[(Y_2-Y_1)dX_2-(Y_2-Y_1)dX_1-(X_2-X_1)dY_2+(X_2-X_1)dY_1\right]-d\Sigma_1+\left[(\theta_1^2)'-(L_1^2+\Sigma'_1)\right]^{CC}=v}$$

Bastará con obtener unas coordenadas aproximadas del punto de estación y del punto visado, y hacer los cambios de subíndice para aplicarla a la observación concreta.

Los incognitas son cinco:

- La variación de coordenadas del punto de estación: dX_1, dY_1
- La variación de coordenadas del punto visado: dX_2, dY_2,
- y la variación de desorientación del punto de estación: $d\Sigma_1$

El esquema de cálculo comienza planteándonos una tabla como la que sigue, para cada observación por dirección acimutal:

	COORDENADAS INICIALES		VARIACIÓN DE COORDENADAS		**COORDENADAS FINALES**	
VÉRTICE	**X**	**Y**	**dX**	**dY**	**X**	**Y**
1	X_1	Y_1	dX_1	dY_1	$X_1 + dX_1$	$Y_1 + dY_1$
2	X_2	Y_2	dY_2	dY_2	$X_2 + dX_2$	$Y_2 + dY_2$

Si las coordenadas de cualquiera de los puntos no se desean variar, sus respectivos diferenciales serían igual a cero. Esta situación es la que corresponde a los puntos que hemos estado denominando como "conocidos" durante el curso. Son puntos cuyas coordenadas nos son dadas de antemano, proceden de redes de orden superior, y que no deseamos que sean variables. Son los puntos "fijos" de la red.

El cálculo de una intersección múltiple la planteamos sin diferenciar el tipo de intersección. No nos interesa saber si es directa, inversa o mixta en el cálculo. Nos interesa analizar, qué puntos son fijos, qué puntos son "variables" (van a ser ajustados), cuantas relaciones de observación tenemos, cuántas incógnitas, y cual es el grado de redundancia del sistema.

Finalmente, no debemos olvidar que las unidades de los residuos son los segundos centesimales**.**

A continuación vamos a realizar el cálculo de una intersección directa, inversa y mixta, para generalizar con el cálculo de una red que tuviera más de un punto desconocido. Todos estos casos deben considerarse como ejemplos de aplicación del modelo general de cálculo que hemos expuesto anteriormente.

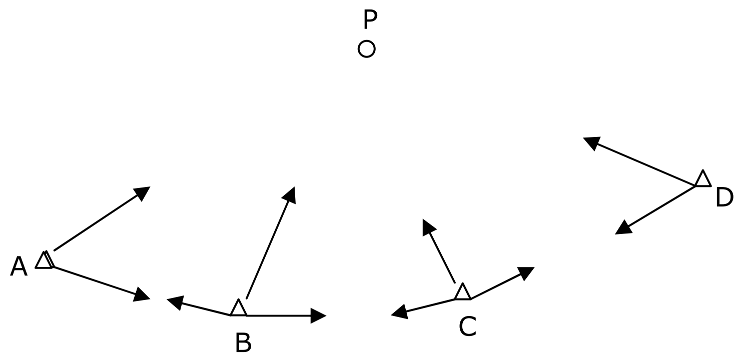
Cuando se han linealizado las ecuaciones de observación el proceso de ajuste es iterativo. Las correcciones que obtengamos en el primer ajuste se las aplicaremos a las coordenadas aproximadas y esas nuevas coordenadas de P actuarán como aproximadas en el siguiente cálculo.

2.3 RESOLUCIÓN DEL MÉTODO DE INTERSECCIÓN DIRECTA MÚLTIPLE POR MÍNIMOS CUADRADOS.

. *Coordenadas aproximadas del punto a determinar.*
. *Planteamiento de las relaciones de observación.*
. *Resolución.*

Para llevar a cabo la resolución de un sistema de ecuaciones por mínimos cuadrados es necesario conocer de antemano una solución aproximada, que debe estar diferencialmente cerca de la solución buscada. Se trata de encontrar los diferenciales que sumados a esta solución aproximada, nos proporcione la solución final. Es por ello que la obtención de la solución aproximada será la primera fase del cálculo.

Consideremos el siguiente ejemplo. Para dar coordenadas a un punto P se ha estacionado en los puntos conocidos A, B, C y D, y se han realizado las visuales que se indican en la figura.



Debemos comenzar planteándonos de qué puntos conocemos las coordenadas y de qué puntos no.

RED DE VÉRTICES:

VÉRTICE	**COORDENADAS DEFINITIVAS**	
	X	**Y**
A	X_A	Y_A
B	X_B	Y_B
C	X_C	Y_C
D	X_D	Y_D
P	**?**	**?**

Si optamos por el método de ajuste por mínimos cuadrados, debemos comenzar por obtener unas coordenadas iniciales del punto P. A estas coordenadas las denominamos aproximadas.

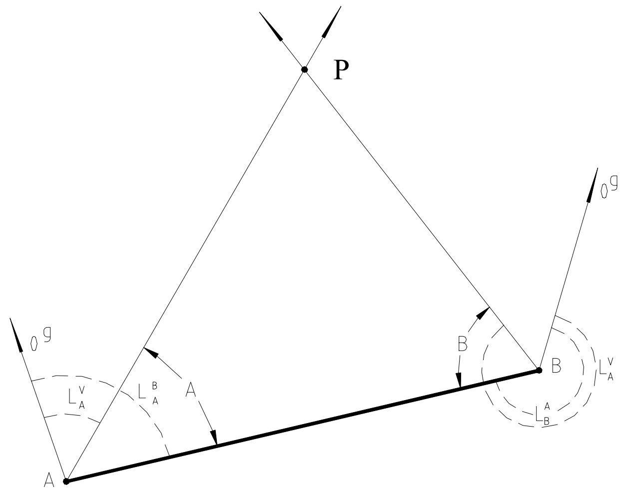
CÁLCULO DE LAS COORDENADAS APROXIMADAS DEL PUNTO PROBLEMA.

Para obtener estas coordenadas calcularemos una intersección simple, seleccionando entre las visuales de campo. Si estamos en una observación en la que hemos estacionado en puntos conocidos, y hemos visado al punto desconocido, estaremos en una intersección directa. Si es múltiple (más de dos puntos de estación conocidos) implica que podemos seleccionar una cualquiera de las simples posibles. Basta con calcular UNA intersección directa simple. Supongamos que optamos por la ABP.

En la resolución de la intersección directa simple ABP tenemos los siguiente datos iniciales:

A (X_A, Y_A) B (X_B, Y_B)

Y de las observaciones de campo tomamos las lecturas $L_A^P, L_A^B, L_B^P, L_B^A$



Para la resolución numérica conociendo las lecturas de campo y las coordenadas de los puntos A, B. El método consistía en calcular el acimut θ_A^B, con la lectura y el acimut θ_A^B, obtendremos la desorientación de A, mediante la lectura L_A^B, una vez calculada la desorientación podremos calcular el acimut θ_A^P. Del mismo modo procederemos con el punto B, calculando el acimut θ_B^P.

La distancia AB también es conocida ya que:

$$D_A^B = \sqrt{\left(X_B - X_A\right)^2 + (Y_B - Y_A)^2}$$

El punto P quedará determinado de la forma siguiente:

a) Partiendo del punto A:

$$X_P = X_A + x_A^P$$
$$Y_P = Y_A + y_A^P$$

b) Partiendo del punto B:

$$X_P = X_B + x_B^P$$
$$Y_P = Y_B + y_B^P$$

Es necesario calcular los incrementos de coordenadas entre AP y BP

Siendo θ_B^P el acimut de la dirección AB por la figura que representa la situación real de los puntos se obtiene:

$$\theta_A^P = \theta_A^B - \hat{A}$$
$$\theta_B^P = \theta_B^A + \hat{B}$$

El problema de la intersección directa queda determinado con el cálculo de las distancias AP y BP.

En el triángulo ABP, se cumple:

$$\frac{D_A^P}{sen\widehat{B}} = \frac{D_A^B}{sen\widehat{V}} = \frac{D_B^P}{sen\hat{A}}$$

$$D_A^P = \frac{sen\hat{B}}{sen\widehat{P}} D_A^B$$

$$D_B^P = \frac{sen\widehat{A}}{sen\widehat{P}} D_A^B$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \widehat{P} = 200^g$$
$$\widehat{P} = 200 - (\hat{A} + \hat{B})$$

Desde el punto A:

$$\Delta\, x_A^P = D_A^P \cdot sen\theta_A^P$$
$$\Delta\, y_A^P = D_A^P \cdot \cos\theta_A^P$$

$$X_P = X_A + x_A^P$$
$$Y_P = Y_A + y_A^P$$

Desde el punto B:

$$\Delta\, x_B^P = D_B^P \cdot sen\theta_B^P$$
$$\Delta\, y_B^P = D_B^P \cdot \cos\theta_B^P$$

$$X_P = X_B + \Delta\, x_B^P$$
$$Y_P = Y_B + \Delta\, y_B^P$$

Las coordenadas han de ser idénticas.

RELACIONES DE OBSERVACIÓN

Ahora ya conocemos las coordenadas iniciales de todos los puntos de la red, unas definitivas y otras aproximadas:

	COORDENADAS INICIALES		COORDENADAS FINALES	
VÉRTICE	**X**	**Y**	**X**	**Y**
A	X_A	Y_A	X_A	Y_A
B	X_B	Y_B	X_B	Y_B
C	X_C	Y_C	X_C	Y_C
D	X_D	Y_D	X_D	Y_D
P	X'_P	Y'_P	$X'_P + dx_P$	$Y'_p + dy_P$

Ahora debemos plantear las relaciones de observación. Recordemos el modelo de ecuación:

$$\frac{r^{CC}}{D^2}\cdot\left[(Y_2-Y_1)dX_2-(Y_2-Y_1)dX_1-(X_2-X_1)dY_2+(X_2-X_1)dY_1\right]-d\Sigma_1+\left[(\theta_1^2)'-(L_1^2+\Sigma'_1)\right]^{CC}=v$$

Los incognitas son cinco en cada ecuación:

- La variación de coordenadas del punto de estación: dX_1, dY_1
- La variación de coordenadas del punto visado: dX_2, dY_2,
- y la variación de desorientación del punto de estación: $d\Sigma_1$

Se plantea una por cada observación acimutal, pero queda claro que aquellas observaciones entre puntos fijos no plantean ecuación, los diferenciales son cero tanto en el punto 1 como en el punto 2, y no existe ecuación por no existir incógnitas.

Tenemos las siguientes visuales:

PUNTO DE ESTACIÓN	PUNTO VISADO	RELACIÓN DE OBSERVACIÓN
A	P	De dirección
	B	-
B	A	-
	C	-
	P	De dirección
C	B	-
	P	De dirección
	D	-
D	C	-
	P	De dirección

Procedemos a continuación a plantear estas cuatro ecuaciones:

Ecuación de dirección de A a P:

Punto de estación 1 ≡ A
Punto visado 2 ≡ P

$$\frac{r^{CC}}{D_A^{P'2}}\cdot\left[(Y_P-Y_A)dX_P-(Y_P-Y_A)dX_A-(X_P-X_A)dY_P+(X_P-X_A)dY_A\right]-d\Sigma_A+$$
$$\left[(\theta_A^P)'-(L_A^P+\Sigma'_A)\right]^{CC}=v$$

Como A es un punto del que no vamos a variar sus coordenadas:

$dX_A = 0$
$dY_A = 0$

Por otra parte, como hemos estacionado en un punto A, del que conocemos sus coordenadas y hemos orientado visando a otro punto conocido conocemos el acimut :

$d\Sigma_A = 0$

La ecuación queda:

$$\boxed{\frac{r^{CC}}{D_A^{P\cdot 2}} \cdot \left[(Y_P - Y_A)dX_P - (X_P - X_A)dY_P\right] + \left[(\theta_A^P)' - (\theta_A^P)\right]^{CC} = v}$$

Ecuación de dirección de B a P:

Punto de estación 1 ≡ B
Punto visado 2 ≡ P

$$\frac{r^{CC}}{D_B^{P\cdot 2}} \cdot \left[(Y_P - Y_B)dX_P - (Y_P - Y_B)dX_B - (X_P - X_B)dY_P + (X_P - X_B)dY_B\right] - d\Sigma_B + \left[(\theta_B^P)' - (L_B^P + \Sigma'_B)\right]^{CC} = v$$

Como B es un punto del que no vamos a variar sus coordenadas:

$dx_B = 0$
$dY_B = 0$

Por otra parte, como hemos estacionado en un punto B, del que conocemos sus coordenadas y hemos orientado visando a otro punto conocido conocemos el acimut :

$d\Sigma_B = 0$

La ecuación queda:

$$\boxed{\frac{r^{CC}}{D_B^{P\cdot 2}} \cdot \left[(Y_P - Y_B)dX_P - (X_P - X_B)dY_P\right] + \left[(\theta_B^P)' - (\theta_B^P)\right]^{CC} = v}$$

Ecuación de dirección de C a P:

Punto de estación 1 ≡ C
Punto visado 2 ≡ P

$$\frac{r^{CC}}{D_C^{P'2}} \cdot \left[(Y_P - Y_C) dX_P - (Y_P - Y_C) dX_C - (X_P - X_C) dY_P + (X_P - X_C) dY_C \right] - d\Sigma_C +$$
$$\left[(\theta_C^P)' - (L_C^P + \Sigma'_C) \right]^{CC} = v$$

Como C es un punto del que no vamos a variar sus coordenadas:

$dx_C = 0$
$dy_C = 0$

Por otra parte, como hemos estacionado en un punto C, del que conocemos sus coordenadas y hemos orientado visando a otro punto conocido conocemos el acimut :

$d\Sigma_c = 0$

La ecuación queda:

$$\boxed{\frac{r^{CC}}{D_C^{P'2}} \cdot \left[(Y_P - Y_C) dX_P - (X_P - X_C) dY_P \right] + \left[(\theta_C^P)' - (\theta_C^P) \right]^{CC} = v}$$

Ecuación de dirección de D a P:

Punto de estación 1 ≡ D
Punto visado 2 ≡ P

$$\frac{r^{CC}}{D_D^{P'2}} \cdot \left[(Y_P - Y_D) dX_P - (Y_P - Y_D) dX_D - (X_P - X_D) dY_P + (X_P - X_D) dY_D \right] - d\Sigma_D +$$
$$\left[(\theta_D^P)' - (L_D^P + \Sigma'_D) \right]^{CC} = v$$

Como D es un punto del que no vamos a variar sus coordenadas:

$dx_D = 0$
$dY_D = 0$

Por otra parte, como hemos estacionado en un punto D, del que conocemos sus coordenadas y hemos orientado visando a otro punto conocido conocemos el acimut :

$d\Sigma_D = 0$

La ecuación queda:

$$\boxed{\frac{r^{CC}}{D_D^{P'2}} \cdot \left[(Y_P - Y_D) dX_P - (X_P - X_D) dY_P \right] + \left[(\theta_D^P)' - (\theta_D^P) \right]^{CC} = v}$$

RESOLUCIÓN DEL SISTEMA

Las relaciones de observación que hemos obtenido son:

$$\frac{r^{CC}}{D_A^{P'2}} \cdot \left[(Y_P - Y_A)dX_P - (X_P - X_A)dY_P\right] + \left[(\theta_A^P)' - (\theta_A^P)\right]^{CC} = v$$

$$\frac{r^{CC}}{D_B^{P'2}} \cdot \left[(Y_P - Y_B)dX_P - (X_P - X_B)dY_P\right] + \left[(\theta_B^P)' - (\theta_B^P)\right]^{CC} = v$$

$$\frac{r^{CC}}{D_C^{P'2}} \cdot \left[(Y_P - Y_C)dX_P - (X_P - X_C)dY_P\right] + \left[(\theta_C^P)' - (\theta_C^P)\right]^{CC} = v$$

$$\frac{r^{CC}}{D_D^{P'2}} \cdot \left[(Y_P - Y_D)dX_P - (X_P - X_D)dY_P\right] + \left[(\theta_D^P)' - (\theta_D^P)\right]^{CC} = v$$

No olvideis que las relaciones de observación han de estar de la siguiente forma:

$$A\ X = L + v$$

Es necesario pasar el término independiente del sistema que hemos planteado, al otro miembro de la ecuación, para aplicar la resolución matricial.

Las ecuaciones normales son:

$$(A^T P\ A)\ X = A^T P\ L$$

$$N\ X = t$$

Y el vector solución:

$$X = (A^T P\ A\ )^{-1} A^T P\ L$$

$$X = N^{-1}\ t$$

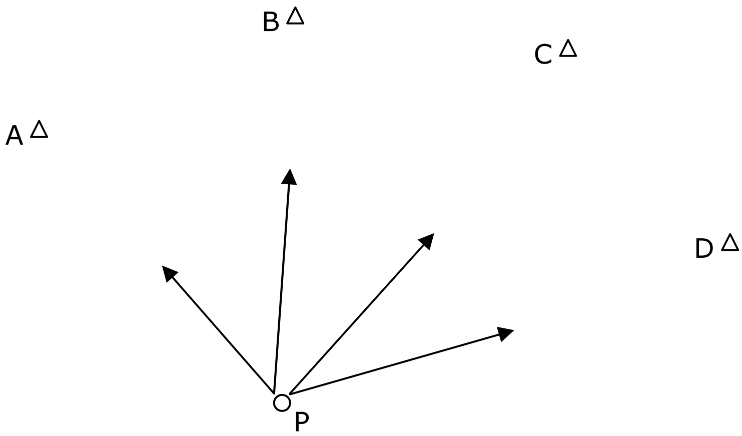
Como solución obtendremos los valores dX_P y dY_P, que sumados a los iniciales (aproximados), nos permiten calcular la solución final.

Las precisiones pueden obtenerse del modo indicado anteriormente.

2.4 RESOLUCIÓN DEL MÉTODO DE INTERSECCIÓN INVERSA MÚLTIPLE .

- *Coordenadas aproximadas del punto a determinar.*
- *Planteamiento de las relaciones de observación.*
- *Resolución.*

Consideremos el siguiente ejemplo. Para dar coordenadas a un punto P se ha estacionado en él y hemos visado a los puntos conocidos A, B, C y D, realizando las visuales que se indican en la figura.



Debemos comenzar planteándonos de qué puntos conocemos las coordenadas y de qué puntos no las conocemos.

RED DE VÉRTICES:

VÉRTICE	**COORDENADAS DEFINITIVAS**	
	X	**Y**
A	X_A	Y_A
B	X_B	Y_B
C	X_C	Y_C
D	X_D	Y_D
P	**?**	**?**

Si optamos por el método de ajuste por mínimos cuadrados, debemos comenzar por obtener unas coordenadas iniciales del punto P. A estas coordenadas las denominamos aproximadas.

CÁLCULO DE LAS COORDENADAS APROXIMADAS DEL PUNTO PROBLEMA.

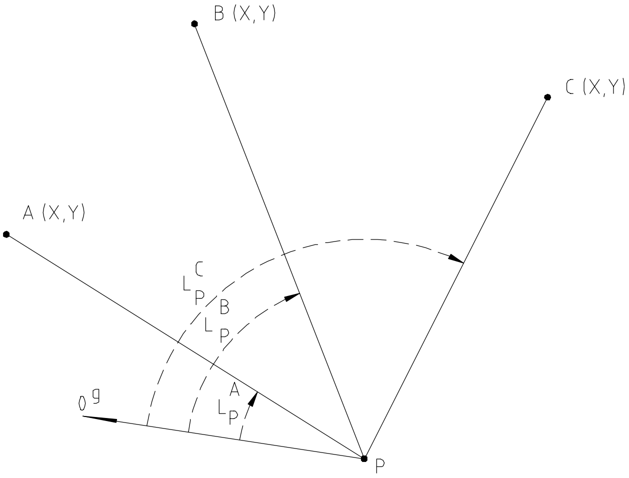
Para obtener estas coordenadas calcularemos una intersección simple, seleccionando entre las visuales de campo las que corresponden a la misma. Si estamos en una observación en la que hemos estacionado en el punto desconocido, y hemos visado a los conocidos, estaremos en una intersección inversa. Si es múltiple (más de tres puntos conocidos visados) implica que podemos seleccionar una cualquiera de las simples posibles. Basta con calcular UNA intersección inversa simple. Supongamos que optamos por la ABC.

La resolución de la intersección inversa simple ABC, cuenta como datos iniciales:

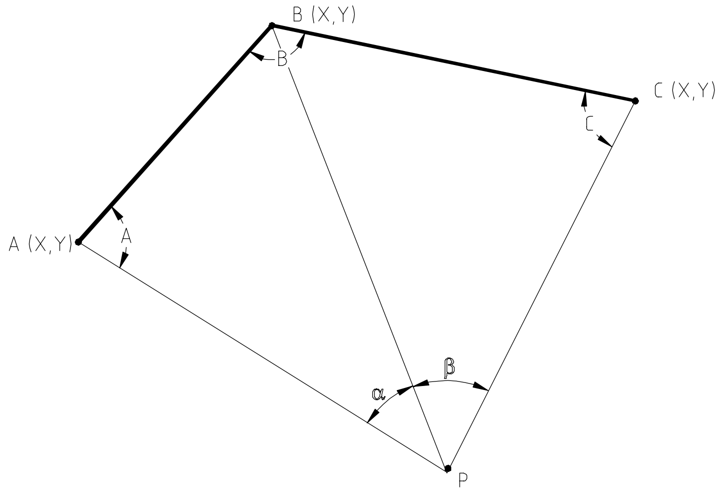
A (X_A, Y_A)   B (X_B ,Y_B))   C (X_C ,Y_C)

Y como observaciones de campo con las lecturas:

L_P^A, L_P^B, L_P^C



Las tres visuales PA, PB, PC proporcionan los datos necesarios para resolver matemáticamente el problema.



Para la resolución analítica calculamos

$$E = 400 - \hat{B} - \beta - \alpha$$

$$\mathrm{tg}\,\hat{A} = \frac{D_B^C \cdot \mathrm{sen}\,\alpha \cdot \mathrm{sen}\,\hat{E}}{D_A^B \cdot \mathrm{sen}\,\beta + D_B^C \cdot \mathrm{sen}\,\alpha \cdot \cos\hat{E}}$$

Al calcular el ángulo A hay que tener en cuenta que:

$$tg\hat{A} = tg(200 + \hat{A})$$

Y finalmente calculamos el ángulo C:

$$\hat{C} = \hat{E} - \hat{A}$$

A continuación podemos calcular:

$$\mathrm{B1} = 200 - \mathrm{A} - \alpha$$
$$\mathrm{B2} = 200 - \mathrm{B} - \beta$$

Una vez obtenido los ángulos A y C podemos obtener los acimutes a P.

$$\theta_A^P = \theta_A^B + \hat{A}$$
$$\theta_C^P = \theta_B^C \pm 200 - \hat{C}$$

Las distancias las hallaremos mediante el teorema del seno:

$$\frac{D_A^B}{sen\alpha} = \frac{D_A^P}{senB1} \rightarrow \mathrm{D_A^P} = D_A^B \frac{senB1}{sen\alpha}$$

$$\frac{D_B^C}{\mathrm{sen}\beta} = \frac{\mathrm{D_C^P}}{\mathrm{senB2}} \rightarrow \mathrm{D_C^P} = D_B^C \frac{senB2}{sen\beta}$$

Una vez obtenidas las distancias y los acimutes obtendremos las coordenadas de P desde los puntos A, C. Estas coordenadas han de ser idénticas.

$$X_P = X_A + D_A^P \cdot sen\theta_A^P \qquad X_P = X_C + D_C^P \cdot sen\theta_C^P$$
$$Y_P = Y_A + D_A^P \cdot \cos\theta_A^P \qquad Y_P = Y_C + D_C^P \cdot \cos\theta_C^P$$

RELACIONES DE OBSERVACIÓN

Ahora ya conocemos las coordenadas iniciales de todos los puntos de la red, unas definitivas y otras aproximadas:

	COORDENADAS INICIALES		**COORDENADAS FINALES**	
VÉRTICE	**X**	**Y**	**X**	**Y**
A	X_A	Y_A	X_A	Y_A
B	X_B	Y_B	X_B	Y_B
C	X_C	Y_C	X_C	Y_C
D	X_D	Y_D	X_D	Y_D
P	X'_P	Y'_P	$X'_P + dx_P$	$Y'_p + dy_P$

A continuación debemos plantear las relaciones de observación. Recordemos el modelo de ecuación:

$$\frac{r^{CC}}{D^2} \cdot \left[(Y_2 - Y_1)dX_2 - (Y_2 - Y_1)dX_1 - (X_2 - X_1)dY_2 + (X_2 - X_1)dY_1\right] - d\Sigma_1 + \left[(\theta_1^2)' - (L_1^2 + \Sigma'_1)\right]^{CC} = v$$

Los incognitas son cinco en cada ecuación:

- La variación de coordenadas del punto de estación: dX_1, dY_1
- La variación de coordenadas del punto visado: dX_2, dY_2,

- y la variación de desorientación del punto de estación: $d\Sigma_1$

Se plantea una por cada observación acimutal.

Tenemos las siguientes visuales:

PUNTO DE ESTACIÓN	PUNTO VISADO	RELACIÓN DE OBSERVACIÓN
P	A	De dirección
	B	De dirección
	C	De dirección
	D	De dirección

En la intersección inversa La $d\Sigma_1$ se mantiene como incógnita en la ecuación. Como no conocemos las coordenadas del punto 1 de estación, calcularemos la desorientación aproximada a partir de las coordenadas de A y P´; de B y P´; de C y P´; y de D y P´. La desorientación que se introduce en todas las ecuaciones (en todas ha de ser el mismo valor) se calculará haciendo la media de todas las desorientaciones posibles que se puedan calcular en ese punto, siempre que las discrepancias entre ellas sean tolerables.

Procedemos a continuación a plantear las cuatro ecuaciones.

Ecuación de dirección de P a A:

Punto de estación 1 ≡ P
Punto visado 2 ≡ A

$$\frac{r^{CC}}{D_{P'}^{A\,2}} \cdot \left[(Y_A - Y_P)dX_A - (Y_A - Y_P)dX_P - (X_A - X_P)dY_A + (X_A - X_P)dY_P\right] - d\Sigma_P +$$
$$\left[(\theta_P^A)' - (L_P^A + \Sigma'_P)\right]^{CC} = v$$

Como A es un punto del que no vamos a variar sus coordenadas:

$$dX_A = 0$$
$$dY_A = 0$$

La ecuación queda:

$$\boxed{\frac{r^{CC}}{D_{P'}^{A\,2}} \cdot \left[-(Y_A - Y_P)dX_P + (X_A - X_P)dY_P\right] - d\Sigma_P + \left[(\theta_P^A)' - (L_P^A + \Sigma'_P)\right]^{CC} = v}$$

Ecuación de dirección de P a B:

Punto de estación 1 ≡ P
Punto visado 2 ≡ B

$$\frac{r^{CC}}{D_{P'}^{B\,2}} \cdot \left[(Y_B - Y_P)dX_B - (Y_B - Y_P)dX_P - (X_B - X_P)dY_B + (X_B - X_P)dY_P\right] - d\Sigma_P +$$
$$\left[(\theta_P^B)' - (L_P^B + \Sigma'_P)\right]^{CC} = v$$

Como B es un punto del que no vamos a variar sus coordenadas:

$dx_B = 0$
$dY_B = 0$

La ecuación queda:

$$\boxed{\frac{r^{CC}}{D_{P'}^{B\,2}} \cdot \left[-(Y_B - Y_P)dX_P + (X_B - X_P)dY_P\right] - d\Sigma_P + \left[(\theta_P^B)' - (L_P^B + \Sigma'_P)\right]^{CC} = v}$$

Ecuación de dirección de P a C:

Punto de estación 1 ≡ P
Punto visado 2 ≡ C

$$\frac{r^{CC}}{D_{P'}^{C\,2}} \cdot \left[(Y_C - Y_P)dX_C - (Y_C - Y_P)dX_P - (X_C - X_P)dY_C + (X_C - X_P)dY_P\right] - d\Sigma_P +$$
$$\left[(\theta_P^C)' - (L_P^C + \Sigma'_P)\right]^{CC} = v$$

Como C es un punto del que no vamos a variar sus coordenadas:

$dx_C = 0$
$dY_C = 0$

La ecuación queda:

$$\boxed{\frac{r^{CC}}{D_{P'}^{C\,2}} \cdot \left[-(Y_C - Y_P)dX_P + (X_C - X_P)dY_P\right] - d\Sigma_P + \left[(\theta_P^C)' - (L_P^C + \Sigma'_P)\right]^{CC} = v}$$

Ecuación de dirección de P a D:

Punto de estación 1 ≡ P
Punto visado 2 ≡ D

$$\frac{r^{CC}}{D_{P'}^{D\,2}} \cdot \left[(Y_D - Y_P)dX_D - (Y_D - Y_P)dX_P - (X_D - X_P)dY_D + (X_D - X_P)dY_P\right] - d\Sigma_P +$$
$$\left[(\theta_P^D)' - (L_P^D + \Sigma'_P)\right]^{CC} = v$$

Como D es un punto del que no vamos a variar sus coordenadas:

$dx_D = 0$
$dY_D = 0$

La ecuación queda:

$$\boxed{\frac{r^{CC}}{{D_{P'}^{D}}^2}\cdot\left[-(Y_D-Y_P)dX_P+(X_D-X_P)dY_P\right]-d\Sigma_P+\left[(\theta_P^D)'-(L_P^D+\Sigma'_P)\right]^{CC}=v}$$

RESOLUCIÓN DEL SISTEMA

El sistema de ecuaciones que hemos obtenido es el siguiente:

$$\frac{r^{CC}}{{D_{P'}^{A}}^2}\cdot\left[-(Y_A-Y_P)dX_P+(X_A-X_P)dY_P\right]-d\Sigma_P+\left[(\theta_P^A)'-(L_P^A+\Sigma'_P)\right]^{CC}=v$$

$$\frac{r^{CC}}{{D_{P'}^{B}}^2}\cdot\left[-(Y_B-Y_P)dX_P+(X_B-X_P)dY_P\right]-d\Sigma_P+\left[(\theta_P^B)'-(L_P^B+\Sigma'_P)\right]^{CC}=v$$

$$\frac{r^{CC}}{{D_{P'}^{C}}^2}\cdot\left[-(Y_C-Y_P)dX_P+(X_C-X_P)dY_P\right]-d\Sigma_P+\left[(\theta_P^C)'-(L_P^C+\Sigma'_P)\right]^{CC}=v$$

$$\frac{r^{CC}}{{D_{P'}^{D}}^2}\cdot\left[-(Y_D-Y_P)dX_P+(X_D-X_P)dY_P\right]-d\Sigma_P+\left[(\theta_P^D)'-(L_P^D+\Sigma'_P)\right]^{CC}=v$$

No olvideis que las relaciones de observación han de estar en la forma:

$$A\,X = L + v$$

Por lo que es necesario pasar el término independiente al otro miembro de la ecuación.

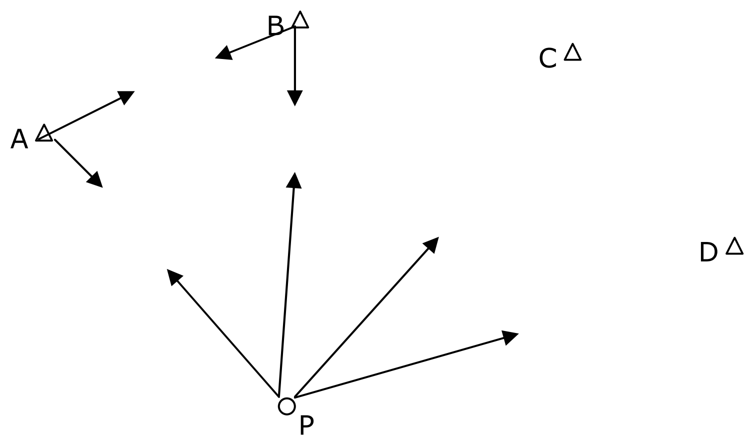
Como solución obtendremos los valores dX_P y dY_P, que sumados a los iniciales (aproximados), nos permiten calcular la solución final.

2.5 RESOLUCIÓN DEL MÉTODO DE INTERSECCIÓN MIXTA MÚLTIPLE POR MÍNIMOS CUADRADOS .

- *Coordenadas aproximadas del punto a determinar.*
- *Planteamiento de las relaciones de observación.*
- *Resolución.*

En una intersección mixta se estaciona tanto en puntos conocidos como desconocidos y al ser múltiples contamos con más datos de los imprescindibles para la resolución del problema.

Consideremos el siguiente ejemplo. Para dar coordenadas a un punto P se ha estacionado en él y hemos visado a los puntos conocidos A, B, C y D. Se ha estacionado también en los puntos A y B, realizando las visuales que se indican en la figura.



Debemos comenzar planteándonos de qué puntos conocemos las coordenadas y de cuáles no.

RED DE VÉRTICES:

VÉRTICE	**COORDENADAS DEFINITIVAS**	
	X	**Y**
A	X_A	Y_A
B	X_B	Y_B
C	X_C	Y_C
D	X_D	Y_D
P	**?**	**?**

Si optamos por el método de ajuste por mínimos cuadrados, debemos comenzar por obtener unas coordenadas iniciales del punto P. A estas coordenadas las denominamos aproximadas.

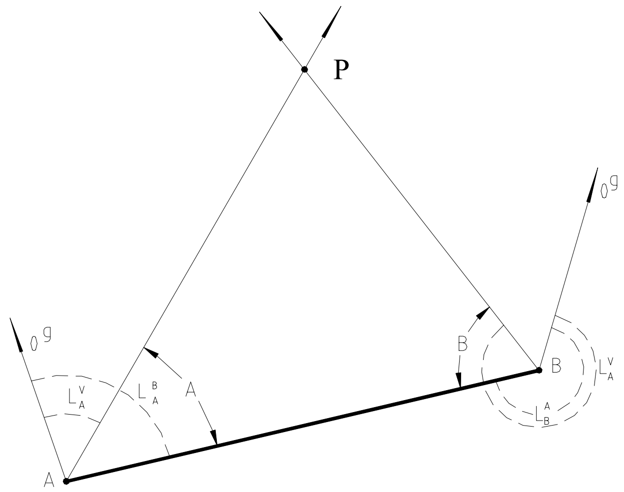
CÁLCULO DE LAS COORDENADAS APROXIMADAS DEL PUNTO PROBLEMA.

Para obtener estas coordenadas calcularemos una intersección simple, seleccionando entre las visuales de campo aquellas que la forman. Basta con calcular UNA intersección simple. Buscaremos una directa simple (dos puntos de estación conocidos desde los que se visa al desconocido), si no la hubiera buscaríamos otro tipo de intersección simple. En nuestro ejemplo podríamos resolver la intersección directa simple ABP.

La resolución de la intersección directa simple cuenta como datos iniciales:

A (X_A, Y_A)   B (X_B, Y_B)

Y como observaciones de campo con las lecturas: $L_A^P, L_A^B, L_B^P, L_B^A$



Para la resolución numérica conociendo las lecturas de campo y las coordenadas de los puntos A, B, el método consistía en calcular el acimut θ_A^B, con la lectura y el acimut θ_A^B, obtendremos la desorientación de A, mediante la lectura L_A^B, una vez calculada la desorientación podremos calcular el acimut θ_A^P. Del mismo modo procederemos con el punto B, calculando el acimut θ_B^P.

La distancia AB también es conocida ya que:

$$D_A^B = \sqrt{\left(X_B - X_A\right)^2 + (Y_B - Y_A)^2}$$

El punto P quedará determinado de la forma siguiente:

a) Partiendo del punto A:

$$X_P = X_A + x_A^P$$
$$Y_P = Y_A + y_A^P$$

b) Partiendo del punto B:

$$X_P = X_B + x_B^P$$
$$Y_P = Y_B + y_B^P$$

Es necesario calcular los incrementos de coordenadas entre AP y BP

Siendo θ_B^P el acimut de la dirección AB por la figura que representa la situación real de los puntos se obtiene:

$$\theta_A^P = \theta_A^B - \hat{A}$$
$$\theta_B^P = \theta_B^A + \hat{B}$$

El problema de la intersección directa queda determinado en el cálculo de las distancias AP y BP.

En el triángulo ABP, se cumple:

$$\frac{D_A^P}{sen\hat{B}} = \frac{D_A^B}{sen\hat{V}} = \frac{D_B^P}{sen\hat{A}}$$

$$D_A^P = \frac{sen\hat{B}}{sen\hat{P}} D_A^B$$

$$D_B^P = \frac{sen\hat{A}}{sen\hat{P}} D_A^B$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{P} = 200^g$$
$$\hat{P} = 200 - (\hat{A} + \hat{B})$$

Desde el punto A:

$$\Delta\, x_A^P = D_A^P \cdot sen\theta_A^P$$
$$\Delta\, y_A^P = D_A^P \cdot \cos\theta_A^P$$

$$X_P = X_A + x_A^P$$
$$Y_P = Y_A + y_A^P$$

Desde el punto B:

$$\Delta\, x_B^P = D_B^P \cdot sen\theta_B^P$$
$$\Delta\, y_B^P = D_B^P \cdot \cos\theta_B^P$$

$$X_P = X_B + \Delta\, x_B^P$$
$$Y_P = Y_B + \Delta\, y_B^P$$

Estas coordenadas han de ser idénticas.

RELACIONES DE OBSERVACIÓN

Ya conocemos las coordenadas iniciales de todos los puntos de la red, unas definitivas y otras aproximadas:

	COORDENADAS INICIALES		**COORDENADAS FINALES**	
VÉRTICE	**X**	**Y**	**X**	**Y**
A	X_A	Y_A	X_A	Y_A
B	X_B	Y_B	X_B	Y_B
C	X_C	Y_C	X_C	Y_C
D	X_D	Y_D	X_D	Y_D
P	X'_P	Y'_P	$X'_P + dx_P$	$Y'_p + dy_P$

Ahora debemos plantear las relaciones de observación. Recordemos el modelo de ecuación:

$$\frac{r^{CC}}{D^2}\cdot\left[(Y_2-Y_1)dX_2-(Y_2-Y_1)dX_1-(X_2-X_1)dY_2+(X_2-X_1)dY_1\right]-d\Sigma_1+\left[(\theta_1^2)'-(L_1^2+\Sigma'_1)\right]^{CC}=v$$

LAs incógnitas son cinco en cada ecuación:

- La variación de coordenadas del punto de estación: dX_1, dY_1
- La variación de coordenadas del punto visado: dX_2, dY_2,
- y la variación de desorientación del punto de estación: $d\Sigma_1$

Se plantea una por cada observación acimutal, pero queda claro que aquellas observaciones entre puntos fijos no plantean ecuación, los diferenciales son cero tanto en el punto 1 como en el punto 2, y no existe ecuación por no existir incógnitas.

Tenemos las siguientes visuales:

PUNTO DE ESTACIÓN	PUNTO VISADO	RELACIÓN DE OBSERVACIÓN
P	A	De dirección
	B	De dirección
	C	De dirección
	D	De dirección
A	B	-
	P	De dirección
B	A	-
	P	De dirección

Por otra parte debemos calcular la desorientación aproximada en el punto desconocido de estación, es decir de P. Con las coordenadas de A P´, B P´, C P´, D P´. Se realiza la media de todas ellas, si fueran tolerables, y este valor es el que se utiliza en todas las ecuaciones.

Procedemos a continuación a plantear estas seis ecuaciones:

Ecuación de dirección de P a A:

Punto de estación 1 ≡ P
Punto visado 2 ≡ A

$$\frac{r^{CC}}{D_{P'}^{A\,2}}\cdot\left[(Y_A-Y_P)dX_A-(Y_A-Y_P)dX_P-(X_A-X_P)dY_A+(X_A-X_P)dY_P\right]-d\Sigma_P+$$
$$\left[(\theta_P^A)'-(L_P^A+\Sigma'_P)\right]^{CC}=v$$

Como A es un punto del que no vamos a variar sus coordenadas:

$$dX_A = 0$$
$$dY_A = 0$$

La $d\Sigma_P$ se mantiene como incógnita en la ecuación.

La ecuación queda:

$$\boxed{\frac{r^{CC}}{D_{P'}^{A\,2}}\cdot\left[-(Y_A-Y_P)dX_P+(X_A-X_P)dY_P\right]-d\Sigma_P+\left[(\theta_P^A)'-(L_P^A+\Sigma'_P)\right]^{CC}=v}$$

Ecuación de dirección de P a B:

Punto de estación 1 ≡ P
Punto visado 2 ≡ B

$$\frac{r^{CC}}{D_{P'}^{B\,2}}\cdot\left[(Y_B-Y_P)dX_B-(Y_B-Y_P)dX_P-(X_B-X_P)dY_B+(X_B-X_P)dY_P\right]-d\Sigma_P+$$
$$\left[(\theta_P^B)'-(L_P^B+\Sigma'_P)\right]^{CC}=v$$

Como B es un punto del que no vamos a variar sus coordenadas:

$dx_B = 0$
$dY_B = 0$

La $d\Sigma_P$ se mantiene como incógnita en la ecuación.

La ecuación queda:

$$\boxed{\frac{r^{CC}}{D_{P'}^{B\,2}}\cdot\left[-(Y_B-Y_P)dX_P+(X_B-X_P)dY_P\right]-d\Sigma_P+\left[(\theta_P^B)'-(L_P^B+\Sigma'_P)\right]^{CC}=v}$$

Ecuación de dirección de P a C:

Punto de estación 1 ≡ P
Punto visado 2 ≡ C

$$\frac{r^{CC}}{D_{P'}^{C\,2}}\cdot\left[(Y_C-Y_P)dX_C-(Y_C-Y_P)dX_P-(X_C-X_P)dY_C+(X_C-X_P)dY_P\right]-d\Sigma_P+$$
$$\left[(\theta_P^C)'-(L_P^C+\Sigma'_P)\right]^{CC}=v$$

Como C es un punto del que no vamos a variar sus coordenadas:

$dx_C = 0$
$dY_C = 0$

La $d\Sigma_P$ se mantiene como incógnita en la ecuación.

La ecuación queda:

$$\boxed{\frac{r^{CC}}{D_{P'}^{C\,2}} \cdot \left[-(Y_C - Y_P)dX_P + (X_C - X_P)dY_P \right] - d\Sigma_P + \left[(\theta_P^C)' - (L_P^C + \Sigma'_P) \right]^{CC} = v}$$

Ecuación de dirección de P a D:

Punto de estación 1 ≡ P
Punto visado 2 ≡ D

$$\frac{r^{CC}}{D_{P'}^{D\,2}} \cdot \left[(Y_D - Y_P)dX_D - (Y_D - Y_P)dX_P - (X_D - X_P)dY_D + (X_D - X_P)dY_P \right] - d\Sigma_P +$$
$$\left[(\theta_P^D)' - (L_P^D + \Sigma'_P) \right]^{CC} = v$$

Como D es un punto del que no vamos a variar sus coordenadas:

$dx_D = 0$
$dY_D = 0$

La $d\Sigma_P$ se mantiene como incógnita en la ecuación.

La ecuación queda:

$$\boxed{\frac{r^{CC}}{D_{P'}^{D\,2}} \cdot \left[-(Y_D - Y_P)dX_P + (X_D - X_P)dY_P \right] - d\Sigma_P + \left[(\theta_P^D)' - (L_P^D + \Sigma'_P) \right]^{CC} = v}$$

Ecuación de dirección de A a P:

Punto de estación 1 ≡ A
Punto visado 2 ≡ P

$$\frac{r^{CC}}{D_A^{P'\,2}} \cdot \left[(Y_P - Y_A)dX_P - (Y_P - Y_A)dX_A - (X_P - X_A)dY_P + (X_P - X_A)dY_A \right] - d\Sigma_A +$$
$$\left[(\theta_A^P)' - (L_A^P + \Sigma'_A) \right]^{CC} = v$$

Como A es un punto del que no vamos a variar sus coordenadas:

$dX_A = 0$
$dY_A = 0$

Por otra parte, como hemos estacionado en un punto A, del que conocemos sus coordenadas y hemos orientado visando a otro punto conocido conocemos el acimut :

$d\Sigma_A = 0$

La ecuación queda:

$$\boxed{\frac{r^{CC}}{D_A^{P'2}}\cdot\left[(Y_P-Y_A)dX_P-(X_P-X_A)dY_P\right]+\left[(\theta_A^P)'-(\theta_A^P)\right]^{CC}=v}$$

Ecuación de dirección de B a P:

Punto de estación 1 ≡ B
Punto visado 2 ≡ P

$$\frac{r^{CC}}{D_B^{P'2}}\cdot\left[(Y_P-Y_B)dX_P-(Y_P-Y_B)dX_B-(X_P-X_B)dY_P+(X_P-X_B)dY_B\right]-d\Sigma_B+$$
$$\left[(\theta_B^P)'-(L_B^P+\Sigma'_B)\right]^{CC}=v$$

Como B es un punto del que no vamos a variar sus coordenadas:

$dx_B = 0$
$dY_B = 0$

Por otra parte, como hemos estacionado en un punto B, del que conocemos sus coordenadas y hemos orientado visando a otro punto conocido conocemos el acimut :

$d\Sigma_B = 0$

La ecuación queda:

$$\boxed{\frac{r^{CC}}{D_B^{P'2}}\cdot\left[(Y_P-Y_B)dX_P-(X_P-X_B)dY_P\right]+\left[(\theta_B^P)'-(\theta_B^P)\right]^{CC}=v}$$

RESOLUCIÓN DEL SISTEMA

El sistema de ecuaciones es el siguiente:

$$\frac{r^{CC}}{D_{P'}^{A\,2}}\cdot\left[-(Y_A-Y_P)dX_P+(X_A-X_P)dY_P\right]-d\Sigma_P+\left[(\theta_P^A)'-(L_P^A+\Sigma'_P)\right]^{CC}=v$$

$$\frac{r^{CC}}{D_{P'}^{B\,2}}\cdot\left[-(Y_B-Y_P)dX_P+(X_B-X_P)dY_P\right]-d\Sigma_P+\left[(\theta_P^B)'-(L_P^B+\Sigma'_P)\right]^{CC}=v$$

$$\frac{r^{CC}}{D_{P'}^{C\,2}}\cdot\left[-(Y_C-Y_P)dX_P+(X_C-X_P)dY_P\right]-d\Sigma_P+\left[(\theta_P^C)'-(L_P^C+\Sigma'_P)\right]^{CC}=v$$

$$\frac{r^{CC}}{D_{P'}^{D^2}} \cdot \left[-(Y_D - Y_P)dX_P + (X_D - X_P)dY_P\right] - d\Sigma_P + \left[(\theta_P^D)' - (L_P^D + \Sigma'_P)\right]^{CC} = v$$

$$\frac{r^{CC}}{D_A^{P'^2}} \cdot \left[(Y_P - Y_A)dX_P - (X_P - X_A)dY_P\right] + \left[(\theta_A^P)' - (\theta_A^P)\right]^{CC} = v$$

$$\frac{r^{CC}}{D_B^{P'^2}} \cdot \left[(Y_P - Y_B)dX_P - (X_P - X_B)dY_P\right] + \left[(\theta_B^P)' - (\theta_B^P)\right]^{CC} = v$$

Para proceder al cálculo matricial, no olvidéis que las relaciones de observación han de estar en la forma:

$$A X = L + v$$

Por lo que es necesario pasar el término independiente al otro miembro de la ecuación.

Como solución obtendremos los valores dX_P y dY_P, que sumados a los iniciales (aproximados), nos permiten calcular la solución final.

RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA INTERSECCIÓN MIXTA MÚLTIPLE: CASO ESPECIAL

En la intersección mixta simple se estacionaba en un vértice de coordenadas conocidas y en otro de coordenadas desconocidas, para obtener los datos necesarios para la resolución de la intersección.

Existe un caso de intersección mixta múltiple en el que sólo se añade el estacionamiento en el tercer punto, del que conocemos las coordenadas, obteniéndose así más datos de los imprescindibles y pudiendo por tanto tener comprobación.

En este caso la resolución podremos hacerla por ajuste minimo cuadrático o por un simple ajuste del cierre del triangulo, aplicando la ecuación de condición a la figura de que la suma de los tres ángulos ha de ser 200^g.

La diferencia a 200^g, será el error de cierre angular. La tolerancia para este error depende de la precisión del instrumento, y vendrá dada por:

$$T = e_a \sqrt{2}\,\sqrt{3}$$

Siendo e_a la incertidumbre por dirección acimutal observada, y $\sqrt{2}\,\sqrt{3}$, puesto que se compone de 3 ángulos y cada uno de ellos consta de dos direcciones.

El error de cierre deberá ser menor o igual que la tolerancia. Si esto es así se procederá a la compensación en partes iguales a los tres ángulos. En el caso en que no puedan ser idénticas las compensaciones por la precisión de la medida (no ser divisible de tres entero) se compensa más al ángulo más próximo a 100^g.

Los tres ángulos una vez compensados cumplirán la condición de que su suma será 200^g.

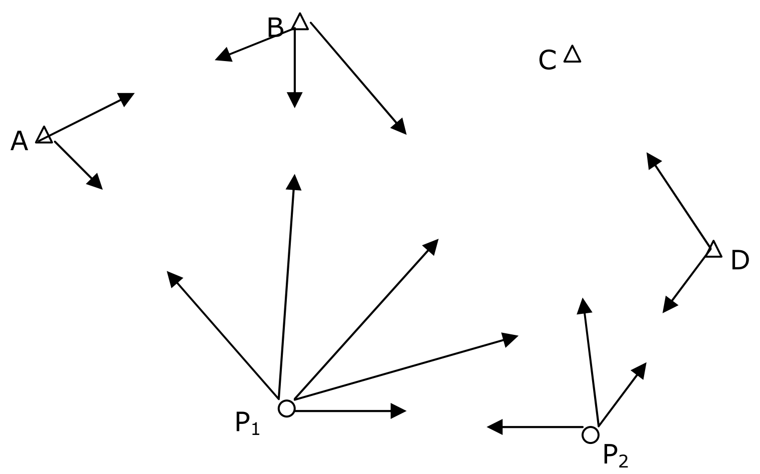
Con estos valores angulares se procederá al cálculo de las distancias en el triángulo, y al calculo de las coordenadas parciales y absolutas del punto problema.

De esta forma hemos anulado la redundancia en este caso especial de intersección mixta múltiple. También podríamos haber optado por una resolución mínimo cuadrática.

2.6 RESOLUCIÓN DE LA INTERSECCIÓN ANGULAR MÚLTIPLE CON MÁS DE UN PUNTO A DETERMINAR.

- *Coordenadas aproximadas del punto a determinar.*
- *Planteamiento de las relaciones de observación.*
- *Resolución.*

Consideremos el siguiente ejemplo. Para dar coordenadas a dos puntos P_1 y P_2, se han realizado las visuales que se indican en la figura.



Debemos comenzar planteándonos de qué puntos conocemos las coordenadas y de cuáles no.

RED DE VÉRTICES:

VÉRTICE	**COORDENADAS DEFINITIVAS**	
	X	**Y**
A	X_A	Y_A
B	X_B	Y_B
C	X_C	Y_C
D	X_D	Y_D
P_1	**?**	**?**
P_2	**?**	**?**

Si optamos por el método de ajuste por mínimos cuadrados, debemos comenzar por obtener unas coordenadas iniciales del punto P_1 y del punto P_2. A estas coordenadas las denominaremos aproximadas.

CÁLCULO DE LAS COORDENADAS APROXIMADAS DE LOS PUNTOS PROBLEMA.

Para obtener estas coordenadas calcularemos una intersección simple para cada punto, seleccionando entre las visuales de campo. Basta con calcular UNA intersección simple, para cada uno de los puntos problema. Buscaremos una directa simple (dos puntos de estación conocidos desde los que se visa al desconocido), si no la hubiera buscaríamos otro tipo de intersección simple. En nuestro ejemplo podríamos resolver la intersección directa simple ABP_1 para dar coordenadas a P_1 y la BDP_2 para dar coordenadas a P_2.

Se resuelven estas dos intersecciones directas simples y se obtienen las coordenadas de P_1 y P_2.

RELACIONES DE OBSERVACIÓN

Ahora ya conocemos las coordenadas iniciales de todos los puntos de la red, unas definitivas y otras aproximadas:

	COORDENADAS INICIALES		**COORDENADAS FINALES**	
VÉRTICE	**X**	**Y**	**X**	**Y**
A	X_A	Y_A	X_A	Y_A
B	X_B	Y_B	X_B	Y_B
C	X_C	Y_C	X_C	Y_C
D	X_D	Y_D	X_D	Y_D
P_1	X'_{P1}	Y'_{P1}	$X'_{P1} + dX_{P1}$	$Y'_{P1} + dY_{P1}$
P_2	X'_{P2}	Y'_{P2}	$X'_{P2} + dx_{P2}$	$Y'_{P2} + dY_{P2}$

Debemos plantear las relaciones de observación. Recordemos el modelo de ecuación:

$$\frac{r^{CC}}{D^2}\cdot\left[(Y_2-Y_1)dX_2-(Y_2-Y_1)dX_1-(X_2-X_1)dY_2+(X_2-X_1)dY_1\right]-d\Sigma_1+\left[(\theta_1^2)'-(L_1^2+\Sigma'_1)\right]^{CC}=v$$

Los incognitas son cinco en cada ecuación:

- La variación de coordenadas del punto de estación: dX_1, dY_1
- La variación de coordenadas del punto visado: dX_2, dY_2,
- y la variación de desorientación del punto de estación: $d\Sigma_1$

Se plantea una por cada observación acimutal, pero queda claro que aquellas observaciones entre puntos fijos no plantean ecuación, los diferenciales son cero tanto en el punto 1 como en el punto 2, y no existe ecuación por no existir incógnitas, y que tendremos que calcular la desorientación aproximada de P_1 y P_2.

Tenemos las siguientes visuales:

PUNTO DE ESTACIÓN	PUNTO VISADO	RELACIÓN DE OBSERVACIÓN
P_1	A	De dirección
	B	De dirección
	C	De dirección
	D	De dirección
	P_2	De dirección
A	B	-
	P_1	De dirección
B	A	-
	P_1	De dirección
	P_2	De dirección
D	P_2	De dirección
	C	-
P_2	P_1	De dirección
	D	De dirección
	C	De dirección

Procedemos a continuación a plantear estas doce ecuaciones:

Ecuación de dirección de P_1 a A:

Punto de estación 1 ≡ P_1
Punto visado 2 ≡ A

$$\frac{r^{CC}}{D_{P1'}^{A\;2}} \cdot \left[(Y_A - Y_{P1})dX_A - (Y_A - Y_{P1})dX_{P1} - (X_A - X_{P1})dY_A + (X_A - X_{P1})dY_{P1}\right] - d\Sigma_{P1} +$$
$$\left[(\theta_{P1}^{A})' - (L_{P1}^{A} + \Sigma'_{P1})\right]^{CC} = v$$

Como A es un punto del que no vamos a variar sus coordenadas:

$$dX_A = 0$$
$$dY_A = 0$$

La $d\Sigma_{P1}$ se mantiene como incógnita en la ecuación.

La ecuación queda:

$$\boxed{\frac{r^{CC}}{D_{P1'}^{A\;2}} \cdot \left[-(Y_A - Y_{P1})dX_{P1} + (X_A - X_{P1})dY_{P1}\right] - d\Sigma_{P1} + \left[(\theta_{P1}^{A})' - (L_{P1}^{A} + \Sigma'_{P1})\right]^{CC} = v}$$

Ecuación de dirección de P_1 a B:

Punto de estación 1 ≡ P_1
Punto visado 2 ≡ B

$$\frac{r^{CC}}{D_{P1'}^{B\ 2}} \cdot \left[(Y_B - Y_{P1})dX_B - (Y_B - Y_{P1})dX_{P1} - (X_B - X_{P1})dY_B + (X_B - X_{P1})dY_{P1}\right] - d\Sigma_{P1} +$$
$$\left[(\theta_{P1}^B)' - (L_{P1}^B + \Sigma'_{P1})\right]^{CC} = v$$

Como B es un punto del que no vamos a variar sus coordenadas:

$dx_B = 0$
$dY_B = 0$

La $d\Sigma_{P1}$ se mantiene como incógnita en la ecuación.

La ecuación queda:

$$\boxed{\frac{r^{CC}}{D_{P1'}^{B\ 2}} \cdot \left[-(Y_B - Y_{P1})dX_{P1} + (X_B - X_{P1})dY_{P1}\right] - d\Sigma_{P1} + \left[(\theta_{P1}^B)' - (L_{P1}^B + \Sigma'_{P1})\right]^{CC} = v}$$

Ecuación de dirección de P$_1$ a C:

Punto de estación 1 ≡ P$_1$
Punto visado 2 ≡ C

$$\frac{r^{CC}}{D_{P1'}^{C\ 2}} \cdot \left[(Y_C - Y_{P1})dX_C - (Y_C - Y_{P1})dX_{P1} - (X_C - X_{P1})dY_C + (X_C - X_{P1})dY_{P1}\right] - d\Sigma_{P1} +$$
$$\left[(\theta_{P1}^C)' - (L_{P1}^C + \Sigma'_{P1})\right]^{CC} = v$$

Como C es un punto del que no vamos a variar sus coordenadas:

$dx_C = 0$
$dY_C = 0$

La $d\Sigma_{P1}$ se mantiene como incógnita en la ecuación.

La ecuación queda:

$$\boxed{\frac{r^{CC}}{D_{P1'}^{C\ 2}} \cdot \left[-(Y_C - Y_{P1})dX_{P1} + (X_C - X_{P1})dY_{P1}\right] - d\Sigma_{P1} + \left[(\theta_{P1}^C)' - (L_{P1}^C + \Sigma'_{P1})\right]^{CC} = v}$$

Ecuación de dirección de P$_1$ a D:

Punto de estación 1 ≡ P$_1$
Punto visado 2 ≡ D

$$\frac{r^{CC}}{D_{P1'}^{D\ 2}}\cdot\left[(Y_D-Y_{P1})dX_D-(Y_D-Y_{P1})dX_{P1}-(X_D-X_{P1})dY_D+(X_D-X_{P1})dY_{P1}\right]-d\Sigma_{P1}+$$
$$\left[(\theta_{P1}^{D})'-(L_{P1}^{D}+\Sigma'_{P1})\right]^{CC}=v$$

Como D es un punto del que no vamos a variar sus coordenadas:

$dx_D = 0$
$dY_D = 0$

La $d\Sigma_{P1}$ se mantiene como incógnita en la ecuación.

La ecuación queda:

$$\boxed{\frac{r^{CC}}{D_{P1'}^{D\ 2}}\cdot\left[-(Y_D-Y_{P1})dX_{P1}+(X_D-X_{P1})dY_{P1}\right]-d\Sigma_{P1}+\left[(\theta_{P1}^{D})'-(L_{P1}^{D}+\Sigma'_{P1})\right]^{CC}=v}$$

Ecuación de dirección de P_1 a P_2:

Punto de estación 1 ≡ P_1
Punto visado 2 ≡ P_2

$$\frac{r^{CC}}{D_{P1'}^{P2\ 2}}\cdot\left[(Y_{P2}-Y_{P1})dX_{P2}-(Y_{P2}-Y_{P1})dX_{P1}-(X_{P2}-X_{P1})dY_{P2}+(X_{P2}-X_{P1})dY_{P1}\right]-d\Sigma_{P1}+$$
$$\left[(\theta_{P1}^{P2})'-(L_{P1}^{P2}+\Sigma'_{P1})\right]^{CC}=v$$

No se elimina ninguna incógnita.

Ecuación de dirección de A a P_1:

Punto de estación 1 ≡ A
Punto visado 2 ≡ P_1

$$\frac{r^{CC}}{D_{A}^{P1'\ 2}}\cdot\left[(Y_{P1}-Y_A)dX_{P1}-(Y_{P1}-Y_A)dX_A-(X_{P1}-X_A)dY_{P1}+(X_{P1}-X_A)dY_A\right]-d\Sigma_A+$$
$$\left[(\theta_{A}^{P1})'-(L_{A}^{P1}+\Sigma'_{A})\right]^{CC}=v$$

Como A es un punto del que no vamos a variar sus coordenadas:

$dX_A = 0$
$dY_A = 0$

Por otra parte, como hemos estacionado en un punto A, del que conocemos sus coordenadas y hemos orientado visando a otro punto conocido conocemos el acimut :

$d\Sigma_A = 0$

La ecuación queda:

$$\boxed{\frac{r^{CC}}{D_A^{P1'2}}\cdot\left[(Y_{P1}-Y_A)dX_{P1}-(X_{P1}-X_A)dY_{P1}\right]+\left[(\theta_A^{P1})'-(\theta_A^{P1})\right]^{CC}=v}$$

Ecuación de dirección de B a P$_1$:

Punto de estación 1 ≡ B
Punto visado 2 ≡ P$_1$

$$\frac{r^{CC}}{D_B^{P1'2}}\cdot\left[(Y_{P1}-Y_B)dX_{P1}-(Y_{P1}-Y_B)dX_B-(X_{P1}-X_B)dY_{P1}+(X_{P1}-X_B)dY_B\right]-d\Sigma_B+$$
$$\left[(\theta_B^{P1})'-(L_B^{P1}+\Sigma'_B)\right]^{CC}=v$$

Como B es un punto del que no vamos a variar sus coordenadas:

$dx_B = 0$
$dY_B = 0$

Por otra parte, como hemos estacionado en un punto B, del que conocemos sus coordenadas y hemos orientado visando a otro punto conocido conocemos el acimut :

$d\Sigma_B = 0$

La ecuación queda:

$$\boxed{\frac{r^{CC}}{D_B^{P1'2}}\cdot\left[(Y_{P1}-Y_B)dX_{P1}-(X_{P1}-X_B)dY_{P1}\right]+\left[(\theta_B^{P1})'-(\theta_B^{P1})\right]^{CC}=v}$$

Ecuación de dirección de B a P$_2$:

Punto de estación 1 ≡ B
Punto visado 2 ≡ P$_2$

$$\frac{r^{CC}}{D_B^{P2'2}}\cdot\left[(Y_{P2}-Y_B)dX_{P2}-(Y_{P2}-Y_B)dX_B-(X_{P2}-X_B)dY_{P2}+(X_{P2}-X_B)dY_B\right]-d\Sigma_B+$$
$$\left[(\theta_B^{P2})'-(L_B^{P2}+\Sigma'_B)\right]^{CC}=v$$

Como B es un punto del que no vamos a variar sus coordenadas:

$dx_B = 0$
$dY_B = 0$

Por otra parte, como hemos estacionado en un punto B, del que conocemos sus coordenadas y hemos orientado visando a otro punto conocido conocemos el acimut :

$d\Sigma_B = 0$

La ecuación queda:

$$\boxed{\frac{r^{CC}}{D_B^{P2'2}} \cdot \left[(Y_{P2} - Y_B)dX_{P2} - (X_{P2} - X_B)dY_{P2}\right] + \left[(\theta_B^{P2})' - (\theta_B^{P2})\right]^{CC} = v}$$

Ecuación de dirección de D a P_2:

Punto de estación 1 ≡ D
Punto visado 2 ≡ P_2

$$\frac{r^{CC}}{D_D^{P2'2}} \cdot \left[(Y_{P2} - Y_D)dX_{P2} - (Y_{P2} - Y_D)dX_D - (X_{P2} - X_D)dY_{P2} + (X_{P2} - X_D)dY_D\right] - d\Sigma_D +$$
$$\left[(\theta_D^{P2})' - (L_D^{P2} + \Sigma'_D)\right]^{CC} = v$$

Como B es un punto del que no vamos a variar sus coordenadas:

$dx_D = 0$
$dy_D = 0$

Por otra parte, como hemos estacionado en un punto B, del que conocemos sus coordenadas y hemos orientado visando a otro punto conocido conocemos el acimut :

$d\Sigma_B = 0$

La ecuación queda:

$$\boxed{\frac{r^{CC}}{D_D^{P2'2}} \cdot \left[(Y_{P2} - Y_D)dX_{P2} - (X_{P2} - X_D)dY_{P2}\right] + \left[(\theta_D^{P2})' - (\theta_D^{P2})\right]^{CC} = v}$$

Ecuación de dirección de P_2 a D:

Punto de estación 1 ≡ P_2
Punto visado 2 ≡ D

$$\frac{r^{CC}}{D_{P2'}^{D\ 2}} \cdot \left[(Y_D - Y_{P2})dX_D - (Y_D - Y_{P2})dX_{P2} - (X_D - X_{P2})dY_D + (X_D - X_{P2})dY_{P2}\right] - d\Sigma_{P2} +$$
$$\left[(\theta_{P2}^{D})' - (L_{P2}^{D} + \Sigma'_{P2})\right]^{CC} = v$$

Como D es un punto del que no vamos a variar sus coordenadas:

$dx_D = 0$
$dY_D = 0$

La $d\Sigma_P$ se mantiene como incógnita en la ecuación.

La ecuación queda:

$$\boxed{\frac{r^{CC}}{D_{P2'}^{D\ 2}}\cdot\left[-(Y_D-Y_{P2})dX_{P2}+(X_D-X_{P2})dY_{P2}\right]-d\Sigma_{P2}+\left[(\theta_{P2}^{D})'-(L_{P2}^{D}+\Sigma'_{P2})\right]^{CC}=v}$$

Ecuación de dirección de P_2 a C:

Punto de estación 1 ≡ P_2
Punto visado 2 ≡ C

$$\frac{r^{CC}}{D_{P2'}^{C\ 2}}\cdot\left[(Y_C-Y_{P2})dX_C-(Y_C-Y_{P2})dX_{P2}-(X_C-X_{P2})dY_C+(X_C-X_{P2})dY_{P2}\right]-d\Sigma_{P2}+$$
$$\left[(\theta_{P2}^{C})'-(L_{P2}^{C}+\Sigma'_{P2})\right]^{CC}=v$$

Como D es un punto del que no vamos a variar sus coordenadas:

$dx_C = 0$
$dy_C = 0$

La $d\Sigma_P$ se mantiene como incógnita en la ecuación.

La ecuación queda:

$$\boxed{\frac{r^{CC}}{D_{P2'}^{C\ 2}}\cdot\left[-(Y_C-Y_{P2})dX_{P2}+(X_C-X_{P2})dY_{P2}\right]-d\Sigma_{P2}+\left[(\theta_{P2}^{C})'-(L_{P2}^{C}+\Sigma'_{P2})\right]^{CC}=v}$$

Ecuación de dirección de P_2 a P_1:

Punto de estación 1 ≡ P_2
Punto visado 2 ≡ P_1

$$\frac{r^{CC}}{D_{P2}^{P1'\,2}}\cdot\left[(Y_{P1}-Y_{P2})dX_{P1}-(Y_{P1}-Y_{P2})dX_{P2}-(X_{P1}-X_{P2})dY_{P1}+(X_{P1}-X_{P2})dY_{P2}\right]-d\Sigma_{P2}+$$
$$\left[(\theta_{P2}^{P1})'-(L_{P2}^{P1}+\Sigma'_{P2})\right]^{CC}=v$$

RESOLUCIÓN DEL SISTEMA

El sistema de ecuaciones que hemos obtenido es el siguiente:

Ecuación de dirección de P_1 a A:

$$\frac{r^{CC}}{D_{P1'}^{A\ 2}}\cdot\left[-(Y_A-Y_{P1})dX_{P1}+(X_A-X_{P1})dY_{P1}\right]-d\Sigma_{P1}+\left[(\theta_{P1}^{A})'-(L_{P1}^{A}+\Sigma'_{P1})\right]^{CC}=v$$

Ecuación de dirección de P a B:

$$\frac{r^{CC}}{D_{P1'}^{B\ 2}} \cdot \left[-(Y_B - Y_{P1})dX_{P1} + (X_B - X_{P1})dY_{P1}\right] - d\Sigma_{P1} + \left[(\theta_{P1}^{B})' - (L_{P1}^{B} + \Sigma'_{P1})\right]^{CC} = v$$

Ecuación de dirección de P_1 a C:

$$\frac{r^{CC}}{D_{P1'}^{C\ 2}} \cdot \left[-(Y_C - Y_{P1})dX_{P1} + (X_C - X_{P1})dY_{P1}\right] - d\Sigma_{P1} + \left[(\theta_{P1}^{C})' - (L_{P1}^{C} + \Sigma'_{P1})\right]^{CC} = v$$

Ecuación de dirección de P_1 a D:

$$\frac{r^{CC}}{D_{P1'}^{D\ 2}} \cdot \left[-(Y_D - Y_{P1})dX_{P1} + (X_D - X_{P1})dY_{P1}\right] - d\Sigma_{P1} + \left[(\theta_{P1}^{D})' - (L_{P1}^{D} + \Sigma'_{P1})\right]^{CC} = v$$

Ecuación de dirección de P_1 a P_2:

$$\frac{r^{CC}}{D_{P1'}^{P2\,2}} \cdot \left[(Y_{P2} - Y_{P1})dX_{P2} - (Y_{P2} - Y_{P1})dX_{P1} - (X_{P2} - X_{P1})dY_{P2} + (X_{P2} - X_{P1})dY_{P1}\right] - d\Sigma_{P1} +$$
$$\left[(\theta_{P1}^{P2})' - (L_{P1}^{P2} + \Sigma'_{P1})\right]^{CC} = v$$

Ecuación de dirección de A a P_1:

$$\frac{r^{CC}}{D_{A}^{P1'2}} \cdot \left[(Y_{P1} - Y_A)dX_{P1} - (X_{P1} - X_A)dY_{P1}\right] + \left[(\theta_{A}^{P1})' - (\theta_{A}^{P1})\right]^{CC} = v$$

Ecuación de dirección de B a P_1:

$$\frac{r^{CC}}{D_{B}^{P1'2}} \cdot \left[(Y_{P1} - Y_B)dX_{P1} - (X_{P1} - X_B)dY_{P1}\right] + \left[(\theta_{B}^{P1})' - (\theta_{B}^{P1})\right]^{CC} = v$$

Ecuación de dirección de B a P_2:

$$\frac{r^{CC}}{D_{B}^{P2'2}} \cdot \left[(Y_{P2} - Y_B)dX_{P2} - (X_{P2} - X_B)dY_{P2}\right] + \left[(\theta_{B}^{P2})' - (\theta_{B}^{P2})\right]^{CC} = v$$

Ecuación de dirección de D a P_2:

$$\frac{r^{CC}}{D_{D}^{P2'2}} \cdot \left[(Y_{P2} - Y_D)dX_{P2} - (X_{P2} - X_D)dY_{P2}\right] + \left[(\theta_{D}^{P2})' - (\theta_{D}^{P2})\right]^{CC} = v$$

Ecuación de dirección de P_2 a D:

$$\frac{r^{CC}}{D_{P2'}^{D\ 2}} \cdot \left[-(Y_D - Y_{P2})dX_{P2} + (X_D - X_{P2})dY_{P2}\right] - d\Sigma_{P2} + \left[(\theta_{P2}^{D})' - (L_{P2}^{D} + \Sigma'_{P2})\right]^{CC} = v$$

Ecuación de dirección de P_2 a C:

$$\frac{r^{CC}}{D_{P2'}^{C\ 2}} \cdot \left[-(Y_C - Y_{P2})dX_{P2} + (X_C - X_{P2})dY_{P2}\right] - d\Sigma_{P2} + \left[(\theta_{P2}^{C})' - (L_{P2}^{C} + \Sigma'_{P2})\right]^{CC} = v$$

Ecuación de dirección de P_2 a P_1:

$$\frac{r^{CC}}{D_{P2}^{P1'2}} \cdot \left[(Y_{P1} - Y_{P2})dX_{P1} - (Y_{P1} - Y_{P2})dX_{P2} - (X_{P1} - X_{P2})dY_{P1} + (X_{P1} - X_{P2})dY_{P2}\right] - d\Sigma_{P2} +$$
$$\left[(\theta_{P2}^{P1})' - (L_{P2}^{P1} + \Sigma'_{P2})\right]^{CC} = v$$

No olvidéis que las relaciones de observación son de la forma:

A X = L + v

Por lo que es necesario pasar el término independiente al otro miembro de la ecuación, para aplicar la resolución matricial.

Como solución obtendremos los valores dX_P y dY_P, que sumados a los iniciales (aproximados), nos permiten calcular la solución final.

3. LA INTERSECCIÓN MÚLTIPLE CON ANGULOS Y CON DISTANCIAS

3.1 Introducción.

3.2 Expresión de la relación de observación por dirección angular observada.

3.3 Expresión de la relación de observación por distancia observada.

3.4 Metodología general de cálculo por mínimos cuadrados.

- *Coordenadas aproximadas del punto a determinar.*
- *Planteamiento de las relaciones de observación.*
  - *Observaciones angulares.*
  - *Observaciones de distancia.*
- *Asignación de pesos.*
- *Resolución del sistema de ecuaciones por mínimos cuadrados.*
  - *Relaciones normales.*
  - *Solución al sistema de ecuaciones de observación.*
- *Coordenadas ajustadas del punto a determinar.*
- *Precisión de las coordenadas ajustadas.*

De modo análogo a cómo hemos expuesto los apartados anteriores, puede resolverse el caso de intersecciones en los que se introducen medidas de distancias.

Es importante recordar que las distancias que se introducen en las ecuaciones han de ser distancias cartesianas, en el sistema de referencia en el que estemos trabajando.

4. RESOLUCIÓN DE LA ALTIMETRÍA.

4.1 Introducción.

4.2 Expresión de la relación de observación por desnivel.

4.3 Metodología general de cálculo por mínimos cuadrados.

. Altitudes aproximadas de los punto a determinar.

. Planteamiento de las relaciones de observación.

. Asignación de pesos.

. Resolución del sistema de ecuaciones por mínimos cuadrados.
- Relaciones normales.
- Solución al sistema de ecuaciones de observación.

. Altitud ajustada de los puntos a determinar.

. Precisión de las altitudes ajustadas.

5. BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA.

- BEZOARI, G.; MONTI, C. y SELVINI, A. (1980).
- BRINKER, Russell C.; MINNICK, Roy (1987).
- CHUECA PAZOS, M. (1983): Tomo I.
- DOMINGUEZ GARCIA-TEJERO, F. (1978).
- GARCÍA CORTÉS, S.; SÁNCHEZ FERNÁNDEZ, B. ; SÁEZ GARCÍA, E. (2001) : *Consideraciones Generales sobre el Ajuste de Observaciones Topográficas mediante Mínimos Cuadrados.* Topografía y Cartografía. Vol. XVIII- Nº 106, Septiembre-Octubre 2001, pp.24-36. Colegio Oficial de Ingenieros Técnicos en Topografía, Madrid.
- OJEDA, J.L. (1984).
- UREN, J.; PRICE, W.F.(1992).