

## **Tema 7: Método de Intersección Simple**

## ÍNDICE

### 1. DESCRIPCIÓN GENERAL.

- 1.1 Introducción.
- 1.2 Clasificación de las intersecciones.
  - . Según los datos previos del punto de estación.
    - Directa.
    - Inversa.
    - Mixta.
  - . Según el número de observaciones.
    - Simple.
    - Múltiple.
  - . Según el modelo de observación
    - . Angular.
    - . Angular más distancias.
- 1.3 La intersección angular.
- 1.4 Metodología general de observación.

### 2. LA INTERSECCIÓN DIRECTA SIMPLE.

- 2.1 Descripción del método.
- 2.2 Resolución gráfica.
- 2.3 Incertidumbre a priori.
- 2.4 Longitud máxima de las visuales.
- 2.5 Planimetría (X, Y).
  - . Cálculo del triángulo por el teorema del seno.
  - . Método de las tangentes.
- 2.6 Altimetría (H).
- 2.7 Obtención de coordenadas con datos previos en la proyección UTM.

### 3. LA INTERSECCIÓN INVERSA SIMPLE.

- 3.1 Descripción del método.

- 3.2 Resolución gráfica.
- 3.3 Incertidumbre a priori.
- 3.4 Planimetría (X, Y).
  - . Método de Pothenot.
  - . Otras variantes.
- 3.5 Altimetría (H).
- 3.6 Obtención de coordenadas con datos previos en la proyección UTM.

#### **4. LA INTERSECCIÓN MIXTA SIMPLE.**

- 4.1 Descripción del método.
- 4.2 Resolución gráfica.
- 4.3 Incertidumbre a priori.
- 4.4 Planimetría (X, Y).
- 4.5 Altimetría (H).
- 4.6 Obtención de coordenadas con datos previos en la proyección UTM.

#### **5. OTROS MÉTODOS DE INTERSECCIÓN ANGULAR SIMPLE.**

- 5.1 Método de Hansen.
- 5.2 Método de Pothenot Múltiple.

#### **6. BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA.**

## 1. DESCRIPCIÓN GENERAL

1.1 *Introducción.*

1.2 *Clasificación de las intersecciones.*

- . *Según los datos previos del punto de estación.*
  - *Directa.*
  - *Inversa.*
  - *Mixta.*
- . *Según el número de observaciones.*
  - *Simple.*
  - *Múltiple.*
- . *Según el modelo de observación*
  - . *Angular.*
  - . *Angular más distancias.*

1.3 *La intersección angular.*

1.4 *Metodología general de observación.*

### 1.1 INTRODUCCIÓN.

Los métodos de intersección permiten obtener las coordenadas de uno o de varios puntos apoyándonos en otros vértices con coordenadas determinadas en fases previas.

En Topografía se necesita el implantar puntos porque la distancia existente entre los de 3<sup>er</sup> orden es demasiado grande para realizar tareas concretas. Se hace necesario establecer por métodos topográficos nuevos puntos, denominados *vértices topográficos*, de modo que la distancia entre ellos no supere la que necesita el trabajo concreto.

La aplicación fundamental del método de intersección consiste en permitir la densificación de redes existentes. También puede aplicarse para comprobar la bondad de las mismas o en los trabajos preliminares de enlace a un determinado sistema de coordenadas.

Supongamos que tenemos que realizar un levantamiento, por ejemplo, en un determinado sistema de coordenadas previamente establecido. Para ello tendremos que dotar de coordenadas en dicho sistema a alguno de nuestros puntos, para luego definirlo como origen del sistema de cálculo.

Imaginemos que nos proporcionan 5 vértices topográficos con su listado de coordenadas y sus reseñas y debemos apoyarnos en ellos. ¿Podemos utilizarlos sin más para nuestro trabajo?. ¿Qué arriesgamos al hacerlo?.

Este es el lugar de los métodos de intersección. Métodos que antes se aplicaban sólo con observaciones angulares, por el problema de medida de distancias con precisión, y que la actualidad incluye tanto observaciones angulares como de distancias.

En este tema estudiaremos los métodos angulares simples y en el siguiente completaremos el análisis con los múltiples.

Cuando preparéis un trabajo recordad qué el número de observaciones de que debe constar, ha de ser tal que siempre lo convierta en una intersección múltiple. La Topografía es geometría comprobada. Seguimos principios geométricos pero necesitamos redundancia de observaciones, de datos, para poder asegurar la bondad de los resultados con la precisión requerida.

## 1.2 CLASIFICACIÓN DE LOS MÉTODOS DE INTERSECCIÓN.

- . Según los datos previos del punto de estación.
  - Directa.
  - Inversa
  - Mixta.
- . Según el número de observaciones.
  - Simple.
  - Múltiple.
- . Según el modelo de observación
  - . Angular.
  - . Angular más distancias.

Conocida la posición de un conjunto de puntos, los métodos de intersección permiten determinar la posición de uno o varios puntos en el mismo sistema de coordenadas.

Dependiendo de si se conocen o no las coordenadas del punto sobre el que se estaciona la intersección se denomina:

- Directa: se estaciona sólo en puntos conocidos.
- Inversa: se estaciona sólo en puntos desconocidos.
- Mixta: se estaciona en puntos conocidos y desconocidos.

Por otro lado, dependiendo del número de observaciones de que se disponga, las intersecciones se clasifican en simples o múltiples:

- Simple: tenemos sólo los datos imprescindibles para resolver geoméricamente el problema.
- Múltiple: tenemos más datos que los estrictamente necesarios para determinar la posición del punto.

Finalmente la medida electromagnética de distancias ha permitido introducir observaciones de distancia en los métodos de intersección. El orden de precisión en la medida de distancias con las estaciones totales es análogo al de la medida de ángulos. Cuando analizamos cómo es una intersección en función del tipo de observación nos encontramos con:

- métodos de intersección con sólo medidas angulares,
- métodos de intersección con medidas angulares y de distancias.

### 1.3 LA INTERSECCIÓN ANGULAR.

La intersección angular es un método topográfico que permite determinar la posición planimétrica de vértices, con sólo lecturas acimutales.

La determinación altimétrica del punto problema puede realizarse tomando la altura del instrumento, la altura de la bandera (o sistema de señalización) y la distancia cenital. Con estos datos se calcula el valor de H aplicando el método de nivelación trigonométrica.

Vamos a estudiar cuáles son los métodos simples de intersección y como se lleva a cabo la resolución numérica de los mismos.

No podemos olvidar en ningún momento a lo largo de este tema, que en cualquier observación topográfica es necesario tener comprobación de las observaciones y que para ello han de efectuarse siempre observaciones redundantes, que servirán para tener comprobación de los resultados.

El método de intersección angular simple no es un método final, que en sí mismo nos permita resolver un problema topográfico. Cuando apliquemos la intersección la hemos de diseñar para que ésta sea múltiple.

### 1.4 METODOLOGÍA GENERAL DE OBSERVACIÓN.

La intersección angular es el método que permite determinar la posición de vértices topográficos con sólo observaciones angulares.

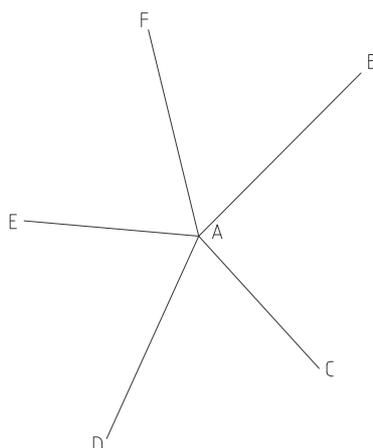
Contamos con dos posibles métodos de observación para la obtención de los datos de campo:

- Método de la vuelta de horizonte.
- Método de Schreiber ó método de pares sobre una referencia.

La utilización de uno u otro depende de la precisión que requiera el trabajo.

#### □ **Método de vuelta de horizonte.**

Supongamos que se desea obtener la observación angular a los puntos representados en la figura.



Aplicando el método de vuelta de horizonte se estaciona el instrumento en el vértice A y se coloca el anteojo en posición C.D.

De todas las direcciones que se van a observar se elige la que esté mejor definida, la F por ejemplo, y se anotan las lecturas en C.D., a cada una de las restantes: B, C, D y F; volviendo a mirar a F al finalizar.

Se comprobará que esta lectura, denominada de *cierre*, es la misma que al comienzo. Así nos aseguramos que el instrumento no ha sufrido ningún tipo de movimiento durante la observación.

Esta coincidencia no puede ser total, ya que estarán afectadas de errores de puntería y lectura. La mayor diferencia admisible en  $e$  (error de cierre de la vuelta de horizonte) será:

$$e \leq \left( \sqrt{e_p^2 + e_l^2} \right) \sqrt{2}$$

Siendo  $e_p$  el error de puntería y  $e_l$  el error de lectura.

A continuación se voltea el anteojo, se coloca en posición de C.I. y se repiten las observaciones girando el instrumento en sentido contrario al de las agujas de reloj: F, E, D, C, B y F; y comprobando el cierre en F.

Si el cierre es correcto se dice que se ha observado *una serie o vuelta de horizonte*. En caso contrario se deberá repetir el procedimiento desde el principio.

Cuando se pretenden alcanzar determinadas precisiones se hace necesario observar más de una serie. Si denominamos  $n$  al número de ellas, el ángulo de reiteración  $\alpha$ , vendrá dado por el cociente:

$$\alpha = \frac{200^g}{n}$$

Éste ángulo de reiteración será el valor que habrá que incrementar la lectura origen de cada serie para calcular la del comienzo de la vuelta

siguiente. En Topografía no es frecuente observar más de dos series, por ello las lecturas origen suelen ser  $0^g$  y  $100^g$ .

□ **Método de Schreiber: pares sobre una referencia.**

Este método consiste en elegir una dirección de referencia R, que esté bien definida, y que puede ser o no alguna de las direcciones a observar.

Se hacen las lecturas correspondientes sobre R y B como si se tratase de una vuelta de horizonte compuesta sólo por dicho *par* de direcciones. A continuación se visa de igual modo a R y C. Estos puntos constituyen el segundo par. Se procede de forma análoga hasta haber combinado con R todas las direcciones. Al realizar la observación por pares se evitan posibles movimientos del instrumento y es más fácil localizar equivocaciones. Si el número de direcciones es grande se tarda bastante en la observación.

Para abreviar el método se utiliza en ocasiones un método mixto entre el método de vueltas de horizonte y pares a una referencia.

Este procedimiento consiste en dividir las direcciones totales en grupos, de tal manera que se vise a la referencia y a unas direcciones. Luego se vuelve a visar a la referencia y al resto de las direcciones. Para refundir las vueltas de horizonte en una sola hay que pensar que se dispone de distintas lecturas a la referencia R en cada una de ellas.

Por ejemplo, para las direcciones de la figura supongamos que se han realizado las siguientes observaciones:

$$1^{\circ} \begin{cases} L_R = 49^g,33 \\ L_B = 81^g,67 \\ L_C = 158^g,02 \\ L_D = 213^g,91 \end{cases} \quad 2^{\circ} \begin{cases} L_R = 49^g,35 \\ L_E = 327^g,91 \\ L_F = 376^g,22 \end{cases}$$

Como la segunda vuelta se visó a R con  $2'$  más que la primera en el origen, para convertir estas lecturas a la vuelta definitiva conjunta se les resta  $2'$  a todas las demás.

$$\begin{cases} L_R = 49^g,33 \\ L_B = 81^g,67 \\ L_C = 158^g,02 \\ L_D = 213^g,91 \\ L_E = 327^g,89 \\ L_F = 376^g,20 \end{cases}$$

Para profundizar en el método de observación de Schreiber recomendamos el estudio del siguiente artículo:

VALBUENA DURÁN, J.L.; MOLINERO POZA, P.; SÁEZ DE UGARTE, R. (1994): "El Método de Observación Angular de Schreiber". *Topografía y Cartografía*. Vol. XI N. 65, Noviembre-Diciembre 1994, pp.40-58.

## 2. LA INTERSECCIÓN DIRECTA SIMPLE.

- 2.1 Descripción del método.
- 2.2 Resolución gráfica.
- 2.3 Incertidumbre a priori.
- 2.4 Longitud máxima de las visuales.
- 2.5 Planimetría (X, Y).
  - . Cálculo del triángulo por el teorema del seno.
  - . Método de las tangentes.
- 2.6 Altimetría (H).
- 2.7 Obtención de coordenadas con datos previos en la proyección UTM.

### 2.1 DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO.

Sea V un punto cuya posición se quiere determinar y A y B dos puntos de coordenadas conocidas.

El método de intersección directa simple consiste en:

- estacionar el equipo topográfico en el punto conocido A y realizar las siguientes observaciones:
  - lectura de orientación (al menos a un punto conocido).
  - lectura al punto desconocido V.
- estacionar el equipo topográfico en el punto conocido B y realizar las siguientes observaciones:
  - lectura de orientación (al menos a un punto conocido).
  - lectura al punto desconocido V.

### 2.2 RESOLUCIÓN GRÁFICA.

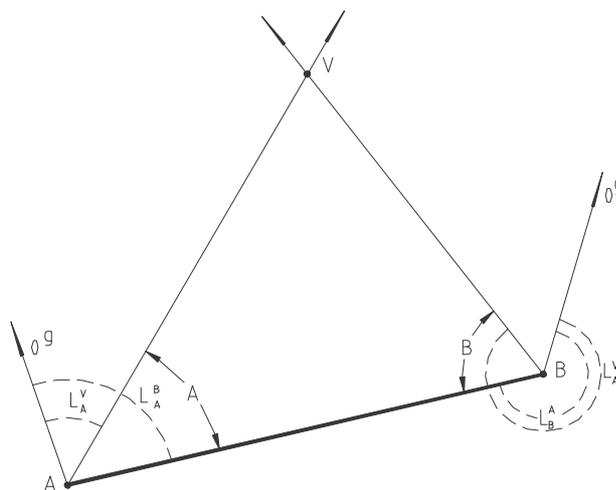
En la intersección directa simple se conocen las coordenadas de los puntos A y B y se han obtenido en campo dos lecturas (por lo menos) en cada uno de ellos.

Analíticamente puede calcularse el acimut  $\theta_A^B$  y la distancia existente entre ellos.

Para resolver gráficamente el problema se sitúan los puntos A y B por coordenadas, en una cuadrícula.

Conocida la lectura y el acimut  $\theta_A^B$ , obtendremos la desorientación de A, mediante la lectura  $L_A^B$ . Una vez calculada la desorientación podremos calcular el acimut  $\theta_A^V$ .

Del mismo modo se procederá en el punto B, calculando el acimut  $\theta_B^V$ .



Gráficamente el punto V se encuentra en la intersección de las rectas que partiendo de A y B, tienen como acimut  $\theta_B^V$  y  $\theta_A^V$ .

### 2.3 INCERTIDUMBRE A PRIORI.

Entendemos por incertidumbre a priori la incertidumbre planimétrica en las coordenadas de un punto que se determinase por el método de intersección directa.

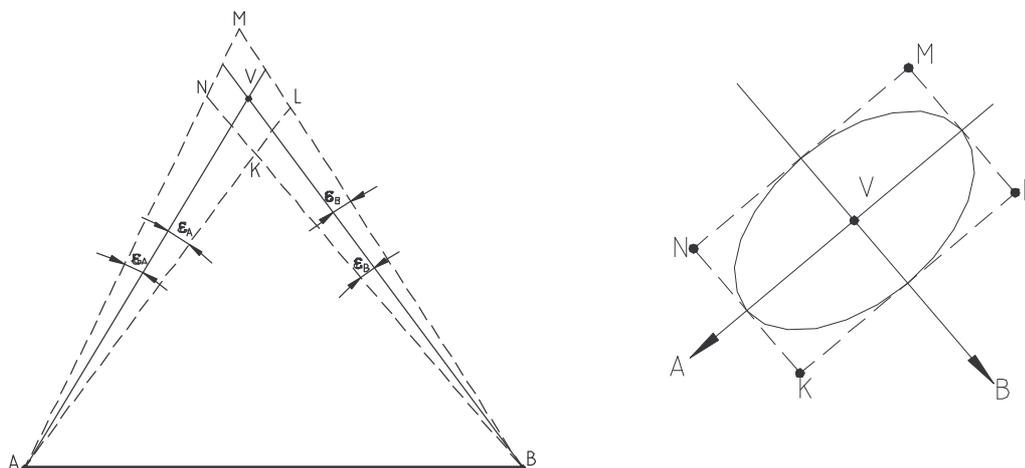
Las únicas medidas que se efectúan para fijar un punto por intersección directa son las de los ángulos A y B (ambos como diferencia entre los acimutes de dos visuales).

El error que afecta a la posición de V será consecuencia de los errores en la determinación de dichos ángulos. Consideremos que estos sean  $\varepsilon_A$  y  $\varepsilon_B$ . Representándolos en sentido positivo y negativo se obtendrá un cuadrilátero KLMN en cuyo interior estaría el punto V.

Las distancias AV y BV son muy grandes en comparación con los lados del cuadrilátero de incertidumbre y los ángulos  $\varepsilon_A$  y  $\varepsilon_B$  son pequeños. Se admite que MN y KL son paralelas a AV y equidistantes de ella, así como lo mismo de ML y NK respecto de a BV. Podemos considerar que KLMN es un paralelogramo.

La zona comprendida entre las rectas MN y KL se llama banda de indeterminación de la visual AV y su anchura vendrá dada por  $2 \cdot AV \cdot \varepsilon_B$ .

Los valores  $\varepsilon_A$  y  $\varepsilon_B$  son las incertidumbres de los ángulos horizontales observados en A y B, respectivamente.



Análogamente, la zona entre NK y ML es la banda de indeterminación de la visual BV y su anchura vendrá dada por  $2 \cdot BV \cdot \varepsilon_A$ .

Se puede considerar la elipse inscrita en él, como la zona más probable en la que puede encontrarse situado el punto problema.

A partir de esta figura se llega a obtener que la incertidumbre máxima, semieje mayor de la elipse inscrita en el paralelogramo, viene dada por la siguiente expresión:

$$e = \frac{L \cdot e_a}{\hat{V} \cdot \operatorname{sen} \frac{\hat{V}}{2}}$$

En ella  $\hat{V}$  representa el ángulo de intersección menor de  $100^\circ$ . Si el ángulo de intersección de las visuales en V fuera  $103^\circ,2114$  el ángulo V que permite la obtención de la incertidumbre máxima sería  $96^\circ,7886$ . Es decir el suplementario.

La incertidumbre depende de L,  $e_a$  y V. El comportamiento de la incertidumbre es el siguiente:

- aumenta al aumentar la longitud de la visual.
- aumenta también con el error angular.
- disminuye al aumentar el ángulo de intersección ya que el valor del seno aumenta con el valor del ángulo.

Como conclusión podemos indicar que la intersección directa será tanto más precisa cuanto más cortas sean las visuales al punto a determinar, y cuanto mayor sea la precisión del instrumento. No debemos olvidar sin embargo que las

visuales cortas incrementan el error de dirección. Finalmente el caso óptimo de intersección es aquel en el que ambas visuales cortan en ángulo recto.

Como condición general se acepta que un ángulo de intersección no puede ser menor de  $30^\circ$ .

## 2.4 LONGITUD MÁXIMA DE LAS VISUALES.

En algunos casos, al igual que nos sucedía en radiación con el cálculo de la distancia máxima, necesitaremos determinar la longitud máxima de la visual a la que podemos observar el punto problema.

Para ello deberemos conocer la incertidumbre (o error máximo) permitida en dicho punto. Podrá venir expresada por el error gráfico (0.2 mm) a la escala, o por una determinada precisión especificada en el pliego de condiciones del trabajo.

La longitud máxima se calculará con las características del instrumento previsto, teniendo en cuenta que se debe aplicar regla de Bessel en la observación de la vuelta de horizonte.

$$L = \frac{e \cdot \operatorname{sen} \frac{\hat{V}}{2}}{e_a}$$

## 2.5 PLANIMETRÍA (X, Y).

En la intersección directa simple tendremos como datos previos las coordenadas de dos vértices:

$$A(X_A, Y_A) \quad B(X_B, Y_B)$$

Como resultado de la observación en campo habremos obtenido las siguientes lecturas:

$$\begin{aligned} \text{desde } A: & L_A^V, L_A^B \\ \text{desde } B: & L_B^V, L_B^A \end{aligned}$$

A partir de las coordenadas de los puntos A y B, calcularemos el acimut  $\theta_A^B$ , y la distancia que hay entre ellos.

Conocido la lectura y el acimut  $\theta_A^B$ , obtendremos la desorientación de A, mediante la lectura  $L_A^B$ . Una vez calculada la desorientación podremos calcular el acimut  $\theta_A^V$ .

Del mismo modo se realiza con el punto B, calculando el acimut  $\theta_B^V$ .

En una intersección directa siempre conocemos la desorientación en los puntos de estación, antes de plantearnos incluso el método de resolución que vamos a aplicar. Con la desorientación calculamos los acimutes al punto problema desde los puntos de estación.

La obtención de las coordenadas del vértice podemos realizarla por cualquiera de los siguientes procedimientos.

**a) Método de resolución del triángulo aplicando el teorema del seno.**

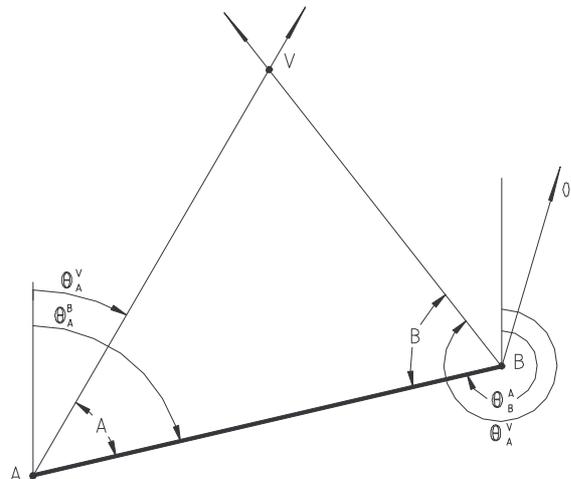
A partir de los acimutes calculados desde el punto de estación al punto desconocido, se pueden obtener los ángulos en los vértices de estación:

$$A = \theta_A^B - \theta_A^V$$

$$B = \theta_B^V - \theta_B^A$$

La distancia AB también es conocida ya que:

$$D_A^B = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}$$



El problema de la intersección directa queda determinado con el cálculo de las distancias AV y BV. Los acimutes ya los tenemos calculados.

En el triángulo ABV, se cumple:

$$\frac{D_{rA}^V}{\widehat{\text{sen}B}} = \frac{D_{rA}^B}{\widehat{\text{sen}V}} = \frac{D_{rB}^V}{\widehat{\text{sen}A}}$$

$$D_{rA}^V = \frac{\widehat{\text{sen}B}}{\widehat{\text{sen}V}} D_{rA}^B$$

$$D_{rB}^V = \frac{\text{sen}\hat{A}}{\text{sen}\hat{V}} D_{rA}^B$$

El ángulo en el vértice puede deducirse. En un triángulo la suma de los tres ángulos ha de ser  $200^\circ$ .

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{D} = 200^\circ$$

$$\hat{V} = 200 - (\hat{A} + \hat{B})$$

Conocidos los tres ángulos del triángulo, y las tres distancias en el mismo, el problema ha quedado resuelto.

### OBTENCIÓN DE COORDENADAS.

Las coordenadas X, Y del punto V las obtendremos:

a) Partiendo del punto A:

Se calculan los incrementos de coordenadas entre A y V:

$$\Delta x_A^V = D_{rA}^V \cdot \text{sen}\theta_A^V$$

$$\Delta y_A^V = D_{rA}^V \cdot \text{cos}\theta_A^V$$

Las coordenadas de V vendrán dadas por:

$$X_V = X_A + \Delta x_A^V$$

$$Y_V = Y_A + \Delta y_A^V$$

b) Partiendo del punto B:

$$\Delta x_B^V = D_{rB}^V \cdot \text{sen}\theta_B^V$$

$$\Delta y_B^V = D_{rB}^V \cdot \text{cos}\theta_B^V$$

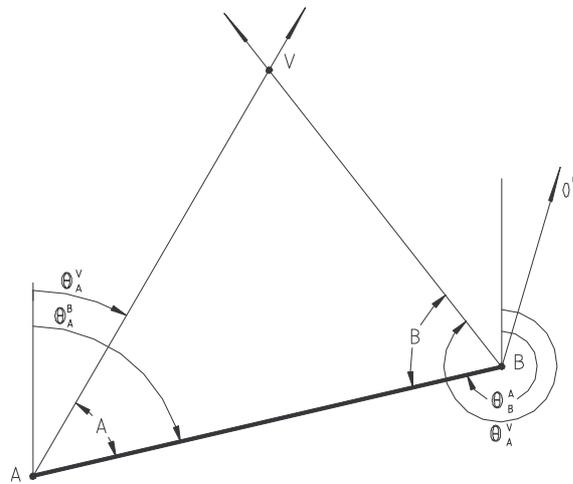
$$X_V = X_B + \Delta x_B^V$$

$$Y_V = Y_B + \Delta y_B^V$$

Las coordenadas que obtengamos por A y por B han de ser iguales. Con este procedimiento comprobamos el cálculo, pero no hay ninguna comprobación de datos de campo. No olvidemos que no existe redundancia. En una intersección simple la solución es única.

### b) Método de las tangentes.

En este método se plantea un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, que son las coordenadas X e Y del punto problema.



Por la figura:

$$\tan \theta_A^V = \frac{X_V - X_A}{Y_V - Y_A}$$

$$(Y_V - Y_A) \cdot \tan \theta_A^V = X_V - X_A$$

$$\boxed{X_V = (Y_V - Y_A) \cdot \tan \theta_A^V + X_A}$$

Por otro lado:

$$\tan \theta_B^V = \frac{X_V - X_B}{Y_V - Y_B}$$

$$(Y_V - Y_B) \cdot \tan \theta_B^V = X_V - X_B$$

ahora sustituimos  $X_V$  por la expresión anterior:

$$(Y_V - Y_B) \cdot \tan \theta_B^V = (Y_V - Y_A) \cdot \tan \theta_A^V + X_A - X_B$$

$$Y_V (\tan \theta_B^V - \tan \theta_A^V) = Y_B \cdot \tan \theta_B^V - Y_A \cdot \tan \theta_A^V + X_A - X_B$$

$$\boxed{Y_V = \frac{Y_B \cdot \tan \theta_B^V - Y_A \cdot \tan \theta_A^V + X_A - X_B}{\tan \theta_B^V - \tan \theta_A^V}}$$

Una vez que hayamos calculado la coordenada Y, se calcula la coordenada X, y el problema queda completamente resuelto.

Por el método de la tangente no tenemos comprobación en el cálculo, pero no olvidemos que en muchas ocasiones (cuando se utiliza un ordenador para el cálculo) no la vamos a necesitar.

## 2.6 ALTIMETRÍA.

El cálculo de la altimetría en intersección directa se realiza aplicando el método de nivelación trigonométrica.

Podremos calcular tantas altitudes del punto problema como visuales con distancias cenitales se hayan realizado a dicho punto.

En la intersección directa simple contamos con dos: la realizada desde A y la realizada desde B.

La coordenada H del punto V se obtendrá como media ponderada de ambas utilizando como criterio de peso la inversa de la distancia de intersección.

$$H_V = \frac{(H_V)_A \cdot \frac{1}{D_A^V} + (H_V)_B \cdot \frac{1}{D_B^V}}{\frac{1}{D_A^V} + \frac{1}{D_B^V}}$$

## 2.7 OBTENCIÓN DE COORDENADAS CON DATOS PREVIOS EN LA PROYECCIÓN UTM.

Una de las características de la proyección UTM es el ser conforme. Ello conlleva que los ángulos en la proyección tienen el mismo valor que los que forman dichas direcciones en el terreno.

Gracias a esta característica los datos de campo pueden utilizarse directamente para resolver el problema, sin ningún tipo de consideración especial.

Para obtener las desorientaciones en el punto de estación, y con ellas las orientaciones al punto problema desde los puntos de los que conocemos las coordenadas UTM, se actúa de modo análogo al que hemos planteado anteriormente para los acimutes.

Una vez calculadas las orientaciones, los ángulos interiores de los vértices del triángulo pueden obtenerse por diferencias entre ellas,

$$\begin{aligned}\hat{A} &= O_A^B - O_A^V \\ \hat{B} &= O_B^V - O_B^A\end{aligned}$$

La distancia en la proyección se obtiene directamente a partir de las coordenadas de los dos vértices.

$$(D_A^B)_{UTM} = \sqrt{(X_{UTM B} - X_{UTM A})^2 + (Y_{UTM B} - Y_{UTM A})^2}$$

En el triángulo ABV, se cumple:

$$\frac{(D_A^V)_{UTM}}{\text{sen}\hat{B}} = \frac{(D_B^V)_{UTM}}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{(D_A^B)_{UTM}}{\text{sen}\hat{V}}$$

$$(D_A^V)_{UTM} = \frac{\text{sen}\hat{B}}{\text{sen}\hat{V}} (D_A^B)_{UTM}$$

$$(D_B^V)_{UTM} = \frac{\text{sen}\hat{A}}{\text{sen}\hat{V}} (D_A^B)_{UTM}$$

El ángulo en el vértice lo podemos calcular, como diferencia a  $200^g$ .

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{V} = 200^g$$

$$\hat{V} = 200 - (\hat{A} + \hat{B})$$

### OBTENCIÓN DE COORDENADAS $X_{UTM}$ , $Y_{UTM}$ .

Las coordenadas  $X_{UTM}$ ,  $Y_{UTM}$  del punto V las obtendremos de la siguiente forma:

a) Partiendo del punto A:

Los incrementos de coordenadas entre A y V vendrán dados por:

$$(\Delta x_A^V)_{UTM} = (D_A^V)_{UTM} \cdot \text{sen}O_A^V$$

$$\Delta y_A^V)_{UTM} = (D_A^V)_{UTM} \cdot \text{cos}O_A^V$$

$$(X_V)_{UTM} = (X_A)_{UTM} + (\Delta x_A^V)_{UTM}$$

$$(Y_V)_{UTM} = (Y_A)_{UTM} + (\Delta y_A^V)_{UTM}$$

b) Partiendo del punto B:

$$(\Delta x_B^V)_{UTM} = (D_B^V)_{UTM} \cdot \text{sen}O_B^V$$

$$(\Delta y_B^V)_{UTM} = (D_B^V)_{UTM} \cdot \text{cos}O_B^V$$

$$(X_V)_{UTM} = (X_B)_{UTM} + (\Delta x_B^V)_{UTM}$$

$$(Y_V)_{UTM} = (Y_B)_{UTM} + (\Delta y_B^V)_{UTM}$$

Las coordenadas que obtengamos por A y por B han de ser iguales.

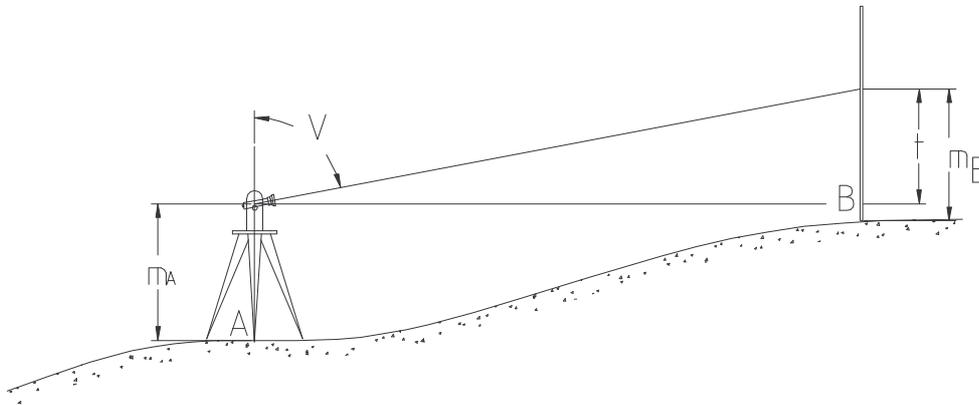
### OBTENCIÓN DE LA ALTITUD H.

Si partimos de las coordenadas de puntos conocidos en proyección UTM la resolución de la planimetría no tiene ningún problema, por la característica de conformidad de la proyección.

La altimetría se obtiene por nivelación trigonométrica. El problema que encontraremos es que no tenemos ninguna distancia medida en campo, y la

distancia deducida a partir de las coordenadas no corresponde a ninguna de las del modelo de observación.

Supongamos estacionado el instrumento en el punto A, y que se sitúa una señal en el punto B. El modelo teórico de medida queda reflejado en el siguiente gráfico.



Del gráfico se puede deducir fácilmente la expresión por la que se podrá obtener el desnivel, y que será igual a:

$$\Delta H_A^B = i_A + t_A - m_B + (0.5 - K) \frac{(D_A^B)^2}{R}$$

Conocemos la distancia entre los puntos A y B, pero ésta es UTM y no sirve para calcular el término  $t$ .

Deberemos aplicar la expresión de cálculo de reducción de una distancia a la proyección pero en sentido inverso. Es decir si la reducción a la proyección se llevaba a cabo aplicando:

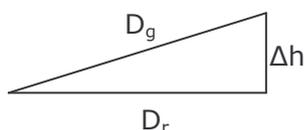
$$D_{UTM} = K \sqrt{\frac{D_G^2 - \Delta h^2}{\left(1 + \frac{h_1}{R}\right) \left(1 + \frac{h_2}{R}\right)}}$$

Donde  $h_1$  y  $h_2$ , son las altitudes de los puntos 1 y 2 respectivamente, y  $\Delta h$  es la diferencia entre ambas.  $R$  representa al radio de la Tierra, del que tomaremos un valor de 6370 km.

La distancia geométrica la podremos calcular a través de la expresión:

$$D_G^2 = \frac{D_{UTM}^2}{k^2} \left(1 + \frac{h_1}{R}\right) \left(1 + \frac{h_2}{R}\right) + \Delta h^2$$

La distancia reducida puede obtenerse aplicando el teorema de Pitágoras:



$$D_G^2 = \Delta h^2 + D_r^2$$

$$D_r = \sqrt{D_G^2 - \Delta h^2}$$

A partir de la distancia reducida obtenida entre los puntos A y B, podrán calcularse las demás distancias reducidas del triángulo:

$$\frac{D_{rA}^V}{\widehat{\text{sen}B}} = \frac{D_{rA}^B}{\widehat{\text{sen}V}} = \frac{D_{rB}^V}{\widehat{\text{sen}A}}$$

$$D_{rA}^V = \frac{\widehat{\text{sen}B}}{\widehat{\text{sen}V}} D_{rA}^B$$

$$D_{rB}^V = \frac{\widehat{\text{sen}A}}{\widehat{\text{sen}V}} D_{rA}^B$$

La altitud del punto V se obtendrá como media ponderada inversamente proporcional a las distancias de intersección.

$$H_V = \frac{(H_V)_A \cdot \frac{1}{D_A^V} + (H_V)_B \cdot \frac{1}{D_B^V}}{\frac{1}{D_A^V} + \frac{1}{D_B^V}}$$

### 3. LA INTERSECCIÓN INVERSA SIMPLE.

3.1 Descripción del método.

3.2 Resolución gráfica.

3.3 Incertidumbre a priori.

3.4 Planimetría (X, Y)

- . Método de Pothenot.
- . Otras variantes.

3.5 Altimetría (H).

3.6 Obtención de coordenadas con datos previos en la proyección UTM.

#### 3.1 DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO.

La intersección inversa simple es un problema clásico en topografía y es conocido como problema de Pothenot por ser este autor el que primero obtuvo la resolución numérica del mismo.

La intersección inversa simple consiste en la observación desde un vértice, cuyas coordenadas planimétricas se pretenden obtener, de otros tres cuyas coordenadas son conocidas.

Las tres visuales PA, PB, PC proporcionan los datos necesarios para resolver matemáticamente el problema.

Se conocerán las coordenadas:

$$A (X_A, Y_A) \quad B(X_B, Y_B) \quad C(X_C, Y_C)$$

Los datos de campo serán:

$$L_P^A, L_P^B, L_P^C$$

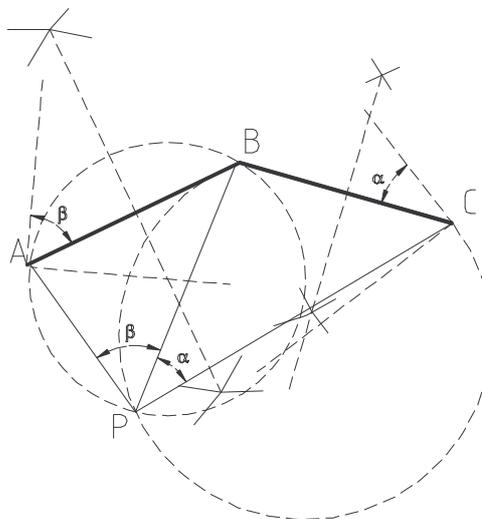
### 3.2 RESOLUCIÓN GRÁFICA.

La resolución gráfica puede realizarse por cualquiera de los siguientes métodos.

- Papel transparente.
- Intersección de arcos capaces.
- Escuadra y transportador.
- Regla y transportador.
- Variable italiana del método anterior.

El método de resolución gráfica del papel transparente consiste en situar por coordenadas en papel milimetrado los puntos conocidos. En otra hoja se sitúan a partir de un punto cualquiera los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ . Superponemos las dos hojas y hacemos que coincidan las visuales con sus puntos. Así obtenemos las coordenadas de P.

El gráfico siguiente refleja el procedimiento de resolución de una intersección inversa simple por el método de intersección de los arcos capaces de los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ .



El problema no tiene solución cuando los cuatro puntos ( los tres conocidos y el punto que se desea determinar) están en la misma circunferencia. Cuando esto sucede los dos arcos capaces se superponen.

Esta circunferencia se denomina circunferencia peligrosa, y viene definida por la condición:

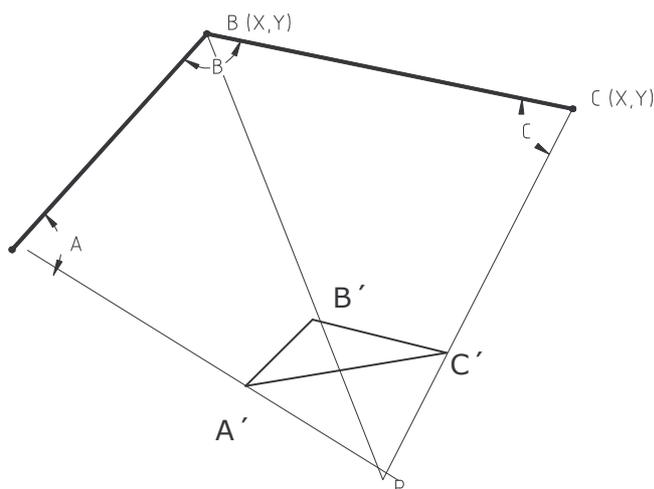
$$\alpha + \beta + B = 200^g$$

En una intersección inversa es necesario controlar que no se dé esta situación.

### 3.3 INCERTIDUMBRE A PRIORI.

La incertidumbre existente en un punto P determinado por el método de intersección inversa, se analiza estudiando el desplazamiento de las tangentes al arco capaz en el punto de intersección.

A partir de las inversas de las distancias, y sobre la propia visual se sitúa un punto que denominamos A', B', C'.



Uniendo los puntos A', B', C' se forma el denominado triángulo indicativo del error.

Se obtiene que la incertidumbre viene expresada por:

$$e = \frac{e_a \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot S} \sqrt{(\text{lado mayor})^2 + (\text{lado intermedio})^2}$$

En la expresión de la incertidumbre:

- $e_a$  es la incertidumbre existente en la visual acimutal realizada con el equipo.
- S es la superficie del triángulo formado por los puntos A', B', C' que se obtienen calculando la inversa de las distancias de los lados de la intersección.

- lado mayor del triangulo indicativo del error.
  - lado intermedio del triángulo indicativo del error.
- La incertidumbre será menor a medida que lo sea la incertidumbre de la observación acimutal ( $e_a$ ).

Por otra parte será menor la incertidumbre al aumentar la superficie del triángulo y al disminuir la longitud de los lados del triángulo indicativo del error. El triangulo indicativo del error afecta en dos sentidos: su superficie y la longitud de los lados que lo forman. Los lados han de ser lo mínimos posibles pero la superficie la máxima. Ello implica que el triangulo mejor (el que aparecería en la intersección más deseable) será un triángulo equilátero que tiene la propiedad de abarcar una mayor área con el perímetro mínimo.

El caso óptimo en función de estas variables será:

- a) Precisión angular: la trisección inversa es mejor cuanto más preciso es el equipo.
- b) Longitud de los lados del triangulo de error y superficie del mismo: Interesa que las visuales formen unos  $60^\circ$  aproximadamente, ya que necesitamos el triangulo de mayor superficie con el menor perímetro: el triángulo equilátero. La intersección inversa debe tender a una forma en Y.

No debemos tampoco olvidar que no existe solución al problema cuando los cuatro puntos ( los tres conocidos y el punto que se desea determinar) están en la misma circunferencia.

### 3.4 PLANIMETRÍA (X, Y).

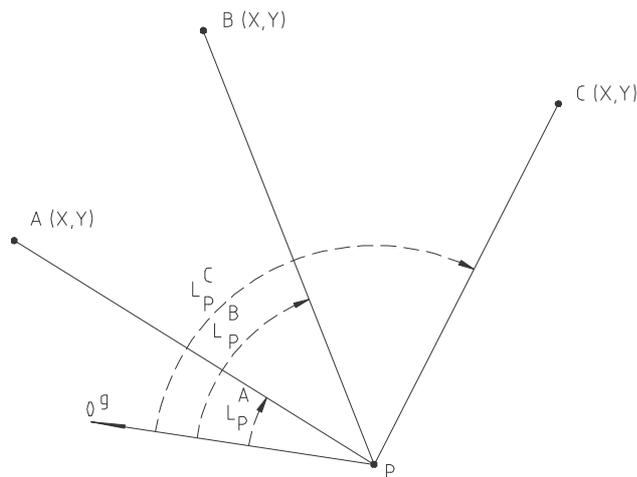
Como hemos indicado anteriormente la intersección inversa simple consiste en la observación desde un vértice desconocido a otros tres cuyas coordenadas ya tenemos. Se conocen las coordenadas:

$$A (X_A, Y_A) \quad B(X_B, Y_B) \quad C(X_C, Y_C)$$

Y los datos de campo son:

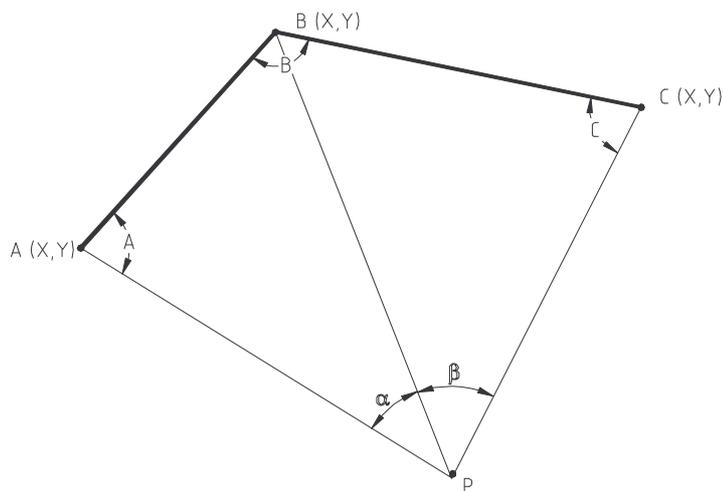
$$L_P^A, L_P^B, L_P^C$$

OBSERVACIÓN DE CAMPO.



Las tres visuales PA, PB, PC proporcionan los datos necesarios para resolver matemáticamente el problema.

ESQUEMA DE CALCULO



Por diferencias de lecturas de campo conoceremos el valor de los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ .

$$\alpha = L_p^B - L_p^A$$

$$\beta = L_p^C - L_p^B$$

A partir de las coordenadas de los puntos A, B y C, se conocen los acimutes entre estos puntos y las distancias AB y BC. El ángulo en B se puede calcular por diferencias de acimutes:

$$\hat{B} = \theta_B^A - \theta_B^C$$

El problema estará resuelto analíticamente cuando determinemos el valor de los ángulos A y C.

Para obtenerlos vamos a estudiar dos procedimientos. Los dos llevan a la misma solución, y se trata únicamente de dos formas diferentes de resolver el problema:

- Método de Pothenot.
- Método de Carlos. Fernández Antón

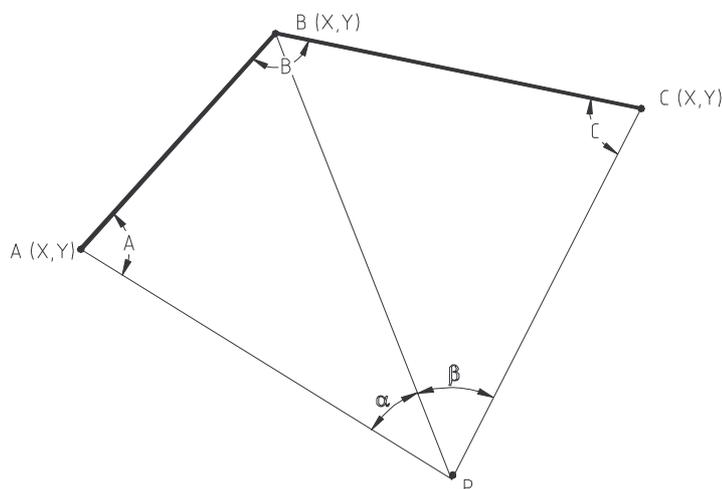
Recomendamos la lectura de los siguientes artículos:

FARJAS ABADÍA, M. (1991): "Problema de Pothenot: intersección inversa simple". *Topografía y Cartografía*. Volumen III-Nº45. Julio-Agosto 1991.

FERNÁNDEZ ANTÓN, C. (1991): "Nuevo Método de resolución de la intersección inversa simple". *Topografía y Cartografía*. Volumen III, nº 45. Julio-Agosto 1991.

#### □ **Método de Pothenot.**

El esquema de situación de la intersección inversa simple es el de la figura.



Se establece el valor de la diagonal común PB en ambos triángulos.

$$\frac{D_P^B}{\widehat{\text{sen } A}} = \frac{D_A^B}{\widehat{\text{sen } \alpha}} \rightarrow D_P^B = D_A^B \frac{\widehat{\text{sen } A}}{\widehat{\text{sen } \alpha}}$$

$$\frac{D_P^B}{\widehat{\text{sen } C}} = \frac{D_B^C}{\widehat{\text{sen } \beta}} \rightarrow D_P^B = D_B^C \frac{\widehat{\text{sen } C}}{\widehat{\text{sen } \beta}}$$

Igualando las dos expresiones de la distancia PB se obtiene:

$$D_A^B \frac{\widehat{\text{sen } A}}{\widehat{\text{sen } \alpha}} = D_B^C \frac{\widehat{\text{sen } C}}{\widehat{\text{sen } \beta}}$$

Llevando a un miembro los términos de los que conocemos su valor, y dejando en el otro los que queremos determinar (A y C) obtenemos:

$$\frac{\text{sen}\hat{C}}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{D_A^B \cdot \text{sen}\beta}{D_B^C \cdot \text{sen}\alpha}$$

El segundo miembro es conocido en su totalidad. Podrá igualarse a la tangente de un ángulo auxiliar que denominamos  $\delta$  :

$$\frac{D_A^B \cdot \text{sen}\beta}{D_B^C \cdot \text{sen}\alpha} = \tan \delta$$

A partir de los datos del problema siempre se podrá calcular cuál es el valor de un ángulo  $\delta$  (que no posee sin ningún sentido geométrico) , a través del arcotangente de la expresión anterior.

Por otro lado:

$$\frac{\text{sen}\hat{C}}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{\tan \delta}{1}$$

Vamos a aplicar propiedades de fracciones. Supongamos la siguiente fracción:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

En ella podremos establecer:

$$\frac{b+a}{b-a} = \frac{d+c}{d-c}$$

Operando en nuestra expresión:

$$\frac{\text{sen}A + \text{sen}C}{\text{sen}A - \text{sen}C} = \frac{1 + \tan \delta}{1 - \tan \delta}$$

Operamos en el segundo término. Como:

$$1 = \tan 50^\circ$$

$$\frac{1 + \tan \delta}{1 - \tan \delta} = \frac{\tan 50^\circ + \tan \delta}{1 - \tan 50^\circ \cdot \tan \delta}$$

Y el segundo miembro es el desarrollo de la tangente de una suma. Si en un caso general es:

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$$

En el nuestro, a la inversa:

$$\frac{\tan 50^\circ + \tan \delta}{1 - \tan 50^\circ \cdot \tan \delta} = \tan(50^\circ + \delta)$$

Entonces:

$$\frac{1 + \tan \delta}{1 - \tan \delta} = \tan(50^\circ + \delta)$$

Como resultado de operar en el segundo miembro de la expresión queda:

$$\frac{\operatorname{sen}A + \operatorname{sen}C}{\operatorname{sen}A - \operatorname{sen}C} = \tan(50^\circ + \delta)$$

Haciendo operaciones en el primer término de la expresión, y aplicando:

$$\frac{\operatorname{sen}a + \operatorname{sen}b}{\operatorname{sen}a - \operatorname{sen}b} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}}{2 \cos \frac{a+b}{2} \operatorname{sen} \frac{a-b}{2}}$$

se obtiene:

$$\frac{\operatorname{sen}A + \operatorname{sen}C}{\operatorname{sen}A - \operatorname{sen}C} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A+C) \cos \frac{1}{2}(A-C)}{2 \cos \frac{1}{2}(A+C) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A-C)}$$

$$\frac{\operatorname{sen}A + \operatorname{sen}C}{\operatorname{sen}A - \operatorname{sen}C} = \frac{2}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen} \frac{A+C}{2}}{\cos \frac{A+C}{2}} \cdot \frac{\cos \frac{A-C}{2}}{\operatorname{sen} \frac{A-C}{2}} = \tan \frac{1}{2}(A+C) \cdot c \tan g \frac{1}{2}(A-C)$$

La expresión inicial era:

$$\frac{\operatorname{sen}A + \operatorname{sen}C}{\operatorname{sen}A - \operatorname{sen}C} = \frac{1 + \tan \delta}{1 - \tan \delta}$$

Sustituyendo por los valores obtenidos tras operar

$$\frac{\operatorname{sen}A + \operatorname{sen}C}{\operatorname{sen}A - \operatorname{sen}C} = \tan \frac{1}{2}(A+C) \cdot c \tan g \frac{1}{2}(A-C)$$

$$\frac{1 + \tan \delta}{1 - \tan \delta} = \tan(50^\circ + \delta)$$

Iguando:

$$\tan \frac{1}{2}(A + C) \cdot c \tan \frac{1}{2}(A - C) = \tan(50^\circ + \delta)$$

Y despejando:

$$\tan \frac{1}{2}(A - C) = \tan \frac{1}{2}(A + C) c \tan(50^\circ + \delta)$$

Es decir:

$$\tan \frac{1}{2}(A - C) = \frac{\tan \frac{A + C}{2}}{\tan(50^\circ + \delta)}$$

Expresión que permite calcular  $\frac{1}{2}(A - C)$ , ya que  $\delta$  es conocido.

En el cuadrilátero PABC se ha de cumplir que la suma de todos los ángulos interiores sea  $400^\circ$ :

$$\widehat{A} + \widehat{C} + \alpha + \beta + \widehat{B} = 400^\circ$$

$$A + C = 400^\circ - (\alpha + \beta + B)$$

$$\frac{1}{2}(A + C) = 200^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + \beta + B)$$

Podremos calcular  $\frac{1}{2}(A + C)$ ,

Designando por:

$$\begin{cases} M = \frac{1}{2}(A + C) \\ N = \frac{1}{2}(A - C) \end{cases}$$

Calculamos A y C:

$$\begin{cases} A = M + N \\ C = M - N \end{cases}$$

Y el problema geométrico ha quedado resuelto.

□ **Método de Carlos Fernández Antón**

En la figura que representa la situación en el método de intersección inversa, aplicamos el teorema del seno a los triángulos que la componen (ABP y BCP) y despejamos el valor de la distancia PB en ambas expresiones:

$$\frac{D_P^B}{\widehat{\text{sen}} \hat{A}} = \frac{D_A^B}{\text{sen } \alpha} \rightarrow D_P^B = D_A^B \frac{\widehat{\text{sen}} \hat{A}}{\text{sen } \alpha}$$

$$\frac{D_P^B}{\widehat{\text{sen}} \hat{C}} = \frac{D_B^C}{\text{sen } \beta} \rightarrow D_P^B = D_B^C \frac{\widehat{\text{sen}} \hat{C}}{\text{sen } \beta}$$

Igualamos:

$$D_A^B \frac{\widehat{\text{sen}} \hat{A}}{\text{sen } \alpha} = D_B^C \frac{\widehat{\text{sen}} \hat{C}}{\text{sen } \beta}$$

Llevamos a un lado de la igualdad los términos desconocidos (A y C) y dejamos en otro aquellos que podemos determinar directamente:

$$\frac{\widehat{\text{sen}} \hat{A}}{\widehat{\text{sen}} \hat{C}} = \frac{D_B^C \cdot \text{sen } \alpha}{D_A^B \cdot \text{sen } \beta} = M$$

Por otro lado la figura ha de cumplir que la suma de todos sus ángulos sea  $400^\circ$ .

$$\hat{A} + \hat{C} + \alpha + \beta + \hat{B} = 400^\circ$$

Nos encontramos con un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, que puede resolverse por el método de sustitución:

$$\hat{C} = (400 - \hat{B} - \beta - \alpha) - \hat{A} = \hat{E} - \hat{A}$$

$$D_A^B \cdot \widehat{\text{sen}} \hat{A} \cdot \text{sen } \beta = D_B^C \cdot \widehat{\text{sen}} \hat{C} \cdot \text{sen } \alpha$$

$$D_A^B \cdot \widehat{\text{sen}} \hat{A} \cdot \text{sen } \beta = D_B^C \cdot \widehat{\text{sen}} (\hat{E} - \hat{A}) \cdot \text{sen } \alpha$$

$$D_A^B \cdot \widehat{\text{sen}} \hat{A} \cdot \text{sen } \beta = D_B^C \cdot [\widehat{\text{sen}} \hat{E} \cdot \cos \hat{A} - \cos \hat{E} \cdot \widehat{\text{sen}} \hat{A}] \cdot \text{sen } \alpha$$

$$\widehat{\text{sen}} \hat{A} \cdot [D_A^B \cdot \text{sen } \beta + D_B^C \cdot \text{sen } \alpha \cdot \cos \hat{E}] = [D_B^C \cdot \text{sen } \alpha \cdot \widehat{\text{sen}} \hat{E}] \cdot \cos \hat{A}$$

$$\boxed{\text{tg } \hat{A} = \frac{D_B^C \cdot \text{sen } \alpha \cdot \widehat{\text{sen}} \hat{E}}{D_A^B \cdot \text{sen } \beta + D_B^C \cdot \text{sen } \alpha \cdot \cos \hat{E}}}$$

$$\boxed{\hat{C} = \hat{E} - \hat{A}}$$

Al calcular el ángulo A hay que tener en cuenta que  $tg\hat{A} = tg(200 + \hat{A})$

Estas expresiones nos permiten obtener los ángulos A y C, y resolver el problema.

### OBTENCIÓN DE COORDENADAS

Una vez calculados los ángulos A y C por cualquiera de los dos métodos expuestos, podemos obtener los acimutes a V.

$$\begin{aligned}\theta_A^P &= \theta_A^B + \hat{A} \\ \theta_C^P &= \theta_B^C \pm 200 - \hat{C}\end{aligned}$$

Las distancias las hallaremos mediante el teorema del seno:

$$\begin{aligned}B_1 &= 200 - A - \alpha \\ B_2 &= 200 - C - \beta \quad \text{ó} \quad B_2 = B - B_1\end{aligned}$$

$$\frac{D_P^B}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{D_A^B}{\text{sen}\alpha} \rightarrow D_P^B = D_A^B \frac{\text{sen}\hat{A}}{\text{sen}\alpha}$$

$$\frac{D_A^B}{\text{sen}\alpha} = \frac{D_A^P}{\text{sen}B_1} \rightarrow D_A^P = D_A^B \frac{\text{sen}B_1}{\text{sen}\alpha}$$

$$\frac{D_B^C}{\text{sen}\beta} = \frac{D_C^P}{\text{sen}B_2} \rightarrow D_C^P = D_B^C \frac{\text{sen}B_2}{\text{sen}\beta}$$

Una vez obtenidas las distancias y los acimutes obtendremos las coordenadas de V desde los puntos A, C. para tener comprobación, cuando realicemos el cálculo manual

$$\begin{aligned}X_p &= X_A + D_A^P \cdot \text{sen}\theta_A^P & X_p &= X_C + D_C^P \cdot \text{sen}\theta_C^P \\ Y_p &= Y_A + D_A^P \cdot \text{cos}\theta_A^P & Y_p &= Y_C + D_C^P \cdot \text{cos}\theta_C^P\end{aligned}$$

### 3.5 ALTIMETRÍA (H).

La altitud del punto problema se obtiene aplicando el método de nivelación trigonométrica. En la intersección inversa simple a partir de los datos de campo podrán obtenerse los siguientes desniveles:

$$\Delta H_P^C = t_P^C + i_P - m_C + C(e+r)$$

$$\Delta H_P^A = t_P^A + i_P - m_A + C(e+r)$$

$$\Delta H_P^B = t_P^B + i_P - m_B + C(e+r)$$

La distancia en la intersección inversa angular no se ha medido en campo, se ha calculado por coordenadas. La distancia que conocemos es la distancia reducida. El término  $t$  podrá obtenerse con la siguiente expresión:

$$t = \frac{D_{rA}^B}{\text{tg}V_A^B}$$

Para obtener la altitud del punto P se deberán calcular los desniveles recíprocos a los obtenidos en cálculo. Conocemos la altitud de A, B y C pero el desnivel es desde P a dichos puntos.

$$\begin{array}{l} (H_P)_A = H_A + \Delta H_A^P \\ (H_P)_B = H_B + \Delta H_B^P \\ (H_P)_C = H_C + \Delta H_C^P \end{array}$$

Si son tolerables la altitud final  $H_P$  será la media ponderada de todas ellas, tomando como criterio de peso la inversa de la distancia de intersección:

$$H_P = \frac{(H_P)_A \cdot \frac{1}{D_A^P} + (H_P)_B \cdot \frac{1}{D_B^P} + (H_P)_C \cdot \frac{1}{D_C^P}}{\frac{1}{D_A^P} + \frac{1}{D_B^P} + \frac{1}{D_C^P}}$$

### 3.6 OBTENCIÓN DE COORDENADAS CON DATOS PREVIOS EN LA PROYECCIÓN UTM.

Como los ángulos en la proyección tienen el mismo valor que los que forman dichas direcciones en el terreno, los datos de campo pueden utilizarse directamente para resolver el problema.

La distancia en la proyección se obtiene directamente a partir de las coordenadas de los vértices:

$$(D_A^B)_{UTM} = \sqrt{(X_{UTM B} - X_{UTM A})^2 + (Y_{UTM B} - Y_{UTM A})^2}$$

$$(D_B^C)_{UTM} = \sqrt{(X_{UTM B} - X_{UTM C})^2 + (Y_{UTM B} - Y_{UTM C})^2}$$

Calcularemos con las coordenadas de A, B y C las orientaciones entre ellos, y por diferencia de orientaciones el valor del ángulo B.

Con estos datos aplicamos el método de Pothenet o el método de Carlos Fernández Antón, y obtenemos el valor de los ángulos A y C.

### OBTENCIÓN DE COORDENADAS $X_{UTM}$ , $Y_{UTM}$ .

Las coordenadas  $X_{UTM}$ ,  $Y_{UTM}$  del punto V las obtendremos de la siguiente forma:

a) Partiendo del punto A:

Calcularemos los incrementos de coordenadas entre A y V:

$$(\Delta x_A^P)_{UTM} = (D_A^P)_{UTM} \cdot \text{sen} O_A^P$$

$$\Delta y_A^P)_{UTM} = (D_A^P)_{UTM} \cdot \text{cos} O_A^P$$

$$(X_P)_{UTM} = (X_A)_{UTM} + (\Delta x_A^P)_{UTM}$$

$$(Y_P)_{UTM} = (Y_A)_{UTM} + (\Delta y_A^P)_{UTM}$$

b) Partiendo del punto C:

$$(\Delta x_C^P)_{UTM} = (D_C^P)_{UTM} \cdot \text{sen} O_C^P$$

$$(\Delta y_C^P)_{UTM} = (D_C^P)_{UTM} \cdot \text{cos} O_C^P$$

$$(X_P)_{UTM} = (X_C)_{UTM} + (\Delta x_C^P)_{UTM}$$

$$(Y_P)_{UTM} = (Y_C)_{UTM} + (\Delta y_C^P)_{UTM}$$

Las coordenadas que obtengamos por A y por C han de ser iguales.

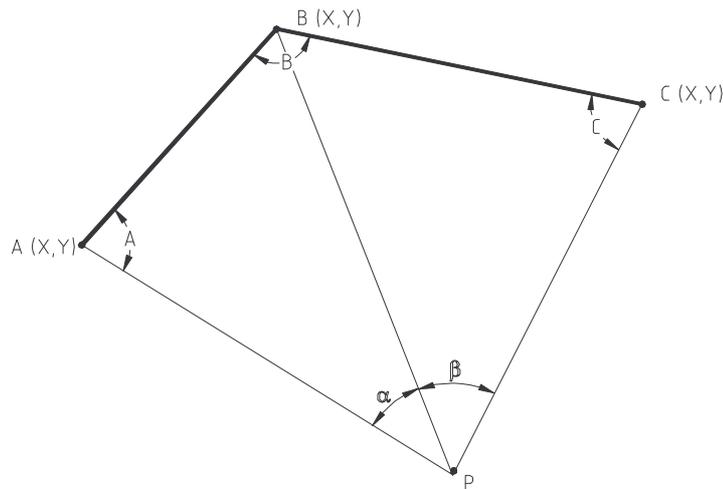
### OBTENCIÓN DE LA ALTITUD H.

La altitud se obtiene por nivelación trigonométrica. El desnivel será igual a:

$$\Delta H_P^A = t_P^A + i_P - m_A + (0.5 - K) \frac{(D_P^A)^2}{R}$$

Resuelto el problema geométrico (habiendo calculado los ángulos A y C) podremos determinar las coordenadas  $X_{UTM}$ ,  $Y_{UTM}$  del punto P. Conocemos por tanto la distancia entre los puntos P y A, pero ésta es UTM. y no nos sirve para determinar desniveles trigonométricos.

Al igual que hemos planteado en la intersección directa, bastará con obtener una distancia reducida cualquiera de la figura y a partir de ella, aplicando el teorema del seno deducir las demás que requiere el cálculo de desniveles.

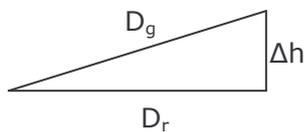


Como conocemos la altitud de los puntos A, B y C podremos apoyarnos en la distancia AB ó AC. Supongamos que utilizamos la AB.

La distancia geométrica la podremos calcular a través de la expresión:

$$(D_A^B)_g^2 = \frac{(D_A^B)_{UTM}^2}{k^2} \left(1 + \frac{h_A}{R}\right) \left(1 + \frac{h_B}{R}\right) + \Delta h_A^2$$

La distancia reducida puede obtenerse aplicando el teorema de Pitágoras:



$$(D_A^B)_g^2 = \Delta h_A^2 + (D_A^B)_r^2$$

$$(D_A^B)_r = \sqrt{(D_A^B)_g^2 - \Delta h_A^2}$$

A partir de la distancia reducida obtenida entre los puntos A y B, podrán calcularse las demás distancias reducidas del triángulo:

$$\frac{D_{rA}^P}{\text{sen}\hat{B}_1} = \frac{D_{rA}^B}{\text{sen}\alpha}$$

$$D_{rA}^P = \frac{\text{sen}\hat{B}_1}{\text{sen}\alpha} D_{rA}^B$$

y de modo análogo puede realizarse el cálculo de BP y CP.

Para calcular la altitud se deberán calcular los desniveles recíprocos a los obtenidos en cálculo. Conocemos la altitud de A, B y C pero el desnivel es desde P a dichos puntos.

$$\begin{aligned} (H_p)_A &= H_A + \Delta H_A^P \\ (H_p)_B &= H_B + \Delta H_B^P \\ (H_p)_C &= H_C + \Delta H_C^P \end{aligned}$$

Si son tolerables la altitud final  $H_p$  será la media ponderada de todas ellas, tomando como criterio de peso la inversa de la distancia de intersección:

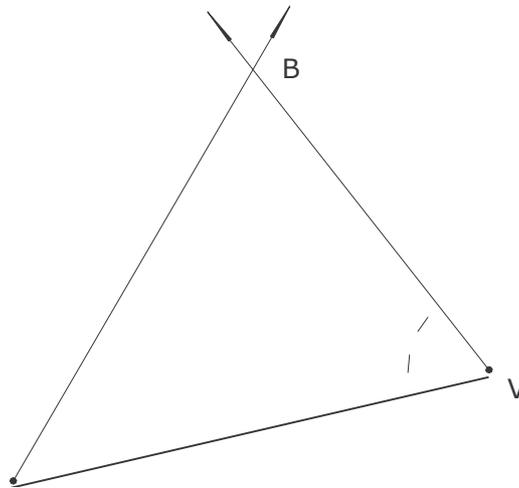
$$H_p = \frac{(H_p)_A \cdot \frac{1}{D_A^P} + (H_p)_B \cdot \frac{1}{D_B^P} + (H_p)_C \cdot \frac{1}{D_C^P}}{\frac{1}{D_A^P} + \frac{1}{D_B^P} + \frac{1}{D_C^P}}$$

#### 4. LA INTERSECCIÓN MIXTA SIMPLE.

- 4.1 Descripción del método.
- 4.2 Resolución gráfica.
- 4.3 Incertidumbre a priori.
- 4.4 Planimetría (X, Y).
- 4.5 Altimetría (H).
- 4.6 Obtención de coordenadas con datos previos en la proyección UTM.

##### 4.1 DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO.

La intersección mixta simple es el método que permite la determinación de las coordenadas de un punto a partir de observaciones de campo obtenidas en dos puntos de estación, uno de ellos de coordenadas conocidas y siendo el segundo punto de estación aquel cuyas coordenadas se quieren determinar.



La intersección mixta simple consiste en:

- estacionar el equipo topográfico en el punto conocido A y realizar las siguientes observaciones:
  - lectura de orientación (al menos a un punto conocido).
  - lectura al punto desconocido: V.
  
- estacionar el equipo topográfico en el punto V y realizar las siguientes observaciones:
  - lectura al punto conocido A.
  - lectura al punto conocido B.

En el método de intersección mixta simple se conocerán:

$$(X_A, Y_A), (X_B, Y_B)$$

Y en campo se habrán obtenido las siguientes lecturas:

$$\begin{array}{ll} \text{desde A:} & L_A^B, L_A^V \\ \text{desde V} & L_V^A, L_V^B. \end{array}$$

#### 4.2 RESOLUCIÓN GRÁFICA.

Sobre la base AB se construye el ángulo medido en A

$$\alpha = L_A^V - L_A^B$$

en la dirección en la que se encuentra el vértice V.

Sobre ese mismo segmento se construye el arco capaz del ángulo  $\beta$

$$\beta = L_V^B - L_V^A$$

La intersección de ambas da lugar a la posición del vértice V.

### 4.3 INCERTIDUMBRE A PRIORI.

Para deducir la incertidumbre que se produce en este tipo de intersecciones hay que considerar que el punto V queda determinado por la intersección del arco capaz y de la visual que parte del vértice conocido. Esta visual podrá tener una incertidumbre por exceso o por defecto. El análisis de la incertidumbre que se introduce debido al arco capaz se realiza estudiando el desplazamiento de la tangente al arco en el punto de contacto.

El problema se reduce a determinar la influencia que tienen los errores angulares en la intersección de la tangente y la visual.

### 4.4 PLANIMETRÍA (X, Y).

La resolución numérica de la intersección mixta simple se transforma al caso de directa sin más que calcular el ángulo en el vértice en el que no se ha estacionado.

### 4.5 ALTIMETRÍA (H).

El cálculo de la altimetría en intersección mixta se realiza aplicando el método de nivelación trigonométrica.

Podremos calcular tantas altitudes del punto problema como visuales con distancias cenitales se hayan realizado a dicho punto, o desde ese punto a puntos conocidos.

La coordenada H del punto V se obtendrá como media ponderada de todas ellas utilizando como criterio de peso la inversa de la distancia de intersección.

$$H_V = \frac{(H_V)_A \cdot \frac{1}{D_A^V} + (H_V)_B \cdot \frac{1}{D_B^V}}{\frac{1}{D_A^V} + \frac{1}{D_B^V}}$$

### 4.6 OBTENCIÓN DE COORDENADAS CON DATOS PREVIOS EN LA PROYECCIÓN UTM.

Una de las características de la proyección UTM es el ser conforme. Ello conlleva que los ángulos en la proyección tienen el mismo valor que los que forman dichas direcciones en el terreno.

Gracias a esta característica los datos de campo pueden utilizarse directamente para resolver el problema, sin ningún tipo de consideración especial.

Para obtener las desorientaciones en el punto de estación, y con ellas las orientaciones al punto problema desde los puntos de los que conocemos las coordenadas UTM, se actúa de modo análogo al que hemos planteado anteriormente en la intersección directa simple.

Una vez calculadas las orientaciones, los ángulos interiores de los vértices del triángulo pueden obtenerse por diferencias entre ellas.

$$A = O_A^V - O_A^B$$

$$B = O_B^A - O_B^V$$

El ángulo en el vértice no estacionado lo podemos calcular, como diferencia a  $200^g$ .

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{D} = 200^g$$

$$\hat{B} = 200 - (\hat{A} + \hat{V})$$

La distancia en la proyección se obtiene directamente a partir de las coordenadas de los dos vértices.

$$(D_A^B)_{UTM} = \sqrt{(X_{UTM B} - X_{UTM A})^2 + (Y_{UTM B} - Y_{UTM A})^2}$$

En el triángulo ABV, se cumple:

$$\frac{(D_A^V)_{UTM}}{\text{sen}\hat{B}} = \frac{(D_A^B)_{UTM}}{\text{sen}\hat{V}} = \frac{(D_B^V)_{UTM}}{\text{sen}\hat{A}}$$

$$(D_A^V)_{UTM} = \frac{\text{sen}\hat{B}}{\text{sen}\hat{V}} (D_A^B)_{UTM}$$

$$(D_B^V)_{UTM} = \frac{\text{sen}\hat{A}}{\text{sen}\hat{V}} (D_A^B)_{UTM}$$

### **OBTENCIÓN DE COORDENADAS $X_{UTM}$ , $Y_{UTM}$ .**

Las coordenadas  $X_{UTM}$ ,  $Y_{UTM}$  del punto V las obtendremos de la siguiente forma:

a) Partiendo del punto A:

Calcularemos los incrementos de coordenadas entre A y V:

$$(\Delta x_A^V)_{UTM} = (D_A^V)_{UTM} \cdot \text{sen}O_A^V$$

$$\Delta y_A^V)_{UTM} = (D_A^V)_{UTM} \cdot \text{cos}O_A^V$$

$$(X_V)_{UTM} = (X_A)_{UTM} + (\Delta x_A^V)_{UTM}$$

$$(Y_V)_{UTM} = (Y_A)_{UTM} + (\Delta y_A^V)_{UTM}$$

b) Partiendo del punto B:

$$(\Delta x_B^V)_{UTM} = (D_B^V)_{UTM} \cdot \text{sen} O_B^V$$

$$(\Delta y_B^V)_{UTM} = (D_B^V)_{UTM} \cdot \text{cos} O_B^V$$

$$(X_V)_{UTM} = (X_B)_{UTM} + (\Delta x_B^V)_{UTM}$$

$$(Y_V)_{UTM} = (Y_B)_{UTM} + (\Delta y_B^V)_{UTM}$$

Las coordenadas que obtengamos por A y por B han de ser iguales.

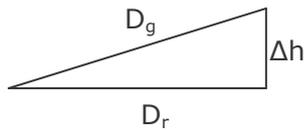
### OBTENCIÓN DE LA ALTITUD H.

La altimetría se obtiene por nivelación trigonométrica. El problema que encontraremos es que no tenemos ninguna distancia medida en campo, y la distancia deducida a partir de las coordenadas no corresponde a ninguna de las del modelo de observación. Al igual que en los casos anteriores se obtienen las distancias reducidas.

La distancia geométrica la podremos calcular a través de la expresión:

$$D_G^2 = \frac{D_{UTM}^2}{k^2} \left( 1 + \frac{h_1}{R} \right) \left( 1 + \frac{h_2}{R} \right) + \Delta h^2$$

La distancia reducida puede obtenerse aplicando el teorema de Pitágoras:



$$D_G^2 = \Delta h^2 + D_r^2$$

$$D_r = \sqrt{D_G^2 - \Delta h^2}$$

A partir de la distancia reducida obtenida entre los puntos A y B, podrán calcularse las demás distancias reducidas del triángulo:

$$\frac{D_{rA}^V}{\text{sen} \hat{B}} = \frac{D_{rA}^B}{\text{sen} \hat{V}} = \frac{D_{rB}^V}{\text{sen} \hat{A}}$$

$$D_{rA}^V = \frac{\text{sen} \hat{B}}{\text{sen} \hat{V}} D_{rA}^B$$

$$D_{rB}^V = \frac{\text{sen} \hat{A}}{\text{sen} \hat{V}} D_{rA}^B$$

La altitud del punto V se obtendrá como media ponderada inversamente proporcional a las distancias de intersección.

$$H_V = \frac{(H_V)_A \cdot \frac{1}{D_A^V} + (H_V)_B \cdot \frac{1}{D_B^V}}{\frac{1}{D_A^V} + \frac{1}{D_B^V}}$$

## 5. OTROS MÉTODOS DE INTERSECCIÓN ANGULAR SIMPLE.

5.1 Método de Hansen.

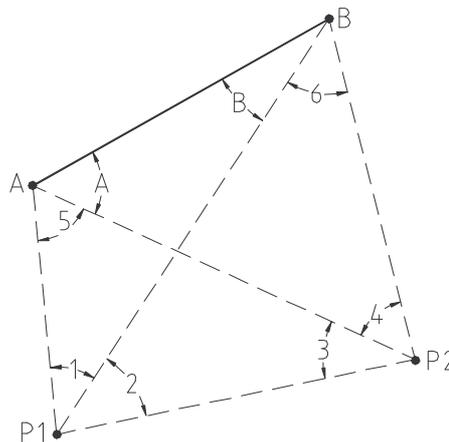
5.2 Método de Pothenot Múltiple.

### 5.1 MÉTODO DE HANSEN.

En ocasiones se presenta la necesidad de levantar dos puntos desconocidos  $P_1$  y  $P_2$  visando desde ellos a otros dos conocidos A y C que por su naturaleza no sean estacionables.

Desde  $P_1$  y  $P_2$  se miden los ángulos 1,2,3 y 4 señalados en la figura.

Este método recibe el nombre de problema de Hansen.



En la figura los ángulos 1, 2, 3 y 4 pueden obtenerse por diferencia de lecturas de campo, y los ángulos 5 y 6 se pueden calcular por diferencia a  $200^g$  en los triángulos  $AP_1P_2$  y  $BP_1P_2$ .

El problema se reduce a obtener el valor de los ángulos A y B, situación muy semejante al de Pothenot.

Vamos a resolverlo planteando dos ecuaciones con los ángulos A y B como incógnitas, y sustituyendo de forma análoga a como lo hacíamos en dicho método.

En los triángulos  $P_1AB$ ,  $P_2P_1A$ ,  $BP_2P_1$  Y  $ABP_2$  se obtiene:

$$\text{En el triángulo } ABP_1 \rightarrow \frac{AB}{\text{sen } 1} = \frac{AP_1}{\text{sen } B}$$

$$\text{En el triángulo } AP_2P_1 \rightarrow \frac{AP_1}{\text{sen } 3} = \frac{P_1P_2}{\text{sen } 5}$$

$$\text{En el triángulo } BP_2P_1 \rightarrow \frac{BP_2}{\text{sen } 2} = \frac{P_1P_2}{\text{sen } 6}$$

$$\text{En el triángulo } BP_2A \rightarrow \frac{BP_2}{\text{sen } A} = \frac{AB}{\text{sen } 4}$$

Es decir:

$$\frac{AB}{AP_1} = \frac{\text{sen } 1}{\text{sen } B}$$

$$\frac{AP_1}{P_1P_2} = \frac{\text{sen } 3}{\text{sen } 5}$$

$$\frac{P_1P_2}{BP_2} = \frac{\text{sen } 6}{\text{sen } 2}$$

$$\frac{P_2B}{AB} = \frac{\text{sen } A}{\text{sen } 4}$$

Multiplicando ordenadamente y teniendo en cuenta que el ángulo 5 es suplementario de los 1, 2, 3, así como el 6 lo es de 2, 3, 4, resulta:

$$\frac{AB \cdot AP_1 \cdot P_1P_2 \cdot P_2B}{AP_1 \cdot P_1P_2 \cdot P_2B \cdot AB} = \frac{\text{sen } 1 \cdot \text{sen } 3 \cdot \text{sen } 6 \cdot \text{sen } A}{\text{sen } B \cdot \text{sen } 5 \cdot \text{sen } 2 \cdot \text{sen } 4}$$

$$\frac{\text{sen } B}{\text{sen } A} = \frac{\text{sen } 1 \cdot \text{sen } 3 \cdot \text{sen } 6}{\text{sen } 5 \cdot \text{sen } 2 \cdot \text{sen } 4} = E$$

Tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas

$$A + B = 2 + 3$$

$$\frac{\text{sen } B}{\text{sen } A} = E$$

Llamamos H a la suma de 2 y 3:

$$2 + 3 = H$$

Y sustituimos:

$$A + B = H = 2 + 3 \rightarrow B = H - A$$

$$\frac{\text{sen}B}{\text{sen}A} = E \rightarrow \text{sen}(H - A) = E \cdot \text{sen}A$$

$$\text{sen}H \cdot \cos A - \cos H \cdot \text{sen}A = E \cdot \text{sen}A$$

$$\text{sen}H \cdot \cos A = (\text{sen}A) \cdot (E + \cos H)$$

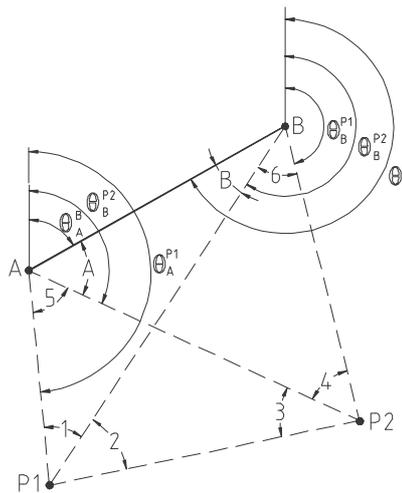
$$\boxed{\text{tg} A = \frac{\text{sen} H}{E + \cos H}}$$

$$\boxed{B = H - A}$$

El problema geométrico ha quedado resuelto.

### CALCULO DE LAS COORDENADAS DE LOS PUNTOS P<sub>1</sub> P<sub>2</sub>

Resuelta la figura al conocer todos los ángulos que la forman, el cálculo de coordenadas queda reducido a determinar el acimut y la distancia desde el punto conocido, al igual que hacíamos en directa.



$$P_1A = \frac{AB \cdot \text{sen} B}{\text{sen} 1}$$

$$P_1B = \frac{AB \cdot \text{sen}(A + 5)}{\text{sen} 1}$$

$$P_2A = \frac{AB \cdot \text{sen}(B + 6)}{\text{sen} 4}$$

$$P_2B = \frac{AB \cdot \text{sen} A}{\text{sen} 4}$$

$$\theta_A^{P1} = \theta_A^B + A + 5$$

$$\theta_A^{P2} = \theta_A^B + A$$

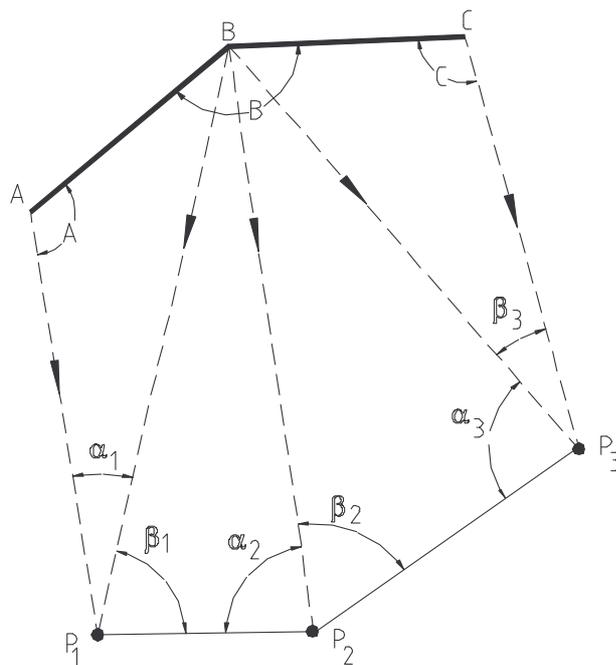
$$\theta_B^{P1} = \theta_B^A - B$$

$$\theta_B^{P1} = \theta_B^A - B - 6$$

Con estos valores se calculan los incrementos de coordenadas y las coordenadas absolutas de los puntos  $P_1$  y  $P_2$ .

## 5.2 EL MÉTODO DE POTHENOT MÚLTIPLE.

Puede darse el caso que en vez de tener un punto desconocido tengamos varios como por ejemplo  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  para determinar sus coordenadas. Este problema se denomina método de Pothenot múltiple. Se considera múltiple por ser más de uno los puntos a determinar, pero no debemos olvidar que este no es el criterio que nosotros hemos adoptado para considerar una intersección como tal.



Para la resolución numérica tenemos como datos iniciales las coordenadas  $A(X, Y)$ ,  $B(X, Y)$ ,  $C(X, Y)$  y los de campo son los ángulos  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_3$ , que pueden obtenerse por diferencias de lecturas.

Al igual que en el problema de Hansen, la geometría queda resuelta obteniendo el valor de los ángulos  $A$  y  $C$ .

Operando en los triángulos  $ABP_1$ ,  $P_1BP_2$ , ... se obtiene:

El triángulo  $ABP_1$ :

$$\frac{AB}{\text{sen } \alpha_1} = \frac{BP_1}{\text{sen } A}$$

En el triángulo  $BP_1P_2$ :

$$\frac{BP_1}{\text{sen } \alpha_2} = \frac{BP_2}{\text{sen } \beta_1}$$

En el triángulo  $BP_2P_3$ :

$$\frac{BP_2}{\text{sen } \alpha_3} = \frac{BP_3}{\text{sen } \beta_2}$$

En el triángulo  $BP_3C$ :

$$\frac{BP_3}{\text{sen } C} = \frac{BC}{\text{sen } \beta_3}$$

Multiplicando ordenadamente obtenemos:

$$\frac{AB \cdot BP_1 \cdot BP_2 \cdot BP_3}{\text{sen } \alpha_1 \cdot \text{sen } \alpha_2 \cdot \text{sen } \alpha_3 \cdot \text{sen } C} = \frac{BP_1 \cdot BP_2 \cdot BP_3 \cdot BC}{\text{sen } A \cdot \text{sen } \beta_1 \cdot \text{sen } \beta_2 \cdot \text{sen } \beta_3}$$

$$\frac{AB}{\text{sen } \alpha_1 \cdot \text{sen } \alpha_2 \cdot \text{sen } \alpha_3 \cdot \text{sen } C} = \frac{BC}{\text{sen } A \cdot \text{sen } \beta_1 \cdot \text{sen } \beta_2 \cdot \text{sen } \beta_3}$$

$$\frac{\text{sen } A}{\text{sen } C} = \frac{BC \cdot \text{sen } \alpha_1 \cdot \text{sen } \alpha_2 \cdot \text{sen } \alpha_3}{AB \cdot \text{sen } \beta_1 \cdot \text{sen } \beta_2 \cdot \text{sen } \beta_3} = M$$

Por otro lado la suma de los ángulos del polígono es:

$$A + C = (n - 2) \cdot 200 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + B)$$

$$A + C = N$$

$$\frac{\text{sen } A}{\text{sen } C} = M \quad (\text{sen}(N - A)) \cdot M = \text{sen } A$$

$$A + C = N$$

$$(\text{sen } N \cdot \cos A - \cos N \cdot \text{sen } A) \cdot M = \text{sen } A$$

$$\boxed{\text{tg } A = \frac{\text{sen } N}{\frac{1}{M} + \cos N}}$$

$$C = N - A$$

Con estos valores queda resuelta la figura y puede realizarse cualquier cálculo en ella.

### CALCULO DE LAS COORDENADAS

Para obtener las coordenadas de los puntos desconocidos basta con determinar los acimutes y las distancias a ellos desde los puntos cuyas coordenadas nos han sido proporcionadas:

$$D_A^{P1} = D_B \frac{\text{sen}(200 - A - \alpha_1)}{\text{sen} \alpha_1}$$

$$D_B^{P1} = D_A \frac{\text{sen} A}{\text{sen} \alpha_1}$$

$$\theta_A^{P1} = \theta_A^B + A$$

$$\theta_B^{P1} = \theta_B^A - (200 - A - \alpha_1)$$

$$D_B^{P3} = D_C \frac{\text{sen} C}{\text{sen} \beta_3}$$

$$D_C^{P3} = D_B \frac{\text{sen}(200 - C - \beta_3)}{\text{sen} \beta_3}$$

$$\theta_B^{P3} = \theta_B^C + (200 - C - \beta_3)$$

$$\theta_C^{P3} = \theta_C^B - C$$

$$D_B^{P2} = D_B^{P1} \frac{\text{sen} \beta_1}{\text{sen} \alpha_2}$$

$$D_B^{P2} = D_B^{P3} \frac{\text{sen} \alpha_3}{\text{sen} \beta_2}$$

$$\theta_B^{P2} = \theta_B^C + (200 - C - \beta_3) + (200 - \alpha_3 - \beta_2)$$

Con estos términos se procede a determinar el valor de las coordenadas parciales y absolutas de cada uno de los puntos.

**6. BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA.**

- BEZOARI, G.; MONTI, C. y SELVINI, A. (1980).
- BRINKER, Russell C.; MINNICK, Roy (1987).
- CHUECA PAZOS, M. (1983): Tomo I.
- DOMÍNGUEZ GARCÍA-TEJERO, F. (1978).
- FARJAS ABADÍA, M. (1991): "Problema de Pothenot: intersección inversa simple". *Topografía y Cartografía*. Volumen III-Nº45. Julio-Agosto 1991.
- FERNÁNDEZ ANTÓN, C. (1991): "Nuevo Método de resolución de la intersección inversa simple". *Topografía y Cartografía*. Volumen III, nº 45. Julio-Agosto 1991.
- OJEDA, J.L. (1984).
- UREN, J.; PRICE, W.F.(1992).
- VALBUENA DURAN, J.L.; MOLINERO, Pedro, SÁEZ DE UGARTE, Rodolfo (1994): "El método de observación angular de Schreiber". *Topografía y Cartografía*. VOL.XI-Nº 65, Noviembre-Diciembre 1994, pp. 40-58.