

Tema 3: Nivelación Trigonométrica

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

- Desnivel
- Cotas y altitudes.

2. FUNDAMENTO DE LA NIVELACIÓN TRIGONOMÉTRICA.

- 5.1 Fórmula general.
- 5.2 Correcciones
- 5.3 Fórmula general aplicada

3. INCERTIDUMBRE EN LA DETERMINACIÓN DEL DESNIVEL

3.1 FUENTES DE INCERTIDUMBRE

- Incertidumbre en la determinación de la altura del aparato.
- Incertidumbre en la determinación de la altura de señal.
- Incertidumbre en la determinación del término "t".

3.2 INCERTIDUMBRE FINAL

4. EQUIPOS TOPOGRÁFICOS. ANÁLISIS DE METODOLOGÍA.

4.1 Cálculo de desniveles con estaciones totales y semitotales.

- A) Montajes coaxiales.
- B) Montajes excéntricos
 - B.1 Con visuales paralelas.
 - B.2 Con visuales no paralelas.

4.2 Cálculo de desniveles con taquímetro y mira.

5. COEFICIENTE K DE REFRACCIÓN.

- 5.1 Determinación experimental del coeficiente k de refracción
- 5.2 Reducción de visuales al terreno.

6. MÉTODOS DE NIVELACIÓN TRIGONOMÉTRICA SIMPLE.

6.1 NIVELACIÓN TRIGONOMÉTRICA SIMPLE.

6.2 NIVELACIÓN POR ESTACIONES RECÍPROCAS.

- Método de campo.

- Cálculo del desnivel final.
 - Directo: ΔH_A^B .
 - Recíproco: ΔH_B^A .
 - Discrepancia.
 - Tolerancia.
 - Valor final: medias aritméticas o ponderadas.
 - Precisión.

- Altitud.
- Aplicaciones.

6.3 NIVELACIÓN POR VISUALES RECÍPROCAS Y SIMULTANEAS.

- Fórmula general.
- Precisión.

7. NIVELACIÓN TRIGONOMÉTRICA COMPUESTA.

7.1 Líneas de nivelación.

- Por estaciones alternas.
- Por estaciones recíprocas.
 - Trabajo de campo.
 - Determinación de desniveles.
 - Directos.
 - Recíprocos.
 - Aplicar tolerancia.
 - Promedios.
 - Corrida de altitudes.
 - Error de cierre.
 - Tolerancia final.
 - Compensación (métodos clásicos).
 - Proporcional a los desniveles.
 - Proporcional a las distancias.
 - Proporcional a las tolerancias.
 - Partes iguales a todos los tramos.

7.2 Redes de nivelación por estaciones recíprocas y simultaneas.

- Proyecto.
- Metodología de observación.
- Ajuste por MMCC.

8. BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA.

1. INTRODUCCIÓN

- DESNIVEL.
- COTAS Y ALTITUDES.

Definido el desnivel como la cota de un punto referida a la superficie de nivel que pasa por otro, entendemos por nivelación (Higgins¹):

"Nivelación es el arte de determinar las diferencias en elevación de puntos sobre la superficie terrestre con el propósito de (a) trazar contornos lineales; (b) dibujar secciones verticales que representen la forma de una superficie, y (c) establecer puntos a una elevación determinada, definida en proyectos de construcción".

En Topografía se supone a efectos alimétricos, la Tierra esférica. Las superficies de nivel son también esferas, concéntricas con la forma general de la Tierra y por lo tanto equidistantes.

Hasta épocas recientes se clasificaban los métodos alimétricos o de nivelación atendiendo al tipo de visual cenital utilizada. En estas fechas, podemos volver a retomar este mismo criterio. Definimos:

- * Nivelación con visuales cenitales de cualquier inclinación: nivelación trigonométrica.
- * nivelación con visuales exclusivamente horizontales: nivelación geométrica.
- * nivelación sin visuales cenitales: nivelación GPS.

La nivelación GPS, ha venido a relevar a la nivelación barométrica retomando sus métodos y su vocabulario de forma inconsciente.

En la actualidad la precisión en Topografía se expresa en partes por millón (ppm.) de la unidad medida, valor que corresponde al término que tradicionalmente se definía como error kilométrico o $e_{k,r}$, en altimetría.

Pretendemos delimitar el rango de precisión de los métodos de nivelación existentes, describiendo con minuciosidad la situación de la nivelación trigonométrica, en la que la estadía vertical ha cedido su lugar a los sistemas de MED, y realizando una somera presentación de los resultados que se están obteniendo con la nivelación por visuales recíprocas y simultáneas y con la nivelación con las técnicas de GPS.

Nuestro objetivo consiste en delimitar el lugar que cada método ocupa en el campo de la nivelación y las tendencias futuras de los mismos. Como en cualquier estudio comparado pretendemos estudiar el presente para entender el futuro. La primera parte se presenta a continuación, analizando los indicadores de la precisión en las nivelaciones trigonométricas.

Una vez obtenidas las cotas hay que referir los puntos a la superficie de referencia origen, obteniéndose las altitudes de los puntos observados.

¹. HIGGINS, A.L. (1957): pág. 60.

2. FUNDAMENTO DE LA NIVELACIÓN TRIGONOMÉTRICA (NT).

2.1. FORMULA GENERAL.

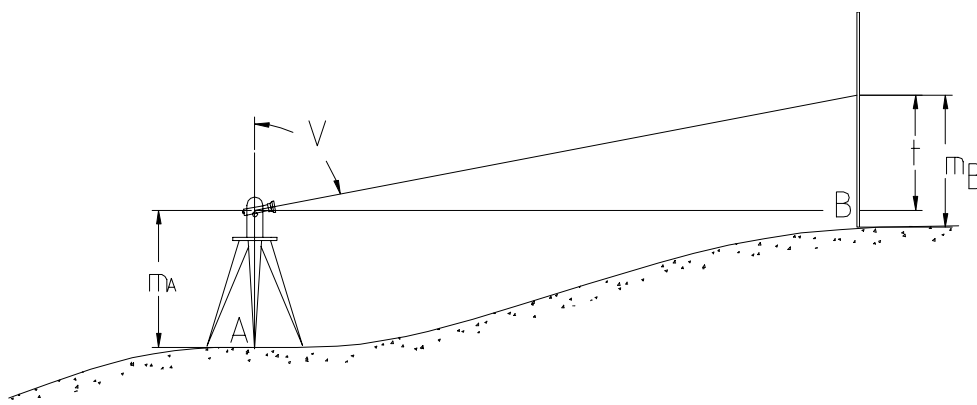
2.2. CORRECCIONES A APLICAR AL DESNIVEL OBSERVADO POR NT.

2.3. FORMULA GENERAL APLICADA.

2.1 FORMULA GENERAL

Hemos definido nivelación trigonométrica como el método alimétrico que permite obtener desniveles entre puntos, con observaciones de distancias cenitales de cualquier inclinación.

Supongamos estacionado el instrumento en el punto A, y que se sitúa el prisma para la MED en el punto B. El modelo teórico de medida queda reflejado en el siguiente gráfico.



Del gráfico se puede deducir fácilmente la expresión por la que se podrá obtener el desnivel, y que será igual a:

$$\Delta H_A^B = t_A^B + i_A - m_B$$

En Topografía, siempre es necesario referirse a dos tipos de variables: aquellas que determinan el grado de incertidumbre en el que se encuentran las observaciones realizadas (en el curso anterior se estudiaban como *errores accidentales*); y aquellas variables que afectan a las observaciones siguiendo leyes físicas. Estas últimas, al ser conocidas las causas que las producen, pueden cuantificarse y deben aplicarse las correcciones que eliminan sus efectos en las medidas topográficas.

2.2 CORRECCIONES A APLICAR AL DESNIVEL OBSERVADO POR NT.

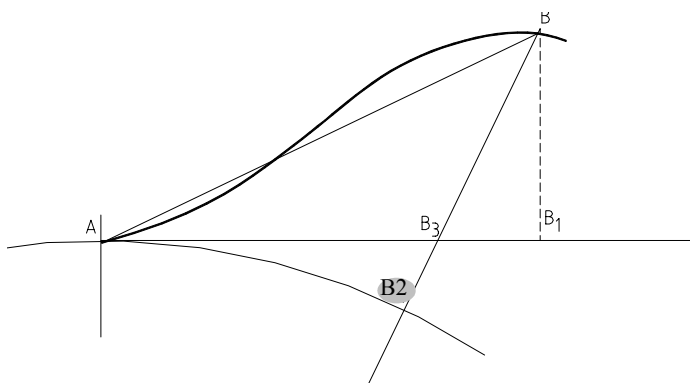
En la nivelación trigonométrica existen dos efectos que han de ser eliminados:

- 1) La influencia de la curvatura de la Tierra, que da lugar a la corrección por esfericidad.

- 2) La influencia de la refracción del rayo de luz que proviene del punto visado, que origina la corrección por refracción.

3) CORRECCIÓN POR ESFERICIDAD.

Supuestas esféricas las superficies de nivel y un instrumento estacionado en el punto A, desde el que se visa al punto B, debemos tener en cuenta que las medidas topográficas se realizan en un plano tangente a la superficie terrestre en un punto en el que esta estacionado el instrumento.



El desnivel que se obtiene BB_1 no corresponde al real BB_2 . Si despreciamos el ángulo w , ángulo en el centro de la Tierra (las distancias en Topografía son cortas comparadas con la longitud del radio terrestre) podríamos considerar $BB_1=BB_3$; y por tanto el error de esfericidad estaría representado por el segmento B_2B_3 . Tras un análisis matemático de la figura, se obtiene el siguiente valor:

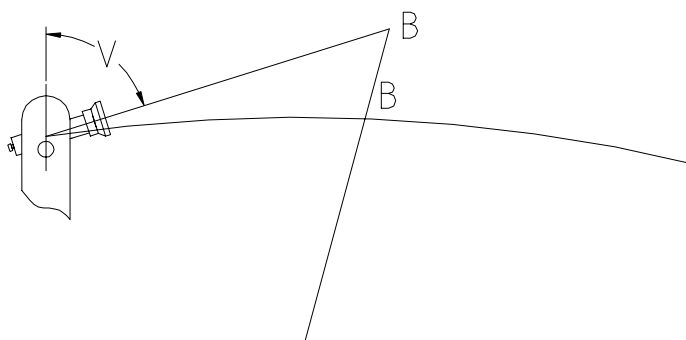
$$C_e = + \frac{D^2}{2R}$$

Esta corrección siempre será positiva, tal como se desprende del gráfico.

4) CORRECCIÓN POR REFRACCIÓN.

El rayo que proviene del punto visado no sigue una trayectoria rectilínea, sino que va sufriendo sucesivas refracciones al ir atravesando una atmósfera de densidad variable.

Esta situación produce un efecto, que se refleja en el siguiente gráfico.



La distancia cenital que medimos corresponde a la tangente al rayo de luz en el centro óptico del teodolito, y es con ella con la que se calcula la posición de B, que queda situado en la posición B_1 . La distancia BB_1 , es el denominado error por refracción, que con el signo negativo, toma el valor de:

$$C_r = -K \frac{D^2}{R} \quad (\text{para } 2K = \frac{R}{R'})$$

Esta expresión corresponde al coeficiente de refracción K , de valor igual a la mitad de la relación existente entre el radio de la Tierra y el radio de curvatura de la trayectoria del rayo de luz que proviene del punto visado. Con esta definición, para condiciones normales en España, K toma el valor de 0.08.

Otros autores definen el coeficiente K como la relación directa entre los dos radios mencionados. En esta situación K toma un valor de 0.16 en condiciones normales en nuestro país.

Cada vez es más frecuente que el coeficiente K de refracción se calcule para las condiciones y el lugar de trabajo específico, no utilizándose la generalización de valores que hemos citado. El método para la determinación del coeficiente consiste en la realización de visuales recíprocas y simultáneas entre dos puntos extremo de la zona de trabajo, siguiendo la metodología de observación y cálculo que exponemos en el apartado 5.

La corrección por refracción se considera, en la deducción realizada, como negativa, tal como se muestra en la figura. Esto supone que el rayo de luz sigue una trayectoria cóncava hacia el suelo (en condiciones normales la densidad de la atmósfera decrece a medida que nos elevamos). Cuando este sea el caso a considerar, y si el coeficiente K se determina experimentalmente, él será quien nos introduzca el camino de influencia producido del cambio de la concavidad, apareciendo con signo negativo.

CORRECCIÓN CONJUNTA.

Teniendo en cuenta que la corrección por esfericidad viene dada por:

$$C_e = + \frac{D^2}{2R}$$

y que la corrección por refracción se calcula con:

$$C_r = -K \frac{D^2}{R}$$

la corrección conjunta de los dos errores mencionados vendrá dado por:

$$C_e + C_r = \frac{1}{2} \frac{D^2}{R} - K \frac{D^2}{R} = (0.5 - K) \frac{D^2}{R}$$

2.3 FORMULA GENERAL APLICADA EN NT.

Para determinar los efectos de estos dos errores sistemáticos, conocida la expresión que nos permite obtener su influencia para cada caso en particular, se modifica la formula general de la nivelación trigonométrica.

$$\Delta H_A^B = t_A^B + i_A - m_B + (0.5 - K) \frac{(D_A^B)^2}{R}$$

Fórmula cuyo uso se recomienda **siempre** en los trabajos topográficos, sin ningún tipo de condicionante.

Recomendamos realizar el siguiente ejercicio:

Hoja 5: Cálculo de desniveles por NT.

3. INCERTIDUMBRE EN LA DETERMINACIÓN DEL DESNIVEL

3.1. FUENTES DE INCERTIDUMBRE.

3.2 INCERTIDUMBRE FINAL EN LA DETERMINACIÓN DEL DESNIVEL POR NT

Cuando hablamos de un equipo topográfico actual, nos estamos refiriendo a las estaciones totales. Las características de las mismas, definidas en las Normas ISO 1900, podríamos generalizarlas en:

- * Distanciómetro de infrarrojos:
 - . Alcance: 2.000 m
 - . Precisión: 3 mm. ± 3 ppm.
- * Teodolito:
 - . Sensibilidad: 30^{cc}.
 - . Aumentos: 30.
 - . Apreciación según la casa comercial: 2^{cc}.

El estudio de las fuentes de incertidumbre se va a realizar exponiendo un planteamiento teórico, y posteriormente se particularizará a este modelo de equipo topográfico, para ir cuantificando el valor de las magnitudes a las que se hace referencia en cada caso.

Recomendamos estudiar este apartado con el ejercicio:

Hoja 6 y 7: Conceptos y terminología en el cálculo de incertidumbres en NT.

3.1 FUENTES DE INCERTIDUMBRE.

- A. Término i
- B. Término t
- . Incertidumbre en la medida de la distancia geométrica.
 - . Incertidumbre en la medida de la distancia cenital.
 - . Incertidumbre total en el término t .
- C. Término m
- . Incertidumbre en la medida directa de m .
 - . Incertidumbre respecto a la altura a la que se ha realizado la puntería cenital.
 - . Incertidumbre total en el término m .

El estudio de las fuentes que originan incertidumbre en la nivelación trigonométrica, obliga a analizar los tres términos que intervienen en su cálculo: i , t y m . Cada uno de ellos introduce un grado de incertidumbre en el desnivel obtenido con este método de nivelación. Denominaremos:

- * e_i : al error o incertidumbre al evaluar el término i ,
- * e_t : al error o incertidumbre al evaluar el término t ,
- * e_m : al error o incertidumbre al evaluar el término m .

Cuando hayamos cuantificado estas variables, el error total del desnivel vendrá dado por la componente cuadrática de los mismos, ya que se trata de errores independientes y de los que no conocemos la dirección en la que actúan.

A.- Error o incertidumbre al evaluar el término i : e_i

La indeterminación que puede existir en la medida de la altura de aparato, dependerá de la precisión y el esmero con el que el operador realice esta operación.

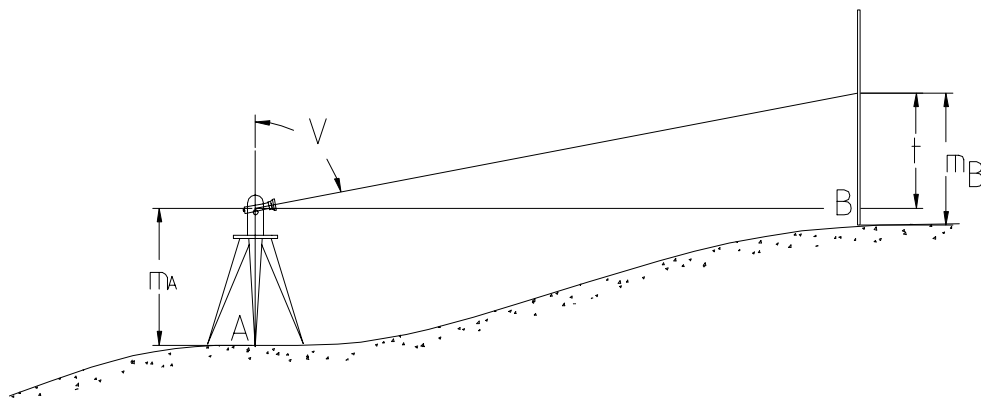
La experiencia propia junto a la de otros profesionales, me permite afirmar que este error puede reducirse a medio centímetro. Este será el valor extremo que consideraremos que interviene en la obtención del desnivel.

$$e_i \leq 5 \text{ mm}$$

B.- Error o incertidumbre al evaluar el término t : e_t

Para determinar la cuantía de la incertidumbre que introducimos en el error total del desnivel debido al error en la determinación del término t , se hace necesario analizar cómo se obtiene.

No existe acuerdo entre los autores, acerca de la denominación de la distancia que se obtiene con MED. Mientras unos se resisten a denominarla distancia geométrica por no corresponder al concepto estricto de la misma, otros autores la utilizan siempre. Sea D_A^B la distancia medida y V_A^B la distancia cenital al prisma.



Según la figura:

$$\cos V_A^B = \frac{t_A^B}{D_A^B}$$

de donde:

$$t_A^B = D_A^B \cos V_A^B$$

Aunque la estación total permita obtener la distancia reducida (o las coordenadas) directamente, no podemos olvidar que lo realiza con un microprocesador que toma los mismos datos de campo que los que consideramos aquí, y que las incertidumbres son inherentes a los datos de campo. Por ello debemos referirnos a la distancia medida y a la distancia cenital obtenida como las variables que intervienen en la incertidumbre del término t . Estas dos variables tienen incertidumbres propias del proceso de su medición. El término t viene dado por:

$$t = D \cos V$$

y es función de dos variables: D y V ;

$$t = f(D, V)$$

Aplicando la ley de transmisión de errores, podemos escribir:

$$e_t^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial D} \right)^2 e_D^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial V} \right)^2 e_V^2$$

siendo e_D la incertidumbre en la medida de la distancia geométrica y e_V la existente en la medida del ángulo cenital.

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial D} = \cos V$$

$$\frac{\partial f}{\partial V} = -D \operatorname{sen} V$$

Sustituyendo queda:

$$e_t^2 = (\cos^2 V)e_D^2 + (D^2 \sin^2 V)e_V^2$$

y finalmente podemos escribir:

$$e_t = \sqrt{(\cos^2 V)e_D^2 + (D^2 \sin^2 V)e_V^2}$$

Antes de proceder al cálculo de este error en los distintos casos, es necesario estudiar y cuantificar los términos e_D Y e_V .

a) Error o incertidumbre en la distancia medida: e_D

La medida electromagnética de distancias viene caracterizada por las casas comerciales con un error estándar o desviación típica, que denominaremos e_V . Este consta de dos términos: el primero viene dado por una constante; y el segundo, es proporcional a la distancia medida, y se expresa en partes por millón (ppm) o lo que es lo mismo, error en mm por Km medido.

Para las estaciones totales a las que aquí nos referimos, este error puede tomar valores de este tipo:

$$e_V = 3 \text{ mm} \pm 3 \text{ ppm}$$

Este error, muchos autores, lo identifican con el rango de incertidumbre que se introduce en la distancia con MED. Sin embargo existen otros términos que no pueden olvidarse cuando este método se aplica a la Topografía, y que sirven para caracterizar el instrumental utilizado en la materialización de la señal y el estacionamiento. Estos errores son:

- * error de estación: e_e ,
- * error de señal: e_s ,
- * error por inclinación de jalón: e_j .

El error total en la distancia medida con MED, e_D , viene dado por:

$$e_D = \sqrt{e_V^2 + e_e^2 + e_s^2 + e_j^2}$$

Error de estación: e_e

En nuestro estudio aplicado podemos considerar que la estación total se va a situar sobre un trípode y se estacionará con plomada óptica. Esto va a dar lugar a un error de estación (e_e) menor de 2 mm.

$$e_e \leq 2 \text{ mm}$$

Error de señal: e_s

Ahora bien la señal, el prisma, puede situarse sobre un trípode o sobre un jalón.

Si se sitúa sobre un trípode alcanzaremos incertidumbres de 2 mm, pero con jalón éstos serán superiores, pudiendo considerarse valores en torno a 1 cm.

$$e_s \text{ (prisma sobre trípode)} \leq 2 \text{ mm}$$

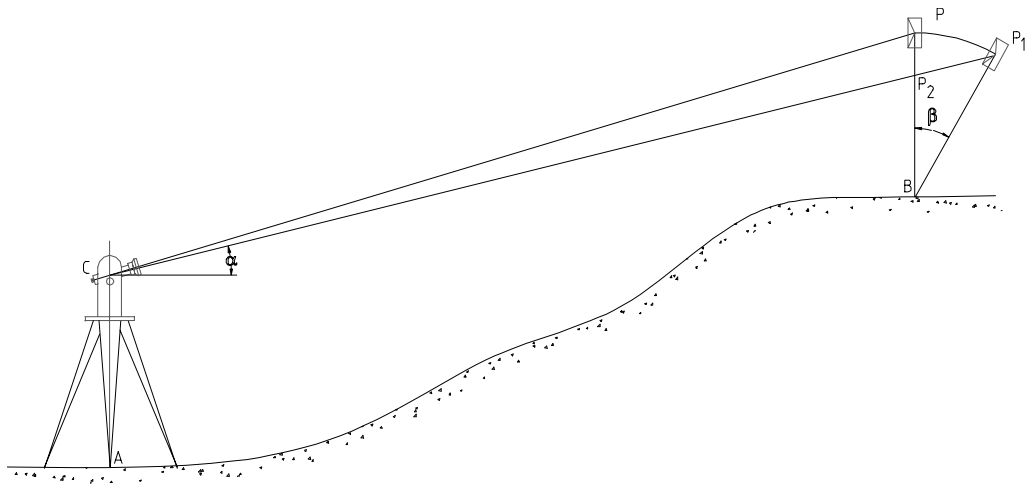
$$e_s \text{ (prisma sobre jalón)} \leq 10 \text{ mm}$$

Error por inclinación de jalón: e_i

Existe finalmente otra causa de error. Se trata del error que se introduce en la distancia medida por inclinación de jalón.

La inclinación de jalón, experimentalmente, se contabiliza en 1° si en el trabajo se utiliza un nivel esférico de mano y en 3° si la medición se realiza sin él o con el nivel descorregido (valores superiores los detecta visualmente el operador).

Denominamos P al punto ideal de puntería, P_1 el real y P_2 el punto donde la visual real cortaría a la ideal. Llamemos C al centro de emisión del aparato de MED que coincide con el centro óptico del antejo.



Hemos indicado anteriormente que la inclinación de jalón nunca sería superior a 3° , por ello podemos considerar que el segmento CP coincide con el segmento CP_2 y que la distancia PP_2 es despreciable. La distancia geométrica medida CP_1 , no será la que corresponde al gráfico 1, en el que se exponía la situación ideal de medición. El error aparece representado por el segmento P_2P_1 , y lo denominaremos e_i .

Para cuantificarlo analizaremos el triángulo P_2BP_1 . Llamaremos β al ángulo de inclinación del jalón. Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{e_j}{\text{sen } \beta} = \frac{m}{\text{sen}(100 + \alpha)}$$

siendo α el ángulo de pendiente.

Como $\text{sen}(100+\alpha)$ es igual al $\cos \alpha$, obtenemos la siguiente expresión.

$$\frac{e_j}{\text{sen } \beta} = \frac{m}{\cos \alpha}$$

y finalmente:

$$e_j = m \frac{\text{sen } \beta}{\cos \alpha}$$

Para tomar conciencia de la cuantía del e_j se han confeccionado las siguientes tablas

	e _j (mm): con nivel esférico (beta menor o igual a 1g)							
V/M	1,30	1,40	1,50	1,60	1,70	1,80	1,90	2,00
100/0	20	22	24	25	27	28	30	31
99/101	20	22	24	25	27	28	30	31
98/102	20	22	24	25	27	28	30	31
97/103	20	22	24	25	27	28	30	31
96/104	20	22	24	25	27	28	30	31
95/105	20	22	24	25	27	28	30	32
94/106	21	22	24	25	27	28	30	32
93/107	21	22	24	25	27	28	30	32
92/108	21	22	24	25	27	28	30	32
91/109	21	22	24	25	27	29	30	32
90/110	21	22	24	25	27	29	30	32
89/111	21	22	24	26	27	29	30	32
88/112	21	22	24	26	27	29	30	32
87/113	21	22	24	26	27	29	30	32
86/114	21	23	24	26	27	29	31	32
85/115	21	23	24	26	27	29	31	32

La influencia del ángulo cenital es despreciable, variaciones máximas de 1 mm en el intervalo de distancias cenitales estudiadas (100 85/115). La altura a la que se ha visado es un efecto a tener en cuenta. Los errores se estudian para conocer que variables son las que hay que tener en cuenta, cual es su valor y cuales tienen efectos despreciables.

	e _j (mm): sin nivel esférico (beta menor o igual a 3g)							
V/M	1,30	1,40	1,50	1,60	1,70	1,80	1,90	2,00
100/0	61	66	71	75	80	85	90	94
99/101	61	66	71	75	80	85	90	94
98/102	61	66	71	75	80	85	90	94
97/103	61	66	71	75	80	85	90	94
96/104	61	66	71	75	80	85	90	94
95/105	61	66	71	76	80	85	90	95
94/106	62	66	71	76	80	85	90	95
93/107	62	66	71	76	81	85	90	95
92/108	62	66	71	76	81	85	90	95
91/109	62	67	72	76	81	86	90	95
90/110	62	67	72	76	81	86	91	95
89/111	62	67	72	77	81	86	91	96
88/112	62	67	72	77	82	86	91	96
87/113	63	68	72	77	82	87	91	96
86/114	63	68	72	77	82	87	92	97
85/115	63	68	73	78	82	87	92	97

El ángulo cenital influye más : 3 mm en el intervalo estudiado, la influencia es menor y los efectos de cualquier variación también. La variación por m oscila desde 6 cm, con alturas de señal de 1.30, hasta 10 cm con alturas de señal de 2.00 m

El error total en la distancia medida con MED, e_D , viene dado por

$$e_D = \sqrt{e_v^2 + e_e^2 + e_s^2 + e_j^2}$$

Para las estaciones totales que estudiamos:

$$e_v = 3 \text{ mm. } \pm 3 \text{ ppm.}$$

$$e_e = 2 \text{ mm.}$$

$$e_s = 2 \text{ mm. con prisma sobre tripode.}$$

$$e_s = 10 \text{ mm. con prisma sobre jalón.}$$

e_j = La influencia de la variación de la distancia cenital despreciable. Considerando la altura del prisma mínima de 1,30.

- Con nivel esférico $e_j = 20 \text{ mm.}$

- Sin nivel esférico $e_j = 61 \text{ mm.}$

Para la situación más usual en la que el prisma se coloca sobre un jalón con nivel esférico y tendiendo a realizar lectura lo más bajas posibles (caso general 1.30 m.), el error en distancias será:

$$e_D = \pm 23 \text{ mm.}$$

Generalizando este planteamiento. en la medida electromagnética de distancias, se recomienda el uso de trípode con el prisma, bien sea que el prisma se sitúe directamente sobre él o que el trípode se utiliza como elemento auxiliar para nivelar, por la influencia del error e_j no sólo en altimetría sino también en planimetría.

b) Error o incertidumbre en el termino V : e_v

Denominamos por e_v el error por dirección cenital. Tradicionalmente se considera que viene dado por:

$$e_v = \sqrt{e_{\text{ver}}^2 + e_{\text{lec}}^2 + e_{\text{pun}}^2}$$

y las expresiones de estas errores según algunos autores son:

$$e_{\text{ver}} = \frac{1}{12} s^{\text{cc}}$$

$$e_{\text{lec}} = \frac{2}{3} a^{\text{cc}}$$

$$e_{\text{pun}} = \frac{60^{\text{cc}}}{A} \left(1 + \frac{4A}{100} \right)$$

Las expresiones generales para obtener este término, según estudiastéis en la asignatura Topografía I son:

a) Verticalidad.Nivel de eclímetro simple

Siendo s^{cc} la sensibilidad. $e_v = \frac{1}{3} s^{\text{cc}}$

Nivel de eclímetro de coincidencia.

$$e_v = \frac{1}{20} s^{\text{cc}}$$

Compensador automático

Siendo C_p la característica de precisión. $e_v = C_p$

Sensor de inclinación.

$$e_v \approx 0$$

b) Lectura.Sistema óptico mecánico.

$$e_L = \frac{2}{3} m \frac{1}{\sqrt{n}}$$

siendo:

- m el último salto en pantalla.
- n el número de observaciones.

Sistema electrónico.

$$e_L = \frac{m_e}{\sqrt{3}}$$

siendo m_e el último salto en pantalla en el sistema electrónico.**c) Puntería**

$$e_p = \frac{C_v}{A} K \frac{1}{\sqrt{n}}$$

siendo:

- C_v el coeficiente de observación cenital
- A los aumentos del anteojo.
- K la constante de mayoración
- n el número de observaciones realizadas. Con regla de Bessel
 $n = 2$.

$$1,5 \leq K \leq 3$$

Las características del teodolito de la estación total que estamos considerando son $s = 50''$ $A = 30x$ $a = 1''$.

Ahora bien no podemos considerar la apreciación que nos proporciona la casa comercial como dato a introducir en el error de lectura, puesto que este valor se obtiene por interpolación y no tiene carácter relacionado con la precisión real. Experimentalmente se ha demostrado; que con estos equipos lo que si se puede asegurar es una representatividad en las lecturas de $\pm 8''$. La expresión del error de la lectura en las estaciones totales debe situarse por el valor que en la definición de las características del instrumento aparece como desviación típica de la medida angular, que tiende a asemejarse a este valor experimental.

El error que se comete por dirección cenital, con estas consideraciones con el primer modelo de ecuaciones es:

$$e_v = \pm 10''$$

y con las nuevas formulaciones resulta del mismo orden.

En las condiciones de trabajo mencionadas el error por distancia geométrica medida era:

$$e_D = \pm 23 \text{ mm.}$$

El valor total de la influencia de estos errores en el término t , lo podemos obtener por la siguiente expresión, deducida en un apartado anterior.

$$e_t = \sqrt{(\cos^2 V) e_D^2 + (D^2 \operatorname{sen}^2 V) e_V^2}$$

A continuación se presenta la tabla con los resultados obtenidos, en función de la distancia y de la distancia cenital.

La variación de distancia cenital no influye en el error en t a partir de 800 m, y la de 500 a 800 supone un error de 1 mm en el intervalo de 100 a 85/115 estudiado. En un caso concreto hay que calcular los valores que toma e_t en función del equipo utilizado y de las características de la observación.

Error o incertidumbre al evaluar el termino t (mm.): e_t												
V/D	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1.000	1.500	2.000
100^g	2	3	5	6	8	9	11	13	14	16	24	31
99^g/101^g	2	3	5	6	8	9	11	13	14	16	24	31
98^g/102^g	2	3	5	6	8	9	11	13	14	16	24	31
97^g/103^g	2	3	5	6	8	9	11	13	14	16	24	31
96^g/104^g	2	3	5	6	8	10	11	13	14	16	24	31
95^g/105^g	2	4	5	7	8	10	11	13	14	16	24	31
94^g/106^g	3	4	5	7	8	10	11	13	14	16	24	31
93^g/107^g	3	4	5	7	8	10	11	13	14	16	24	31
92^g/108^g	3	4	5	7	8	10	11	13	14	16	24	31
91^g/109^g	4	4	6	7	8	10	11	13	14	16	24	31
90^g/110^g	4	5	6	7	9	10	11	13	14	16	24	31
89^g/111^g	4	5	6	7	9	10	12	13	14	16	24	31
88^g/112^g	5	5	6	8	9	10	12	13	15	16	24	31
87^g/113^g	5	6	7	8	9	10	12	13	15	16	24	31
86^g/114^g	5	6	7	8	9	10	12	13	15	16	24	31
85^g/115^g	6	6	7	8	9	11	12	13	15	16	24	31

C. Error o incertidumbre al evaluar el término m : e_m

Denominamos error en m al error total que se introduce en el desnivel por hacer la puntería a un prisma situado sobre un trípode o un jalón.

Existen dos factores a tener en cuenta, cada uno de los cuales introduce un margen de error en la lectura m . El primero se produce en la propia medición de la altura de la señal: e'_m , y el segundo correspondiente a la incertidumbre respecto a la altura a la que se ha realizado la puntería cenital: e''_m .

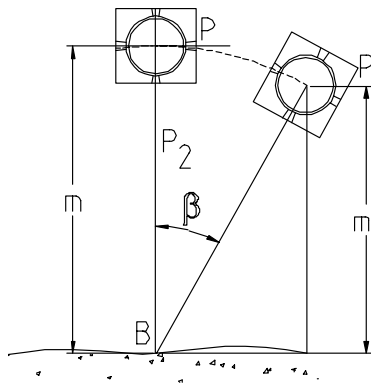
1º Error en la medida directa de la altura de la señal: e'_m

Para analizarlo, tenemos que diferenciar dos casos posibles.

a) Si el prisma está sobre jalón.

En esta situación la altura de la señal se obtiene leyendo la graduación que aparece en el propio jalón y la causa del error viene dado por la posible inclinación de la señal. La altura que tomamos como valor para los cálculos es la obtenida directamente de la graduación que aparece en el jalón: m .

Si el jalón está inclinado, esta altura m no corresponde a la altura real (desconocida). Denominamos a la real m' y β al ángulo de inclinación.



De la figura:

$$\frac{m'}{m} = \cos \beta$$

De donde:

$$m' = m \cos \beta$$

El error vendrá dado por la diferencia entre el que utilizamos para el cálculo y el que corresponde al modelo observación:

$$e'_m = m - m'$$

Sustituyendo:

$$e'_m = m - m \cos \beta = m (1 - \cos \beta)$$

Si se trabaja con nivel esférico ($\beta \leq 1^\circ$)

m	1,30	1,40	1,50	1,60	1,70	1,80	1,90	2,00
e'm(mm)	0,16	„	„	„	„	„	„	0,24

DESPRECIABLE.

Si se trabaja sin nivel esférico o con el nivel descorregido ($\beta \leq 3^\circ$):

m	1,30	1,4	1,50	1,60	1,70	1,80	1,90	2,00
e'm(mm)	1	2	2	2	2	2	2	2

b) Si el prisma esta sobre, o con trípode

Si se utiliza un prisma sobre trípode o este se le añade un jalón, debemos hacer referencia al error en la medida de la altura del trípode y el prisma, sobre la señal. Se mide con un flexometro y de modo análogo a la determinación de la altura de aparato podemos considerar un valor extremo de 5 mm.

$$e'_m \text{ (con trípode) } \leq 5 \text{ mm.}$$

2º Incertidumbre respecto a la altura de señal a la que se ha realizado la puntería cenital: e''_m

Es esta otra causa de error habitualmente olvidada y de gran importancia en el tema que nos ocupa. Consiste en la incertidumbre existente sobre el punto del prisma al que corresponde la lectura de la medida cenital medida por tratarse de un instrumento de MED.

Este error tiene una influencia experimental de 1 a 2 centímetros en distancias de 100 a 500 m, y alcanza valores de hasta 4 cm cuando se hace necesario situar 3 o más prismas en distancias de 2 km.

En la escala de distancias, que estamos evaluando, vamos a considerar los siguientes valores:

m	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1500	2000
e''m	10				20					30		40

Para cualquier distancia intermedia puede realizarse una interpolación lineal entre estos valores.

3º Error total en m

Para determinar la influencia de estos dos errores realizaremos la componente cuadrática de ambos:

$$e_m = \sqrt{e'_m{}^2 + e''_m{}^2}$$

Los resultados se reflejan en las siguientes tablas:

*) para alturas mínimas de jalón y usando nivel esférico, el error total en m es la incertidumbre de la altura de puntería:

m	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1500	2000
e'm					DESPRECIABLE							
e''m	10	13	15	18	20	22	24	26	28	30	35	40
em	10	13	15	18	20	22	24	26	28	30	35	40

Para hacer posible el cálculo del error total en el desnivel, en la fila del e''_m se han interpolado los valores con los datos que se indicaron en el apartado anterior.

***) para prisma situado sobre trípode:

D	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1500	2000
e'm	5				5					5		5
e''m	10				20					30		40
em	11				21					30		40

Podemos observar que no existe apenas diferencias en los resultados que se obtienen para el error en m , en el uso de un instrumental u otro al situar el prisma sobre la señal.

A partir de 1000 m. la influencia del error por incertidumbre en la posición cenital de la altura sobre el prisma es tal, que el error de la lectura directa de la altura m es despreciable. Esto enfatiza la necesidad de utilizar placas de puntería que aseguren la altura a la que se proyectan las visuales cenitales. Consideramos que con las actuales no se consigue y se hace necesario utilizar sistemas por todos conocidos, tales como el de situar detrás del prisma una hoja de papel blanco con un extremo del límite donde ha de realizarse la puntería cenital. Es necesario que las casas constructoras de equipos topográficos sigan considerando este problema.

3.2 INCERTIDUMBRE FINAL EN LA DETERMINACIÓN DEL DESNIVEL POR NT.

El error total en el desnivel vendrá dado por la componente cuadrática de los errores reseñados:

$$e_{\Delta H} = \sqrt{e_i^2 + e_t^2 + e_m^2}$$

Del análisis efectuado anteriormente se han obtenido os siguientes valores:

Error en i: $e_i \leq 5 \text{ mm.}$

Error en t: $e_t = \sqrt{(\cos^2 V)e_D^2 + (D^2 \sin^2 V)e_V^2}$

Error en m :
$$e_m = \sqrt{e'_m{}^2 + e''_m{}^2}$$

Siendo:

$$e'_m = m(1 - \cos \beta)$$

e''_m los siguientes valores:

m	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1500	2000
e''m	10				20					30		40

Con estos datos se ha elaborado la siguiente tabla (corresponde a un caso concreto, con una metodología y un equipo de características específicas) en la que aparecen valores de precisión de la nivelación trigonométrica en función de la variación de distancias y de ángulos cenitales.

PRECISION DEL DESNIVEL OBTENIDO POR NIVELACION TRIGONOMETRICA (mm): $e_{\Delta H}$.

V/D	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1.000	1.500	2.000
100°	11	14	17	20	22	24	27	29	32	34	43	51
99°/101°												
98°/102°												
97°/103°												
96°/104°												
95°/105°	12	15	17	20	22	25	27	29	32	34	43	51
94°/106°												
93°/107°												
92°/108°												
91°/109°												
90°/110°	13	15	17	20	22	25	27	29	32	34	43	51
89°/111°												
88°/112°												
87°/113°												
86°/114°												
85°/115°												

Antes de finalizar este apartado quisiera destacar el hecho de que el error o incertidumbre en los desniveles resultantes de nivelaciones trigonométricas, **no depende de las distancias cenitales observadas**. La mayor fuente de error radica en la indeterminación en la puntería al prisma².

Finalmente no olvidemos el estudio del error que se introduce en la medida electromagnética de distancias por la inclinación del jalón, con valores mínimos de 2 cm. Se hace recomendable el uso de trípodes para prismas en la observación planimétrica de redes básicas y de poligonación, o el uso de estaciones sin prisma.

Se recomienda realizar el ejercicio siguiente:

Hoja 8: Cálculo de incertidumbres en desniveles obtenidos por NT.

4. EQUIPOS TOPOGRÁFICOS. ANÁLISIS DE METODOLOGÍA.

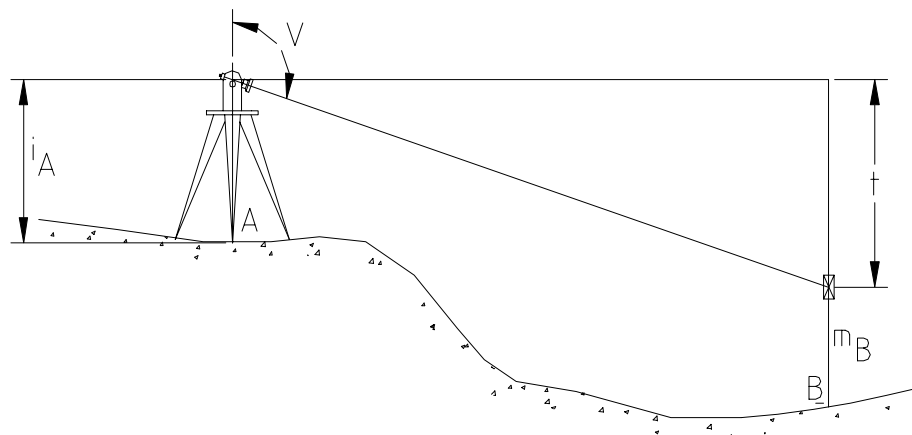
Antes de proceder a analizar los métodos propios de la NT, nos vamos a detener en el estudio de casos concretos de determinado instrumental topográfico, así como en la metodología a aplicar en el tratamiento de datos en cada situación.

4.1 CALCULO DE DESNIVELES CON ESTACIONES TOTALES O SEMITOTALES.

A) EQUIPOS COAXIALES.

Estos equipos disponen de un único anteojo por el que se realiza la puntería que nos permite obtener las lecturas angulares, y por el que se lleva a cabo la emisión de ondas para la medida electromagnética de distancias. Este es el caso general al que se refiere toda la exposición que hemos realizado.

El esquema de toma de datos de campo es el siguiente:



². Error presentado por D. Rafael Ferrer Torio y D. Benjamín Piña Patón en su libro *Metodologías Topográficas* (1991).

Y el término t , lo obtendremos por la siguiente expresión:

$$t = D \cos V$$

El desnivel será igual a:

$$\Delta H_A^B = t_A^B + i_A - m_B + (0.5 - K) \frac{(D_A^B)^2}{R}$$

B) MONTAJES EXCÉNTRICOS.

Estos equipos disponen de un sistema de medida de distancias excéntrico al de medida angular. Se trata de montajes que supusieron un gran avance en la medida electromagnética de distancias pero que han quedado en desuso. No obstante creemos necesario que el alumno se plantee cómo llevar a cabo su utilización y que realice el planteamiento teórico correspondiente a esta metodología, con vistas a futuros equipos o situaciones a los que tengais que enfrentaros, por ejemplo GPS+estaciones totales.

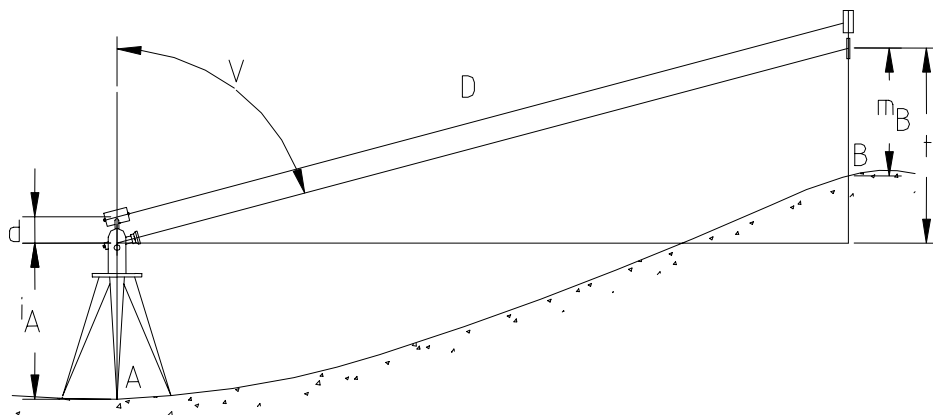
Podemos encontrarnos con tipos de equipos:

B.1 Montaje excéntrico con posibilidad de visuales paralelas.

Son aquellos en los que las placas de puntería vienen preparadas para realizar la puntería angular, a una distancia igual a la excentricidad del montaje.

En éstos casos es necesario comprobar que tanto el jalón como el montaje teodolito-distanciómetro tienen una distancia de excentricidad idéntica, lo que generalmente es lo mismo que indicar que ambos elementos son de la misma marca comercial.

El esquema de toma de datos sería:



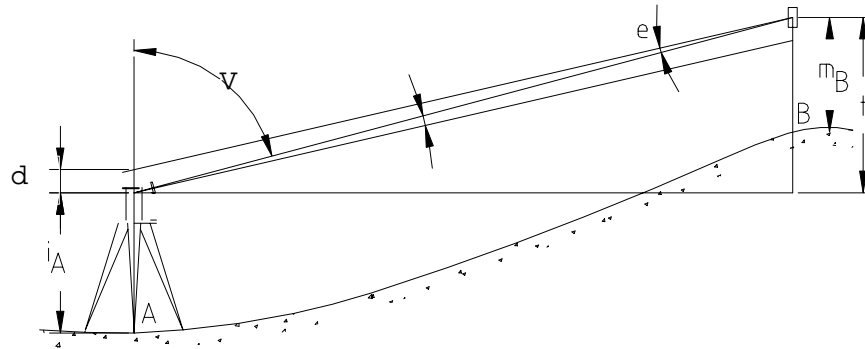
La medida del ángulo se hace a la placa de puntería que estará por debajo del prisma y a una separación igual a la distancia que hay entre los ejes del aparato de medida angular y el del distanciómetro.

El cálculo se realiza de forma análoga al planteado en el caso anterior (equipos coaxiales) puesto que la lectura cenital es compatible con la distancia D , en el cálculo del término t ; y por lo tanto del desnivel.

B.2 Montaje excéntrico con visuales no paralelas.

En estos casos los equipos no vienen preparados para realizar la puntería como en el caso anterior, y es necesario realizar tanto la puntería angular como la de distancias al mismo prisma.

El esquema de toma de datos sería el siguiente:



El planteamiento teórico nos obliga a determinar el valor del ángulo e , que permite corregir la lectura cenital. De la figura:

$$\frac{d}{\text{sen } e} = \frac{D}{\text{sen } V}$$

$$\text{sen } e = \frac{d}{D} \text{sen } V$$

Considerando que el ángulo e toma un valor muy pequeño, podremos hacer la aproximación de que el valor del $\text{sen } e$ es igual al valor del ángulo en radianes:

$$\text{sen } e = \frac{d}{D} \text{sen } V = e$$

Y para operar en el sistema centesimal:

$$e^{cc} = \frac{d}{D} (\text{sen } V) r^{cc}$$

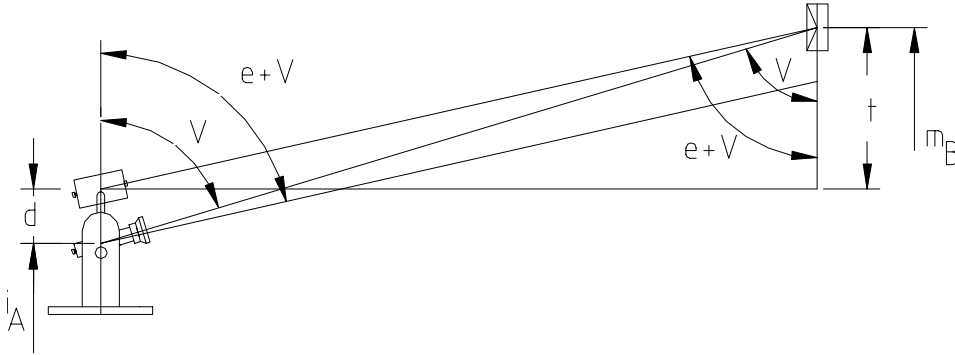
El término t se obtendrá con el ángulo cenital corregido:

$$t = D \cos (V + e)$$

Y el desnivel por la expresión:

$$\Delta H_A^B = t_A^B + i_A - m_B + (0.5 - K) \frac{(D_A^B)^2}{R}$$

Antes de generalizar esta metodología de cálculo, debemos plantearnos cuál es el orden de las magnitudes de las que se está tratando. La figura que nos permite analizarlas es la siguiente:



Tendremos que determinar el error que se produce al no tener en cuenta el ángulo e . Realizamos los dos cálculos: con corrección y sin corrección, y obtendremos por la diferencia de ambos, las cuantías en las que afecta este problema de falta de paralelismo de las visuales en los montajes excéntricos.

EN EL DESNIVEL:

- Cálculo del desnivel teniendo en cuenta el término e :

$$\Delta H_A^B = t + i_A - m_B = D \cos(V + e) + i_A + d - m_B$$

- Cálculo del desnivel sin tener en cuenta el término e :

$$(\Delta H_A^B)' = t' + i_A - m_B = D \cos V + i_A + d - m_B$$

El error en el desnivel será: $\Delta H_A^B - (\Delta H_A^B)'$:

$$t - t' = D (\cos V - \cos(V + e))$$

Este error para distancias de 10 metros, y con cenitales de 85^g (caso muy desfavorable) toma un valor de 4×10^{-9} mm. Este valor nos permite concluir que la corrección de cenitales en el valor calculado a partir de la distancia de excentricidad, sea completamente despreciable para las precisiones que se consiguen con el método de NT. Es decir, en la práctica no es necesario realizar ningún tipo de corrección.

EN LA DISTANCIA REDUCIDA:

- Teniendo en cuenta el ángulo e .

$$D_r = D \cos(V + e)$$

- Sin tener en cuenta el ángulo e .

$$(D_r)' = D \cos V$$

El error será la diferencia de los dos valores.

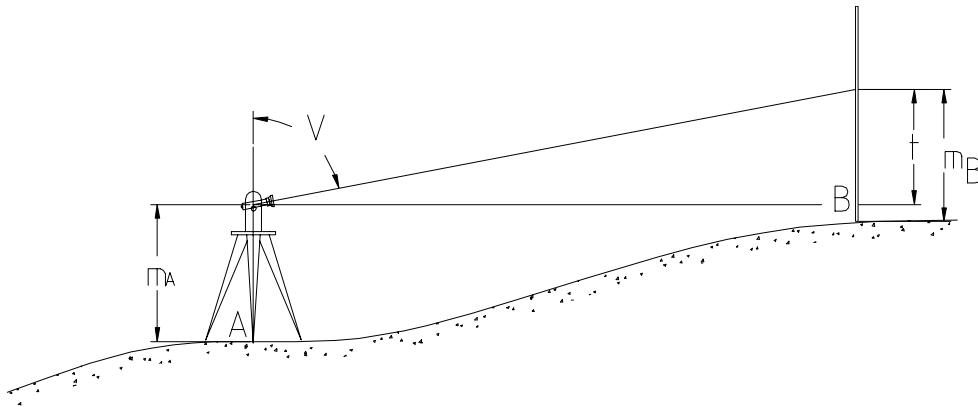
$$\text{error} = Dr - (Dr)' = D [\text{sen } V - \text{sen } (V + e)]$$

Calculando valores nos encontramos que para distancias de 10 metros y con cenitales de 85° , este error es de 2×10^{-5} mm. Por lo tanto podemos prescindir del ángulo e a la hora de determinar el término t y la distancia reducida, cuando usamos estos equipos.

4.2 CALCULO DE DESNIVELES CON TÁQUIMETRO Y MIRA.

A pesar de que es un método que no se va a utilizar, lo incluimos para que no olvidéis las expresiones de cálculo.

El esquema de toma de datos de campo es:



$$Dr = g \text{ sen}^2 V$$

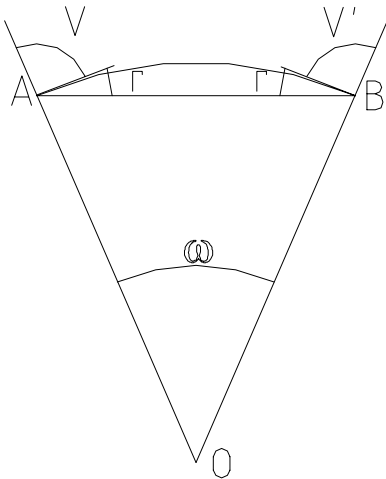
$$t = \frac{Dr}{\tan V}$$

Y el desnivel vendrá dado por:

$$\Delta H_A^B = t_A^B + i_A - m_B + (0.5 - K) \frac{D_A^B{}^2}{R}$$

5. COEFICIENTE K DE REFRACCIÓN

5.1 DETERMINACIÓN EXPERIMENTAL DEL COEFICIENTE K DE REFRACCIÓN.



Para determinar el coeficiente de refracción K bastará estacionar en los puntos A y B de los que se conozca la distancia, D , que los separa y efectuar simultáneamente medidas de los ángulos verticales correspondientes. Como la luz por defecto describe un arco AB , las distancias cenitales que se miden son V y V' , y como las condiciones atmosféricas son las mismas, por ser simultáneas las observaciones, serán iguales los ángulos r , de refracción. En el triángulo OAB , cuyo vértice O es el centro de la Tierra, puede establecerse la siguiente relación entre los ángulos:

$$V + r = \omega + 200^{\text{s}} - (V' + r)$$

$$2r = \omega - (V + V') + 200^{\text{s}}$$

Dividiendo los dos miembros de esta expresión por 2ω y teniendo en cuenta que

$\frac{r}{\omega} = K$ resulta:

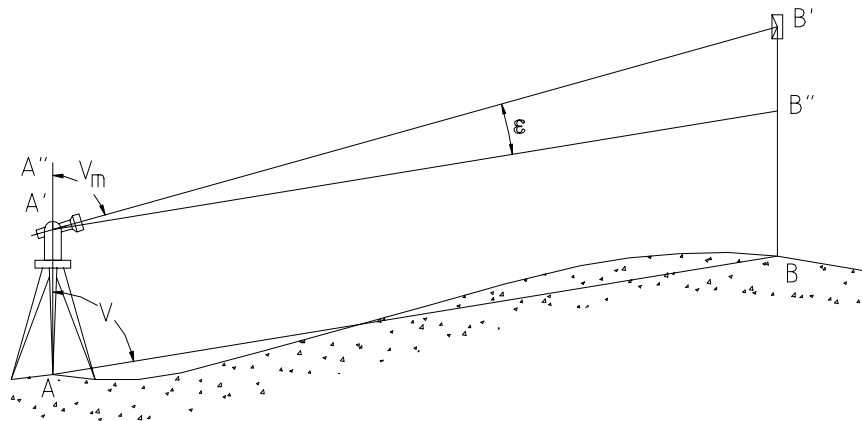
$$\frac{2r}{2\omega} = K = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\omega} (V + V' - 200^{\text{s}})$$

Si en esta expresión se sustituye ω por su valor y se expresa $(V + V' + 200^{\text{s}})$ en segundos, se tendrá:

$$K = 0.5 - \frac{R}{2D r^{\text{cc}}} (V + V' - 200^{\text{s}})^{\text{cc}}$$

en las que V y V' son distancias cenitales reducidas al terreno (siguiente apartado).

5.2 REDUCCIÓN DE LAS VISUALES AL TERRENO.



Sea A el punto de estación y B el punto visado, habiéndose medido en el primero la distancia cenital V_m , cuando en realidad debiera medirse la $V = A''AB$. Trazamos la recta $A'B''$ paralela a AB , resultando que:

$$V = A''AB$$

por tanto:

$$V = V_m + \varepsilon$$

es decir que si se conociera V cuando se conozca ε .

En el triángulo $A'B'B''$ se deduce que:

$$\frac{\text{sen } \varepsilon}{B''B'} = \frac{\text{sen } V_m}{A'B''}$$

luego designando por i_A a la altura de instrumento AA' ; y por m_B a la de mira BB' y siendo $A'B''$ la distancia se obtiene que:

$$\frac{\text{sen } \varepsilon}{(m_B - i_A)} = \frac{\text{sen } V_m}{D}$$

Despejando $\text{sen } \varepsilon$ se obtiene:

$$\text{sen } \varepsilon = (m_B - i_A) \frac{\text{sen } V}{D}$$

Dado que el ángulo es muy pequeño, expresado en segundos, se podrá sustituir el seno por el ángulo quedando entonces:

$$\varepsilon^{cc} = (m_B - i_A) \frac{\text{sen } V}{D} \cdot r^{cc}$$

El signo de la corrección dependerá de $(m_B - i_A)$. La distancia debería ser la geométrica correspondiente a los puntos AB , pero dado la escasa pendiente que suelen tener las visuales largas en Topografía, no hay ningún inconveniente en tomar la reducida al horizonte.

6. MÉTODOS DE NIVELACIÓN TRIGONOMÉTRICA SIMPLE

- NIVELACIÓN TRIGONOMÉTRICA SIMPLE
- NIVELACIÓN POR ESTACIONES RECÍPROCAS
 - Método de campo.
 - Cálculo del desnivel final.
 - Directo: ΔH_A^B .
 - Recíproco: ΔH_B^A .
 - Diferencia.
 - Tolerancia.
 - Valor final: medias aritméticas o ponderadas.
 - Precisión.
 - Altitud.
 - Aplicaciones.
- NIVELACIÓN POR VISUALES RECÍPROCAS Y SIMULTANEAS
 - Fórmula general.
 - Precisión.
 - Determinación experimental del coeficiente k de refracción.

6.1 NIVELACIÓN TRIGONOMÉTRICA SIMPLE

Una nivelación trigonométrica es simple cuando se realiza una única visual. Supongamos sea A el punto de altitud conocida y B el punto cuya altitud queremos determinar.

Por el método de nivelación trigonométrica simple puede determinarse del modo que hemos indicado, el valor del desnivel existente entre ellos y la incertidumbre o precisión de dicho desnivel.

La altitud del punto B vendrá dada por:

$$H_B = H_A + \Delta H_A^B$$

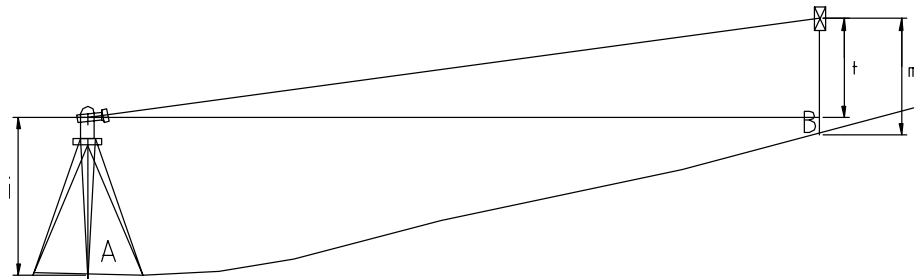
Y la precisión o incertidumbre de esta altitud será:

$$e_{H_B} = \sqrt{e_{H_A}^2 + e_{\Delta H_A^B}^2}$$

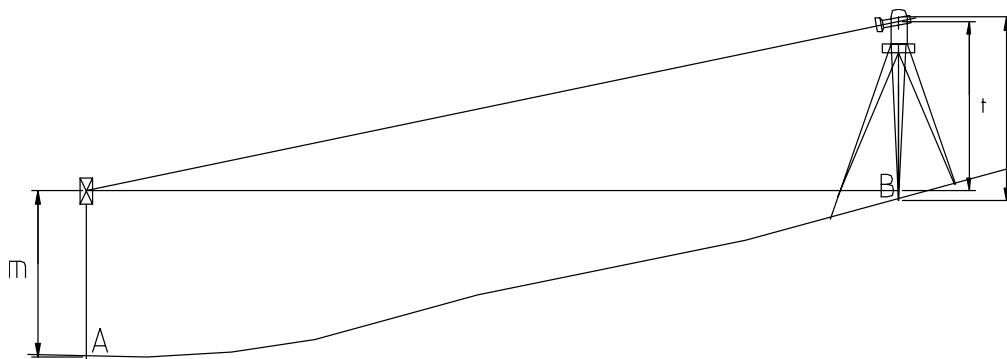
En el caso en que no conozcamos la precisión de la altitud del punto A, únicamente podremos obtener la *precisión relativa* del punto B con respecto al punto A.

6.2 NT POR ESTACIONES RECÍPROCAS.

Para encontrar por este método, el desnivel entre dos puntos A y B. se estaciona en A y se visa a B -situación a- ; a continuación se invierten las posiciones relativas -situación b- y se realizan nuevas medidas desde B. Como resultado de las observaciones se podrá calcular:



Situación A



Situación B

$$\Delta H_A^B = t_A^B + i_A - m_B + C_{(e+r)}$$

$$\Delta H_B^A = t_B^A + i_B - m_A + C_{(e+r)}$$

Teóricamente; ambos deberán ser iguales y de signos contrarios. La discrepancia que entre ellos se presente dará idea de la precisión alcanzada y que en el caso de ser tolerable se toma como desnivel definitivo la semidiferencia:

$$\Delta H_A^B = \frac{\Delta H_A^B + (-\Delta H_B^A)}{2}$$

Dicha tolerancia será función del error que pueda afectar a cada uno de los desniveles.

$$T = e_{\Delta H} \sqrt{2}$$

La precisión del desnivel obtenido como media aritmética de los dos anteriores, tolerables, será:

$$\frac{e_{\Delta H}}{\sqrt{2}}$$

Por último la altitud del punto B vendrá dada por:

$$H_B = H_A + \Delta H_A^B$$

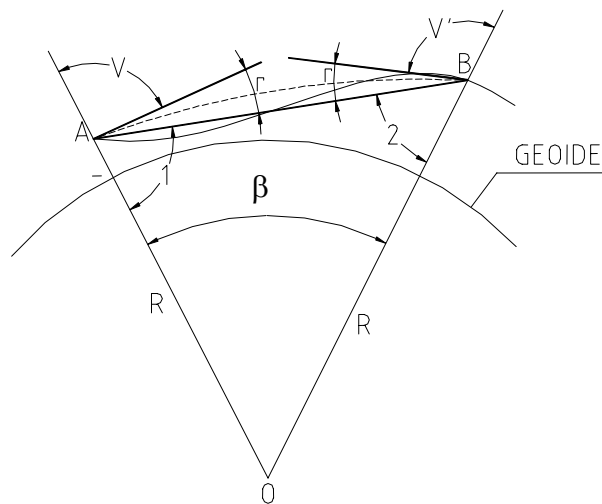
La precisión de la altitud del punto B será:

$$e_{H_B} = \sqrt{e_{H_A}^2 + e_{\Delta H_A^B}^2}$$

6.3 NT POR VISUALES RECÍPROCAS Y SIMULTANEAS.

Este método consiste en realizar de forma simultánea la observación entre los dos puntos.

Puede calcularse también el desnivel entre dos puntos A y B, estacionando instrumentos en los dos puntos y realizando observaciones verticales recíprocas y simultaneas, por lo que los efectos angulares de la refracción, r, en las dos visuales serán iguales. Del triángulo AOB se produce sucesivamente:



En el triángulo AOB

$$\frac{OB}{\text{sen } \hat{1}} = \frac{OA}{\text{sen } \hat{2}}$$

$$\frac{R + H_B}{\text{sen } [200^g - (V + r)]} = \frac{R + H_A}{\text{sen } [200^g - (V' + r)]}$$

$$\frac{R + H_B}{\text{sen } (V + r)} = \frac{R + H_A}{\text{sen } (V' + r)}$$

Aplicamos el teorema:

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{c} \equiv \frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d}$$

$$\frac{R + H_B - R - H_A}{R + H_B + R + H_A} = \frac{\text{sen } (V + r) - \text{sen } (V' + r)}{\text{sen } (V + r) + \text{sen } (V' + r)}$$

Aplicamos el teorema:

$$\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \operatorname{sen} \frac{a-b}{2}$$

$$\frac{H_A^B}{H_B + H_A + 2R} = \frac{2 \cos \frac{V+r+V'+r}{2} \operatorname{sen} \frac{V+r-V'-r}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{V+r+V'+r}{2} \cos \frac{V+r-V'-r}{2}}$$

$$\frac{H_A^B}{H_B + 2R + H_B} = \cot \frac{V+V'+2R}{2} \operatorname{tg} \frac{V-V'}{2}$$

$$V+r+\hat{1} = 200$$

$$V'+r+\hat{2} = 200 \quad 200 - (V+r) - 200 + (V'+r) + \beta = 200$$

$$\hat{1} + \hat{2} + \beta = 200$$

$$200 - V - r - V' - r + \beta = 0$$

$$\frac{V+V'+2R}{2} = 100 + \frac{\beta}{2}$$

$$\cot \left(100 + \frac{\beta}{2} \right) \operatorname{tg} \left(\frac{V-V'}{2} \right)$$

$$- \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{V-V'}{2} \right)$$

$$- \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(-\alpha)$$

$$\frac{H_A^B}{H_A + H_B + 2R} = \operatorname{tg} \left(\frac{\beta}{2} \right) \operatorname{tg} \left(\frac{V-V'}{2} \right)$$

Aplicamos : arco = ángulo * Radio.

$$D = \beta R$$

$$\beta = \frac{D}{R}$$

Expresión que se introduce en la ecuación:

$$\frac{H_A^B}{H_A + H_B + 2R} = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{V-V'}{2}$$

Como el ángulo β es muy pequeño se puede aproximar por el ángulo (radianes)

$$\frac{H_A^B}{H_A + H_B + 2R} = \frac{D}{2R} \operatorname{tg} \frac{V' - V}{2}$$

$$H_A^B = (H_A + H_B + 2R) \frac{D}{2R} \operatorname{tg} \frac{V' - V}{2}$$

$$H_A^B = \left[\frac{2R}{2R} + \frac{H_A + H_B}{2} \frac{1}{R} \right] D \operatorname{tg} \frac{V' - V}{2}$$

$$H_A^B = \left[1 + \frac{hm}{R} \right] D \operatorname{tg} \frac{V' - V}{2}$$

Para hallar el desnivel ΔH_A^B necesitamos saber el desnivel medio. Ese desnivel, en comparación con el radio de la Tierra, es muy pequeño. Despreciando este término:

$$\Delta H_A^B = H_A^B = D \operatorname{tg} \frac{V' - V}{2}$$

Expresión que permite calcular el desnivel entre los puntos A y B sin necesidad de tener en cuenta los efectos de esfericidad y refracción.

Debe hacerse notar que las distancias cenitales V y V' son las que correspondería observar sin alturas de instrumento y objeto de puntería, es decir, que las que han sido observadas deberán reducirse al terreno y como con la simultaneidad de las observaciones lo que se pretende es igualar los efectos de la refracción, puede sustituirse por la condición de operar en condiciones atmosféricas semejantes.

7. NIVELACIÓN TRIGONOMÉTRICA COMPUESTA

- Líneas de nivelación.
 - Por estaciones alternas.
 - Por estaciones recíprocas.
 - Trabajo de campo.
 - Determinación de desniveles.
 - Directos.
 - Recíprocos.
 - Aplicar tolerancia.
 - Promedios.
 - Corrida de altitudes.
 - Error de cierre.
 - Tolerancia final.
 - Compensación (métodos clásicos).
 - Proporcional a los desniveles.
 - Proporcional a las distancias.
 - Proporcional a las tolerancias.
 - Partes iguales a todos los tramos.
- Redes de nivelación por estaciones recíprocas y simultáneas.

- Proyecto.
- Metodología de observación.
- Ajuste por MMCC

Concepto

La nivelación trigonométrica compuesta es el método altimétrico que se aplica en poligonación. Se va a analizar este procedimiento aplicándolo a un problema cuyo enunciado se os proporcionará en clase.

Solamente indicamos que el tratamiento del cálculo en cada tramo se realiza de forma análoga al explicado en la NT simple por estaciones recíprocas. Para la determinación de los desniveles se dispone de dos determinaciones entre estaciones, obteniéndose el valor final, a partir de la media aritmética de ambas, siempre que la diferencia sea tolerable.

Tolerancias

Entre desniveles directo y recíproco:

$$e \leq e_{\Delta H} \cdot \sqrt{2}$$

Precisión del desnivel de cada tramo.

$$\text{Incertidumbre en el desnivel promedio} = \frac{e_{\Delta H}}{\sqrt{2}}$$

Tolerancia de cierre de la línea de nivelación:

$$e \leq \frac{e_{\Delta H} \sqrt{n}}{\sqrt{2}}$$

8. BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

- **BRINKER, Russell C.; MINNICK, Roy (1987):** *The Surveying Handbook*. Van Nostrand Reinhold Company. New York. 1270 págs.
- **BUCKNER, R.B. (1983):** *Surveying measurements and their Analysis*. Third Printing, May 1991. Landmark Enterprises, Rancho Cordova, California. USA. 276 páginas.
- **BURNSIDE, C.D. (1982):** *Electromagnetic Distance Measurement*. Editorial Granada. London.
- **CHUECA PAZOS, M. (1983):** *Topografía*. Tomo I. Editorial Dossat, S.A. Madrid, 1983. **Tomo I.- Topografía Clásica**. 634 páginas.
- **DOMÍNGUEZ GARCÍA-TEJERO, F. (1989):** *Topografía general y aplicada*. 10ª Edición. Editorial Dossat, S.A. Madrid. 823 páginas.

- **FERRER TORIO, Rafael; PIÑA PATON, Benjamin (1991b):** *Metodologías Topográficas*. E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Santander. 302 páginas.
- **KAHMEN, Heribert (1988):** *Vermessungskunde I. Fehlerlehre, Vermessungen und Berechnungen für grossmassstäbige Karten und Pläne, Nivellieren*. Walter de Gruyter. Berlin. New York. 270 páginas.
- **KAHMEN, Heribert (1986):** *Vermessungskunde II. Winkel- und Streckenmessgeräte, Polygonierung, Triangulation und Trilateration, Satellitengeodäsie*. Walter de Gruyter. Berlin. New York. 320 páginas.
- **GROSSMANN, Walter und KAHMEN, Heribert (1988):** *Vermessungskunde III. Trigonometrische und barometrische Höhenmessung, Tachymetrie und Ingenieurgeodäsie*. Walter de Gruyter. Berlin. New York. 247 páginas.
- **HIGGINS, A.L. (1957):** *Elementary Surveying*. London, 7ª Impresión; Longmans, Grenn an Co.
- **OJEDA RUIZ, José Luis (1984):** *Métodos Topográficos y Oficina Técnica*. 1ª Edición. Autor. Madrid. 482 páginas.
- **PEREZ MARTIN, Carlos (1981):** "Cálculo de Desniveles por Estaciones Recíprocas y Simultaneas con Teodolito y Distanciómetro. Precisión". *Técnica Topográfica*. Vol. IX. Nº 43. Septiembre - Octubre.págs. 3-7.
- **RUIZ MORALES, Mario (1991):** *Manual de Geodesia y Topografía*. Primera Edición. Proyecto Sur de Ediciones, S.A.L. Granada. 246 páginas.
- **VALBUENA DURAN, Jose Luis; SORIANO SANZ, María Luisa (1995):** "La desorientación del prisma como fuente de error en la medición de distancias y ángulos". *Topografía y Cartografía*. Vol. XII.- Nº 67. Marzo - Abril. Págs. 6-15.