

***Tema 2:* Incetidumbres y errores en Topografía**

## ÍNDICE

1. Errores en la observaciones
2. Verificación del instrumento. Medidores de ángulos
  - 2.1 Error de colimación Vertical
  - 2.2 Error de Muñones
  - 2.3 Efecto total acimutal
  - 2.4 Error de colimación vertical
3. Determinación del intervalo de incertidumbre de una observación topográfica
  - 3.1 Verticalidad
  - 3.2 Dirección
  - 3.3 Lectura
  - 3.4 Puntería
  - 3.5 Composición de errores
  - 3.6 Cálculo de errores de lectura basándose en la Norma ISO 17123-3
4. Distancias
  - 4.1 Error o incertidumbre en la distancia
  - 4.2 Error de estación
  - 4.3 Error de señal
  - 4.4 Error por inclinación de jalón
5. Nivelación geométrica. Errores accidentales y sistemáticos
  - 5.1 Errores accidentales
  - 5.2 Errores sistemáticos

## 1. ERRORES EN LAS OBSERVACIONES

Toda observación puede venir afectada por dos tipos de errores, uno de ellos de forma segura, los accidentales; los otros pueden existir o no dependiendo del estado del instrumento, los sistemáticos.

Los accidentales se producen por falta de apreciación del instrumento y observador, son aleatorios y no sabremos nunca el valor que están tomando, nos tenemos que limitar a saber el valor máximo en una o varias medidas.

Los sistemáticos se producen por falta de ajuste del instrumento, se propagan según leyes conocidas y por lo tanto son calculables y detectables. Son los más peligrosos para la ejecución de una observación, ya que no son aleatorios.

## 2. VERIFICACIÓN DEL INSTRUMENTO. MEDIDORES DE ANGULOS

Antes de utilizar un medidor de ángulos hemos de comprobar que el eje de colimación sea perpendicular al eje de muñones (error de colimación horizontal); que el eje secundario sea perpendicular al eje principal (error de muñones); que la línea 100-300 del limbo vertical sea horizontal y que el eje de colimación sea horizontal en la línea 100-300 del mencionado limbo vertical (error de colimación vertical).

### 2.1 ERROR DE COLIMACIÓN HORIZONTAL

Este error aparece cuando existe una falta de perpendicularidad entre el eje de colimación y el eje secundario o de muñones.

Su cuantía se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$E_c'' = \frac{\Delta l''}{\text{sen}C}$$

Siendo:

- $E_c$  Error de colimación en segundos.
- $\Delta l$  Incremento de lectura horizontal.
- $C$  Cenital leído.

Para detectarlo se observa un punto en posición del anteojo CD y CI. El punto debe tener una visual que sea prácticamente horizontal.

El promedio de las lecturas observadas en posición CD y CI ( $\pm 200^g$ ) está exento de la influencia de este error.

En este error, la lectura cenital realizada, para visuales topográficas se puede considerar exenta de error.

## 2.2 ERROR DE MUÑONES

Este error se debe a una falta de perpendicularidad entre el eje principal y el eje secundario o de muñones del instrumento.

Su cuantía puede calcularse con la siguiente expresión:

$$E_m'' = \frac{\Delta l''}{\cos C}$$

Siendo:

$E_m$  Error de muñones.

$\Delta l$  Incremento de lectura horizontal.

$V$  Cenital leído

Para detectarlo se utiliza la observación por CD y CI. En este caso, al anularse en visuales horizontales, la visual ha de ser lo más inclinada posible. De igual modo al caso anterior, el promedio de las lecturas CD y CI está exento de la influencia de este error.

En este error, al igual que en de colimación horizontal, el cenital erróneo en visuales topográficas se puede considerar exento de error.

## 2.3 EFECTO TOTAL ACIMUTAL

La combinación de los dos errores nos da el posible efecto en la lectura horizontal. El promedio entre CD y CI está exento de error. La observación se realizaría primero el error de colimación horizontal, calculándose su valor, a continuación se observa el error de muñones, que descontando o añadiendo el valor que presenta el error de colimación horizontal, nos mostraría la desviación de lectura para este error, calculándose la inclinación del eje de muñones.

## 2.4 ERROR DE COLIMACION VERTICAL

Para que un instrumento este correcto, la suma de la lectura cenital en CD y CI ha de resultar de  $400^g$ . De no ser así se puede deber a dos causas, el error de eclímetro o falta de coincidencia de  $0^g$  con la vertical al lugar, o lo que es lo mismo, falta de horizontalidad de la línea  $100^g$ - $300^g$ .

En un segundo lugar puede venir generado por el desplazamiento vertical de retículo. En ambos casos la suma de CD+CI no será de  $400^g$ . La diferencia de lectura observado será el doble del error.

### 3. DETERMINACIÓN DEL INTERVALO DE INCERTIDUMBRE DE UNA OBSERVACIÓN TOPOGRÁFICA

Además de los errores sistemáticos, tenemos los errores accidentales, errores que siempre cometeremos y no podemos precisar ni su valor ni su dirección; Lo que podemos hacer con estos errores, es calcular el valor máximo que con un aparato determinado se puede producir en una observación.

#### 3.1 VERTICALIDAD.

Para observaciones cenitales, recordemos que el error que se podía producir era la inclinación máxima del plano horizontal. Antiguamente existían niveles de eclímetro, ahora todo viene mediante compensador.

Actualmente se está dando por el fabricante la desviación típica del eje principal al nivelar, siendo el error en este caso la desviación típica por un factor que nos dé el error máximo.

La curva de Gauss, no dice que ese factor al 99% de confianza es 2,5; pero ya que intentamos hacer el valor máximo para todas las ocasiones yo prefiero utilizar el 99,9% de confianza, siendo ese factor en este caso 3,29, por lo que el error de verticalidad se puede expresar en lecturas cenitales como:

$$E_v = s * 3,29$$

Siendo  $s$  la desviación típica del sistema.

Para lecturas horizontales recordemos la formulación final del error:

$$E_v = f * \cot C * \sin q$$

Siendo:

- F ángulo de inclinación del plano vertical.
- C cenital observado.
- T ángulo creado entre la dirección y la línea de máxima pendiente del plano inclinado

Haciendo máximo el valor del ángulo horizontal creado su valor será 1, y haciendo máximo el cenital, como mucho que observemos un cenital de  $15,5^\circ$ , su valor sería  $\frac{1}{4}$ .

Para niveles tóricos el error sería  $\frac{1}{4}$  por  $\frac{1}{3}$  de la sensibilidad del sistema y por la propia sensibilidad.

$$E_v = \frac{1}{12} S$$

En el caso de que el sistema fuera de compensador de doble eje y nos viniera como la desviación típica, el error sería

$$E_v = \frac{1}{4} * 3,29 * s$$

Siendo  $s$  la desviación típica del sistema de compensación.

En instrumentos dotados con el sensor de inclinación, el error de verticalidad sería nulo, ya que el propio sensor disminuye por debajo de la sensibilidad de la lectura el error de verticalidad.

### 3.2 DIRECCIÓN

El error de dirección se produce por no estacionar en el punto deseado ni visar al punto deseado

$$E_D = \frac{e_e + e_s}{D} g''$$

Siendo:

$D$  la distancia medida

El término  $e_s$  la incertidumbre en la posición de la señal sobre el punto observado.

El término  $e_e$  la incertidumbre en el estacionamiento.

### 3.3 LECTURA

#### Sistema óptico mecánico.

$$E_l = \frac{2}{3} m \frac{1}{\sqrt{n}}$$

siendo:

$m$  la menor división leída.

$n$  el número de observaciones.

#### Sistema electrónico.

Para el sistema electrónico calcularemos el error de lectura al final de los errores accidentales.

### 3.4 PUNTERÍA

$$E_p = \frac{K''}{A} \left( 1 + \frac{4A}{100} \right) \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Siendo:

$K$ : constante según el tipo de puntería

$A$ : Aumentos del aparato

$n$ : número de veces que hagamos la observación

### 3.4 COMPOSICIÓN DE ERRORES

El error angular para lecturas horizontales será por lo tanto:

$$Ea = \sqrt{E_p^2 + E_l^2 + E_d^2 + E_v^2}$$

Mientras que para lecturas verticales será:

$$Ea = \sqrt{E_p^2 + E_l^2 + E_v^2}$$

### 3.6 CÁLCULO DEL ERROR DE LECTURA BASÁNDOSE EN LA NORMA ISO 17123-3

La norma ISO 17123-3 nos ofrece la desviación típica de una serie de lecturas en círculo directo e inverso.

Sin explicar más la norma y solo con este concepto vamos a ir desarrollando la formulación hasta encontrar el error de lectura o la forma de utilizar esa desviación típica.

Vamos a emplear para nuestro razonamiento las lecturas horizontales.

Puesto que la norma ofrece la desviación típica para CD y CI, si recordamos la fórmula del error de verticalidad, veremos que las lecturas en este caso tienen el mismo valor pero distinto signo; al hacer el promedio el error de verticalidad se anularía.

De igual manera, al estar referido a CD y CI, si nosotros la queremos aplicar solo al CD deberemos multiplicar la desviación típica por raíz de 2 y por 3,29 para hacerla máxima y así poder igualarla a los errores accidentales.

$$\sqrt{E_p^2 + E_l^2 + E_d^2} = s \cdot 3.29 \cdot \sqrt{2}$$

Siendo  $s$  la desviación típica ISO 17123-3

La norma dice que observemos entre 100 y 250m, y en concreto para plomada láser u óptica permite una desviación de 0,5 mm, si aceptamos que se ha visado a 200m el error de dirección será de 0.51". Si elevamos al cuadrado y despejamos:

$$E_p^2 + E_l^2 = \left( s \cdot 3.29 \cdot \sqrt{2} \right)^2 - 0.51''^2$$

Podemos utilizar la expresión que hemos escrito, uniendo siempre el error de puntería y lectura, para lo cual nos obligamos a hacer las punterías a la bisección, según norma. De igual manera podemos despejar el error de puntería y calcular el de lectura para un aparato concreto, en cuanto sepamos sus aumentos:

$$E_l = \sqrt{\left( s \cdot 3.29 \cdot \sqrt{2} \right)^2 - 0.51''^2 - \left[ \frac{10''}{A} + \left( \frac{4 \cdot A}{100} \right) \right]^2}$$

Así podemos obtener el error de lectura para un instrumentos concreto, bien con la especificación técnica de fabrica o bien mediante la correspondiente observación de la norma en su apartado completo.

Usar este procedimiento es casi obligado con la nueva instrumentación, pero de igual manera, podemos observar una norma con nuestros teodolitos analógicos y aplicarles este criterio.

## 4. DISTANCIAS

El intervalo de incertidumbre vendrá dado por la componente cuadrática de los valores que se obtengan para las siguientes variables: incertidumbre en el estacionamiento, incertidumbre en la posición de la señal sobre el punto observado, error propio del sistema de medida utilizado en la medida de la distancia y la incertidumbre introducida en la distancia debido a la inclinación en el jalón.

### 4.1 ERROR O INCERTIDUMBRE EN LA DISTANCIA MEDIDA: $e_D$

La medida electromagnética de distancias viene caracterizada por las casas comerciales con un error estándar o desviación típica, que denominaremos  $e_v$ . Este consta de dos términos: el primero viene dado por una constante; y el segundo, es proporcional a la distancia medida, y se expresa en partes por millón (ppm) o lo que es lo mismo, error en mm por Km medido.

Para las estaciones totales a las que aquí nos referimos, este error puede tomar valores de este tipo:

$$e_v = 3 \text{ mm} \pm 3 \text{ ppm.}$$

Este error, muchos autores, lo identifican con el rango de incertidumbre que se introduce en la distancia con MED. Sin embargo existen otros términos que no pueden olvidarse cuando este método se aplica a la Topografía, y que sirven para caracterizar el instrumental utilizado en la materialización de la señal y el estacionamiento. Estos errores son:

- error de estación:  $e_e$
- error de señal:  $e_s$
- error por inclinación de jalón:  $e_j$

El error total en la distancia medida con MED,  $e_D$ , viene dado por:

$$e_D = \sqrt{e_v^2 + e_e^2 + e_s^2 + e_j^2}$$

### 4.2 ERROR DE ESTACIÓN: $e_e$

En nuestro estudio aplicado podemos considerar que la estación total se va a situar sobre un trípode y se estacionará con plomada óptica. Esto va a dar lugar a un error de estación ( $e_e$ ) menor de 2 mm.



$$e_e \leq 2 \text{ mm}$$

#### 4.3 ERROR DE SEÑAL: $e_s$

Ahora bien la señal, el prisma, puede situarse sobre un trípode o sobre un jalón.

Si se sitúa sobre un trípode alcanzaremos incertidumbres de 2 mm, pero con jalón éstos serán superiores, pudiendo considerarse valores en torno a 1 cm.

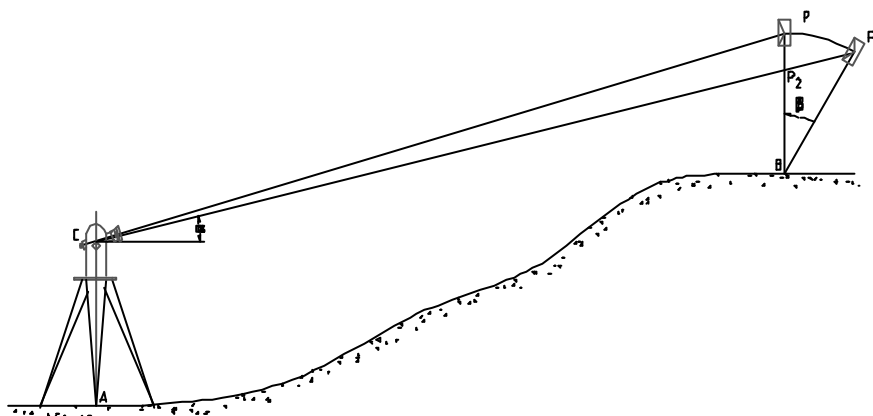
$$\begin{aligned} e_s \text{ (prisma sobre trípode)} &\leq 2 \text{ mm} \\ e_s \text{ (prisma sobre jalón)} &\leq 10 \text{ mm} \end{aligned}$$

#### 4.4 ERROR POR INCLINACIÓN DE JALÓN: $e_j$

Existe finalmente otra causa de error. Se trata del error que se introduce en la distancia medida por inclinación de jalón.

La inclinación de jalón, experimentalmente, se contabiliza en  $1^\circ$  si en el trabajo se utiliza un nivel esférico de mano y en  $3^\circ$  si la medición se realiza sin él o con el nivel descorregido (valores superiores los detecta visualmente el operador).

Denominamos P al punto ideal de puntería,  $P_1$  el real y  $P_2$  el punto donde la visual real cortaría a la ideal. Llamemos C al centro de emisión del aparato de MED que coincide con el centro óptico del antejo.



Hemos indicado anteriormente que la inclinación de jalón nunca sería superior a  $3^\circ$ , por ello podemos considerar que el segmento CP coincide con el segmento  $CP_2$  y que la distancia  $PP_2$  es despreciable. La distancia geométrica medida  $CP_1$ , no será la que corresponde al gráfico 1, en el que se exponía la situación ideal de medición. El error aparece representado por el segmento  $P_2P_1$ , y lo denominaremos  $e_j$ .

Para cuantificarlo analizaremos el triángulo  $P_2BP_1$ . Llamaremos  $\beta$  al ángulo de inclinación del jalón. Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{e_j}{\text{sen } \beta} = \frac{m}{\text{sen } (100 + \alpha)}$$

siendo  $\alpha$  el ángulo de pendiente.

Como  $\sin(100+\alpha)$  es igual al  $\cos \alpha$ , obtenemos la siguiente expresión.

$$\frac{e_j}{\sin \beta} = \frac{m}{\cos \alpha}$$

y finalmente:

$$e_j = m \frac{\sin \beta}{\cos \alpha}$$

Para tomar conciencia de la cuantía del  $e_j$  se han confeccionado las siguientes tablas

	e <sub>j</sub> (mm): con nivel esférico (beta menor o igual a 1g)							
V/M	1,30	1,40	1,50	1,60	1,70	1,80	1,90	2,00
100/0	20	22	24	25	27	28	30	31
99/101	20	22	24	25	27	28	30	31
98/102	20	22	24	25	27	28	30	31
97/103	20	22	24	25	27	28	30	31
96/104	20	22	24	25	27	28	30	31
95/105	20	22	24	25	27	28	30	32
94/106	21	22	24	25	27	28	30	32
93/107	21	22	24	25	27	28	30	32
92/108	21	22	24	25	27	28	30	32
91/109	21	22	24	25	27	29	30	32
90/110	21	22	24	25	27	29	30	32
89/111	21	22	24	26	27	29	30	32
88/112	21	22	24	26	27	29	30	32
87/113	21	22	24	26	27	29	30	32
86/114	21	23	24	26	27	29	31	32
85/115	21	23	24	26	27	29	31	32

La influencia del ángulo cenital es despreciable, variaciones máximas de 1 mm en el intervalo de distancias cenitales estudiadas (100 85/115). La altura a la que se ha visado es un efecto a tener en cuenta. Los errores se estudian para conocer que variables son las que hay que tener en cuenta, cual es su valor y cuales tienen efectos despreciables.

	e <sub>j</sub> (mm): sin nivel esférico (beta menor o igual a 3g)							
V/M	1,30	1,40	1,50	1,60	1,70	1,80	1,90	2,00
100/0	61	66	71	75	80	85	90	94
99/101	61	66	71	75	80	85	90	94
98/102	61	66	71	75	80	85	90	94
97/103	61	66	71	75	80	85	90	94
96/104	61	66	71	75	80	85	90	94
95/105	61	66	71	76	80	85	90	95
94/106	62	66	71	76	80	85	90	95
93/107	62	66	71	76	81	85	90	95
92/108	62	66	71	76	81	85	90	95
91/109	62	67	72	76	81	86	90	95
90/110	62	67	72	76	81	86	91	95
89/111	62	67	72	77	81	86	91	96
88/112	62	67	72	77	82	86	91	96
87/113	63	68	72	77	82	87	91	96
86/114	63	68	72	77	82	87	92	97
85/115	63	68	73	78	82	87	92	97

El ángulo cenital influye más : 3 mm en el intervalo estudiado, la influencia es menor y los efectos de cualquier variación también. La variación por  $m$  oscila desde 6 cm, con alturas de señal de 1.30, hasta 10 cm con alturas de señal de 2.00 m

El error total en la distancia medida con MED,  $e_D$ , viene dado por

$$e_D = \sqrt{e_v^2 + e_e^2 + e_s^2 + e_j^2}$$

Para las estaciones totales que estudiamos:

$$e_v = 3 \text{ mm. } \pm 3 \text{ ppm.}$$

$$e_e = 2 \text{ mm.}$$

$$e_s = 2 \text{ mm. con prisma sobre tripode.}$$

$$e_s = 10 \text{ mm. con prisma sobre jalón.}$$

$e_j$  = La influencia de la variación de la distancia cenital despreciable. Considerando la altura del prisma mínima de 1,30.

- Con nivel esférico  $e_j = 20 \text{ mm.}$

- Sin nivel esférico  $e_j = 61 \text{ mm.}$

Para la situación más usual en la que el prisma se coloca sobre un jalón con nivel esférico y tendiendo a realizar lectura lo más bajas posibles (caso general 1.30 m.), el error en distancias será:

$$e_D = \pm 23 \text{ mm.}$$

Generalizando este planteamiento. en la medida electromagnética de distancias, se recomienda el uso de trípode con el prisma, bien sea que el prisma se sitúe directamente sobre él o que el trípode se utiliza como elemento auxiliar para nivelar, por la influencia del error  $e_j$  no sólo en altimetría sino también en planimetría.

## 5. NIVELACION GEOMETRICA. ERRORES ACCIDENTALES Y SISTEMATICOS

La nivelación geométrica o por alturas se realiza con los niveles; estos instrumentos tienen como única función poder hacer visuales horizontales.

Actualmente podemos encontrar en el mercado dos tipos de niveles, los analógicos automáticos y los electrónicos automáticos.

En los primeros leemos a una mira analógica mientras que los segundos leen en mira de código de barras.

Los electrónicos tienen dos principios de funcionamiento, el de correlación y el basado en las transformadas de Fourier.

El principio de correlación se basa en una pequeña base de datos en el instrumento que compara lo que lee en la mira con lo que el tiene grabado, obteniendo la altura.

Los que se basan en el principio de Fourier pasa la imagen al dominio de la frecuencia para darnos la altura de mira.

## 5.1 ERRORES ACCIDENTALES

En los errores accidentales hemos de hacer una división a la hora de hablar de los niveles.

Actualmente, como ya hemos comentado, podemos tener un nivel analógico y un nivel electrónico. La forma de hablar de errores accidentales en niveles es hablar de la norma ISO 17123-2, la cual me dará la desviación típica del cálculo de una observación.

En la observación de la norma completa, observaremos por punto medio (lo cual anulará los errores sistemáticos que veremos a continuación), a una distancia de 30 metros, haciendo dos series de 20 medidas.

Si hablamos de los niveles electrónicos, ya que son ellos los que nos ofrecen la lectura en mira, deberemos realizar la observación de la norma para cada equipo (nivel y miras) que usemos. A partir de la desviación típica podemos calcular el error kilométrico y el error máximo para ese equipo.

Si trabajamos con niveles analógicos, si podemos calcular el error accidental siguiendo una formulación.

En este caso los errores accidentales que intervienen será el error de puntería (realizada a la estima), el error de verticalidad y el error de lectura en mira, pudiendo escribir:

$$E_a = \sqrt{E_p^2 + E_v^2 + E_{lm}^2}$$

Siendo  $E_a$ : el error angular de una visual en el plano vertical.  
 $E_p$ : el error de puntería.  
 $E_v$ : el error de verticalidad.  
 $E_{lm}$ : el error de lectura en mira.

El error de puntería, ya hemos hablado de él, cuando vimos los medidores de ángulos; en este caso puesto que vamos a estimar en la mira, emplearemos la formulación a estima.

$$E_p = \frac{50''}{A} + \left( 1 + \frac{4 * A}{100} \right)$$

Siendo  $E_p$ : el error de puntería.  
 $A$  : los aumentos del antejo

Para el error de verticalidad podemos decir lo mismo que ya avanzamos para los medidores de ángulos en su componente vertical, ya que el nivel lo único que hace es lanzar una visual con un cenital de 100º, por lo tanto:

$$E_v = s * 3,29$$

Siendo  $s$  la desviación típica del sistema de compensación.

El error de lectura en mira, se produce porque, aunque nosotros consigamos apreciar más que el milímetro en la observación, lo despreciamos, observando como ya he dicho el milímetro; la expresión del error será:

$$E_{lm} = \frac{0.54(mm)}{D(mm)} * 206265 + 13'' - 0.4'' * A$$

Siendo D: la distancia nivel-mira.  
A: los aumentos del instrumento.

## 5.2 ERRORES SISTEMÁTICOS

El único error sistemático en los niveles automáticos, sean electrónicos o no, es que una vez nivelado, el eje de colimación no coincida con la línea 100<sup>g</sup>-300<sup>g</sup> del supuesto cenital, bien sea por un movimiento del retículo o por un error del compensador.

La única forma de comprobarlos es mediante el método de punto medio-punto extremo.

Este método se realiza estacionando en punto medio (por lo menos a 30m de distancia) y haciendo una lectura a ambas miras; a continuación se estaciona lo más cercano posible a una mira y volvemos a leer a las dos miras.

El desnivel observado por punto medio estará exento de sistematismos, ya que de existir, tendrá el mismo valor al ser la distancia igual en las dos observaciones. En el punto extremo, la mira cercana no tendrá sistematismos ya que la distancia a la mira es muy pequeña para que se ponga de manifiesto, luego todo el error de la observación recaerá en la mira lejana.

Para que no exista sistematismo ambos desniveles han de ser iguales mas menos los errores accidentales.

La única corrección posible es manipular el retículo, ya que el sistema de automatismo no es accesible para nosotros; no obstante la dicha manipulación es sumamente peligrosa y es preferible operar por punto medio anulando así los errores sistemáticos de la observación.