Tema 6: ***Método de Poligonación***

ÍNDICE

3. CÁLCULO Y COMPENSACIÓN DE LAS COORDENADAS.

- Cálculo de la altimetría.
- Obtención de acimutes compensados.
- Obtención de distancias promedio.
- Cálculo de coordenadas parciales x, y.
- Errores de cierre en coordenadas.
- Tolerancias.
- Compensación y obtención de coordenadas aproximadas

    - proporcional a las coordenadas parciales de los tramos:
      si es menor la precisión de la medida de distancias que la precisión de la medida de ángulos:
    - Compensación por el método de Bowditch (proporcional a la longitud de los ejes:
      si es mayor o igual la precisión en la medida de distancias que la precisión en la medida de ángulos
    - Compensación por el método de Sanguet

- Análisis de la precisión obtenida.

    - En las estaciones de la poligonal.
    - Transmisión a los puntos radiados.

- Compensación y obtención de coordenadas ajustadas y precisiones por MMCC

4. LOCALIZACIÓN DE FALTAS DE CAMPO Y EQUIVOCACIONES DE CÁLCULO.

5. CALCULO DE POLIGONALES EN PROYECCIÓN UTM.

- Cálculo de la altimetría (H).
- Obtención de orientaciones.
- Obtención de distancias en la proyección.
- Cierres en coordenadas.
- Tolerancia.
- Compensación.

6. OTROS MÉTODOS EN POLIGONACIÓN

- Itinerarios concurrentes en un punto. Punto Nodal.
- Puntos destacados de una poligonal.
- Puntos en alineación.

7. BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA.

1. DESCRIPCIÓN GENERAL

- *Método general de la poligonación.*
- *Clasificación de las poligonales.*

  . *Según puntos de partida y llegada.*
    - *Cerrada.*
    - *Abierta*

  . *Según orientación angular.*
    - *Orientada.*
    - *No orientada.*

- *Incertidumbres a priori.*

  . *Incertidumbre longitudinal.*
  . *Incertidumbre transversal.*

Un itinerario o poligonal es una sucesión encadenada de radiaciones, donde se debe obtener como resultado final las coordenadas (X, Y, H) de los puntos de estación.

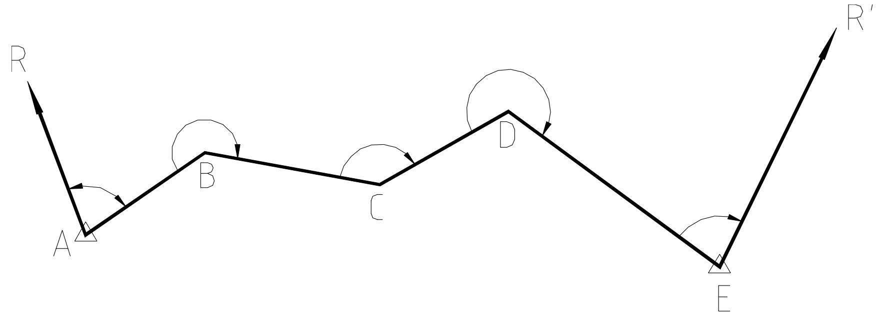
Se parte de un punto de coordenadas conocidas y se llega a otro también de coordenadas conocidas. Desde el punto inicial y final se visará a una referencia, también de coordenadas conocidas, como mínimo.

Las estaciones de la poligonal tendrán que:

- estar relacionadas entre sí (acimutes y distancias),
- tener intervisibilidad entre ellas,
- poder desempeñar el trabajo para el que se ha diseñado la poligonal, desde los puntos de estación.

Los puntos de la poligonal pueden convertirse en polos de radiación, y desde ellos efectuar un levantamiento. En este caso en primer lugar se realizará la observación de los puntos de estación del itinerario y después se efectuará en cada uno de ellos la radiación de los puntos de detalle.

El método de poligonación consta del siguiente procedimiento. Se estaciona en un punto A y se sitúa por radiación en punto B. Posteriormente se estaciona en B y, tomando como referencia la dirección BA se radia C. Estacionando en C, de modo análogo, se sitúa el punto D y así se continúa sucesivamente hasta fijar el ultimo punto que se desee, tal que el E. Por tanto, un *itinerario o poligonal* no es más que una sucesión encadenada de radicaciones. Los puntos A, B, C ... son *estaciones* de itinerario y las distancias AB, BC, ... los *tramos o ejes* del mismo.



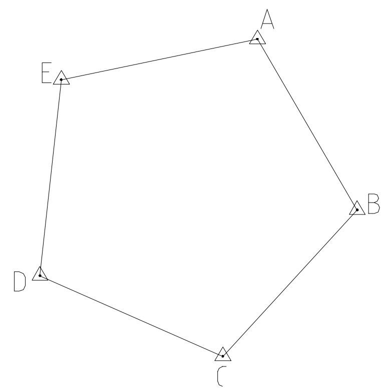
Normalmente, con una poligonal lo que se pretende es situar una serie de puntos B, C,... a partir de otro A, previamente conocido, desde el que se dispone de acimutes a direcciones (referencias) también conocidas.

CLASIFICACIÓN DE LAS POLIGONALES.

1. Según los puntos de partida y llegada.

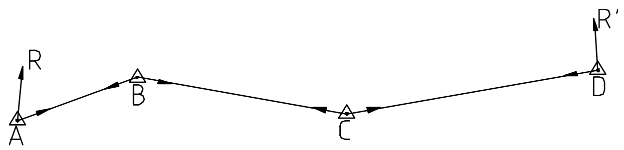
Cerrada:

Cuando el punto inicial coincide con el final



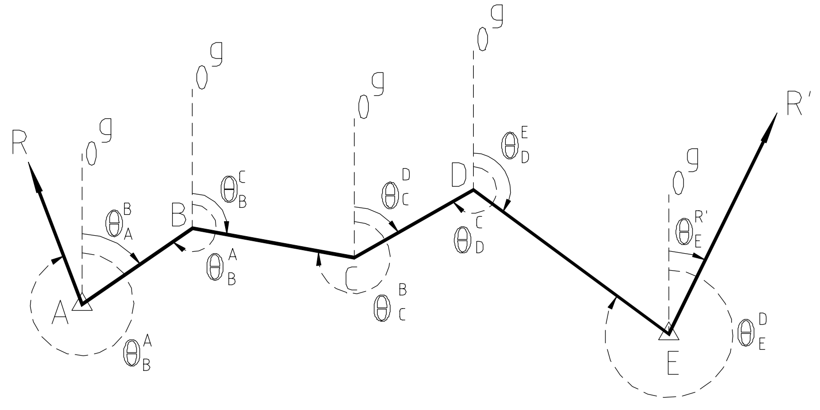
Abierta:

Cuando el punto inicial no coincide con el final.



2. Según la orientación angular.

Poligonal Orientada.



Cuando se observa una poligonal orientada, el instrumento esta orientado en cada uno de los puntos o estaciones que componen la poligonal.

Se estaciona el aparato en el punto inicial A y se orienta, para lo que será necesario conocer el acimut θ_A^R, de una dirección AR. Seguidamente se visa al punto B, sobre el que se hacen las medidas de ángulos y distancias necesarias para situar dicho punto por radiación. Al estar el aparato orientado, la lectura acimutal que se haga sobre B será el acimut θ_A^B, de tal dirección. Después se traslada el aparato a B, la dirección de referencia será BA ya que el azimut de θ_B^A es conocido , por ser el recíproco de θ_A^B, medido en A. Radiamos desde B el punto C y nos trasladamos a él , se orienta utilizando el azimut θ_B^C reciproco de θ_C^B, continuándose así asta el final de la poligonal.

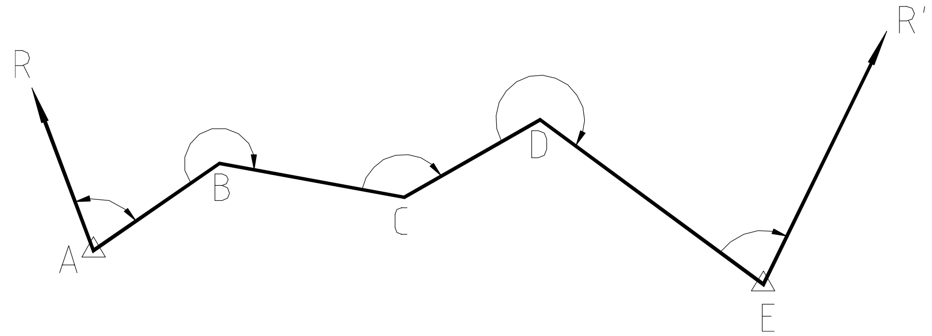
Como siempre debe procurarse tener una comprobación de los resultados obtenidos, por lo que al estacionar en el último punto E se orienta el instrumento sobre D con el acimut θ_E^D y a continuación se visa a la dirección ER' de acimut conocido. Es natural que debido a los inevitables errores de observación, el valor leído para $\theta_E^{R'}$ no coincida exactamente con dicho acimut conocido. la diferencia será el error de cierre angular de la poligonal.

En un itinerario orientado los acimutes directos y recíprocos deben de diferir en 200 grados, puesto que se ha obligado al goniómetro a indicar las lecturas correspondientes. En la práctica no sucede así. Con el instrumento se observan las direcciones en las posiciones de CD y CI. Las lecturas promedio que se obtienen no resultan rigurosamente iguales a las deseadas, lo que determina que los acimutes directos no se corresponde con sus recíprocos. Se van produciendo a lo largo del itinerario unas ligeras desorientaciones y el error de cierre acimutal que pueda aparecer al observar la dirección de cierre estará también ligeramente falseado, con respecto al que obtendremos finalmente en cálculo.

Se hace necesario corregir en cálculo las desorientaciones situadas en el momento de la observación. Esta operación recibe el nombre *referir acimutes al origen.*

Poligonal no Orientada.

En este caso no se puede, o no se desea, llevar el instrumento orientado.



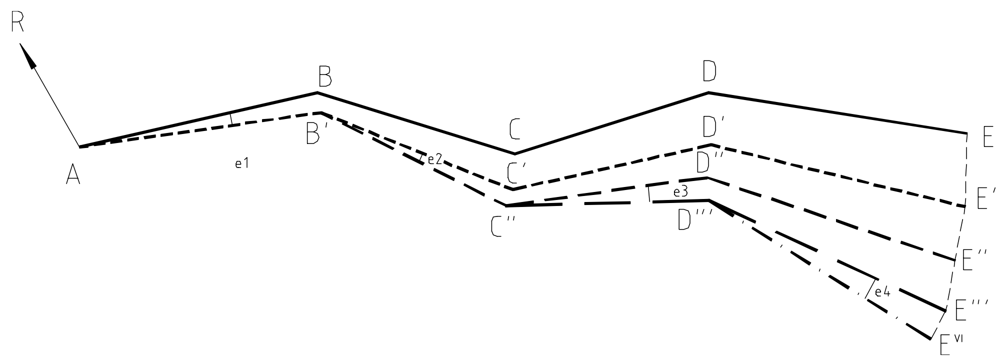
Se estaciona en el punto de inicio de la poligonal A y con la lectura acimutal cualquiera se visa a R. Después se realiza la observación completa sobre B.

Es evidente que por diferencia de lecturas acimutales se podrá conocer el ángulo que la dirección AB forma con la AR. En B se visa a A con una lectura arbitraria y seguidamente se efectúan las observaciones necesarias sobre C, con lo que se podrá calcular el ángulo en B. Se continúa de forma análoga hasta finalizar en E, donde se deberá visar también a R’ para conocer el ángulo de dicha estación.

Con las referencias y conocidos los acimutes de las direcciones observadas, se pueden posteriormente calcular los acimutes de todos los lados o tramos de la poligonal y llegar a conocerse el error de cierre de la poligonal. Para poder conocer el error de cierre se utiliza la *corrida de acimutes.*

INCERTIDUMBRES A PRIORI

1 Incertidumbre Transversal.



Si al medir el ángulo en la estación inicial A cometería un error, e_1 , y suponiendo que no vuelvo a cometer ningún otro en todos los restantes, todo el itinerario gira rígidamente. con centro en A, un ángulo de e_1 y radio AE, lo que determina que el ultimo punto E, se traslada a E’. El error cometido en aquella estación trasciende hasta el final con efectos progresivamente ampliados. Designando por *L* la longitud total del itinerario y sí es *n* el número de tramos del mismo, el desplazamiento EE’ que experimentará el punto E, valdrá:

$$EE' = AB\ n\ e_1 = \frac{L}{n}\ n\ e_1$$

Supongamos que, con independencia del error en el ángulo A, al medir el ángulo en B se comete un error e_2, sin que se produzca ningún otro error en los siguientes. La poligonal sufrirá un nuevo giro de valor e_2 y centro en B’, con lo que E’ se desplazará a E”, de modo que:

$$E'E'' = \frac{L}{n}\ (n-1)\ e_2$$

Admitiendo, del mismo modo, errores sucesivos e independientes en todos los ángulos, se comprende que el se cometa en el enésimo producirá un efecto final

$$E^{n-1}E^{n} = \frac{L}{n} e_n$$

Como tales errores son, como se ha dicho, independientes, el efecto acumulado de todos ellos será igual a su componente cuadrática. El error total será:

$$e_T \leq \sqrt{\left(\frac{L}{n}\right)^2 n^2 e_1^2 + \left(\frac{L}{n}\right)^2 (n-1)^2 e_2^2 + ... + \left(\frac{L}{n}\right)^2 e_n^2}$$

Los valores de e_1 , e_2 . . . . e_n son desconocidos, pero pueden sustituirse por el error máximo angular, e, que cabe cometer con el teodolito que se utilice. Si es e_a el error máximo que, por dirección, le corresponde a dicho aparato, resultará:

$$e \leq e_a \sqrt{2}$$

ya que cada ángulo consta de dos direcciones. Sustituyendo se obtiene:

$$e_T \leq \frac{L}{n} e_a \sqrt{2} \sqrt{n^2 + (n-1)^2 + ... + 1}$$

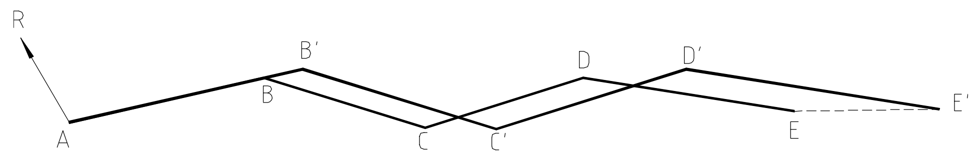
La cantidad subradical es la suma de los cuadrados de los n primeros números enteros, y su valor es:

$$\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$$

Sustituyendo esta expresión en la anterior se obtiene que el error transversal puede calcularse con la siguiente expresión:

$$\boxed{e_T \leq \frac{L}{n} e_a \sqrt{2} \sqrt{\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}}}$$

2 Incertidumbre Longitudinal.



Este parámetro no depende del instrumento con que se midan los ángulos ya que depende solo del aparato con que se hallan medido las distancias. Designamos por ε el error relativo de tales medidas, es evidente que sí L, es la longitud total del itinerario y n su número de tramos, en cada uno de ellos se cometerá un error:

$$E_l \leq \frac{L}{n} \varepsilon$$

y al cabo de n tramos, el error total longitudinal valdrá:

$$E_l \leq \frac{L}{n} \varepsilon \sqrt{n}$$

Como el error relativo es la incertidumbre por unidad de medida, se obtiene dividiendo el error esperado en distancias, por la distancia observada.

Es decir:

$$\varepsilon = \frac{e_D}{L/n}$$

Sustituyendo:

$$E_l \leq \frac{L}{n}\frac{e_D}{L/n}\sqrt{\mathrm{n}} = e_D\sqrt{n}$$

Esta es la expresión del error longitudinal, cuando sólo se haya realizado una medida en cada distancia. Como el método de observación de una poligonal exige la medida doble (en sentido directo y recíproco), la expresión final resultante es:

$$E_l \leq \frac{e_D}{\sqrt{2}}\sqrt{n}$$

3 Incertidumbre total:

Los itinerarios han de ser rectilíneos. En este caso los errores angulares se producen en dirección prácticamente transversal a la de la poligonal y el longitudinal se manifiesta en igual dirección que la poligonal.

Nos encontramos, ante un caso en que las líneas de acción de los errores independientes se cortan bajo un ángulo recto, por lo que para saber cual será el error total máximo que puede presentarse en una poligonal, deberán calcularse el transversal y el longitudinal correspondientes y el que resulte mayor de los dos será el error total buscado.

Este parámetro nos indicará la precisión relativa, la precisión interna o el rango de incertidumbre de los nuevos vértices con respecto a los ya conocidos.

Si se desea conocer la precisión absoluta de los nuevos vértices deberemos conocer la precisión de los vértices de salida y de llegada en los que se apoya la poligonal. Supongamos una poligonal que parte de un vértice A, cierra en D y dota de coordenadas a los vértices B y C.

Para determinar un indicador de la precisión absoluta de los nuevos vértices, puede utilizarse la siguiente expresión:

$$e_{xy_{B,C}} = \sqrt{e^2_{xy_A} + e^2_{Poligonación} + e^2_{xy_D}}$$

En altimetría, los desniveles en poligonación se obtienen a partir de los datos de campo, mediante nivelación trigonométrica. La precisión absoluta de los vértices B y C podrá obtenerse de igual forma:

$$e_{H_{B,C}} = \sqrt{e^2_{H_A} + e^2_{Método\ altimétrico\ aplicado\ en\ la\ determinación\ de\ \Delta H} + e^2_{H_D}}$$

El método de nivelación trigonométrica que se aplica es la nivelación trigonométrica compuesta mediante visuales en sentido directo y recíproco, es decir por estaciones recíprocas. La expresión de cálculo del desnivel de un punto B respecto a A en nivelación trigonométrica simple es:

$$\Delta H_A^B = t_A^B + i_A - m_B + (0.5 - K)\frac{(D_A^B)^2}{R}$$

Para la determinación de los desniveles se dispone de dos determinaciones entre estaciones, obteniéndose el valor final, a partir de la media aritmética de ambas, siempre que la diferencia sea tolerable. La tolerancia entre el desnivel directo y recíproco será:

$$e \le e_{\Delta H} \cdot \sqrt{2}$$

Siendo:

$$e_{\Delta H} = \sqrt{e_i^2 + e_t^2 + e_m^2}$$

Hemos indicado que el desnivel se calculará como promedio del valor directo y del recíproco (si fueran tolerables). Su precisión vendrá dada por:

$$Incertidumbre\ en\ el\ desnivel\ promedio = \frac{e_{\Delta H}}{\sqrt{2}}$$

La incertidumbre ocasionada por el encadenamiento de desniveles a lo largo de la poligonal (línea de nivelación) podrá determinarse con la expresión:

$$e_{\Delta H_{B,C}} = \frac{e_{\Delta H}}{\sqrt{2}}\sqrt{n}$$

Donde:

$$e_{\Delta H_{B,C}} = e_{Método\ altimétrico\ aplicado\ en\ la\ determinación\ de\ \Delta H}$$

Este es el parámetro que anteriormente planteábamos que era necesario conocer para poder aplicar la expresión de la incertidumbre absoluta de los puntos de la poligonal de nuevo diseño:

$$\boxed{e_{H_{B,C}} = \sqrt{e^2_{H_A} + e^2_{Método\ altimétrico\ aplicado\ en\ la\ determinación\ de\ \Delta H} + e^2_{H_D}}}$$

Las incertidumbres ocasionadas están en relación directa con las tolerancias permitidas en los cierres. Éstas serán las cuantías que podrán permitirse en las discrepancias entre los valores calculados y los valores datos, antes de proceder a compensar.

2. METODOLOGÍA DE OBSERVACIÓN.

- *Anteproyecto de la poligonación.*
  - *Finalidad.*

. *Precisión requerida.*
. *Elección del material.*

- *Señalización de los tramos de la poligonal.*

  . *Modo de evitar los tramos cortos.*
  . *Reseñas de las estaciones. Importancia.*
  . *Referenciación de estaciones críticas.*

- *Métodos de observación.*

  . *Método general o de Moinot.*
  . *Método de vueltas de horizonte.*
  . *Método de Porro.*
  . *Método de Villani.*
  . *Método de comprobaciones angulares.*
  . *Método de comprobaciones sucesivas.*

- *Poligonales de alta precisión.*

  . *Instrumental de precisión.*
  . *Distancia óptima de los tramos.*
  . *Necesidad del control de refracción.*

    - *En ángulos.*
    - *En distancias.*

  . *Método del centrado forzado: método de los tres trípodes.*
  . *Método de triangulación de los tramos.*

* DISEÑO Y SEÑALIZACIÓN

Los puntos de la poligonal han de señalizarse de modo permanente, con el fin de poder utilizar estos puntos en trabajos posteriores. Además de la permanencia ha de garantizarse su inmovilidad. Si se desplazase la señal el resultado sería equivalente a errores de medida, aunque las medidas se hubieran realizado con gran precisión, puesto que las coordenadas absolutas que ocupa en ese momento la señal son distintas a las que tenía cuando se hizo el trabajo primitivo, apreciándose diferencias en orientaciones, desniveles y distancias, entre estaciones consecutivas.

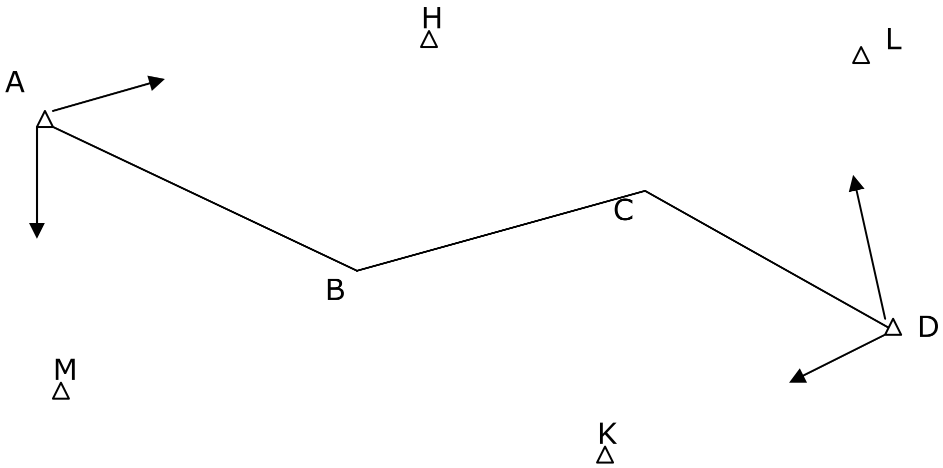
Dentro de lo posible ha de evitarse el situar las estaciones en lugares donde el terreno sea inestable, tal como areneros o escombreras. Uno de los lugares más apropiados es la roca nativa, tanto por su dureza como por la permanencia. En este caso se hacen marcas sobre la roca, se coloca un clavo spin, o se introducen piezas de ferralla cortas. Se utiliza también pintura para destacar la señal. En terrenos de labor, es aconsejable poner las señales en las lindes.

La señalización de los vértices de la poligonal puede realizarse con señales construidas con hormigón, o con los denominados hitos feno.

* MÉTODOS DE OBSERVACIÓN

El método general de observación de una poligonal era el denominado método de Moinot, que consiste en estacionar en el punto A, se toman lecturas de espalda a la referencia y de frente al punto B, en CD. Se campanea el anteojo y se toman lecturas de espalda y de frente en CI. Siempre se realiza la observación angular aplicando la regla de Bessel.

Por otra parte las distancias se miden en la observación directa (de A a B) y en la recíproca (de B a A), pero sólo en CD.



Desde los vértices inicial y final se visará a más de un punto conocido para determinar la desorientación del punto de estación. Cada visual de punto de estación conocido a punto de coordenadas conocidas, nos permite determinar un valor de la desorientación. Éste cálculo ha de realizarse más de un vez (es decir en campo ha de tomarse más de una visual de orientación) para tener comprobación del mismo.

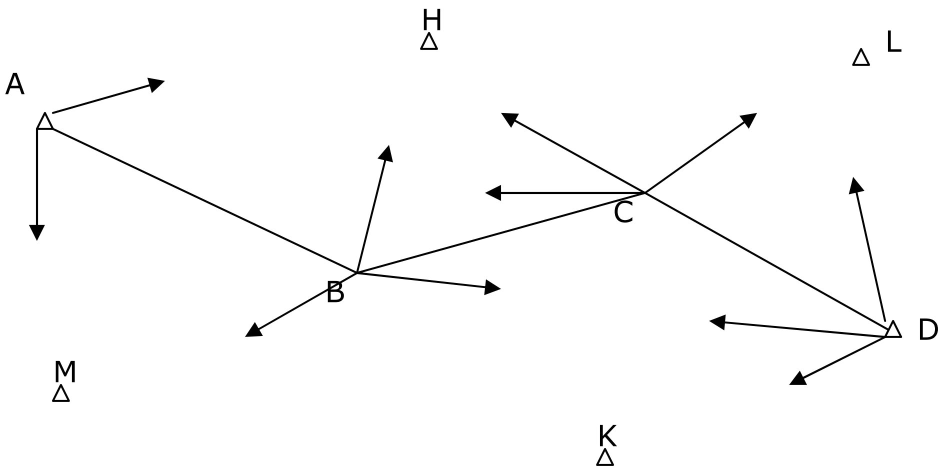
Por otro lado desde los puntos de nueva implantación de la poligonal deben realizarse visuales a referencias de control, y en lo posible se ha de intentar que las referencias que se utilicen pertenezcan a la misma red.

Todo este procedimiento metodológico y la posibilidad de realizar ajustes mínimo cuadráticos, ha llevado a que actualmente las poligonales se observen aplicando el método de vueltas de horizonte.

La búsqueda de una mayor redundancia de observaciones y un mayor alcance de los equipos, permiten fácilmente observar un mayor número de vértices sin restringir la toma de datos al vértice de frente y de espalda. En caso de que sea posible, se observará al mismo tiempo a otros vértices de la poligonal o de la red de orden superior que sean visibles, tanto en ángulos como en distancias, aumentando los grados de libertad del ajuste sin dificultad.

Se trabaja aplicando el método de vuelta de horizonte en cada estación con observaciones angulares y/o distancia al resto de los puntos visibles ya sean éstos de coordenadas conocidas (procedentes de la misma red que los puntos A y D), o de la poligonal de nueva implantación, a cuyos vértices se pretende dotar de coordenadas.

En el caso de la figura representada anteriormente el gráfico de visuales de campo podría ser el siguiente:



Además de las visuales a los vértices de espalda y de frente, se toman ángulos y/o distancias a vértices adicionales.

El método de vueltas de horizonte consiste, por ejemplo en el punto de estación B, en realizar el estacionamiento y colocar el anteojo en posición C.D. Se elige una dirección (la que esté mejor definida) como origen, que podría ser la visual de espalda a A, y se anotan las lecturas en CD a cada una de las restantes: H, C, D y M, volviendo a mirar a A al finalizar y comprobando que esta lectura, denominada de *cierre*, es la misma que al comienzo. Así nos aseguramos que el instrumento no ha sufrido ningún tipo de movimiento durante la observación. La discrepancia de valores permitida será:

$$\Delta\ Lectura = e_a \sqrt{2}$$

A continuación se voltea el anteojo, se coloca en posición de CI y se repiten las observaciones girando el instrumento en sentido contrario al de las agujas de reloj: M, D, C, H y A; y comprobando el cierre en A.

Si el cierre es correcto se dice que se ha observado *una serie o vuelta de horizonte.* En caso contrario se deberá repetir el procedimiento desde el principio.

La medida de distancias se realiza en la posición de anteojo CD, como mínimo a los vértices de atrás (vértice A en nuestro ejemplo) y de frente (vértice D). No olvidemos que en la actualidad las estaciones totales que realizan la medida de distancias sin prisma reflector, con la señal reflejada directamente sobre el punto visado, nos puede permitir medir distancias a los puntos M, H y D sin necesidad de ir a ellos.

El procedimiento de cálculo que planteamos a continuación selecciona las visuales elementales de una poligonal tradicional para determinar unas coordenadas aproximadas. Posteriormente se recuperan todas las observaciones de campo para realizar el ajuste mínimo cuadrático y dar la solución final de coordenadas de los vértices de nueva implantación.

Existen otros métodos auxiliares de observación como:

- Método de Porro.
- Método de Villani.
- Método de comprobaciones angulares.
- Método de comprobaciones sucesivas.

Que pueden estudiarse utilizando el texto *Métodos Topográficos y Oficina Técnica* de D. J.L. Ojeda, disponible en la Biblioteca de la ETSI Topográfía, Geodesia y Cartografía.

Finalmente se debe destacar que en poligonación, es recomendable utilizar, siempre que sea posible, el método de observación de los itinerarios de precisión. Consiste en la utilización de los equipos de **centrado forzoso** en el vértice de frente, de estación y de espalda, por lo que también se denomina también método de los tres trípodes.

Siguiendo este método se sitúa el aparato en estación y se observan varias referencias de salida. Para materializar el punto de la poligonal que va a observarse, se sitúa un trípode con una placa de puntería. Las placas de puntería disponen de una plataforma nivelante con plomada óptica y nivel esférico, para su estacionamiento. La placa se orienta en la dirección del punto de estación y se realiza la observación angular. Concluida la observación angular en CD /CI a los vértices de frente y espalda, se quitan las placas de puntería y se sitúan sobre los trípodes el prisma, enroscándolo en la misma base nivelante.

El cambio de estación se realiza sin mover los trípodes. El teodolito se intercambia con las placas de puntería, y se repite la operación anterior.

La incertidumbre o error en la observación se reduce al minimizar el error de dirección.

3. CÁLCULO Y COMPENSACIÓN DE LAS COORDENADAS.

Para proyectar y realizar una poligonal es necesario conocer de antemano:

- Coordenadas del punto de salida A (X_A, Y_A , H_A)
- Acimut del vértice A a una referencia (como mínimo): θ_A^{REF}
- Coordenadas del punto de llegada D (X_D, Y_D , H_D)
- Acimut del vértice D a una referencia (como mínimo): $\theta_D^{REF'}$

Los datos que se han obtenido en la observación mínima realizada en campo son:

- Ángulos de la poligonal.
- Distancias reducidas de los tramos por duplicado.

Con estos datos procederemos a obtener las coordenadas (X, Y, H) de los vértices en los que se ha estacionado. La altimetría se obtiene por nivelación trigonométrica compuesta.

En el caso de observación que estamos planteando de redundancia mayor de observaciones, ésta será la primera fase para determinar unas coordenadas que serán consideradas como aproximadas en una segunda fase de ajuste mínimo cuadrático.

El método tradicional de cálculo de una poligonal, obtiene en una primera fase el valor de los acimutes compensados de la poligonal, para posteriormente proceder a realizar el calculo de las coordenadas X, Y.

Procedemos a exponer este método de cálculo de coordenadas aproximadas, o de poligonación tradicional para posteriormente concluir con el ajuste MMCC.

A CÁLCULO DE ACIMUTES COMPENSADOS.

- *Corrida de acimutes.*
- *Obtención del error de cierre:*
  - *Como cierre de la corrida acimutal.*
  - *Por el método "cálculo del error de cierre sin corrida de acimutes"*

$$e_c = \left(\Sigma L_F + \theta_A^R\right) - \left(\Sigma L_E + \theta_D^{R'}\right) - K \,.\, 200^g$$

Siendo K un múltiplo de 200, es decir, el error de cierre es la diferencia al múltiplo de 200^g más cercano.
Siendo ΣL_F y ΣL_E valores obtenidos con las lecturas realizadas en campo,
Y los acimutes $\theta_A{}^R$, $\theta_D{}^{R'}$, los datos previos.

- *Cáculo de la tolerancia:*

$$T = e_a \sqrt{2}\sqrt{n}$$

- *Si es tolerable se pasa a compensar, si no fuera tolerable se repite la observación angular de la poligonal.*

Cálculo de Acimutes.

Existen dos procedimientos posibles para realizar el cálculo de acimutes.

a) Por ángulos:

Si al comienzo de la poligonal se visó a un punto R, se conoce el acimut θ_A^R de dicha dirección, el acimut de la dirección AB θ_A^B se obtendrá como la suma del azimut de AR más el ángulo que forman las dos direcciones.

$$\theta_A^B = \theta_A^R + (L_A^B - L_A^R)$$

$$\theta_B^A = \theta_A^B \pm 200^g$$

Procediendo de forma análoga se llegará al final de la poligonal obteniendo un acimut de ER $\theta'^{R'}_E$. la diferencia que se presente con respecto al verdadero será el error de cierre de la poligonal.

b) Por desorientaciones:

Este segundo procedimiento se emplea preferentemente cuando además de realizar la poligonal se emplea el trabajo para radiar puntos desde las estaciones. Este método consiste en obtener la desorientación de las vueltas de horizonte en las sucesivas estaciones operando así:

$$\Sigma_A = \theta_A^R - L_A^R$$
$$\theta_A^B = \Sigma_A + L_A^B$$
$$\theta_B^A = \theta_A^B \pm 200^g$$
$$\Sigma_B = \theta_B^A - L_B^A$$
$$\theta_B^C = \Sigma_B + L_B^C$$
$$\theta_C^B = \theta_B^C \pm 200^g$$

. . . .
. . . .

Tolerancia de cierre.

Conocido el error de cierre de acimutal o angular de la poligonal y antes de proceder a su compensación, es necesario determinar si, por su cuantía, es admisible o no. Si el itinerario se ha observado con un instrumento cuyo error por cada dirección dada es de e_a y dicha poligonal se compone de n estaciones, es claro que en cada estación se mide un ángulo formado por dos direcciones, al cabo de n medidas el error podrá alcanzar un valor de:

$$T_a \leq e_a \sqrt{2}\sqrt{n} = e_a\sqrt{2n}$$

Este valor es el error máximo o tolerable que podrá admitirse en el error de cierre.

Compensación del error de cierre angular.

Una vez comprobado que el error de cierre de la poligonal entra en tolerancia, hay que compensar los acimutes obtenidos. Para realizar dicha compensación habrá que modificar los ángulos, de modo que se anule el error de cierre y se cumpla la geometría. La compensación se realiza repartiendo el error en partes iguales entre todos los ángulos.

Ahora bien, una variación en el ángulo produce otra en el acimut de la dirección extrema de tal ángulo, de igual magnitud y sentido, y como el acimut recíproco de dicha dirección es el origen calculo del acimut del siguiente tramo, cuyo ángulo correspondiente deberá también ser modificado, resulta que en los sucesivos acimutes se van acumulando las correcciones que experimentan los ángulos.

No siempre el error a corregir resulta múltiplo del número de estaciones. Teóricamente deberían modificarse los ángulos en el cociente que resultase de dividir el error por el número de estaciones, pero en la práctica no se introducen correcciones inferiores a la precisión del instrumento. Se descompone el error en partes enteras y múltiplo de la apreciación.

CONTROL DEL ERROR DE CIERRE:
determinación del error de cierre de la poligonal sin calculo de acimutes.

Este método permite determinar el error de cierre de la poligonal con los datos de campo directamente. Estudiaremos en primer lugar el caso que los puntos inicial y final del itinerario sean visibles entre sí; es decir, que, a los efectos angulares, pueda considerarse cerrada la poligonal. A su vez, dentro de la hipótesis, pueden presentarse tres variantes, según la poligonal este a la derecha (fig. 1.), o a la izquierda (fig. 2.) de la línea que los unen sus extremos, o se cruce con ella (fig. 3).

Si está todo el itinerario a la derecha de dicha línea, es evidente que los ángulos medidos serán lo interiores del polígono ABCDE (fig. 1.) y es sabido que la suma de tales ángulos vienen dada por la expresión:

$$\Sigma\alpha = 200^g \cdot (n-2)$$

Siendo n el número de vértices del polígono.

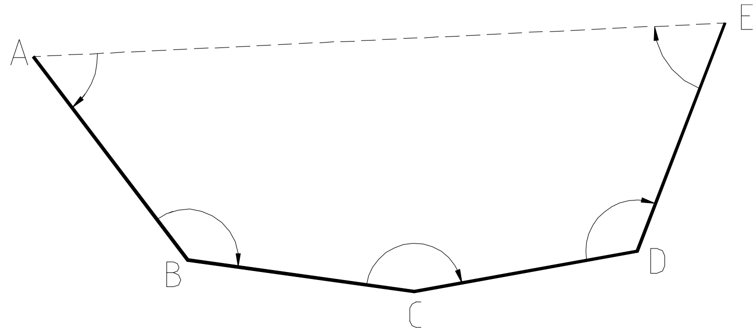


fig. 1

Cuando la poligonal cae al lado izquierdo de la línea AE (fig. 2.), los ángulos que se miden son los exteriores del polígono, y como en cada vértice, el exterior más el interior suman 400^g, resulta que cada uno de los exteriores vendrá dado por la diferencia entre 400^g y su interior correspondiente, por lo que la suma será:

$$\begin{gathered} 400 - A + 400 - B + 400 - C + 400 - D + 400 - E = 200 \cdot (n-2) \\ n \cdot 400 - 200 \cdot (n-2) = A + B + C + D + E \\ n \cdot (400 - 200) + 400 = A + B + C + D + E \\ 200 \cdot (n+2) = A + B + C + D + E \end{gathered}$$

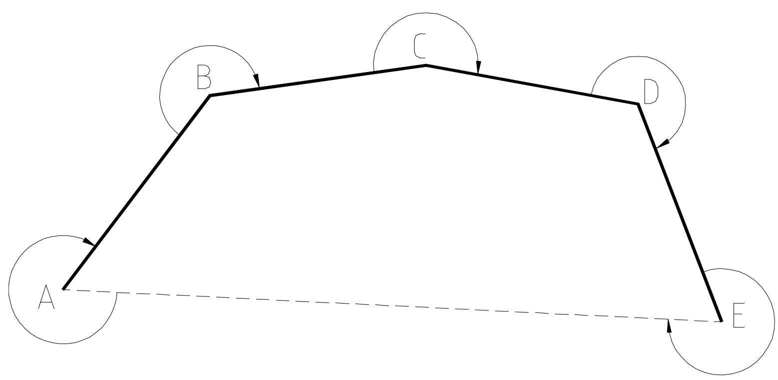


fig. 2.

$$\Sigma\alpha = 200^g \cdot (n+2)$$

Consideramos el caso de que la poligonal se cruce una sola vez con la línea AE (fig. 3). En los tramos ABC se medirán los ángulos interiores, y en las estaciones D, E y F se medirán los ángulos exteriores. A partir de todo lo que hemos analizado anteriormente se deduce que la suma S’, de los ángulos de la primera parte, será:

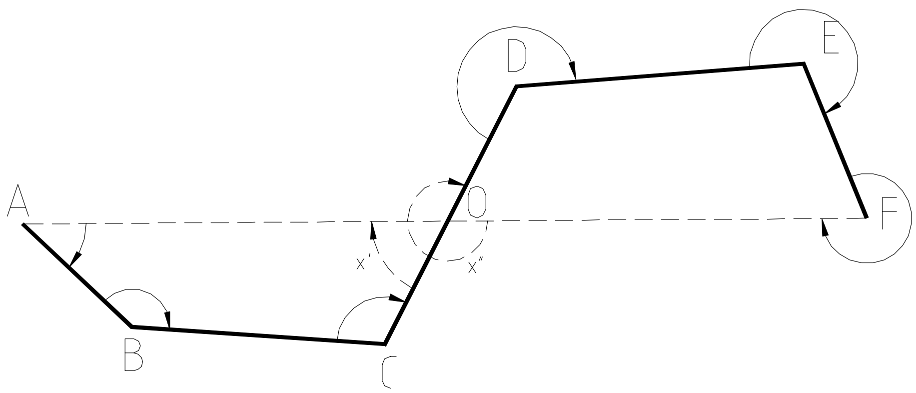


fig. 3.

$$S' = (n'+1-2) - x'$$

designando por n’ el número de estaciones propias de la poligonal en este trozo, y teniendo en cuenta que el ángulo x’, que se forma en O, no pertenece al itinerario.

Análogamente, la suma S”, de los ángulos exteriores de la segunda valdrá:

$$S'' = (n''+1+2)\cdot 200^g - x''$$

siendo n” las estaciones de la poligonal en este segundo trazo y x” el ángulo que también forma en O.

La suma total S vendrá dado por la suma de las dos:

$$S = S'+S'' = (n'-1)\cdot 200^g - x'+)n+3)\cdot 200^g - x'' = (n'+n'')\cdot 200^g + 2\cdot 200^g - (x'+x'')$$

y puesto que:

$$n'+n'' = n$$

$$x'+x'' = 400^g$$

resulta finalmente:

$$\boxed{\Sigma\alpha = n\cdot 200^g}$$

Por lo tanto en los tres casos, o en cualquier otro pudiera estudiarse, la suma de ángulos interiores es siempre múltiplo de 200^g, y el exceso o defecto sobre tal valor será el error de cierre angular de la misma.

Dicha suma, S, puede obtenerse fácilmente observando que cada ángulo se deduce restando de la dirección adelante, o de frente, la dirección atrás, o de espalda y, por tanto, aquella suma vendrá dada restando de la suma de todas las lecturas de frente de las de todas de espalda; es decir:

$$S = \sum L_F - \sum L_E$$

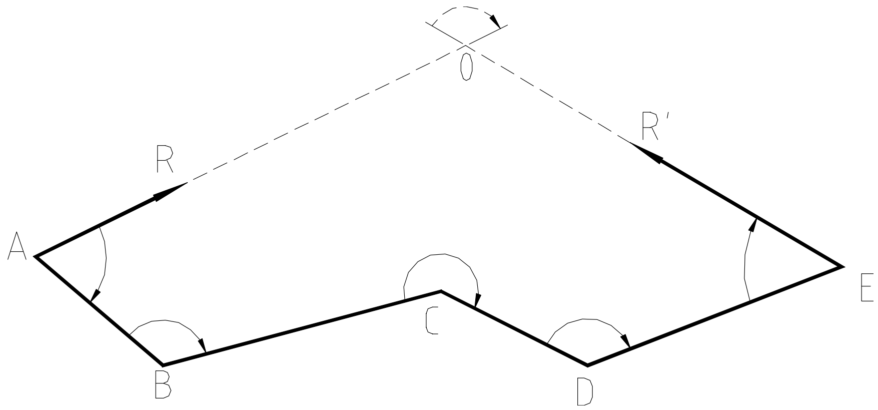


fig. 4.

Generalizando el problema al caso en que los puntos extremos no son visibles entre sí (fig. 4.), supongamos se inicio la poligonal en A, visando una dirección AR cuyo acimut, θ_A^R, es conocido, y que término en E visando la dirección ER' de acimut $\theta_E^{R'}$, también conocido. Para tener una figura cerrada angularmente bastara suponer prolongadas las direcciones AR y ER' hasta su intersección en el punto O. La suma de los ángulos propios de la poligonal, más el que se ha formado en O, tendrá que ser un múltiplo de 200^g, y como el ángulo en O tiene un valor:

$$O = \theta_A^R - \theta_E^{R'}$$

se tendrá:

$$S = \sum L_F - \sum L_E + (\theta_A^R - \theta_E^{R'}) = (\theta_A^R + \sum L_F) - (\theta_E^{R'} + \sum L_E)$$

Conclusión:

El error de cierre acimutal vendrá dado por la diferencia que, sobre un múltiplo de 200^g, se obtenga aplicando esta expresión.

B) CÁLCULO DE LA LONGITUD DE LOS EJES DE LA POLIGONAL.

Al observar la poligonal se han medido ángulos y distancias a los distintos vértices (anterior y posterior) de la estación.

Tendremos dos distancias observadas para cada eje de la poligonal y con ellas se calcularán las distancias reducidas. Se realiza un promedio, siempre que su discrepancia sea menor que la tolerancia:

$$T = e_D \cdot \sqrt{2} \ .$$

$$D_{r\,A}^{\,B} - D_{r\,B}^{\,A} \leq e_D \cdot \sqrt{2}$$

C) CÁLCULO DE COORDENADAS (X, Y).

Tras obtener los acimutes compensados de los tramos y calcular las distancias reducidas promedio, se esta en disposición de calcular numéricamente la poligonal. Las coordenadas parciales mediante las siguientes expresiones:

$$x'^{B}_{A} = D_{r\,A}^{\;B}\; sen\theta^{B}_{A}$$
$$y'^{B}_{A} = D_{r\,A}^{\;B}\; \cos\theta^{B}_{A}$$

Análogamente, las del segundo tramo vendrán dadas por:

$$x'^{C}_{B} = D_{r\,B}^{\;C}\; sen\theta^{C}_{B}$$
$$y'^{C}_{B} = D_{r\,B}^{\;C}\; \cos\theta^{C}_{B}$$

Si se suman todas las sucesivas coordenadas parciales en la dirección de avance de la poligonal, se obtienen las coordenadas parciales, x^{E}_{A} e y^{E}_{A} de la ultima estación E respecto de la primera A.

Debido a los errores que afectan a las coordenadas parciales. Los valores calculados no resultan iguales a los conocidos a través de los datos previos:

$$x^{E}_{A} = X_{E} - X_{A}$$
$$y^{E}_{A} = Y_{E} - Y_{A}$$

La diferencia que aparezca entre dichas dos parejas de valores serán los errores de cierre de la poligonal:

$$e_x = x^{E}_{A} - (x^{E}_{A})_{DATO}$$
$$e_y = y^{E}_{A} - (y^{E}_{A})_{DATO}$$

D) TOLERANCIA DE LOS ERRORES EN X E Y (e_X , e_Y).

Para determinar si una poligonal entra o no en tolerancia se calcula la componente cuadrática de los errores de cierre en x, e y. Este valor ha de ser menor o igual que el error longitudinal o que el error transversal (el valor de constraste –error máximo- es el que resulte mayor de estos dos).

$$\boxed{e = \sqrt{e_x^2 + e_y^2} \le E_T \text{ o } E_L}$$

Si se conoce la precisión de las coordenadas de los vértices inicial y final, podrá considerar como tolerancia:

$$e_{xy_{B,C}} = \sqrt{e^2_{xy_A} + e^2_{Poligonación} + e^2_{xy_D}}$$

Siendo el error de poligonación el error longitudinal o el transversal, el mayor de los dos.

E) COMPENSACIÓN DE LAS COORDENADAS

Los métodos de compensación clásicos se pueden agrupar en la distribución del error de cierre siguiendo criterios geométricos de fácil aplicación: método de Sanguet (aplicación de giro y homotecia) o el método tradicional.

En la actualidad se utilizan ajustes mínimo cuadráticos, que se basan en la aplicación de criterios estadísticos para la determinación final de las coordenadas y la estimación de otra serie de parámetros adicionales. Existen dos formas diferentes de aplicar este método:

- Método de observaciones indirectas o de variación de coordenadas.
- Método de ecuaciones de condición.

Las ventajas que aportan estos métodos son:

- Producen una solución estadísticamente más probable de todas las posibles.
- Ofrecen una estimación estadística de la precisión de dicha solución.
- Permite la validación de la estimación de errores a priori.

Esta metodología, a diferencia de los métodos expeditos de compensación, produce una solución estadísticamente correcta y permite un exhaustivo control del trabajo en su conjunto. Este último punto es de gran importancia, ya que además de obtener las coordenadas finales debemos ser capaces de valorar la precisión con las que están han sido obtenidas.

MÉTODO TRADICIONAL DE COMPENSACIÓN.

Para la compensación de las coordenadas hay que distinguir dos casos:

1.- Si la incertidumbre longitudinal es más pequeña o igual a la transversal.

$$E_L \leq E_T$$

$$\sqrt{e_x^2 + e_y^2} \leq E_T$$

En este caso se procederá a efectuar una compensación proporcional a las distancias. Este es el denominado método de Bowditch.

$$C_{X1}^{\;2} = \frac{-\,e_x}{\Sigma D}\; D_1^2$$

$$C_{Y1}^{\;2} = \frac{-\,e_y}{\Sigma D}\; D_1^2$$

2.- Si la incertidumbre longitudinal es mayor que la transversal.

$$E_L > E_T$$

$$\sqrt{e_x^2 + e_y^2} \leq E_L$$

Para este caso se realizarán las compensaciones proporcionalmente a las coordenadas parciales.

$$C_{X1}^{\;2} = \frac{-\,e_X}{\Sigma\,|\Delta x|}\,|\Delta x_1^2|$$

$$C_{Y1}^{\;2} = \frac{-\,e_Y}{\Sigma\,|\Delta y|}\,|\Delta y_1^2|$$

- **OTROS CRITERIOS DE COMPENSACIÓN.**

Método de Sanguet

Sólo puede aplicarse en poligonales rectilíneas. En vez de compensar el acimut y luego las distancias, el método de Sanguet compensa la poligonal de forma conjunta, calculando el giro y la homotecia que obligan a cumplir la coincidencia del punto inicial y final.

Consiste en aplicar un giro a la poligonal hasta conseguir que el punto erróneo E´ se sitúe sobre la recta AE, que une la situación correcta. El punto E´ pasa a ocupar la posición E´´. La poligonal resultante será A, B´´, C´´, D´´, E´´.

Para que E´´ coincida con E, se modifican las longitudes de los tramos proporcionalmente, sin que varíen los ángulos, con centro de homotecia A.

Las coordenadas parciales corregidas de cada tramo vendrán dada por:

$$x_{Compensada} = x + e\ \mathrm{y} + \lambda\ x$$
$$y_{Compensada} = \mathrm{y} - e\ \mathrm{x} + \lambda\ y$$

Siendo:

$$e = -\frac{e_x\ \Sigma y - e_y\ \Sigma x}{(\Sigma \mathrm{x})^2 + (\Sigma y)^2}$$

$$\lambda = -\frac{e_x\ \Sigma x + e_y\ \Sigma y}{(\Sigma \mathrm{x})^2 + (\Sigma y)^2}$$

Donde *x* representa la coordenada parcial (eje de abscisas) de un tramo genérico:

$$x = x_A^B = X_B - X_A$$

E *y* la coordenada parcial de un tramo genérico en el eje de las ordenadas.

El método de compensación de Sanguet permite obtener directamente coordenadas parciales compensadas. Un estudio más detallado del método puede realizarse en el libro *Métodos Topográficos y Oficina Técnica,* mencionado anteriormente.

F) CALCULO DE COORDENADAS GENERALES.

Obtenidas las coordenadas parciales compensadas de los tramos de la poligonal, se calculan las generales o absolutas de sus estaciones mediante la suma sucesiva de los incrementos de coordenadas compensadas.

$$X_B = X_A + x_A^B$$
$$Y_B = Y_A + y_A^B$$

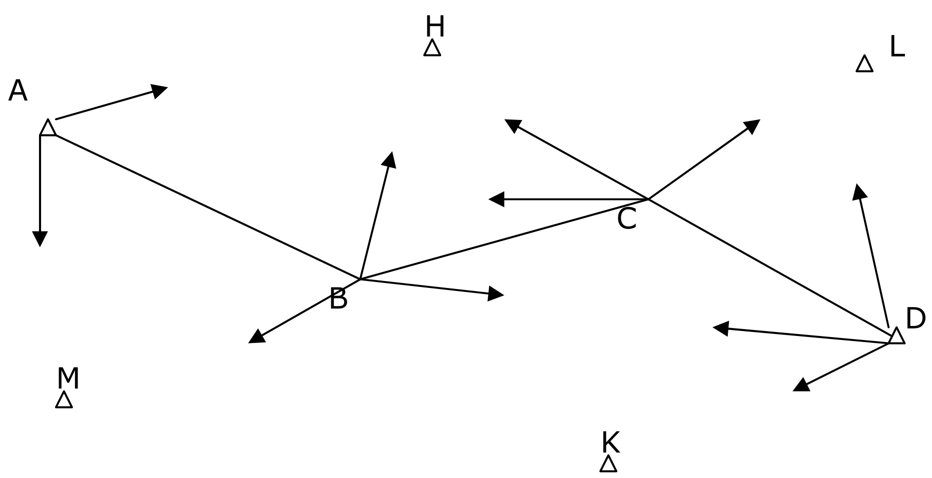
G) ANÁLISIS DE LA PRECISIÓN OBTENIDA.

La precisión de los puntos de la poligonal vendrá dada por la componente cuadrática de las variables que intervienen: puntos con coordenadas conocidas previamente y método utilizado.

H) COMPENSACIÓN Y OBTENCIÓN DE COORDENADAS AJUSTADAS Y PRECISIONES POR MMCC

Este es el método por el que se resuelven actualmente los cálculos en Topografía, y por el que deben resolverse también las poligonales.

Tras lo cálculos anteriores contamos con coordenadas aproximadas de los puntos problema, puntos de nueva implantación de los que se desea obtener las coordenadas. Recuperamos todas las observaciones de la figura. Supongamos el gráfico de visuales de nuestro ejemplo:



Con todas ellas se procede a calcular las ecuaciones de observación angulares y de distancia, según el modelo planteado en la asignatura Ajuste de Observaciones y que estudiaremos más adelante.

Las incógnitas serán la variación de coordenadas de los vértices B y C, a partir de las aproximadas obtenidas por el método de poligonación tradicional.

Resuelto el sistema se habrán obtenido las coordenadas definitivas y la precisión de las mismas a partir de la matriz varianza-covarianza.

4. LOCALIZACIÓN DE FALTAS O EQUIVOCACIONES.

En la observación de los itinerarios se pueden cometer, algunas veces, equivocaciones o faltas. Estas equivocaciones pueden ser:

a) Se comete un error en la medida de ángulos.

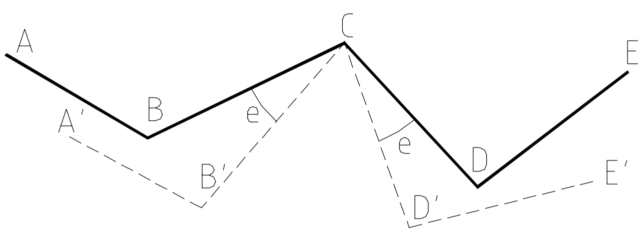
b) Cuando la poligonal tiene un error de cierre acimutal tolerable y no obstante ello presenta un error de cierre en X o Y en el ajuste final de las coordenadas.

c) Cuando al calcular las coordenadas cambiamos de signo una coordenada parcial.

d) Cuando sin darnos cuenta intercambiamos las coordenadas de un punto.

Procedemos a analizar estos posibles problemas, con el objetivo de estudiar el comportamiento general de los itinerarios y poder analizar e interpretar resultados finales no coherentes.

a) Se comete una falta en la medida de un ángulo.



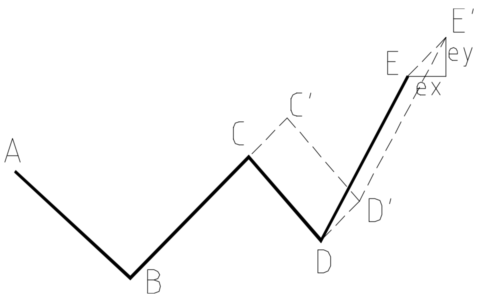
La consecuencia será que al calcular los acimutes aparecerá un error de cierre grande e inadmisible. Supongamos el itinerario ABCDE, en cuya estación C se ha cometido una equivocación e por exceso. Para localizarla gráficamente se opera del siguiente modo.

Partiendo del acimut de AR se calculan los tramos en el sentido de A hacia E, y el error de cierre acimutal que aparezca no se compensa. Con tales acimutes se desarrolla la poligonal comenzando en el punto A, y como los tramos AB, BC son correctos, y erróneos los que siguen a la estación C, el trazado que se obtiene será el ABCD'E'. A continuación se calculan nuevamente los acimutes de los tramos partiendo ahora de la dirección ER’ y en sentido contrario al anterior, con lo que aparecerá un error de cierre de igual valor al anterior y de signo contrario, que tampoco compensamos. Si con estos acimutes se dibuja en itinerario empezando en E, con los tramos DE y DC no tiene error, pero los siguientes, el trazado será ahora EDCB’A’, que se cruza justamente con el anterior en el punto C donde se produjo el error.

Esto se puede hacer también con la corrida de coordenadas mediante las distancias y los acimutes sin compensar obtendremos dos corridas de coordenadas de AE y de EA el punto donde las coordenadas absolutas coincidan o sean muy parecidas entonces ese será el punto donde se habrá producido el error.

b) Cuando la poligonal tiene un error de cierre acimutal correcto y no obstante ello presenta un error de ajuste final grande en coordenadas.

Cabe pensar en la equivocación en la medida de la distancia de un tramo.



Sea la poligonal ABCDE en la que al medir sus tramos BC se produce una equivocación, anotando para su longitud el valor BC’. Si solo ha sido esta falta cometida y se desarrolla gráficamente la poligonal, se obtendrá el trazado ABC’D’E’, desplazado paralelamente, respecto del correcto, la magnitud:

$$CC' = DD' = EE'$$

Luego el error de cierre, EE’, indica la dirección del tramo en que se produjo la referida equivocación y el valor de la misma.

En efecto, si se calcula el itinerario aparecerán unos errores de cierre, e_X , e_Y, inadmisibles y el acimut y longitud de EE’ vendrán dados por las expresiones:

$$\tan\theta_E^{E'} = \frac{e_X}{e_Y}$$

El tramo que tenga dicho acimut o a su reciproco entonces será aquel que tenga su longitud equivocada. por exceso o por defecto.

c) Cuando al calcular las coordenadas cambiamos de signo una coordenada parcial

Supongamos por ejemplo que en una ordenada parcial de valor -20.32 m se convierte por error en 20.32 m. Es evidente que no solo se han dejado de restar 20.32 sino que se le han sumado 20.32 m, luego el error producido es doble a la coordenada que será +40.64 m. la consecuencia es que sí, como se ha supuesto, un itinerario cierra bien en abscisas pero en ordenadas no, cabe la posibilidad de que una determinada ordenada parcial tenga, por equivocación, el signo cambiado y será aquella que sea de valor mitad e igual signo que el error que se manifiesta.

Cuando sea inadmisible el error en abscisas y tolerable en ordenadas, es que se ha producido un cambio de signo en abscisas.

d) Cuando sin darnos cuenta intercambiamos las coordenadas de un punto.

Sean por ejemplo +40.15 m y -23.62 m dichas coordenadas correctas que por error se cambian. Entonces en la x se han dejado se sumar 40.15 m y se han sumado -23.62 m, por lo que el total se ha introducido un error de -63.77 m; igual en magnitud y signo a la diferencia de las coordenadas permutadas. Análogo efecto, pero con signo contrario, se produce en la Y, en las que el error será de 63.77 m, ya que se les deja de restar 23.62 m y se les suma 40.15 m. Luego procediendo a la inversa, si en una poligonal se presentan los errores de cierre no tolerables en abscisas y ordenadas y dichos errores son iguales y de signo contrario, cabe la posibilidad de haber cambiado las coordenadas de un tramo y será precisamente aquel en el que la diferencia $\mathrm{x} - \mathrm{y}$ sea igual al error de cierre en x, y e el de las y sea igual a la diferencia $\mathrm{y} - \mathrm{x}$.

5. CÁLCULO DE POLIGONALES EN COORDENADAS UTM

En poligonación se han observado ángulos y distancias. Con ellos y en primer lugar, calcularemos la altimetría (H), aplicando el procedimiento general de la nivelación trigonométrica compuesta.

Por diferencias de lecturas acimutales de frente menos espalda, podremos obtener los ángulos de la poligonal. Con ellos calcularemos las orientaciones de los ejes.

El cálculo de la longitud de los tramos de la poligonal, obliga a reducir las distancias observadas a la proyección UTM. Para ello tendremos que obtener en primer lugar el valor de la distancia geométrica en cada una de las observaciones, para posteriormente hacer el promedio de las distancias directa y recíproca, (si fueran tolerables).

Supongamos que se ha realizado la medida de la distancia existente entre los puntos 1 y 2, con un distanciómetro, denominemos $D_{OBSERVADA} = D$. La reducción al horizonte puede realizarse con la siguiente expresión:

$$D_{G\,A}^{\ B} = \sqrt{\left[(m_B - i_A)^2 + \left(D_A^B\right)^2 - 2\,(m_B - i_A)\,D_A^B\,\cos V_A^B\right]}$$

De este modo se elimina la influencia en la observación, de la altura de aparato y de la altura de la señal a la que se ha realizado la puntería con el Distanciómetro. Hay que tener cuidado si la visual es ascendente o descendente, con respecto al ángulo que hay que introducir.

Cuando la diferencia entre la distancia directa y recíproca sea tolerable:

$$D_{G\,A}^{\ B} - D_{G\,B}^{\ A} = \Delta D \leq T$$

se realizará el promedio de ambas,

$$\overline{D}_{G\,A}^{\ B} = (D_{G\,A}^{\ B} + D_{G\,B}^{\ A}) / 2$$

y ésta es la distancia que se reduce a la proyección. La reducción a la proyección se lleva a cabo aplicando:

$$D_{UTM} = K \sqrt{\frac{\overline{D}_G^2 - \Delta h^2}{\left(1+\frac{h_1}{R}\right)\left(1+\frac{h_2}{R}\right)}}$$

Donde h_1 y h_2, son las altitudes de los puntos 1 y 2 respectivamente, y Δh es la diferencia entre ambas. R representa al radio de la Tierra, del que tomaremos un valor de 6370 km.

Conocidas las coordenadas U.T.M. del vértice inicial y habiendo calculado la orientación del eje de frente y tras reducir las distancias a la proyección U.T.M., el cálculo de las coordenadas de todos los vértices no difiere del que hemos planteado en el apartado general de cálculo de poligonales.

El procedimiento consistirá en calcular las coordenadas parciales, determinar los cierres en coordenadas, la tolerancia y posteriormente proceder a la compensación aplicando el método que corresponda de modo análogo al explicado en el apartado anterior.

6. OTROS MÉTODOS EN POLIGONACIÓN

- Itinerarios concurrentes en un punto: punto nodal.
- Puntos destacados de una poligonal.
- Puntos en alineación.

- CALCULO DE ITINERARIOS CONCURRENTES EN UN PUNTO

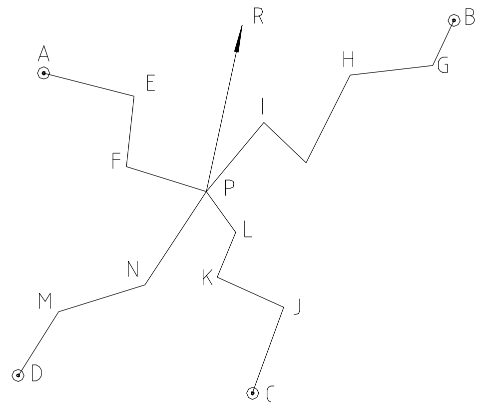
En ocasiones se presenta el caso de una serie de poligonales que terminan en un punto común P desconocido. Este punto recibe el nombre de Punto Nodal.

Esta situación es frecuente en la elaboración de planos de población, o levantamientos de cartografía urbana. Las normas básicas de diseño son:

- Las poligonales no se cruzan por las visuales.
- La longitud de los tramos ha de ser homogénea. Si esto no fuera posible se configuran dos órdenes diferentes de poligonación: una poligonal principal de eje largo, una poligonal secundaria de eje corto apoyada en la principal.

l

Es evidente que el cálculo podrá realizarse comenzando por ejemplo, por el del itinerario AEFPNMD, con lo que se obtendrá las coordenadas compensadas de P. Posteriormente se calcularían las poligonales que partiendo de B y C acaban en P. Sin embargo, puede considerarse a P como un nudo o *punto*



nodal y obtener para el mismo unas coordenadas como resultado de la conjunción de los itinerarios que terminan en él

Su cálculo implica varias consideraciones, ya que en ocasiones no existe ninguna razón para atribuir a uno de los itinerarios más precisión que a los otros.

Las operaciones que tendremos que realizar para el cálculo del punto nodal serán las siguientes y por este orden:

a) Elección de la referencia o lado (puede ser uno de los que concurren en el punto nodal) sobre el que vamos a realizar el punto nodal.
b) Corrida de acimutes en cada uno de los itinerarios, originándose un acimut de cierre por cada itinerario.
c) Calcular la media ponderada de los acimutes obtenidos anteriormente para el lado de cierre o referencia, siendo los pesos inversamente proporcionales al número de ángulos medidos en cada poligonal.
d) Compensar acimutalmente los itinerarios sobre el valor obtenido anteriormente para el lado de cierre o referencia.
e) Calcular las coordenadas del punto nodal en cada itinerario.
f) Calcular la media ponderada de las abscisas y ordenadas del punto nodal, siendo los pesos inversamente proporcionales a la longitud de los itinerarios o al número de vértices según los casos.

Para el cálculo del punto nodal actuaremos cerrando acimutalmente los itinerarios, para lo cual visaremos desde el punto nodal una referencia ó uno de los lados que concurren en el punto nodal. Tomaremos la media ponderada de los acimutes obtenidos de la referencia ó lado común, siendo los pesos inversamente proporcionales al número de ángulos medidos en cada poligonal. Recordamos que la media ponderada de varias magnitudes es la suma de los productos de estas magnitudes por sus pesos respectivos, dividida por la suma de los pesos.

A continuación y una vez compensados los acimutes sobre la referencia, calcularemos las coordenadas del punto nodal, desde cada uno de los itinerarios, hallando su media ponderada, siendo los pesos inversamente proporcionales a la longitud de los itinerarios, que es lo más frecuente, pero en el caso de que la longitud de los lados fuese corta y por tanto podemos suponer que predominan los errores angulares, en este caso se tomarán los pesos inversamente proporcionales al número de estaciones.

Este método conlleva que cada vez que se llegue a P, como final de una poligonal, se visa a una referencia R, por lo que realizando la corrida acimutal a través de cada uno de los itinerarios, se tendrán para la dirección PR tantos acimutes ligeramente distintos cuantas sean las poligonales que concurren en P. En principio cabría pensar tomar como valor definido del acimut $\theta_P^{R'}$ el promedio obtenido, pero esto no sería lo correcto ya que todas las poligonales no tienen el mismo número de estaciones, por lo que habrá que tomar *pesos* de los distintos valores que tengan, no serán iguales. En consecuencia, debe calcularse la media ponderada de los acimutes obtenidos.

Designemos por $\theta'^{R'}_{P}, \theta''^{R'}_{P}$.... a tales acimutes. Si se admite que todas las observaciones han sido efectuadas en análogas condiciones y con el mismo instrumento, el error que afectará a dichos valores será proporcional a $\sqrt{n}$, siendo n número de estaciones que componen cada una de las poligonales, y como es sabido que los pesos son inversamente proporcionales a los cuadrados de los errores, resultará que la media ponderada tendrá el valor de:

$$\theta^{R'}_{P} = \frac{\theta'^{R}_{P}\frac{1}{n'} + \theta''^{R}_{P}\frac{1}{n''} + \ldots}{\frac{1}{n'} + \frac{1}{n''} + \ldots.}$$

en la que n', n'' ... serán los respectivos números de estaciones. la diferencia entre los de llegada y la ponderada será el error de cierre.

$$e' = \theta'^{R}_{P} - \theta^{R}_{P}$$
$$e'' = \theta''^{R}_{P} - \theta^{R}_{P}$$

Algo análogo sucede con las coordenadas, pues se pueden obtener para P tantas parejas de valores ligeramente distintos como poligonales concurren en él, y de los que pueden calcularse unas medias ponderadas. Sabido es que los errores en coordenadas no son exactamente proporcionales a $\sqrt{n}$; no obstante para una mayor sencillez en el cálculo se tomaran pesos proporcionales al número de tramos, así pues:

$$X_P = \frac{X'_P\frac{1}{n'} + X'_P\frac{1}{n''} + \ldots.}{\frac{1}{n'} + \frac{1}{n''} + \ldots.} \qquad Y_P = \frac{Y'_P\frac{1}{n'} + Y'_P\frac{1}{n''} + \ldots.}{\frac{1}{n'} + \frac{1}{n''} + \ldots.}$$

Expresiones en las que n' , n'', ... representan aquí el número de tramos de cada poligonal.

Los errores de cierre en las coordenadas que habrán de compensarse vienen dadas por las expresiones:

$$e'_X = X'_P - X_P \qquad e'_Y = Y'_P - Y_P$$
$$e''_X = X''_P - X_P \qquad e''_Y = Y''_P - Y_P$$

- MÉTODOS COMPLEMENTARIOS.

El método de poligonación nos permite implantar vértices de coordenadas conocidas a lo largo de la zona de trabajo.

En algunas ocasiones no habremos conseguido cubrir toda el área del trabajo, o o puede suceder que las necesidades impuestas requieran de otros puntos dentro de la red básica. En éstos casos podremos recurrir a densificar la red de poligonación aplicando el método de implantación de *destacados*, o incorporando puntos intermedios en los tramos, puntos que se denominan *puntos en alineación.*

Los puntos destacados son aquellos que se radian desde la poligonal principal. Para que puedan ser considerados como tales, se han de radiar un mínimo de dos veces desde dos vértices diferentes de la poligonal. Los puntos destacados pasarán a formar parte de la estructura del trabajo, anexos a los puntos de la poligonal y han de estar comprobados. Por otra parte al realizar una radiación doble, se consigue mejorar la precisión final de las coordenadas con respecto a las que obtendríamos con una sola radiación.

La radiación desde puntos de la poligonal se límita a distancias del orden de 2/3 la longitud media de los tramos que la componen. No puede radiarse un punto a 500 metros desde una poligonal de tramos medios de 200 metros, por ejemplo.

Los puntos destacados nos permiten cubrir zonas concretas, instalar en ellas un punto de coordenadas conocidas, sin obligar a toda la poligonal a pasar por ella, y no aumentando el número de ejes que la componen.

Otro método que debemos recordar es el método de implantación de puntos en alineación. Éste es interesante en planos de población. Podemos encontrarnos con una poligonal de eje 200 metros, pero que a una distancia de por ejemplo 50 metros de uno de los vértices necesitamos un punto B, de salida para una calle transversal. Éste método permite, sin pérdida de precisión en el punto a 50 metros, no obligar a introducir un eje, de longitud menor, en toda la poligonal general.

El método recurre a calcular toda la poligonal sin considerar el punto B. Una vez compensada la poligonal principal, se calculan cuáles serán las coordenadas de proyecto del punto B, y éste se replantea en campo.

Éstos dos métodos descritos permiten densificar puntos en la red de poligonación, en un nivel inferior pero manteniendo un orden de precisión semejante.

Esta idea de densificación se está produciendo también en lo que respecta al número de observaciones de campo.

En la actualidad nos encontramos con que la aplicación del método de poligonación con observaciones básicas es muy reducida. En campo se recurre a obtener todas las observaciones posibles entre los vértices de la poligonal, lo que permite una mayor comprobación y precisión de los resultados. Esto ocasiona que el método de cálculo tradicional se aplique en pocas ocasiones, quedando relegado en la práctica al cálculo de las coordenadas aproximadas de los puntos que constituyen la poligonal, para luego obtener las coordenadas definitivas con un ajuste mínimo cuadrático, utilizando en cálculo toda la redundancia, de observaciones obtenidas en campo.

La poligonal tradicional resulta al seleccionar visuales de campo de entre todas las obtenidas. Las coordenadas finales de ésta poligonal se introducen como coordenadas aproximadas, y se realiza un ajuste en bloque de todas las observaciones originales de campo.

Ésta es la línea conceptual en la que debemos entender el método de poligonación, y en cualquier caso recomendamos efectuar el cálculo de la poligonal, en la vida profesional, a través de cálculos con ajustes mínimo cuadráticos.

7. BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA.

El método de poligonación es el método clásico de la Topografía, esto da origen a la existencia de multitud de textos en los que se trata el tema.

Además de los recomendados como bibliografía general en la asignatura, podemos mencionar los siguientes:

- CARPIO HERNÁNDEZ, Juan Pedro (2002): *Compensación de una poligonal por mínimos cuadrados.* Topografía y Cartografía, Volumen XIX Número 108, Enero-Febrero 2002. Colegio Oficial de Ingenieros Técnicos en Topografía, Madrid.

- BANNISTER, A; RAYMONF, S. (1984).
- BARBIER, M.E. (1960).
- BEZOARI, G.; MONTI, C. y SELVINI, A. (1984).
- BRINKER, Russell C.; MINNICK, Roy (1987).
- CHUECA PAZOS, M. (1983): Tomo I.
- DOMINGUEZ GARCIA-TEJERO, F. (1989).
- FERRER TORIO, Rafael; PIÑA PATON, Benjamín (1991b).
- KAVANAGK Barry F. y BIRD, S.J. Glenn (1989).
- RUSSEL C. Brinter y WOLF, P.R.(1982).
- SERVICIO GEOGRAFICO DEL EJERCITO (1976).
- OJEDA RUIZ, J.L. (1984).
- RUIZ MORALES, Mario (1992).
- UREN, J.; PRICE W.F.(1992).
- WHYTE, W.S.; PAUL, R.E. (1985).