Tema 9: Triangulación y Trilateración

ÍNDICE

- Relaciones de observación.

3.2 Cálculo de la trilateración.

- Corrección de las distancias medidas.
    - Constante del distanciómetro y prisma.
    - Corrección atmosférica.
    - Corrección en caso de proyección UTM.

3.3 Cálculo de triangulación-trilateración.

- Obtención de las coordenadas aproximadas.
- Relaciones de observación.
- Introducción de pesos.
- Resolución de las ecuaciones.

3.4 Precisión de una red topográfica.

4. BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

1. FUNDAMENTO TEORICO DEL METODO

1.1 Concepto y necesidad de una red topográfica.

1.2 Proyecto y diseño de una red topográfica

- *Pre-selección de vértice*
- *Reconocimiento y selección definitiva*
- *Señalización*
- *Reseñas*

1.1 CONCEPTO Y NECESIDAD DE UNA RED TOPOGRÁFICA

Se considera red topográfica al conjunto de vértices a partir de la red geodésica de 3^{er} orden.

La necesidad de la red topográfica radica en que la distancia entre los vértices de 3^{er} orden es demasiado grande para los levantamientos. Se hace necesario establecer por métodos topográficos nuevos vértices, denominados *vértices topográficos* de modo que la distancia entre ellos no supere aquella que necesita el trabajo.

1.2 RED TRIGONOMÉTRICA O TRIANGULACIÓN

Los puntos que constituyen esta red pueden estar separados desde unos centenares de metros hasta kilómetros. Para ubicarlos se utilizan los métodos de intersección.

Los métodos de intersección no requieren más que medidas angulares, por ello para llegar a determinar las posiciones de los vértices se necesitará conocer al menos la longitud de uno de los lados de la red. A este lado de longitud conocida se le denomina *base de la triangulación*

2. OBSERVACIÓN DE UNA RED TOPOGRÁFICA

2.1 Triangulación.

1. Observación angular.

- *Método de la vuelta de horizonte.*
- *Método de pares sobre una referencia.*
- *Método mixto.*

2. Medida de la base/s.

- *Ampliación y reducción de bases.*

3. *Estaciones excéntricas. Reducción al centro.*

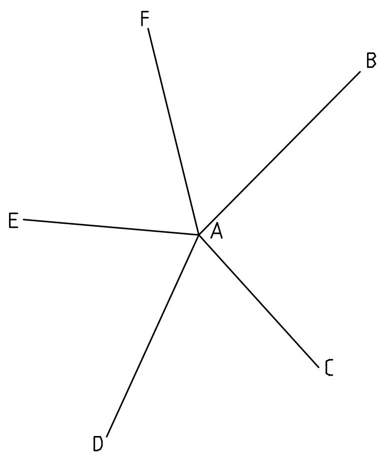
   - *Concepto.*
   - *Cálculo.*

2.2 Trilateración.

2.1 TRIANGULACIÓN (observaciones angulares+ una distancia)

Método de vuelta de horizonte

El método de observación en la triangulación es el mismo que el que estudiamos en la intersección, es decir el método de vueltas de horizonte.



Cuando las observaciones angulares se efectúan según este método, se estaciona el instrumento en el vértice, por ejemplo en A y en posición de C.D. se observan todas las direcciones. De ellas se elige la que mejor definida esté, por ejemplo F, y se anotan las lecturas a cada una de las restantes B, C, ..., para volver a mirar a la visual de origen F, y comprobar si su lectura , llamada de *cierre*, es la misma que al comienzo. Ello permitirá comprobar que el instrumento no ha sufrido ningún tipo de movimiento durante la observación. De ser así se procederá a situar el equipo en posición de C.I. y se repetirán las observaciones, girando en sentido contrario al anterior y comprobando igualmente el cierre de F. Si es correcto se dice que se ha observado *una serie o vuelta de horizonte*.

Cuando se pretende alcanzar ciertas precisiones, se hace necesario observar más de una serie y si es *n* el número de ellas, el ángulo de reiteración α, viene dado por el cociente:

$$\alpha = \frac{200^g}{n}$$

que será el valor que habrá que incrementar la lectura origen de cada serie para conocer la de la siguiente. En Topografía no es frecuente observar más de dos series

Se ha dicho anteriormente que las lecturas de cierre deben ser coincidentes con las iniciales, pero se comprende que esta coincidencia no puede ser total, ya que estarán afectadas de errores de puntería y lectura por lo que la mayor diferencia admisible para el cierre de una vuelta de horizonte, será:

$$e \leq \left(\sqrt{e_p^2 + e_l^2}\right)\sqrt{2}$$

Método de pares sobre una referencia

Este método consiste en elegir una dirección de referencia R, que esté bien definida, y que puede ser o no alguna de las direcciones a observar. Se hacen las lecturas correspondientes sobre R y B como si se tratase de una vuelta de horizonte compuesta nada más que por dicho *par* de direcciones. A continuación se visan de igual modo a R y C, que constituirán el segundo par, y así , sucesivamente hasta haber combinado con R todas las direcciones. Como la observación de cada par se hace en muy poco tiempo se evitan posibles movimientos del equipo.

Si el número de direcciones es grande, es lógico que se tarde bastante en la observación de las direcciones, por lo que para abreviar se utiliza el método mixto que consiste en dividir las direcciones totales en varias de tal manera que se vise a la referencia y a unas direcciones y luego se vuelta a visar a la referencia y al resto de las direcciones y se refunden las vueltas de horizonte en una sola.

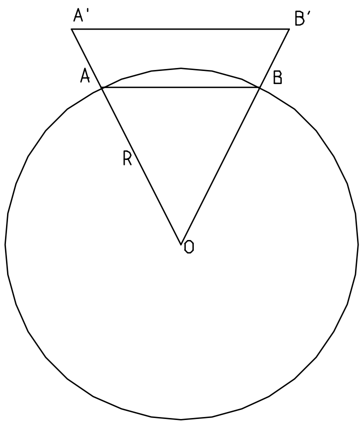
Medida de la base

Para el desarrollo de la triangulación es necesario conocer la longitud de uno de los lados. Este lado se llama *base* de la triangulación. Puede obtenerse mediante medición directa o puede calcularse indirectamente su longitud, por *reducción* de la de un lado geodésico o por *ampliación* de otra base más pequeña.

La base debe ocupar un lugar lo más centrado posible respecto de la triangulación. Es evidente que así serán necesarios menos encadenamientos de triángulos para enlazar desde ella los límites de la zona.

En cuanto a la precisión de la medida de la base será aquella que requiera la escala del plano que se pretende obtener y la mayor o menor superficie a representar, o dependerá de la precisión con la que se deseen las coordenadas de los vértices.

La medida de la base se suele llevar a cabo con distanciómetros electrónicos. Anteriormente se realizaba mediante una estadía invar, y fraccionando la distancia en tramos no mayores a 50 metros. Se conseguían de este modo precisiones del orden de 1/50.000.



Las longitudes medidas han de experimentar diversas correcciones, siendo la primera la correspondiente a su *reducción al horizonte*, si es que el sistema empleado para obtenerla no da directamente este tipo de distancias.

A su vez, si no es pequeña la altitud de la base puede llegar a tener cierta importancia la corrección denominada *reducción al nivel de mar* ya que los verticales de sus extremos A' y B' no son paralelos sino convergentes en O, centro de la Tierra. Así, si es H aquella altitud de la semejanza de triángulos OAB y OA'B' se deduce:

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{R+H}{R} = \frac{A'B'}{AB}$$

$$AB = A'B'\frac{R}{R+H}$$

Si se desea efectuar el calculo de la triángulación en coordenadas rectangulares de un determinado sistema de proyección, debe tenerse en cuenta que las longitudes a representar en el plano pueden no ser iguales a las correspondientes en el terreno, dadas las deformaciones que se producen en las proyecciones cartográficas, teniendo que tener en cuenta la denominada *anamorfosis lineal*, que representa la relación que existe entre aquellas longitudes.

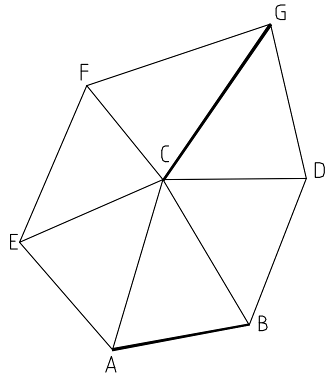
El valor de k, de la anamorfosis es variable de unas proyecciones a otras y es función de las coordenadas del lugar, así pues la longitud de la base a considerar en el plano (AB), viene dada por la expresión:

$$\mathrm{(AB) = AB \cdot k}$$

Si la base medida es pequeña puede ampliarse por métodos topográficos. Tradicionalmente se ha llevado a cabo esta tarea mediante los métodos del *polígono, de la doble cadena, o el método rómbico*:

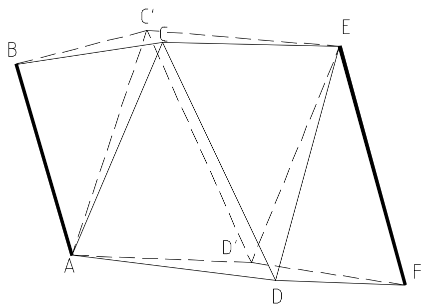
- **Método del polígono**

El primero de ellos consiste en elegir una serie de puntos de forma que los extremos de la base medida A y B serán vértices de un polígono y de modo que también lo serán los extremos C y G. de la base deducida. Los restantes vértices se sitúan libremente procurando que formen triángulos en los que se vayan aumentando progresivamente los lados. Con este método no se consiguen grandes ampliaciones a lo sumo el doble de las medidas.



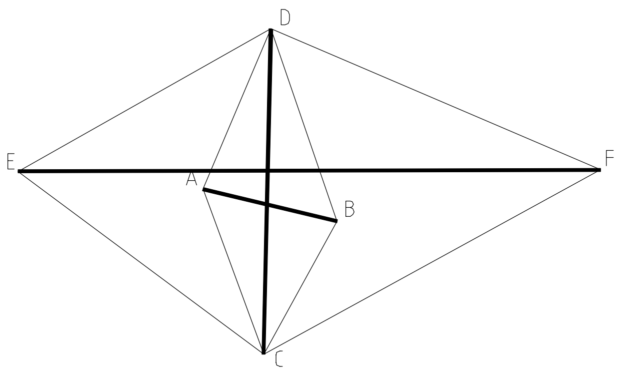
- **Método de la doble cadena**

La ampliación por doble cadena se hace, como de su nombre se deduce, mediante la observación de las cadenas de triángulos, para tener así comprobación de los resultados. Normalmente los vértices duplicados de ambas cadenas son los intermedios entre los de la base medida y ampliada, se sitúan muy próximos unos a otros, lo que reduce los desplazamiento y se utilizan banderas de diferentes colores para no confundirlos. Este método permite ampliaciones mayores que el anterior, pero no se debe exagerar el número de triángulos de las cadenas, para evitar la acumulación de errores.



- **Método rómbico**

Por ultimo el método más utilizado era el método rombico o *alemán*. Con él se conseguían mayores rendimientos con el menor esfuerzo. Consiste en considerar la basé AB medida, como la diagonal pequeña de un rombo, del que la base ampliada CD, es la otra diagonal. Así pues solo interviene en la operación los cuatro puntos mencionados reduciéndose al máximo las observaciones. Con este método se puede ampliar dos veces y media la base medida con un rombo, pero puede considerarse a la diagonal CD como la base a ampliar mediante otro rombo, del que EF seria la base a deducir.



2.2 TRILATERACIÓN (medida de distancias)

Este método consiste en que en vez de medir ángulos se miden distancias entre todos los lados con distanciómetro. Las distancias que se obtienen en campo hay que reducirlas al horizonte, por ello deberán medirse también los correspondientes ángulos de inclinación, es decir se deben tomar las lecturas cenitales.

Si se designan por a, b, c los lados del triángulo ABC el valor de A se puede deducir mediante el teorema del coseno.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

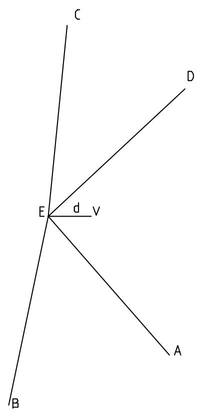
o también

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

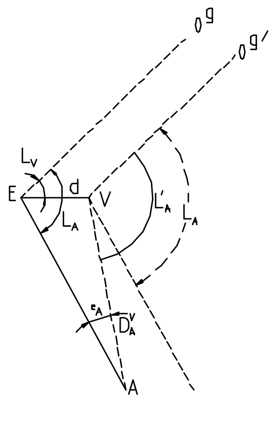
Las coordenadas de los vértices se deducen del siguiente modo: si son A y B los puntos de partida conocidos el acimut θ_A^B será asímismo conocido y como se ha médido el lado AC, para calcular las coordenadas de C respecto de A solo se precisa deducir el angulo en A ya que:

$$\theta_A^C = \theta_A^B - A$$

2.3 ESTACIONES EXCENTRICAS



En ocasiones por alguna razón no es posible estacionar en un vértice V. En este caso se puede situar el aparato en otro punto E, haciendo lo que se llama una *estación excéntrica.* Visando a los puntos A , B,... que deberían observase desde V, con posterioridad pueden calcularse las lecturas que se hubiesen realizado de haber podido estacionar en él. Para ello bastará tomar nota también de la lectura acimutal que corresponde a la dirección EV, llamada *lectura al centro,* y medir cuidadosamente la separación entre ambos puntos, E y V, que se denomina *distancia de excentricidad*



Sean L_A y L_V las lecturas efectuadas, respectivamente, desde E al vértice lejano A y al V, y sea $E0^g$ la del origen de lecturas. Si por V se traza rectas paralelas a $E0^g$ y EA, se tendrá:

$$L'_A = L_A + e_A$$

por lo que para conocer la lectura que se hubiese hecho desde V sobre A, bastará modificar la lectura L_V en el valor del angulo e_A. En el triángulo EVA puede establecerse:

$$\frac{EV}{\operatorname{sen} e_A} = \frac{VA}{\operatorname{sen} V\hat{E}A} \quad (1)$$

pero:

$$\left.\begin{aligned} VA &= D_V^A \\ EV &= d \\ VEA &= L_A - L_V \end{aligned}\right\}$$

Sustituyendo valores en la expresión (1) y despejando sen e_A resulta:

$$\frac{d}{\operatorname{sen} e_A} = \frac{D_V^A}{\operatorname{sen}(L_A - L_V)}$$

$$\operatorname{sen} e_A = d\,\frac{\operatorname{sen}(L_A - L_V)}{D_V^A}$$

Como la distancia d es corta y grande D_A^V, el ángulo e_A, será necesariamente pequeño, por lo que puede sustituirse el seno por el arco, y expresándolo en segundos, se obtendrá:

$$e_A{}^{CC} = dr^{CC}\,\frac{\operatorname{sen}(L_A - L_V)}{D_V^A}$$

Para cada una de las observaciones o direcciones visadas desde E, hay que deducir la corrección que le corresponde. La corrección toma un valor diferente para cada visual.

3. CÁLCULO Y COMPENSACIÓN

3.1 Cálculo de la triangulación.

A. Descomposición de figuras.

- *Polígonos.*
- *Cadena de triángulos.*
- *Cuadriláteros.*

B. Aplicando mínimos cuadrados.

- *Ecuaciones de condición.*
- *Relaciones de observación.*

3.2 Cálculo de la trilateración.

- *Corrección de las distancias medidas.*
  - *Constante del distanciómetro y prisma.*
  - *Corrección atmosférica.*
  - *Corrección en caso de proyección UTM.*

3.3 Cálculo de triangulación-trilateración.

- *Obtención de las coordenadas aproximadas.*
- *Relaciones de observación.*
- *Introducción de pesos.*
- *Resolución de las ecuaciones.*

3.4 Precisión de una red topográfica.

3.1 CALCULO PLANIMÉTRICO DE LA TRIÁNGULACIÓN

DESCOMPOSICIÓN DE FIGURAS.

- Polígono (5 - 7 vértices).

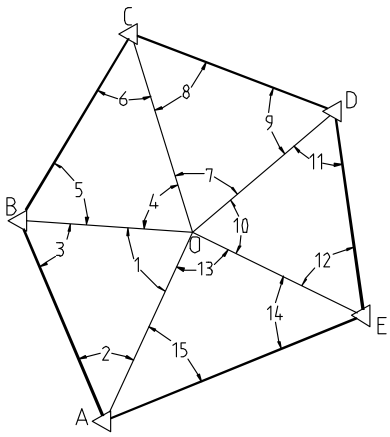
- Cuadrilátero.

-Cadena.

AJUSTE MÍNIMO CUADRÁTICO.

COMPENSACIÓN DE FIGURAS

A. POLÍGONO



Si la descomposición de los vértices es similar a la de la figura, se ha formado un polígono alrededor de su vértice central. Supongamos que se han medido en el campo los ángulos indicados en la figura.

El número de triángulos que normalmente configuran los polígonos suelen ser 5, 6 ó 7 y las condiciones que han de cumplir sus ángulo serán:

1.- La suma de los tres ángulos de cada triángulo ha de ser **200^g.**

2.- La suma de los ángulos alrededor del vértice central, A, deber ser **400^g.**

3.- Calculando sucesivamente los triángulos a partir de un lado radial cualquiera, el AB, por ejemplo, debe llevarse a la misma longitud inicial.

El cumplimiento de estas tres condiciones da lugar a la aplicación de otras tantas compensaciones, y que enunciadas por orden, son:

1º Compensación: *Cierre de triángulos.*

Sumando los tres ángulos de cada triángulo, resultará:

$$1+2+3=200^{g}$$
$$4+5+6=200^{g}$$
$$7+8+9=200^{g}$$
$$10+11+12=200^{g}$$
$$13+14+15=200^{g}$$

Naturalmente la suma de los ángulos no será 200^g así que se producirá un error e_i

$$1+2+3=200^{g}+e_1$$
$$4+5+6=200^{g}+e_2$$
$$7+8+9=200^{g}+e_3$$
$$10+11+12=200^{g}+e_4$$
$$13+14+15=200^{g}+e_5$$

Para compensar los diferentes errores si son admisibles ($e \le e_a\sqrt{2}\sqrt{3}$), se corregirá cada uno de los ángulos en la tercera parte del error, pero nunca introduciendo una compensación inferior a la precisión de las lecturas. Si por algún motivo quedara una parte del error sin compensar se le sumará al ángulo que más se acerque a 100^g por exceso o por defecto.

Quedando entonces los ángulos:

$$1'=1-\frac{1}{3}e_1$$
$$2'=2-\frac{1}{3}e_1$$
$$3'=3-\frac{1}{3}e_1$$
$$4'=4-\frac{1}{3}e_2$$
$$5'=5-\frac{1}{3}e_2$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$15'=15-\frac{1}{3}e_5$$

<u>2º compensación</u>: Suma de ángulos en el centro.

Los ángulos medidos alrededor del punto O deben sumar 400^g, ya que son los deducidos de una vuelta de horizonte.

$$1+4+7+10+13=400^{g}$$

Naturalmente esto no ocurrirá así que se producirá un error e que si es tolerable ($e_a\sqrt{2}\sqrt{n}$ donde n = número de vértices) se procederá a compensar del mismo modo que se compensó con los ángulos interiores.

$$1+4+7+10+13=400^{g}+e$$

de tal manera que en este caso la compensación será:

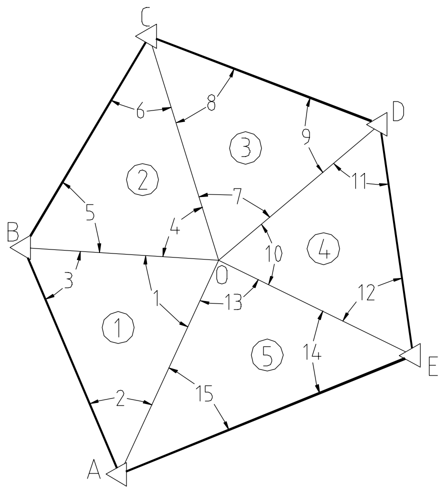
$$1''=1'-\frac{1}{5}e$$
$$4''=4-\frac{1}{5}e$$
$$7''=7'-\frac{1}{5}e$$
$$10''=10'-\frac{1}{5}e$$
$$13''=13'-\frac{1}{5}e$$

Pero esta modificación de los ángulos interiores implica que habrá dejado de cumplirse la 1ª condición. Para que esto no ocurra se tendrán que retocar los ángulos restantes en la mitad y con signo contrario al de la corrección que se ha efectuado a los ángulos interiores.

$$2''=2'+\frac{1}{10}e$$
$$3''=3'+\frac{1}{10}e$$
$$5''=5'+\frac{1}{10}e$$
$$6''=6+\frac{1}{10}e$$
$$8''=8+\frac{1}{10}e$$
$$. \quad . \quad . \quad .$$
$$. \quad . \quad . \quad .$$
$$15''=15'+\frac{1}{10}e$$

<u>3º Compensación</u>*: Ajuste de lado.*

Puede suceder que cumpliéndose las otras dos condiciones el conjunto de los puntos no sea un polígono, y entonces el punto A' obtenido médiante la relación encadenada del teorema del seno, aplicado a las sucesivas bases de los triángulos, no coincida con el de partida A. Para que esto no ocurra se ha de aplicar una tercera corrección.



Aplicando el teorema de los senos a los diferentes triángulos obtenemos en el triángulo 1:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{\operatorname{sen} 3}{\operatorname{sen} 2}$$

En el triángulo 2:

$$\frac{OB}{OC} = \frac{\operatorname{sen} 6}{\operatorname{sen} 5}$$

En el triángulo 3:

$$\frac{OC}{OD} = \frac{\operatorname{sen} 9}{\operatorname{sen} 8}$$

En el triángulo 4:

$$\frac{OD}{OE} = \frac{\operatorname{sen} 12}{\operatorname{sen} 11}$$

En el triángulo 5:

$$\frac{OE}{OA} = \frac{\operatorname{sen} 14}{\operatorname{sen} 15}$$

Multiplicando ordenadamente nos queda:

$$\frac{0A \cdot 0B \cdot 0C \cdot 0D \cdot 0E}{OB \cdot OC \cdot OD \cdot OE \cdot OA} = \frac{\text{sen}\,3 \cdot \text{sen}\,6 \cdot \text{sen}\,9 \cdot \text{sen}\,12 \cdot \text{sen}\,15}{\text{sen}\,2 \cdot \text{sen}\,5 \cdot \text{sen}\,8 \cdot \text{sen}\,11 \cdot \text{sen}\,14}$$

Ahora el primer miembro de la igualdad es igual a uno luego:

$$\frac{\text{sen}\,3 \cdot \text{sen}\,6 \cdot \text{sen}\,9 \cdot \text{sen}\,12 \cdot \text{sen}\,15}{\text{sen}\,2 \cdot \text{sen}\,5 \cdot \text{sen}\,8 \cdot \text{sen}\,11 \cdot \text{sen}\,14} = 1$$

Para que sea cierto los punto A y A' han de coincidir, pues de lo contrario el lado OA, inicial y final, no serán iguales. Este será el caso más general, el logaritmo de la expresión anterior no será 0 sino que valdrá un cierto valor Δ:

$$\log \frac{\text{sen}\,3 \cdot \text{sen}\,6 \cdot \text{sen}\,9 \cdot \text{sen}\,12 \cdot \text{sen}\,15}{\text{sen}\,2 \cdot \text{sen}\,5 \cdot \text{sen}\,8 \cdot \text{sen}\,11 \cdot \text{sen}\,14} = \Delta$$

Se modifican los ángulos de la expresión anterior para conseguir que sea cero el logaritmo. Esta modificación ha de hacerse de manera que no perturbe las compensaciones anteriores, y observando que en el numerador y en el denominador de la expresión anterior, figuran un ángulo de cada triángulo, para no introducir nuevos errores, la corrección que se introduzca en ellos ha de hacerse por igual y con signo contrario. Así designándola por e y aplicando con signo negativo a los del numerador y positivo a los del denominador se tendrá:

$$\log \frac{\text{sen}(3-e) \cdot \text{sen}(6-e) \cdot \text{sen}(9-e) \cdot \text{sen}(12-e) \cdot \text{sen}(15-e)}{\text{sen}(2+e) \cdot \text{sen}(5+e) \cdot \text{sen}(8+e) \cdot \text{sen}(11+e) \cdot \text{sen}(14+e)} = 0$$

Matemáticamente se obtiene que el ángulo e, puede calcularse con la siguiente expresión:

$$\boxed{e = \frac{\Delta}{\sum \delta}}$$

Siendo:

$$\Delta = \log \frac{sen3 \cdot sen6 \cdot sen9 \cdot sen12 \cdot sen15}{sen2 \cdot sen5 \cdot sen8 \cdot sen11 \cdot sen14}$$

$$\sum \delta = \delta_3 + \delta_6 + \delta_9 + \delta_{12} + \delta_{15} + \delta_2 + \delta_5 + \delta_8 + \delta_{11} + \delta_{14}$$

$\sum \delta$ se denomina sumatorio de diferencias tabulares, debido al origen de las mismas. Se calculan para los ángulos que intervienen en la ecuación de ajuste.

Recordemos que la ecuación de ajuste debe deducirse para cada caso concreto de compensación. El valor de $\sum \delta$ viene dado por:

$$\delta_3 = \log sen\,(3 + 1^{CC}) - \log sen\,3$$

$$\delta_6 = \log sen\,(6 + 1^{CC}) - \log sen\,6$$

$$\delta_9 = \log sen\,(9 + 1^{CC}) - \log sen\,9$$

$$\delta_{12} = \log sen\,(12 + 1^{CC}) - \log sen\,12$$

$$\delta_{15} = \log sen\,(15 + 1^{CC}) - \log sen\,15$$

$$\delta_2 = \log sen\,(2 + 1^{CC}) - \log sen\,2$$

$$\delta_5 = \log sen\,(5 + 1^{CC}) - \log sen\,5$$

$$\delta_8 = \log sen\,(8 + 1^{CC}) - \log sen\,8$$

$$\delta_{11} = \log sen\,(11 + 1^{CC}) - \log sen\,11$$

$$\delta_{14} = \log sen\,(14 + 1^{CC}) - \log sen\,14$$

La demostración teórica del cálculo del término e, se inicia a partir de la expresión:

$$\log \frac{\mathrm{sen}(3-\mathrm{e}) \cdot \mathrm{sen}(6-\mathrm{e}) \cdot \mathrm{sen}(9-\mathrm{e}) \cdot \mathrm{sen}(12-\mathrm{e}) \cdot \mathrm{sen}(15-\mathrm{e})}{\mathrm{sen}(2+\mathrm{e}) \cdot \mathrm{sen}(5+\mathrm{e}) \cdot \mathrm{sen}(8+\mathrm{e}) \cdot \mathrm{sen}(11+\mathrm{e}) \cdot \mathrm{sen}(14+\mathrm{e})} = 0$$

Desarrollando:

$$(\log(\mathrm{sen}(3-\mathrm{e})) + \log(\mathrm{sen}(6-\mathrm{e})) + \log(\mathrm{sen}(9-\mathrm{e})) + (\log(\mathrm{sen}(12-\mathrm{e})) + \log(\mathrm{sen}(15-\mathrm{e}))) -$$

$$(\log(\mathrm{sen}(2+\mathrm{e})) + \log(\mathrm{sen}(5+\mathrm{e})) + \log(\mathrm{sen}(8+\mathrm{e})) + \log(\mathrm{sen}((11+\mathrm{e})) + \log(\mathrm{sen}(14+\mathrm{e})) = 0$$

Debido a la pequeñez de e puede escribirse de modo general que:

$$\log(\mathrm{sen}(3-\mathrm{e})) = \log \mathrm{sen}\,3 - \mathrm{e}\delta_3$$
$$\log(\mathrm{sen}\,2+\mathrm{e})) = \log \mathrm{sen}\,2 - \mathrm{e}\delta_2$$

Sustituyendo en la expresión anterior tendremos:

$$(\log \text{sen}\,3 - e\delta_3 + \log \text{sen}\,6 - e\delta_6 + \log \text{sen}\,9 - e\delta_9 + \log \text{sen}\,12 - e\delta_{12} + \log \text{sen}\,15 - e\delta_{15} -$$

$$(\log \text{sen}\,2 + e\delta_2 + \log \text{sen}\,5 + e\delta_5 + \log \text{sen}\,8 + e\delta_8 + \log \text{sen}\,11 + e\delta_{11} + \log \text{sen}\,14 + e\delta_{14} = 0$$

y agrupando términos:

$$\log sen3 + \log sen6 + \log sen9 + \log sen12 + \log sen15 - (\log sen2 + \log sen5 + \log sen8 +$$
$$\log sen11 + \log sen14) =$$

$$= e(\delta_2 + \delta_3 + \delta_5 + \delta_6 + \delta_8 + \delta_9 + \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{14} + \delta_{15})$$

Ahora el primer miembro de la expresión es el desarrollo del logaritmo de la expresión (*) . Su valor será Δ. La expresión queda reducida a:

$$\Delta = e\sum \delta$$

$$\boxed{e = \frac{\Delta}{\sum \delta}}$$

Una vez hallada la corrección (el valor del ángulo e, que compensa la figura) se corregirá a los ángulos del numerador con signo contrario al error y a los del denominador con su signo.

$$2''' = 2'' - e$$
$$3''' = 3'' + e$$
$$5''' = 5'' - e$$
$$6''' = 6'' + e$$
$$8''' = 8'' - e$$
$$. \quad . \quad . \quad .$$
$$. \quad . \quad . \quad .$$
$$15''' = 15'' + e$$

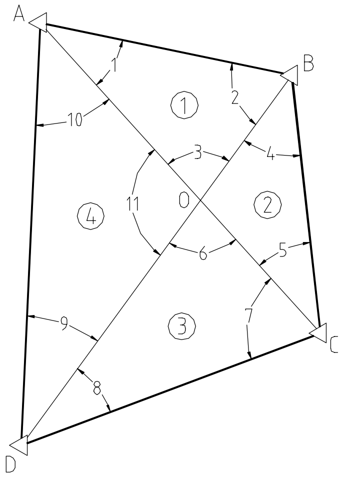
B. CUADRILÁTERO

En un cuadrilátero hay que observar los ocho ángulos que determinan sus dos diagonales, la figura constituye un cuadrilátero completo, y tales ángulos deben cumplir las siguientes condiciones:

1.- Las diagonales dan lugar a la formación de cuatro triángulos opuestos, dos a dos, por el vértice común O. La suma de ángulos opuestos por el vértice ha de ser igual.

2.- La suma total de los ángulos será igual a **400^g.**

3.- Calculando sucesivamente los triángulos a partir de un lado radial cualquiera, el OA, por ejemplo, debe llevarse a la misma longitud inicial.



1º Compensación*: Suma de ángulos en triángulos opuestos.*

$$1+2=7+8$$
$$4+5=9+10$$

debido a los errores de observación no se cumplirán exactamente estas igualdades, sino que resultará:

$$1+2=7+8+e_1$$
$$4+5=9+10+e_2$$

Se corregirán cada uno de los ángulos si fuese tolerable ($e_a\sqrt{2}\sqrt{4}$) en la cuarta parte del error respectivo y en el sentido conveniente.

$$1' = 1 - \frac{1}{4}e_1$$

$$2' = 2 - \frac{1}{4}e_1$$

. . . .

. . . .

$$7' = 7 + \frac{1}{4}e_1$$

$$8' = 8 + \frac{1}{4}e_1$$

$$4' = 4 - \frac{1}{4}e_2$$

. . . .

. . . .

$$10' = 10 + \frac{1}{4}e_2$$

2º Compensación. *Suma total de los ángulos.*

$$1'+2'+4'+5'+7'+8+9'+10' = 400$$

Naturalmente como ocurría en el caso anterior esta no se cumplirá y se producirá un error e_3 que si es tolerable ($e_a\sqrt{2}\sqrt{8}$) se procederá a compensar:

$$1'' = 1' - \frac{1}{8}e_3$$

$$2'' = 2' - \frac{1}{8}e_3$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$10'' = 10 - \frac{1}{8}e_3$$

Esta compensación no modifica los efectos de la primera, pues cada uno de los ángulos de la anterior compensación experimenta la corrección y seguirán cumpliéndose aquellas condiciones.

3º Compensación *Ajuste de lado.*

En el triángulo 1:

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{sen}\,2}{\mathrm{sen}\,1}$$

En el triángulo 2:

$$\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OC}} = \frac{\mathrm{sen}\,5}{\mathrm{sen}\,4}$$

En el triángulo 3:

$$\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OD}} = \frac{\mathrm{sen}\,8}{\mathrm{sen}\,7}$$

En el triángulo 4:

$$\frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{sen}\,10}{\mathrm{sen}\,9}$$

Multiplicando ordenadamente:

$$\frac{\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OC}\cdot\mathrm{OD}}{\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OC}\cdot\mathrm{OD}\cdot\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{sen}\,2\cdot\mathrm{sen}\,5\cdot\mathrm{sen}\,8\,\mathrm{sen}\,10}{\mathrm{sen}\,1\cdot\mathrm{sen}\,4\cdot\mathrm{sen}\,7\cdot\mathrm{sen}\,9} = 1$$

Naturalmente esto no ocurrirá y aplicando logaritmos tendremos que:

$$\log\frac{\mathrm{sen}\,2''\cdot\mathrm{sen}\,5''\cdot\mathrm{sen}\,8''\cdot\mathrm{sen}\,10''}{\mathrm{sen}\,1''\cdot\mathrm{sen}\,4''\cdot\mathrm{sen}\,7''\cdot\mathrm{sen}\,9''} = \log 1$$

Ahora bien, para que sea cierto los puntos A y A' han de coincidir, pues de lo contrario los lados OA, inicial y final , no serán iguales, y como éste será el caso más general, el logaritmo de la expresión anterior no será 0 sino que valdrá un cierto Δ:

$$\log\frac{\mathrm{sen}\,2''\cdot\mathrm{sen}\,5''\cdot\mathrm{sen}\,8''\cdot\mathrm{sen}\,10''}{\mathrm{sen}\,1''\cdot\mathrm{sen}\,4''\cdot\mathrm{sen}\,7''\cdot\mathrm{sen}\,9''} = \Delta$$

para que resulte cero se introduce en ellos una corrección e tal que:

$$\log\frac{sen(2''-e)\cdot sen(5''-e)\cdot sen(8''-e)\cdot sen(10''-e)}{sen(1''+e)\cdot sen(4''+e)\cdot sen(7''+e)\cdot sen(9''+e)} = 0$$

El ángulo viene dado por:

$$\boxed{e^{CC} = \frac{\Delta}{\sum \delta}}$$

Siendo:

$$\Delta = \log \frac{sen2''\cdot sen5''\cdot sen8''\cdot sen10''}{sen1''\cdot sen4''\cdot sen7''\cdot sen9''}$$

$$\sum \delta = \delta_2 + \delta_5 + \delta_8 + \delta_{10} + \delta_1 + \delta_4 + \delta_7 + \delta_9$$

$\sum \delta$ se denomina sumatorio de diferencias tabulares. Se calculan para los ángulos que intervienen en la ecuación de ajuste. Recordemos que la ecuación de ajuste debe deducirse para cada caso concreto de compensación. El valor de $\sum \delta$ viene dado por:

$$\delta_2 = \log sen\,(2 + 1^{CC}) - \log sen\,2$$

$$\delta_5 = \log sen\,(5 + 1^{CC}) - \log sen\,5$$

$$\delta_8 = \log sen\,(8 + 1^{CC}) - \log sen\,8$$

$$\delta_{10} = \log sen\,(10 + 1^{CC}) - \log sen\,10$$

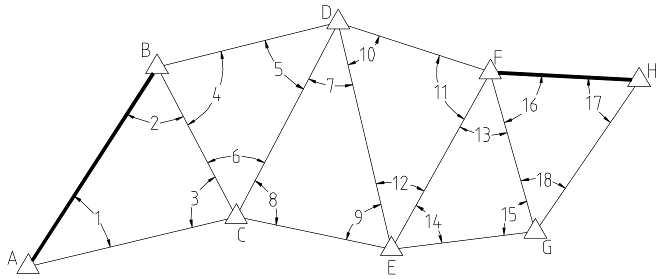
$$\delta_1 = \log sen\,(1 + 1^{CC}) - \log sen\,1$$

$$\delta_4 = \log sen\,(4 + 1^{CC}) - \log sen\,4$$

$$\delta_7 = \log sen\,(7 + 1^{CC}) - \log sen\,7$$

$$\delta_9 = \log sen\,(9 + 1^{CC}) - \log sen\,9$$

C. CADENA



Llamaremos cadena a la disposición de triángulos que tienen una base en común entre triángulos y no existe ningún vértice en común a todos ellos.

Para el cálculo de la cadena se necesita conocer, al menos, la longitud del lado inicial AB, y según se conozcan o no otros datos relativos a su lado final IJ, podrá aplicarse un número variable de compensaciones.

<u>1º Compensación:</u>

Si solo se conoce un dato relativo al último lado de la cadena, se dice que está colgada, y solo se podrá realizar la compensación que deriva de los cierres de sus triángulos, por lo que una vez realizado, los ángulos corregidos tendrán que cumplir las condición general.

$$1+2+3-200^g = e_1$$
$$4+5+6-200^g = e_2$$
$$7+8+9-200^g = e_3$$
$$10+11+12-200^g = e_4$$
$$13+14+15-200^g = e_5$$
$$16+17+18-200^g = e_6$$

De aquí los ángulos compensados serán:

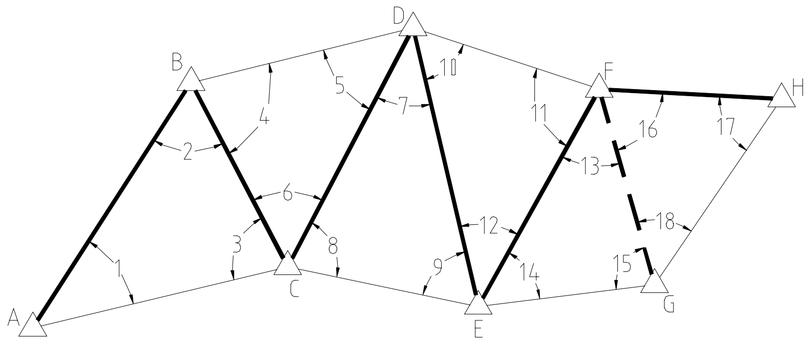
$$1' = 1 - \frac{1}{3}e_1$$
$$2' = 2 - \frac{1}{3}e_1$$
$$3' = 3 - \frac{1}{3}e_1$$
$$4' = 4 - \frac{1}{3}e_2$$
$$5' = 5 - \frac{1}{3}e_2$$

. . . .

$$17' = 17 - \frac{1}{3}e_6$$

2º Compensación:

Si además de conocer los ángulos de los triángulos conocemos el azimut de llegada, es natural que este dato obligue a hacer otra compensación, llamada *ajuste de acimut.* Partiendo del azimut θ_B^A y pasando por todas las bases comunes a los triángulos haremos una corrida de azimutes hasta llegar al acimut final.



$$\theta_B^C = \theta_A^B - 2$$
$$\theta_C^D = \theta_C^B + 6$$
$$\theta_D^E = \theta_D^C - 7$$
$$\theta_E^F = \theta_E^D + 12$$
$$\theta_F^G = \theta_F^E - 13$$
$$\theta_F^H = \theta_F^G - 16$$
$$\theta_F^H - (\theta_F^H)_{DATO} = e$$

Este error será el error en el ajuste acimutal que habrá que compensar. Para ello se hacen tantas partes del error como ángulos han intervenido en la corrida de acimutes (será igual al número de triángulos). En cuanto al sentido con que han de aplicarse las correcciones debe ser tal que anulen el error *e*, y a este respecto debe deducirse de la figura el signo con que cada uno de aquellos ángulos intervienen el calculo.

Así en la figura la compensación será:

$$2 = \left| -2 - \frac{1}{n} e \right| = 2 + \frac{1}{n} e$$

$$6 = 6 + \frac{1}{n} e$$

$$7 = \left| -7 - \frac{1}{n} e \right| = 7 + \frac{1}{n} e$$

$$12 = 12 + \frac{1}{n} e$$

$$13 = \left| -13 - \frac{1}{n} e \right| = 13 + \frac{1}{n} e$$

$$16 = \left| -16 - \frac{1}{n} e \right| = 16 + \frac{1}{n} e$$

Esta modificación obliga a reajustar los triángulos otra vez sin modificar los ángulos que han intervenido en la corrida acimutal. El reajuste será la mitad del ángulo de corrección que se aplicó a los ángulos de la corrida acimutal cambiado de signo.

$$1 = 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{n} e$$

$$3 = 3 - \frac{1}{2} \frac{1}{n} e$$

$$4 = 4 + \frac{1}{2} \frac{1}{n} e$$

$$5 = 5 + \frac{1}{2} \frac{1}{n} e$$

$$8 = 8 - \frac{1}{2} \frac{1}{n} e$$

$$9 = 9 - \frac{1}{2} \frac{1}{n} e$$

$$10 = 10 + \frac{1}{2} \frac{1}{n} e$$

$$11 = 11 + \frac{1}{2} \frac{1}{n} e$$

$$14 = 14 - \frac{1}{2} \frac{1}{n} e$$

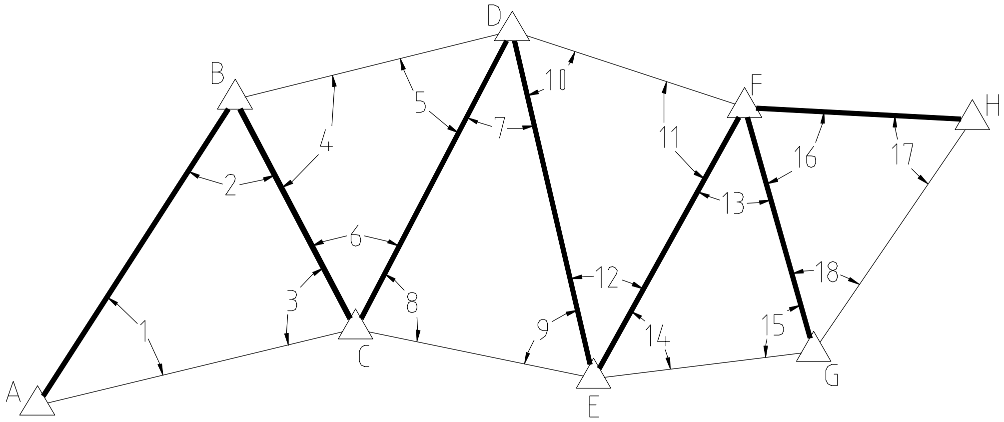
$$15 = 15 - \frac{1}{2} \frac{1}{n} e$$

$$17 = 17 - \frac{1}{2} \frac{1}{n} e$$

$$18 = 18 - \frac{1}{2} \frac{1}{n} e$$

3º Compensación:

Cuando se conoce la longitud del lado de llegada debe aplicarse la compensación del *ajuste de lado*, aplicando el teorema de los senos en los lados comunes de los triángulos o lo que es lo mismo utilizando los lados de la corrida acimutal.



Aplicando el teorema de los senos.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{\operatorname{sen} 3}{\operatorname{sen} 1}$$
$$\frac{BD}{CD} = \frac{\operatorname{sen} 5}{\operatorname{sen} 4}$$
$$\frac{CD}{DE} = \frac{\operatorname{sen} 9}{\operatorname{sen} 8}$$
$$\frac{DE}{EF} = \frac{\operatorname{sen} 11}{\operatorname{sen} 10}$$
$$\frac{EF}{FG} = \frac{\operatorname{sen} 15}{\operatorname{sen} 14}$$
$$\frac{FG}{FH} = \frac{\operatorname{sen} 17}{\operatorname{sen} 18}$$

Multiplicando ordenadamente y simplificando queda la expresión:

$$\frac{AB}{FH} = \frac{\operatorname{sen} 3 \cdot \operatorname{sen} 5 \cdot \operatorname{sen} 9 \cdot \operatorname{sen} 11 \cdot \operatorname{sen} 15 \cdot \operatorname{sen} 17}{\operatorname{sen} 1 \cdot \operatorname{sen} 4 \cdot \operatorname{sen} 8 \cdot \operatorname{sen} 12 \cdot \operatorname{sen} 16 \cdot \operatorname{sen} 18}$$

$$\frac{FH \cdot \operatorname{sen} 3 \cdot \operatorname{sen} 5 \cdot \operatorname{sen} 9 \cdot \operatorname{sen} 11 \cdot \operatorname{sen} 15 \cdot \operatorname{sen} 17}{AB \cdot \operatorname{sen} 1 \cdot \operatorname{sen} 4 \cdot \operatorname{sen} 8 \cdot \operatorname{sen} 12 \cdot \operatorname{sen} 16 \cdot \operatorname{sen} 18} = 1$$

Aplicando logaritmos:

$$\log \frac{FH \cdot sen3 \cdot sen5 \cdot sen9 \cdot sen11 \cdot sen15 \cdot sen17}{AB \cdot sen1 \cdot sen4 \cdot sen8 \cdot sen12 \cdot sen16 \cdot sen18} = \log 1 = 0$$

$$\log \frac{FH \cdot sen3 \cdot sen5 \cdot sen9 \cdot sen11 \cdot sen15 \cdot sen17}{AB \cdot sen1 \cdot sen4 \cdot sen8 \cdot sen12 \cdot sen16 \cdot sen18} = \Delta$$

Se hace, por tanto necesario modificar los distintos ángulos que intervienen en una cierta cantidad *e*. Para obtener el valor del ángulo e, se procede de modo análogo a como hemos realizado en las figuras anteriores:

$$e^{CC} = \frac{\Delta}{\sum \delta}$$

Siendo:

$$\Delta = \log \frac{FH \cdot sen3 \cdot sen5 \cdot sen9 \cdot sen11 \cdot sen15 \cdot sen17}{AB \cdot sen1 \cdot sen4 \cdot sen8 \cdot sen12 \cdot sen16 \cdot sen18}$$

$$\sum \delta = \delta_3 + \delta_5 + \delta_9 + \delta_{11} + \delta_{15} + \delta_{17} + \delta_1 + \delta_4 + \delta_8 + \delta_{12} + \delta_{16} + \delta_{18}$$

Las diferencias tabulares se calculan para los ángulos que intervienen en la ecuación de ajuste. El valor de $\sum \delta$ viene dado por la suma de los siguientes términos:

$$\delta_3 = \log sen\,(3 + 1^{CC}) - \log sen\,3$$

$$\delta_5 = \log sen\,(5 + 1^{CC}) - \log sen\,5$$

$$\delta_9 = \log sen\,(9 + 1^{CC}) - \log sen\,9$$

$$\delta_{11} = \log sen\,(11 + 1^{CC}) - \log sen\,11$$

$$\delta_{15} = \log sen\,(15 + 1^{CC}) - \log sen\,15$$

$$\delta_{17} = \log sen\,(17 + 1^{CC}) - \log sen\,17$$

$$\delta_1 = \log sen\,(1 + 1^{CC}) - \log sen\,1$$

$$\delta_4 = \log sen\,(4 + 1^{CC}) - \log sen\,4$$

$$\delta_8 = \log sen\,(8 + 1^{CC}) - \log sen\,8$$

$$\delta_{12} = \log sen\,(12 + 1^{CC}) - \log sen\,12$$

$$\delta_{16} = \log sen\,(16 + 1^{CC}) - \log sen\,16$$

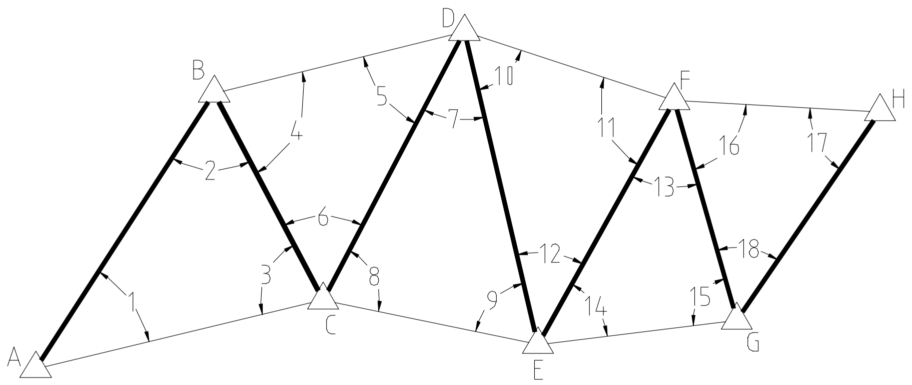
$$\delta_{18} = \log sen\,(18 + 1^{CC}) - \log sen\,18$$

Cuando hayamos modificado los ángulos que intervienen en la ecuación de ajuste, para compensar la figura, se cumplirá la igualdad:

$$\log \frac{\mathrm{FH} \cdot \mathrm{sen}(3-\mathrm{e}) \cdot \mathrm{sen}(5-\mathrm{e}) \cdot \mathrm{sen}(9-\mathrm{e}) \cdot \mathrm{sen}(11-\mathrm{e}) \cdot \mathrm{sen}(15-\mathrm{e}) \cdot \mathrm{sen}(17-\mathrm{e})}{\mathrm{AB} \cdot \mathrm{sen}(1+\mathrm{e}) \cdot \mathrm{sen}(4+\mathrm{e}) \cdot \mathrm{sen}(8+\mathrm{e}) \cdot \mathrm{sen}(12+\mathrm{e}) \cdot \mathrm{sen}(16+\mathrm{e}) \cdot \mathrm{sen}(18+\mathrm{e})} = 0$$

4º Compensación:

Si se conocen las coordenadas de los puntos iniciales y finales de la cadena, se podrán calcular la longitud y acimut del lado que une los dos últimos puntos y, por tanto, podremos hacer un nuevo ajuste. Resolviendo los sucesivos triángulos se podrán calcular las coordenadas de todos los vértices de la cadena partiendo de las de los primeros. Las coordenadas que se obtengan, para el último no coincidirán con las reales y las diferencias son las que habrá que compensar.

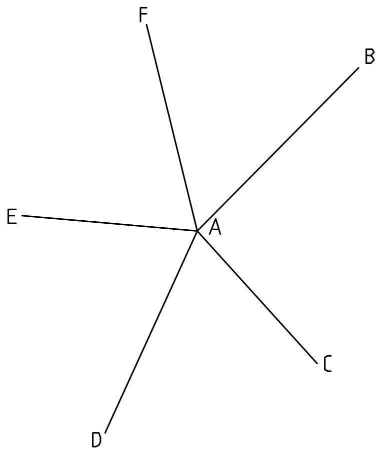


Para ellos se consideran los vértices de la cadena en el mismo orden en que se han calculado y se asimila a una gran poligonal cuyos tramos son los lados del triángulo.

La compensación de las coordenadas se hará proporcional a las longitudes de los lados.

AJUSTE MÍNIMO CUADRÁTICO

Como se ha comentado, el método de observación en la triangulación y en la trilateración es el método de vueltas de horizonte.



Con todas las observaciones obtenidas angulares y de distancias, puede realizarse el cálculo de las coordenadas de los vértices planteando las ecuaciones de observación que corresponden al modelo.

Previamente se obtendrán las coordenadas aproximadas de los vértices incógnita mediante la resolución de los métodos simples que se requieran. Para estas coordenadas podrá aplicarse el método de radiación, de intersección simple u otros, desde los vértices de coordenadas conocidas previamente.

El modelo de relación de observación por cada dirección acimutal obtenida en campo es el siguiente:

$$\boxed{\frac{r^{CC}}{D^2}\cdot\left[(Y_2-Y_1)dX_2-(Y_2-Y_1)dX_1-(X_2-X_1)dY_2+(X_2-X_1)dY_1\right]-d\Sigma_1+\left[(\theta_1^2)'-(L_1^2+\Sigma'_1)\right]^{CC}=v}$$

EXPRESIÓN GENERAL DE LA RELACIÓN DE OBSERVACIÓN POR DIRECCIÓN ANGULAR OBSERVADA

El modelo de relación de observación por cada distancia observada (y tratada convenientemente para reducirla al sistema cartesiano correspondiente) queda:

$$\boxed{\frac{1}{D_{CAL}}\left[-(X_2-X_1)dX_1-(Y_2-Y_1)dY_1+(X_2-X_1)dX_2+(Y_2-Y_1)dY_2\right]+D_{CAL}-D_{OBS}=V}$$

EXPRESIÓN GENERAL DE LA RELACIÓN DE OBSERVACIÓN POR DISTANCIA OBSERVADA

Las ecuaciones de observación serán:

$$A\,x = L$$

Las ecuaciones normales:

$$A^T P\,Ax = A^T P\,L$$

Podemos cambiar la nomenclatura, y llamar

$$N = A^T P\,A$$
$$t = A^T P\,L$$

quedando el sistema de ecuaciones normales de la siguiente forma:

$$N\, x = t$$

La solución al sistema se obtiene calculando:

$$x = (A^T P A)^{-1} A^T P L$$

con la sustitución anterior queda:

$$x = N^{-1} t$$

La matriz P es una matriz diagonal de pesos que se define de la siguiente manera:

$$P = \begin{vmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_m \end{vmatrix}$$

En la matriz P, todos los elementos fuera de la diagonal principal son **0**. Esta situación corresponde a observaciones independientes y no correlacionadas. Este es generalmente el caso de la Topografía.

Para determinar las precisiones de las cantidades ajustadas, se calculan los residuos después del ajuste. Sea el ajuste con o sin pesos, los residuos vienen dados por:

$$V = Ax - L$$

Cálculamos de la varianza de referencia a posteriori:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T\, P\, V}{r}$$

donde V es el vector de residuos, P la matriz de pesos y **r** es el número de grados de libertad del ajuste y es igual al número de ecuaciones de observación (n) menos el número de incógnitas (n_o), es decir expresa la redundancia del modelo:

$$\mathbf{r = n - n_o.}$$

Si la varianza de referencia no se da como dato puede calcularse a posteriori con este cálculo. Si la varianza de referencia se conoce al comienzo del ajuste a posteriori se calculará este valor también para hacer una comprobación estadística de los dos valores.

La matriz cofactor asociada al vector de parámetros por el método paramétrico, puede calcularse a partir de los residuos

$$Q_{xx} = N^{-1} = (A^T P A)^{-1}$$

Y a partir de esta matriz obtenemos la matriz covarianza, que contiene las precisiones buscadas. La desviación típica de las cantidades individuales ajustadas son:

$$\Sigma_{xx} = \hat{\sigma}_0^2 \ N^{-1} = \hat{\sigma}_0^2 \ Q_{xx}$$

Análisis estadísticos posteriores al ajuste se concentran en la estimación de la calidad global del ajuste mediante el Test de bondad y la detección de errores groseros de pequeña magnitud. Los errores de magnitudes grandes son fácilmente detectables puesto que producen grandes residuos en las observaciones de una zona concreta de la red. Este análisis se basa en la realización de tests estadísticos sobre los residuos de las observaciones.

Como test de bondad del ajuste se utiliza χ^2. Es conocido como test global y sirve para determinar si la varianza de referencia a posteriori es compatible con la varianza de referencia a priori.

El test de Baarda es una técnica que combina la detección de residuos anormalmente grandes bajo un cierto criterio estadístico, la localización del error grosero y su determinación.

El procedimiento de cálculo consistirá en obtener coordenadas iniciales de todos los puntos, con ellas y a partir de los datos de campo obtener las ecuaciones de observación de dirección, una ecuación por cada observación de dirección, y finalmente resolver el sistema.

4. BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

- BANNISTER, A y RAYMONF, S.(1984).
- BARBARELLA, Maurizio; PIERI, Lamberto (1983): "I pesi nella compensazione di reti topografiche". *Bolletino di Geodesia e Scienze Affini.* Anno XLII, Nº 3, págs. 317-335.
- BEZOARI, G.; MONTI, C. y SELVINI, A. (1984).
- BRINKER, Russell C.; MINNICK, Roy (1987).
- CHUECA PAZOS, M. (1983): Tomo I.
- DOMINGUEZ GARCIA-TEJERO, F. (1978).
- FERNÁNDEZ, F. M (1982): "Diseño óptimo y control de redes topográficas". *Topografía y Cartografía*. Vol X nº 50. 1982.
- KAVANAGK Barry F. y BIRD, S.J. Glenn (1989).
- NUÑEZ DEL POZO, A y MACAN FÁBREGA, M (1990): "Densificación de la red de tercer orden". *Topografía y Cartografía*. Vol VII. nº36. Enero-Febrero 1990.
- OJEDA RUIZ, J.L. (1984).

- RUIZ MORALES, Mario (1992).

- SOBERATS MASSANET, M (1985): "Correcciones Meteorológicas a distancias medidas con distanciómetro". *Topografía y Cartografía.* Vol II-Nº 50. Septiembre-Octubre 1985

- UREN, J.; PRICE, W.F. (1992).

- VALBUENA DURAN, J.L. (1989): "Distanciometría electrónica, calibración y puesta a punto". *Topografía y Cartografía.* Vol IV - Nº 31, pág. 21-29.