ÍNDICE

2.1 DEFINICIÓN DE VECTOR

Las magnitudes físicas vectoriales se pueden representar mediante los vectores. Los conceptos de igualdad y adición de vectores son esencialmente distintos a los correspondientes a los escalares.

En este capítulo desarrollaremos distintos aspectos del cálculo vectorial, que es la herramienta matemática que nos permitirá utilizar en física los vectores como representantes de las magnitudes vectoriales.

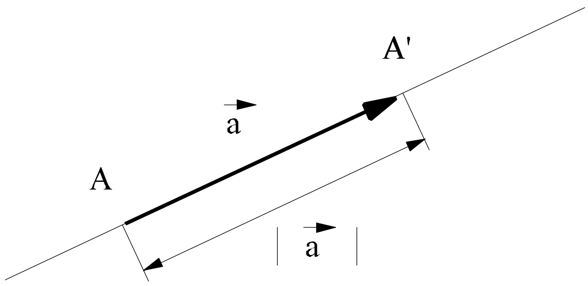


Figura 2.1

Los vectores admiten una representación gráfica muy adecuada para su manejo. Geométricamente se representan mediante un segmento orientado cuya longitud es igual (en una determinada escala) a su módulo. En el texto representaremos los vectores utilizando la notación "negrita" con una letra minúscula, dos letras mayúsculas en negrita cuando queramos designar origen y extremo o una letra minúscula con flecha encima para los gráficos.

$$\mathbf{a} \equiv \mathbf{OA} \equiv \vec{a}$$

Un vector queda perfectamente definido por las siguientes características (véase fig 2.1):

! ORIGEN (o PUNTO DE APLICACIÓN): Punto A.

! DIRECCIÓN: Coincide con la de la recta que contiene al segmento AA' (también llamada recta soporte).

! SENTIDO: Coincide con el del recorrido desde A (origen) hasta A' (extremo). Se indica situando una punta de flecha en A'.

$$a \equiv |\mathbf{OA}| \equiv |\vec{a}|$$

! MODULO: Longitud del segmento AA' expresada en una escala determinada. Designaremos el módulo de un vector con una letra minúscula sin negrita o por dos letras mayúsculas en negrita o una minúscula con flecha encima encerradas entre barras.

2.2 CLASIFICACIONES DE LOS VECTORES

Desde el punto de vista de la física los vectores se pueden clasificar, atendiendo a sus características, en:

! **LIBRES**: Son aquellos vectores de los que se conoce su dirección, sentido y módulo, quedando indeterminado su origen (y, en consecuencia, su extremo y su recta soporte). Son ejemplos de magnitudes físicas vectoriales que se pueden representar mediante vectores libres: Momento, velocidad angular de rotación de un sólido rígido, etc...

! **DESLIZANTES**: Son aquellos vectores de los que se conoce su dirección, sentido, módulo y recta soporte, quedando indeterminado su origen (y, en consecuencia, su extremo). Como ejemplo de magnitudes físicas vectoriales que pueden representarse mediante vectores deslizantes tenemos las fuerzas aplicadas a un sólido rígido.

! **LIGADOS** o **FIJOS**: Son aquellos vectores de los que se conoce su dirección, sentido, módulo y origen (y, en consecuencia, su extremo y su recta soporte). Son ejemplos de magnitudes físicas que pueden representarse mediante vectores ligados: velocidad de una partícula material, aceleración de una partícula material, etc...

Los vectores se pueden clasificar, atendiendo a las relaciones entre ellos en:

! **EQUIPOLENTES**: Dos vectores son equipolentes si tienen los mismos módulo, dirección y sentido y distinto origen.

! **IGUALES**: Dos vectores fijos son iguales si tienen los mismos módulo, dirección, sentido y origen.

Obsérvese que si dos vectores son iguales, necesariamente han de ser también equipolentes, mientras que la afirmación contraria no es cierta.

! **OPUESTOS**: Dos vectores de cualquier tipo (libres, deslizantes o ligados) son opuestos cuando tienen iguales módulo y dirección pero sentido contrario.

! **COPLANARIOS**: Los vectores de un sistema (deslizantes o ligados) son coplanarios cuando sus rectas soporte están contenidas en el mismo plano.

! **CONCURRENTES**: Un conjunto de vectores deslizantes es concurrente cuando sus rectas soporte se cortan en un punto. Un conjunto de vectores ligados es concurrente cuando su origen es el mismo.

2.3 REPRESENTACIÓN VECTORIAL DE SUPERFICIES

Se puede definir un vector área **S** asociado con cualquier área plana, de forma que **S** tenga por módulo el valor correspondiente a la superficie del área plana y dirección perpendicular a ella. Queda indeterminado el sentido, que se deberá elegir por convenio entre los dos posibles, y el punto de aplicación, que podrá ser cualquiera de los puntos del área plana.

Un elemento de superficie, suficientemente pequeño para que pueda considerarse plano, se puede representar mediante un vector d**s**, cuyo módulo es el área del elemento ds, su dirección la normal a la superficie y, por convenio, su sentido el de avance de un sacacorchos cuando se le hace girar según un sentido fijado para recorrer el contorno del elemento de superficie, según se indica en la figura 2.2.

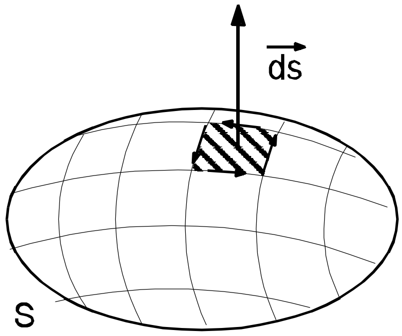


Figura 2.2a

Cuando se toma una superficie S limitada por un contorno C y se fija un sentido para el recorrido de dicho contorno, y se divide la superficie en elementos ds, el recorrido del contorno de estos elementos debe tener el mismo sentido que el recorrido del contorno C de toda la superficie.

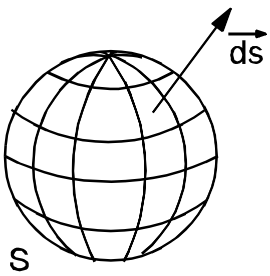


Figura 2.2b

Si la superficie es cerrada, los vectores d**s** representativos de cualquier elemento de esta superficie tienen, por convenio, el sentido positivo tomado de dentro a fuera del volumen que encierra la superficie.

2.4 ARITMÉTICA VECTORIAL

2.4.1 SUMA VECTORIAL

Se define la suma de *n* vectores $\mathbf{a_i}$ como otro vector **R**, llamado vector suma o resultante, que se obtiene llevando, a partir de un punto, vectores equipolentes a los dados de forma que el extremo de uno coincida con el origen del siguiente, siendo **R** el vector que tiene como origen el origen del primer vector y como extremo el extremo del último (figura 2.3). Esta definición gráfica de la adición vectorial se conoce con el nombre de **"regla del polígono"**.

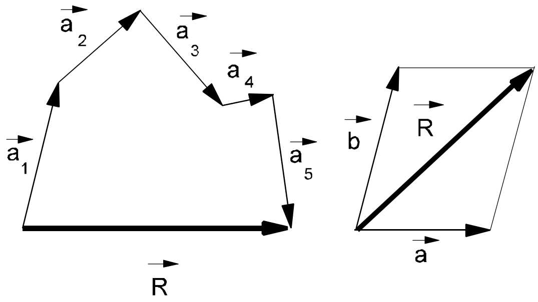


Figura 2.3

Si lo que se pretende es sumar únicamente dos vectores, basta con llevar a un origen común vectores equipolentes a los dados (figura 2.3). El vector suma es la diagonal del paralelogramo construido sobre ellos. Esta definición gráfica de adición de dos vectores se conoce con el nombre de **"regla del paralelogramo"**.

Analíticamente, esta suma **geométrica** la expresaremos con la siguiente notación:

$$\mathbf{R} = \mathbf{a_1} + \mathbf{a_2} + \ldots + \mathbf{a_i} + \ldots + \mathbf{a_n} \equiv \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a_i}$$

2.4.1.1 PROPIEDADES

ASOCIATIVA: $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

CONMUTATIVA: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

Existe ELEMENTO NEUTRO. Se denomina vector nulo y se representa por **0**. Cumple **a** + **0** = **a**. El vector **0** tiene módulo 0.

Existe ELEMENTO SIMÉTRICO. Se denomina vector opuesto de un vector dado **a** y se representa por (-**a**). Cumple **a** + (-**a**) = **0**. El vector -**a** tiene el mismo módulo que el vector **a**.

2.4.2 DIFERENCIA VECTORIAL

Dados dos vectores, **a** y **b** se define la diferencia de los mismos (**a**-**b**) como otro vector **c** tal que sumado al vector **b** dé como resultado el vector **a**.

Su expresión es : **c = a - b**

Gráficamente se obtiene sumando el vector **a** con el opuesto del vector **b** (Figura 2.4).

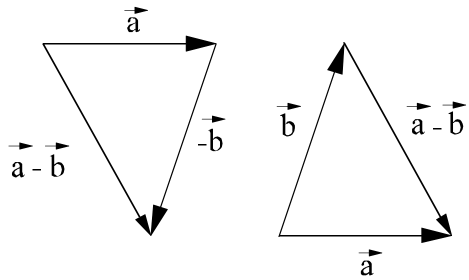


Figura 2.4

2.5 PRODUCTO DE UN VECTOR POR UN ESCALAR

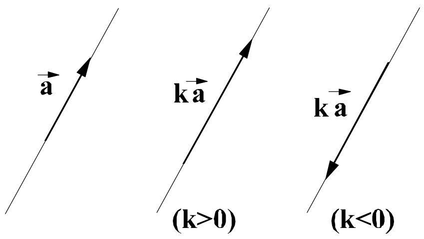


Figura 2.5

El producto de un vector **a** por un escalar k es, por definición, otro vector de módulo ka, dirección la misma del vector **a** y sentido el mismo o contrario según que el escalar k sea positivo o negativo respectivamente (figura 2.5).

La interpretación es la de sumar **a** k veces o **-a** k veces según que k sea positivo o negativo.

2.5.1 PROPIEDADES

1) ASOCIATIVA RESPECTO DE LOS ESCALARES: 8($**a**)=(8$)**a**

2) DISTRIBUTIVA RESPECTO DE LOS ESCALARES: (8+$)**a**=8**a**+$**a**

3) DISTRIBUTIVA RESPECTO DE LOS VECTORES: 8(**a**+**b**)=8**a**+8**b**

La demostración de estas propiedades se propone como ejercicio.

2.6 VERSOR (VECTOR UNITARIO)

Se llama versor o vector unitario a un vector de módulo unidad.

Dado un vector **a** para obtener un versor de la misma dirección y sentido basta con multiplicar el vector **a** por el escalar correspondiente al inverso de su módulo: $\mathbf{u}_a=(1/a)\mathbf{a}$.

Los versores se utilizan para representar una dirección y un sentido. Es decir, un vector **a** siempre se puede escribir como el producto de su módulo por su versor asociado:

$$\mathbf{a} = a\,\mathbf{u_a} \tag{2.1}$$

De la expresión anterior se deduce inmediatamente el carácter adimensional de los versores unitarios.

2.7 PROYECCIÓN DE UN VECTOR SOBRE UNA RECTA ORIENTADA

Una recta en el espacio representa una dirección y dos sentidos.

Por "orientar" una recta entendemos elegir como positivo uno de esos sentidos, asociando a la recta uno de los dos posibles versores que se pueden obtener de su dirección. Una recta orientada se denomina **eje** (figura 2.6).

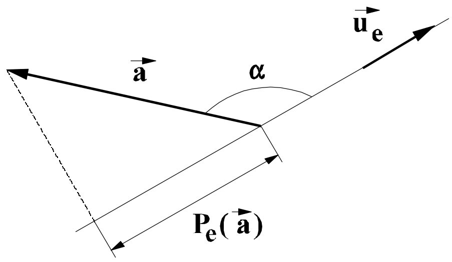


Figura 2.6

La proyección de un vector sobre un eje es un escalar que se obtiene multiplicando el módulo del vector por el coseno del menor ángulo que forman el vector y el versor del eje. Este ángulo puede variar entre 0 y B y de su valor depende que la proyección del vector sea positiva, negativa o nula.

La proyección del vector **a** sobre el eje "e" se designará: $P_e(\mathbf{a})$.

2.7.1 PROPIEDADES DE LA PROYECCIÓN DE UN VECTOR SOBRE UN EJE

1) $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ Y $P_e(\mathbf{a}) = P_e(\mathbf{b})$
   La recíproca no es cierta.

2) $P_e(k\mathbf{a}) = k\, P_e(\mathbf{a})$

3) $P_e(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = P_e(\mathbf{a}) + P_e(\mathbf{b})$

La demostración de estas propiedades se propone como ejercicio.

2.8 TRIEDRO DE REFERENCIA

Utilizaremos como triedro de referencia un sistema formado por tres ejes orientados, ortogonales, que se cortan en un punto que denominamos origen del triedro de referencia. Cada uno de los ejes orientados lleva asociado un versor. Un triedro así definido recibe el nombre de triortonormal. Los versores mutuamente ortogonales asociados a los ejes X, Y y Z se designan $\mathbf{u}_x$, $\mathbf{u}_y$, y $\mathbf{u}_z$ respectivamente.

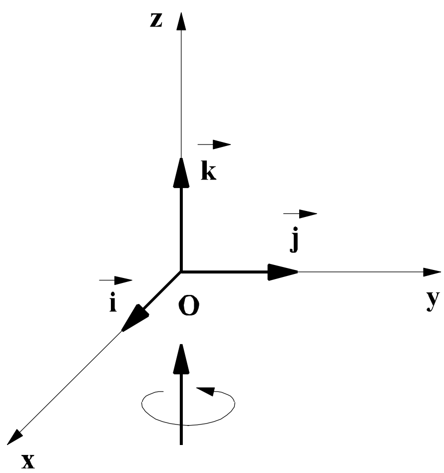


Figura 2.7

Diremos que un triedro de referencia es "a derechas" (dextrógiro) si, al hacer girar un sacacorchos colocado en la dirección Oz desde $\mathbf{u}_x$ hacia $\mathbf{u}_y$ por el camino más corto, el sacacorchos avanza en el sentido positivo del versor $\mathbf{u}_z$. En caso contrario diremos que el triedro de referencia es "a izquierdas" (levógiro). Mientras no se diga lo contrario todos los triedros de referencia que utilizaremos serán a derechas y a los versores asociados ($\mathbf{u}_x$, $\mathbf{u}_y$, $\mathbf{u}_z$) los designaremos por **i**, **j** y **k** respectivamente (figura 2.7).

2.9 COMPONENTES CARTESIANAS DE UN VECTOR

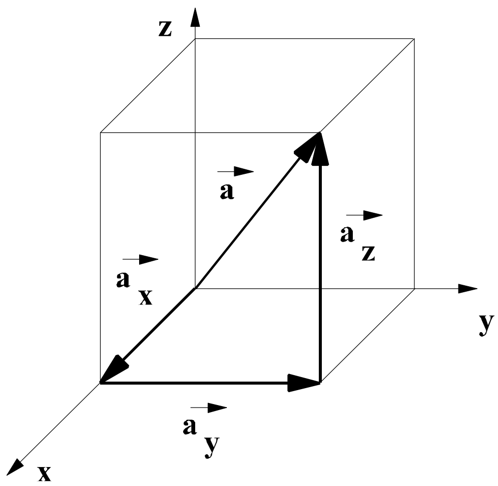


Figura 2.8

Consideramos un triedro cartesiano de referencia y un vector genérico **a** como se muestra en la figura 2.8. El vector **a** se puede obtener como suma de tres vectores $\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y$, $\mathbf{a}_z$ dirigido cada uno de ellos a lo largo de cada uno de los ejes del triedro. Es decir: $\mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$.

Como ya vimos (2.1) un vector siempre puede expresarse como el producto de un escalar por un versor unitario en su misma dirección. Así:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{a}_x &= a_x\,\mathbf{i} \\ \mathbf{a}_y &= a_y\,\mathbf{j} \\ \mathbf{a}_z &= a_z\,\mathbf{k} \end{aligned}\right\}$$

Sustituyendo,

$$\mathbf{a} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k} \qquad (2.2)$$

Los escalares a_x, a_y y a_z (que pueden ser positivos o negativos) se conocen con el nombre de componentes cartesianas del vector **a**.

Si se cambia de sistema de referencia, cambia la representación del vector, es decir, cambian sus componentes, pero no el vector, que sigue siendo el mismo. Esto se conoce con el nombre de invariancia ante cambios de sistemas de referencia. En otras palabras, un vector se puede definir sin utilizar un sistema de referencia.

La anterior expresión (2.2) de **a** en función de a_x, a_y y a_z y de los versores **i**, **j** y **k** se conoce como "**representación**" del vector **a** en el sistema de ejes OXYZ.

Otra forma de caracterizar analíticamente un vector cuando estamos utilizando un triedro cartesiano de referencia es utilizando su módulo y los ángulos que el vector forma con los tres ejes coordenados (figura 2.9).

Llamando " al ángulo que forma el vector **a** con el eje Ox, $ al que forma con el eje Oy y (al que forma con el eje Oz, sus componentes cartesianas se pueden expresar:

$$a_x = a \cos \text{"}$$
$$a_y = a \cos \text{\$}$$
$$a_z = a \cos \text{(}$$

El vector **a** puede, entonces, expresarse como:

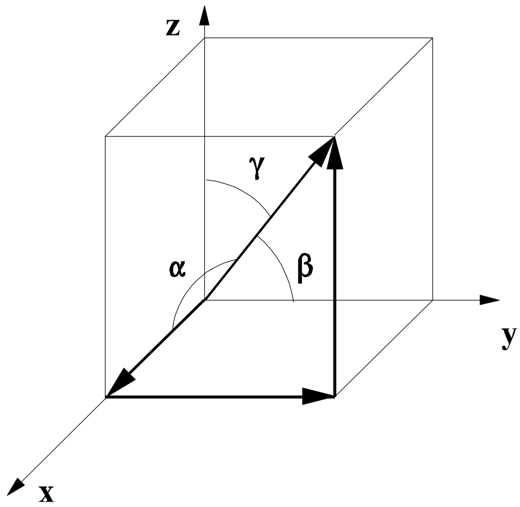


Figura 2.9

$$\mathbf{a} = a\,(\cos\text{"}\ \mathbf{i} + \cos\text{\$}\ \mathbf{j} + \cos\text{(}\ \mathbf{k}) \qquad (2.3)$$

Estos tres cosenos se conocen con el nombre de cosenos directores del vector **a** y son las componentes del versor asociado a dicho vector:

$$\mathbf{u}_a = \cos\text{"}\ \mathbf{i} + \cos\text{\$}\ \mathbf{j} + \cos\text{(}\ \mathbf{k}$$

Los cosenos directores de un determinado vector no son, en consecuencia, independientes entre sí, sino que necesariamente deben cumplir la relación:

$$\cos^2 \text{"} + \cos^2 \text{\$} + \cos^2 \text{(} = 1$$

Las suma y diferencia de dos vectores y el producto de uno de ellos por un escalar tienen una expresión analítica sencilla e inmediata cuando se utilizan triedros de referencia cartesianos.

Sean dos vectores genéricos **a** y **b**, cuyas expresiones en coordenadas cartesianas son:

$$\mathbf{a} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{b} = b_x\,\mathbf{i} + b_y\,\mathbf{j} + b_z\,\mathbf{k}$$

Las expresiones mencionadas serán:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x+b_x)\,\mathbf{i} + (a_y+b_y)\,\mathbf{j} + (a_z+b_z)\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_x-b_x)\,\mathbf{i} + (a_y-b_y)\,\mathbf{j} + (a_z-b_z)\,\mathbf{k} \qquad (2.4)$$

$$8\mathbf{a} = 8a_x\,\mathbf{i} + 8a_y\,\mathbf{j} + 8a_z\,\mathbf{k}$$

2.10 EXPRESIÓN ANALÍTICA DE UN VECTOR EN FUNCIÓN DE LAS COORDENADAS DE SUS EXTREMOS

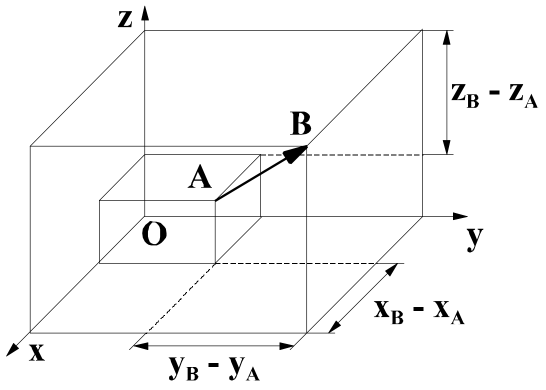


Figura 2.10

Suponemos conocidas las coordenadas cartesianas del origen A(x_A, y_A, z_A) y del extremo B(x_B, y_B, z_B) de un determinado vector **c** = **AB**.

Consideramos los vectores **a** = **OA** (con origen en el origen del triedro de referencia y extremo en el punto A) y **b**=**OB** (con origen en el origen del triedro de referencia y extremo en el punto B). Estos vectores serán, expresados en el triedro de referencia (figura 2.10):

$$\mathbf{a} = x_A\,\mathbf{i} + y_A\,\mathbf{j} + z_A\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{b} = x_B\,\mathbf{i} + y_B\,\mathbf{j} + z_B\,\mathbf{k}$$

El vector **c** se puede obtener como diferencia de los vectores **b** y **a** (**c**=**b**-**a**). Así, recordando la expresión analítica (2.4) de la diferencia de dos vectores en coordenadas cartesianas:

$$\mathbf{c} = (x_B - x_A)\,\mathbf{i} + (y_B - y_A)\,\mathbf{j} + (z_B - z_A)\,\mathbf{k} \qquad (2.5)$$

La distancia entre dos puntos A y B es el módulo del vector **a** = **b** - **c** que, expresado en función de las componentes conduce a la conocida fórmula

$$|\mathbf{c}| = B - A = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

2.11 ÁNGULO QUE FORMAN DOS VECTORES

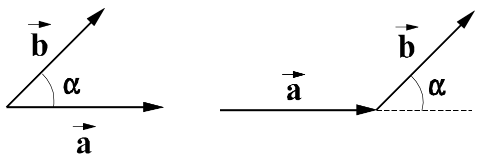


Figura 2.11

Se define el ángulo que forman dos vectores (figura 2.11) como el ángulo existente entre dos vectores equipolentes a los dados con un origen común, o lo que es equivalente el ángulo que forman rectas paralelas a sus rectas soporte orientadas según los vectores que se corten en un punto.

2.12 PRODUCTO ESCALAR

Dados dos vectores **a** y **b**, que forman entre sí un ángulo α, se define su producto escalar como el escalar que resulta de multiplicar sus módulos por el coseno del ángulo que forman. Se representa por **a**.**b** y se lee "a escalar b".

$$\mathbf{a}.\mathbf{b} = a\ b \cos \alpha \tag{2.6}$$

El producto escalar admite una interpretación geométrica. Si recordamos el concepto de proyección de un vector sobre un eje, el producto escalar es el producto del módulo de uno de los vectores por la proyección del otro sobre él.

$$\mathbf{a}.\mathbf{b} = a\ P_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = b\ P_{\mathbf{b}}(\mathbf{a})$$

2.12.1 PROPIEDADES DEL PRODUCTO ESCALAR.

1) CONMUTATIVA: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$

2) DISTRIBUTIVA: $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$

3) ASOCIATIVA RESPECTO A ESCALARES: $(\lambda\mathbf{a}) \cdot (\beta\mathbf{b}) = \lambda\beta\ (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$

4) $a = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})^{1/2}$

5) Si $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Rightarrow$ **a** perpendicular **b**

La demostración de estas propiedades se propone como ejercicio.

2.12.2 EXPRESIÓN ANALÍTICA DEL PRODUCTO ESCALAR.

En un triedro cartesiano de referencia, las expresiones de los vectores **a** y **b** son:

$$\mathbf{a} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k}\ ;\quad \mathbf{b} = b_x\,\mathbf{i} + b_y\,\mathbf{j} + b_z\,\mathbf{k}$$

Por aplicación sucesiva de la propiedad distributiva y teniendo en cuenta que:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 \quad \text{y} \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$$

se puede obtener la expresión analítica del producto escalar en **coordenadas cartesianas**:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{2.7}$$

Como todos los escalares, el producto escalar es invariante ante cambios de sistema de referencia, es decir, la expresión analítica de $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ no cambia al cambiar de sistema de referencia a pesar de que sí lo hacen las componentes de **a** y las de **b**.

Consecuencia directa de la expresión (2.7) es la siguiente, que nos permite calcular analíticamente el módulo de un vector en coordenadas cartesianas:

$$a = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})^{½} = (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)^{½} \qquad (2.8)$$

Es conveniente insistir en que las expresiones anteriores son válidas **ÚNICAMENTE** para vectores expresados en un sistema de referencia cartesiano (triortonormal).

El producto escalar también se puede utilizar para expresar analíticamente la proyección de un vector sobre un eje:

$$P_e(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{u}_e \qquad (2.9)$$

En particular, las componentes cartesianas de un vector (proyecciones sobre cada uno de los ejes coordenados de dicho vector) pueden calcularse:

$$a_x = P_x(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{i}$$
$$a_y = P_y(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{j}$$
$$a_z = P_z(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{k}$$

Asimismo, de la propia definición de producto escalar, se puede obtener el ángulo α que forman dos vectores **a** y **b** el cual, expresado en función de las componentes de los vectores es

$$\alpha = \text{arc cos} \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|a| \; |b|}$$

2.13 PRODUCTO VECTORIAL

Dados dos vectores **a** y **b**, que forman entre sí un ángulo α, se define su producto vectorial como un vector **p**, cuyo módulo p es igual al producto de los módulos de cada uno de los vectores por el seno del ángulo que forman (p=ab sen α), cuya dirección es la de una recta perpendicular al plano que definen dos vectores equipolentes a los dados y con un origen común y cuyo sentido es el de avance de un sacacorchos cuando lo hacemos girar desde el primer vector hacia el segundo por el camino más corto (figura 2.12). Se representa por **a** x **b** y se lee "a vectorial b". También se utiliza la notación **a** ∨ **b** y mas raramente [**a** **b**].

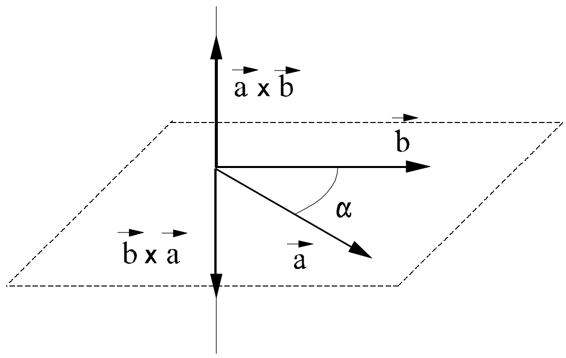


Figura 2.12

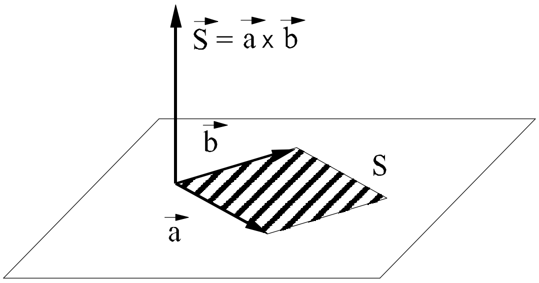


Figura 2.13

El módulo del producto vectorial admite una interpretación geométrica (figura 2.13). Coincide con el valor del área del paralelogramo determinado por dos vectores equipolentes a los dados con un origen común.

También representa el doble del área del triángulo determinado por **a**, **b** y **a**+**b**.

2.13.1 PROPIEDADES DEL PRODUCTO VECTORIAL

1) ANTICONMUTATIVA: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$

2) DISTRIBUTIVA: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$

3) Si **a**...**0** y **b**...**0** , $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ Y **a** paralelo **b**

La demostración de estas propiedades se propone como ejercicio.

2.13.2 EXPRESIÓN ANALÍTICA DEL PRODUCTO VECTORIAL

En un triedro cartesiano de referencia, la expresión de los vectores **a** y **b** es:

$$\mathbf{a} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k}\ ; \qquad \mathbf{b} = b_x\,\mathbf{i} + b_y\,\mathbf{j} + b_z\,\mathbf{k}$$

Por aplicación sucesiva de la propiedad distributiva y teniendo en cuenta que:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k};\ \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i};\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

Se puede obtener la expresión analítica del producto vectorial en **coordenadas cartesianas**:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_yb_z - a_zb_y)\,\mathbf{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\,\mathbf{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\,\mathbf{k}$$

Esta última expresión puede escribirse en forma simbólica utilizando la notación empleada para determinantes:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \qquad (2.10)$$

2.14 PRODUCTO MIXTO DE TRES VECTORES

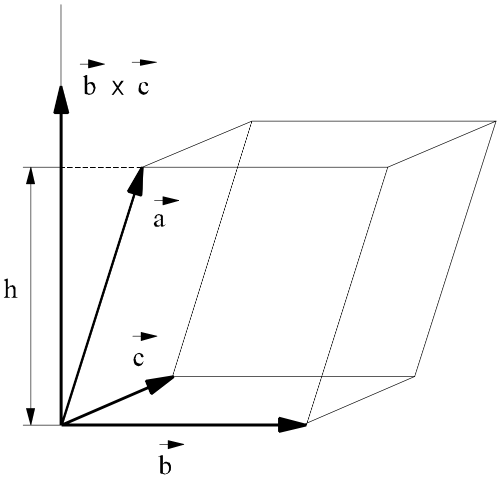


Figura 2.14

Dados tres vectores **a**, **b** y **c** se define su producto mixto como el escalar resultado de multiplicar escalarmente uno de ellos por el producto vectorial de los otros dos. Se representa por $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ y se lee "producto mixto a, b, c".

El producto mixto admite una interpretación geométrica (figura 2.14). Su valor absoluto coincide con el volumen del paralelepípedo determinado por tres vectores equipolentes a los dados con un origen común.

Como consecuencia, tres vectores son coplanarios cuando su producto mixto es cero.

El producto mixto cumple la denominada "propiedad cíclica":

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c} \times \mathbf{a})$$

Utilizando las expresiones en coordenadas cartesianas del producto escalar y del producto vectorial se puede encontrar la forma compacta de expresar el producto mixto en coordenadas cartesianas:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \tag{2.11}$$

La demostración de estas tres últimas afirmaciones se propone como ejercicio.

2.15 DOBLE PRODUCTO VECTORIAL

Dados tres vectores **a**, **b** y **c** se define su doble producto vectorial como el vector que se obtiene al multiplicar el primero por el producto vectorial de los otros dos. Se representa por

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

y se lee "doble producto vectorial a, b, c".

2.15.1 PROPIEDADES DEL DOBLE PRODUCTO VECTORIAL.

1) **a** x (**b** x **c**) está contenido en el plano determinado por **b** y **c** y es perpendicular al vector **a**.

2) **a** x (**b** x **c**) = **b** (**a** $\wedge$ **c**) - **c** (**a** $\wedge$ **b**) (2.12)

La demostración de estas propiedades se propone como ejercicio.

2.16 MOMENTO DE UN VECTOR CON RESPECTO A UN PUNTO

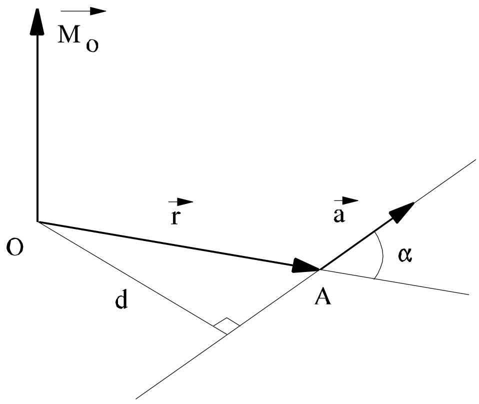


Figura 2.15

El momento de un vector **a** (deslizante o ligado) con respecto a un punto O ($\mathbf{M}_O$) es, por definición, otro vector $\mathbf{M}_O$ = **r** x **a** siendo **r** = **OA** un vector con origen en O y extremo en un punto A cualquiera de la recta soporte del vector **a** (figura 2.15).

La definición dada no condiciona el punto de aplicación de $\mathbf{M}_O$ y, por tanto, el momento de un vector con respecto a un punto es un vector libre.

La demostración de que el momento no depende del punto de la recta soporte elegido para calcularlo es inmediata y se propone como ejercicio.

El módulo del momento de **a** con respecto a O (M_O) se obtiene multiplicando el módulo de **a** por la distancia más corta entre su recta soporte y el punto O:

$$M_O = a\ r\ \text{sen}\ \alpha = a\ d$$

El momento de un vector con respecto a un punto será nulo cuando: **a** = **0** ó **r** = **0** ó **a** paralelo a **r**. Es decir, el momento de un vector no nulo solamente es cero si lo calculamos con respecto al propio origen del vector o con respecto a cualquier punto de su recta soporte.

2.16.1 EXPRESIÓN ANALÍTICA DEL MOMENTO DE UN VECTOR CON RESPECTO A UN PUNTO

Sea un sistema cartesiano de referencia y, en ese sistema, a_x,a_y,a_z las componentes del vector **a** y x,y,z las del vector **r** = **OA**, el momento del vector **a** con respecto al punto O se puede escribir de forma simbólica utilizando la notación de los determinantes:

$$\mathbf{M_O} = \mathbf{r} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} \qquad (2.13)$$

2.17 TEOREMA DEL CAMBIO DE POLO

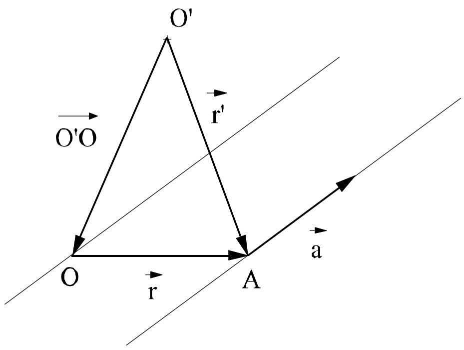


Figura 2.16

Este teorema relaciona los momentos de un mismo vector con respecto a puntos distintos (figura 2.16).

"El momento de un vector **a** con respecto a un punto O' ($\mathbf{M}_{O'}$) es igual a su momento con respecto a otro punto O, más el momento con respecto a O' de un vector equipolente al dado aplicado en O"

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_O + \mathbf{O'O} \times \mathbf{a} \tag{2.14}$$

Sabiendo que $\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{r'} \times \mathbf{a}$, $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{a}$ y $\mathbf{r'} = \mathbf{O'O} + \mathbf{r}$:

$$\mathbf{M}_{O'} = (\mathbf{O'O} + \mathbf{r}) \times \mathbf{a} = \mathbf{O'O} \times \mathbf{a} + \mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{M}_O + \mathbf{O'O} \times \mathbf{a}$$

Conviene ahora analizar con cierto detalle las condiciones bajo las cuales el momento de un vector con respecto a puntos distintos tiene el mismo valor.

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_O \quad] \quad \mathbf{O'O} \times \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad] \quad \mathbf{O'O} \text{ paralelo } \mathbf{a} \text{ (con } \mathbf{O'O} \text{ y } \mathbf{a} \ldots \mathbf{0}\text{)}$$

Es decir, el momento de un vector con respecto a puntos distintos es el mismo, únicamente si esos puntos están sobre una misma recta paralela al vector.

2.18 MOMENTO DE UN VECTOR CON RESPECTO A UN EJE

Consideramos un eje e orientado, definido mediante el versor $\mathbf{u}_e$, un punto O cualquiera sobre dicho eje y un vector **a**. Se define el momento del vector **a** con respecto al eje e (y se representa por $M_e(\mathbf{a})$) como el escalar que resulta de proyectar el momento del vector **a** con respecto al punto O sobre el eje e (figura 2.17). Es decir, $M_e = P_e(\mathbf{M}_O) = \mathbf{M}_O \, A \, \mathbf{u}_e$.

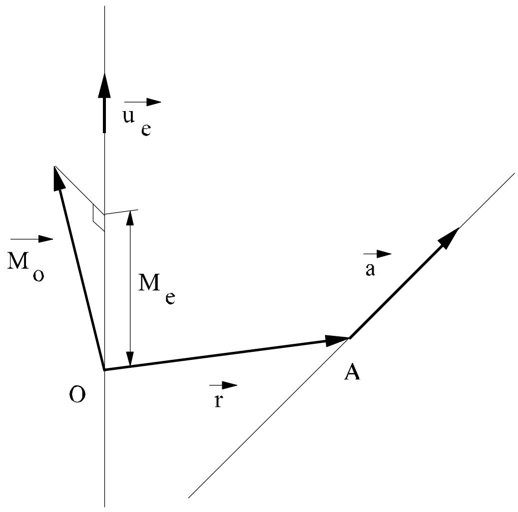


Figura 2.17

2.18.1 PROPIEDADES

1) El momento de un vector con respecto a un eje no depende del punto O del eje elegido para calcularlo.

2) El momento de un vector con respecto a un eje es nulo si vector y eje son paralelos o se cortan el eje y la recta soporte del vector.

La demostración de estas propiedades se propone como ejercicio.

2.18.2 EXPRESIÓN ANALÍTICA DEL MOMENTO DE UN VECTOR CON RESPECTO A UN EJE

Si las componentes cartesianas de los vectores **OA**=**r**, **a** y $\mathbf{u}_e$ son $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$, $\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}$ y $\mathbf{u}_e=u_x\mathbf{i}+u_y\mathbf{j}+u_z\mathbf{k}$ respectivamente, y recordando la definición de momento de un vector con respecto a un punto y de producto mixto:

$$M_e = M_0 \cdot \mathbf{u_e} = (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{u_e} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ a_x & a_y & a_z \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} \qquad (2.15)$$

2.18.3 EXPRESIÓN ANALÍTICA DEL MOMENTO DE UN VECTOR CON RESPECTO A LOS EJES COORDENADOS

Recordando que los versores asociados a los ejes x, y, z son **i**, **j** y **k** respectivamente:

$$M_x = (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{i} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ a_x & a_y & a_z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = y\,a_z - z\,a_y$$

$$M_y = (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{j} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ a_x & a_y & a_z \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = z\,a_x - x\,a_z$$

$$M_z = (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{k} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ a_x & a_y & a_z \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x\,a_y - y\,a_x$$

Como puede observarse, las componentes cartesianas del momento de un vector con respecto a un punto (2.13) coinciden con los momentos de ese vector con respecto a tres ejes ortogonales que tienen a ese punto como origen. La componente x del momento de un vector con respecto al origen del sistema de referencia es, por definición, la proyección sobre el eje x de dicho momento, es decir, M_x.

2.19 ANÁLISIS VECTORIAL

2.19.1 DERIVADA DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL DE UNA VARIABLE REAL

Una función vectorial de una variable real, **A**(t), es un vector que toma distintos valores para distintos valores de t. La variación de una función vectorial cuando cambia la variable t se puede producir en módulo, dirección y sentido.

Como en el caso de funciones escalares, se define la derivada de la función vectorial **A**(t) con respecto a la variable escalar t como

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t)}{\Delta t}$$

Si utilizamos un sistema de referencia triortogonal donde la expresión de **A**(t) sea $\mathbf{A}(t)=A_x(t)\mathbf{i}+A_y(t)\mathbf{j}+A_z(t)\mathbf{k}$ (hemos supuesto que los versores **i**,**j**,**k** no dependen de t), la derivada queda:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t)}{\Delta t} = \frac{dA_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dA_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dA_z}{dt}\mathbf{k} \qquad (2.16)$$

Como se ve la representación del vector **A**(t) en un sistema de referencia se realiza mediante tres funciones escalares $A_x(t)$, $A_y(t)$ y $A_z(t)$ y las componentes de la derivada del vector **A** son las derivadas respectivas de A_x, A_y y A_z con respecto de t. Que la función **A**(t) sea derivable equivale a que lo sean sus tres componentes en cada punto.

- Derivada de una suma/diferencia:

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{A}(t) \pm \mathbf{B}(t)] = \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} \pm \frac{d\mathbf{B}(t)}{dt}$$

- Derivada del producto de una función vectorial por un escalar:

a) 8 = cte. $\frac{d}{dt}[\lambda\ \mathbf{A}(t)] = \lambda \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}$

b) 8 = 8(t) $\frac{d}{dt}[\lambda(t)\ \mathbf{A}(t)] = \lambda \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} + \mathbf{A}\frac{d\lambda(t)}{dt}$

- Derivada del producto escalar de dos funciones vectoriales:

$$[\mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{B}(t)] = \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} \cdot \mathbf{B}(t) + \mathbf{A}(t) \cdot \frac{d\mathbf{B}(}{dt}$$

- Derivada del producto vectorial de dos funciones vectoriales:

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{A}(t) \times \mathbf{B}(t)] = \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} \times \mathbf{B}(t) + \mathbf{A}(t) \times \frac{d\mathbf{B}(t)}{dt}$$

Una vez más la regla es similar a la derivación del producto de dos funciones escalares. Conviene recordar, no obstante, que en este último caso hay que respetar el orden al no ser conmutativo el producto vectorial.

-Derivadas sucesivas: Las derivadas sucesivas de **A**(t) se definen de forma análoga. Por ejemplo,

$$\frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)$$

y lo mismo para la n-sima derivada, mientras se pueda definir.

2.19.2 DERIVADA DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL DE DIRECCIÓN CONSTANTE

Sea una función vectorial **A**(t)=A(t)**u** con **u** un vector unitario constante. El vector **A**(t) se encuentra contenido en la misma recta definida por **u** para todo valor de t. La derivada

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA}{dt}\,\mathbf{u} \qquad (\dot{\mathbf{A}} = \dot{A}\,\mathbf{u})$$

se reduce a la derivada de la función escalar dada por la proyección de **A** sobre **u**. Si A o su derivada son positivos tienen el mismo sentido que **u** y al revés.

2.19.3 DERIVADA DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL DE MÓDULO CONSTANTE

Una función vectorial **A**(t) de módulo constante se puede expresar como

$$\mathbf{A}(t) = {*}\mathbf{A}{*}\ \mathbf{u}_A(t) \quad \text{con } {*}\mathbf{A}{*} \text{ constante}$$

Si consideramos fijo el origen del vector **A**, entonces su extremo se mueve sobre una superficie esférica de radio $*\mathbf{A}*$.

La derivada de **A** es perpendicular a la propia función para cada valor de t. En efecto:

$$\frac{d(\mathbf{A}^2)}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}) = 2\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dt}$$

$$\frac{d(\mathbf{A}^2)}{dt} = \frac{d\left(|\,\mathbf{A}\,|^2\right)}{dt} = 0$$

Luego

$$\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dt} = 0 \qquad y \qquad \mathbf{A} \perp \frac{d\mathbf{A}}{dt}$$

En particular, todos los vectores unitarios (de módulo constante e igual a la unidad) función de una variable escalar t, **u**(t), cumplen todo lo expuesto en este apartado.

2.19.4 DERIVADA DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL CONTENIDA EN UN PLANO

Una función vectorial r(t) contenida en un plano OXY se representa únicamente mediante dos componentes. Por ejemplo, en coordenadas cartesianas:

$$r(t) = x(t)\ i + y(t)\ j$$

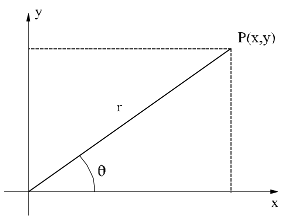


Figura 2.18

Si fijamos el origen de r(t) entonces su extremo describe una trayectoria plana. La longitud de arco entre dos puntos de esa trayectoria la denotaremos mediante s. En este caso la derivada de r es tangente a la trayectoria en cada punto, como se ve fácilmente a partir de la definición de derivada de un vector.

Ahora la variación del vector r con t se debe a dos causas: cambio de módulo y cambio de dirección. Para analizar estos efectos separadamente es conveniente utilizar (figura 2.18) coordenadas polares (r,2) en vez de cartesianas (x,y), dadas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \sqrt{\mathbf{x}^2+\mathbf{y}^2} && \mathbf{r}\in[0,\infty] \\ \theta &= \arctan\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}} && \theta\in[0,2\pi] \end{aligned} \tag{2.17}$$

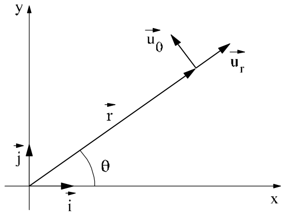


Figura 2.19

Definimos los vectores unitarios asociados a las variables r,2 como sigue (figura 2.19):

u_r tiene la dirección de la coordenada r, sentido según valores de r crecientes y está aplicado en el punto que estemos considerando.($*u_r*=1$)

u_2 tiene dirección perpendicular a u_r, sentido según valores de 2 crecientes y está aplicado en el mismo punto que u_r. ($*u_2*=1$)

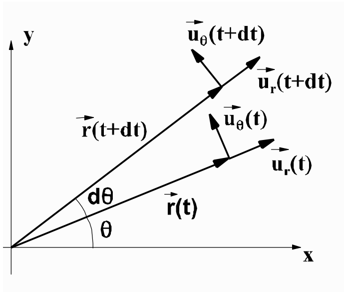
Si el sistema OXY es fijo, los versores i,j no dependen de t, pero u_r y u_2 sí. Son funciones vectoriales de módulo constante.

Los valores de sus derivadas vienen dados por:

$$\dot{\mathbf{u}}_r = \frac{d\mathbf{u}_r}{dt} = \frac{|\,d\mathbf{u}_r\,|\,\mathbf{u}_\theta}{dt} = \frac{|\,\mathbf{u}_r\,|\,d\theta\,\mathbf{u}_\theta}{dt} = \dot{\theta}\,\mathbf{u}_\theta$$

$$\dot{\mathbf{u}}_\theta = \frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} = -\frac{|\,d\mathbf{u}_\theta\,|\,\mathbf{u}_r}{dt} = -\frac{|\,\mathbf{u}_\theta\,|\,d\theta\,\mathbf{u}_r}{dt} = -\dot{\theta}\,\mathbf{u}_r \qquad (2.18)$$

según se comprueba fácilmente en la figura (2.20).



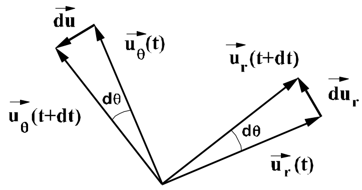


Figura 2.20

La representación del vector r(t) en coordenadas polares viene dada por:

$$r(t) = r(t)\,u_r(t)$$

siendo r (componente radial) la proyección de r sobre u_r.

La representación en coordenadas polares de su derivada será:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\,\mathbf{u}_r + r\,\dot{\mathbf{u}}_r = \dot{r}\,\mathbf{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\mathbf{u}_\theta \qquad (2.19)$$

Es decir, las componentes radial y azimutal de la derivada de r son:

$\dot{r}$ (radial) mide el cambio en módulo de r.

$r\dot{\theta}$ (azimutal) mide el cambio en dirección de r.

Si imponemos la condición de que la dirección de r sea constante e igual a u_r fijo, entonces $\dot{\theta} = 0$ y $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\,\mathbf{u}_r$ y si exigimos $|\,\mathbf{r}\,| = r$ (cte) $\Rightarrow$ $\dot{\mathbf{r}} = r\,\dot{\theta}\,\mathbf{u}_\theta$ que es perpendicular a r, como vimos en los casos anteriores.

En el caso más general de una función A(t) en tres dimensiones siempre es posible representar la derivada en dos componentes, una según A (vector unitario u_A) que mide su cambio en módulo y otra según una dirección perpendicular a A (vector unitario u_n) que mide su cambio en dirección:

$$\dot{\mathbf{A}} = (\dot{\mathbf{A}})_A\,\mathbf{u}_A + (\dot{\mathbf{A}})_n\,\mathbf{u}_n$$

pero ahora la dirección de u_n no es tan fácil de determinar como en el caso plano. u_n es perpendicular a u_A pero no está contenido en un plano determinado. Este caso se tratará con detalle más adelante al estudiar las componentes intrínsecas del vector aceleración.

2.19.5 INTEGRACIÓN DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL DE UNA VARIABLE REAL

Dada una función vectorial de una variable real **A**(t) decimos que existe otra función **B**(t), a la que llamamos integral indefinida de **A**(t), si se cumple

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \mathbf{A}(t)$$

y denotamos a **B** como

$$\mathbf{B} = \int \mathbf{A}\, dt$$

Evidentemente, si **B**(t) es una función vectorial que cumple la definición anterior, también lo hace **B**(t)+**C**, donde **C** representa cualquier vector constante.

Para definir la integral definida en un cierto intervalo $[t_1,t_2]$ de una función vectorial **A**(t) procedemos de forma similar al caso de funciones reales.

Dividimos el intervalo $[t_1,t_2]$ en una partición numerable de N intervalos $[t_{i-1},t_i]$ de "longitud" $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, de manera que $t_2 - t_1 = \sum_{i=1}^{N} \Delta t_i$.
Sea $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$, definimos

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{A}(t)\, dt = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{A}(\xi_i)\, \Delta t_i$$

que es similar a la definición de integral de Riemann salvo porque el integrando es una función vectorial.

Si la función vectorial **A**(t) está representada en un sistema cartesiano de referencia y son A_x,A_y y A_z sus componentes en dicho sistema, la integral anterior se puede descomponer en suma de tres integrales de funciones escalares

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{A}(t)\, dt = \left(\int_{t_1}^{t_2} A_x(t)\, dt \right) \mathbf{i} + \left(\int_{t_1}^{t_2} A_y(t)\, dt \right) \mathbf{j} + \left(\int_{t_1}^{t_2} A_z(t)\, dt \right) \mathbf{k}$$

ya que los versores de la base son constantes en el sistema de referencia utilizado. Estas tres integrales, al ser de funciones escalares, cumplen todas las propiedades características del cálculo integral.

2.19.6 CIRCULACIÓN DE UN VECTOR

Se llama campo vectorial a la correspondencia entre cada punto de una región del espacio y una función vectorial que denotaremos por **a**(x, y, z). A cada punto del espacio le corresponde uno y solo un valor de la magnitud vectorial.

Dentro de dicha región se puede trazar una curva L que denominaremos trayectoria o camino y se fija un recorrido sobre la trayectoria, digamos desde A hacia B.

Un elemento **dl** es un vector elemental contenido en la trayectoria y cuyo sentido coincide con el del recorrido.

Por definición, se llama **CIRCULACIÓN** del campo vectorial **a** a lo largo de la trayectoria L a la integral

$$\Gamma = \int_{A}^{B} \mathbf{a} \cdot \mathbf{dl}$$

La circulación de un vector tiene significados físicos concretos que veremos mas adelante.

De la definición deducimos que el valor de la circulación cambia de signo cuando se invierte el recorrido, pero no cambia su valor absoluto.

Cuando la circulación se calcula a lo largo de un contorno o trayectoria cerrada C, se utiliza la siguiente notación

$$\Gamma = \oint_{C} \mathbf{a} \cdot \mathbf{dl}$$

2.20 INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DE VECTORES DESLIZANTES

Se define un sistema de vectores deslizantes como un conjunto de n vectores {$\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,...., $\mathbf{a}_n$} tal que cualquier vector genérico $\mathbf{a}_i$ de este sistema puede aplicarse en un punto cualquiera A_i de su recta soporte (figura 2.21).

Manejar un número grande de vectores puede resultar tedioso. Trataremos aquí la manera de reducir el sistema a "algo" más simple y cuyos efectos físicos sean similares. Es decir, encontraremos un "SISTEMA EQUIVALENTE".

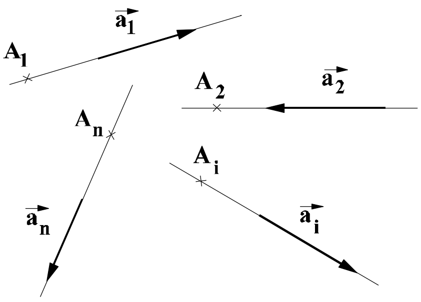


Figura 2.21

2.21 PRIMERAS DEFINICIONES

- RESULTANTE:

Definimos la resultante (**R**) del sistema como el vector obtenido al sumar los n vectores que lo forman.

$$\mathbf{R} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + ... + \mathbf{a}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_i \qquad (2.20)$$

- MOMENTO RESULTANTE RESPECTO A UN PUNTO:

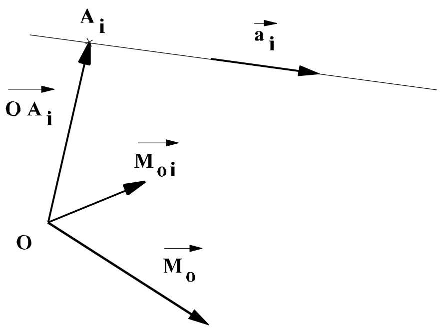


Figura 2.22

Definimos el momento resultante del sistema con respecto a un punto O ($\mathbf{M}_O$) como el vector obtenido al sumar los momentos con respecto al punto O de cada uno de los vectores del sistema (figura 2.22).

$$\mathbf{M_O} = \mathbf{OA_1} \times \mathbf{a_1} + \mathbf{OA_2} \times \mathbf{a_2} + ... + \mathbf{OA_n} \times \mathbf{a_n} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{OA_i} \times \mathbf{a_i}$$

$$\text{También} \quad \mathbf{M_O} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r_i} \times \mathbf{a_i} \quad \text{donde} \quad \mathbf{r_i} = \mathbf{OA_i} \qquad (2.21)$$

La resultante (**R**) y el momento resultante con respecto a un punto ($\mathbf{M}_O$) son dos vectores que caracterizan al sistema en un punto O. Por su propia definición, el momento resultante depende del punto elegido para calcularlo, mientras que la resultante no.

- REDUCCIÓN DEL SISTEMA A UN PUNTO:

Todo sistema de vectores deslizantes es equivalente (o bien, puede sustituirse sin variar los efectos que causa) por la resultante del sistema aplicada en un punto y el momento resultante del sistema con respecto a ese punto (figura 2.23).

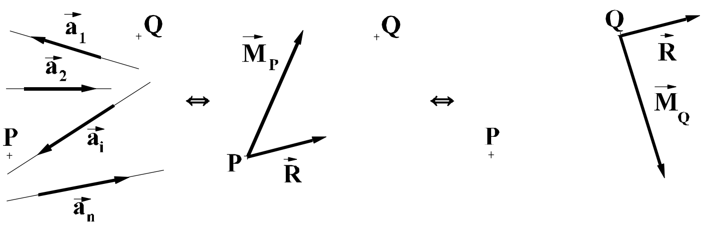


Figura 2.23

2.22 TEOREMA DEL CAMBIO DE POLO

Una vez calculado el momento resultante del sistema con respecto a un punto O, es fácil determinar el momento resultante con respecto a otro punto O' sin necesidad de tener que volver a repetir todo el proceso utilizando de nuevo la definición (2.21).

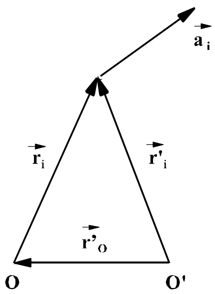


Figura 2.24

Suponemos conocido $\mathbf{M_O} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r_i} \times \mathbf{a_i}$

Queremos calcular $\mathbf{M_{O'}} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r_i'} \times \mathbf{a_i}$

Como $\mathbf{r}_i' = \mathbf{r}_O' + \mathbf{r}_i$ y aplicando la propiedad distributiva del producto vectorial:

$$\mathbf{M_{O'}} = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r_O'} \times \mathbf{a_i}) + \mathbf{M_O}. \quad \text{Pero además} \quad \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r_O'} \times \mathbf{a_i} = \mathbf{r_O'} \times \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a_i}$$

Y, por definición de resultante (2.20), este término se puede escribir como $\mathbf{r}_O' \times \mathbf{R}$.

Es decir:

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{r}_O' \times \mathbf{R} + \mathbf{M}_O \tag{2.22}$$

"El momento resultante del sistema con respecto a un punto O' ($\mathbf{M}_{O'}$) es igual al momento resultante del sistema con respecto a otro punto O ($\mathbf{M}_O$) más el momento con respecto a O' de la resultante del sistema ($\mathbf{R}$) aplicada en el punto O ($\mathbf{r}_O' \mathrm{x} \mathbf{R}$)"

2.22.1 CASOS PARTICULARES EN QUE M_O COINCIDE CON $M_{O'}$

A) $\mathbf{r}_O'=\mathbf{0}$ Y O'/O.

B) R=0 (PAR DE VECTORES)

Cuando la resultante del sistema de vectores es nula, el momento del sistema con respecto a un punto es independiente del punto elegido para calcularlo.

El ejemplo más simple de sistema de vectores deslizantes con resultante nula es el conocido com "par de vectores" (figura 2.25):

"Sistema formado por dos vectores de igual módulo, rectas soporte paralelas y sentidos opuestos"

Como ya hemos demostrado si $\mathbf{R}=\mathbf{0}$ el momento resultante es independiente del punto elegido para calcularlo (2.22).

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_O + \mathbf{r'}_O \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O$$

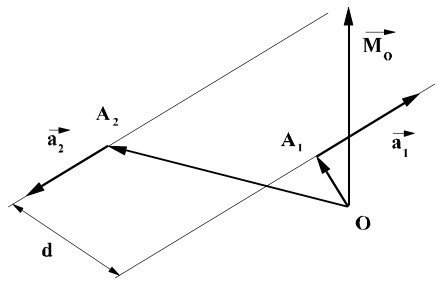


Figura 2.25

Este momento vale $\mathbf{M}_O=\mathbf{r}_1 \times \mathbf{a}_1+\mathbf{r}_2 \times \mathbf{a}_2$ que con $\mathbf{a}_1 = -\mathbf{a}_2$ y aplicando la propiedad distributiva del producto vectorial:

$$\mathbf{M}_O = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{a}_1 = \mathbf{r}_{21} \times \mathbf{a}_1 \quad (\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

cuyo módulo es $M_O = r_{12} a_1$senn $= a_1 d$ siendo d la distancia que separa las rectas soporte de ambos vectores.

El par de vectores es un sistema caracterizado por ser equivalente a un momento de valor conocido y aplicado en cualquier punto del espacio (vector libre).

Si disponemos de un sistema formado por un conjunto de pares de vectores, la resultante ($\mathbf{R}$) del sistema seguirá siendo nula, e independientemente del punto elegido para reducir el sistema, cada uno de los pares es equivalente a un único vector momento que, como ya sabemos, es un vector libre.

Así, el sistema será equivalente a un único vector momento obtenido como suma de los momentos de cada uno de los pares:

$$\mathbf{R} = \mathbf{0} \quad ; \quad \mathbf{M}_O = \mathrm{E}\mathbf{M}_{Oi}$$

El concepto de par de vectores es útil para completar el significado físico de las fuerzas aplicadas a un sólido rígido. El principio de transmisibilidad permite tratar las fuerzas aplicadas a un sólido rígido como vectores deslizantes. Los efectos mecánicos de las fuerzas no cambian si estas se trasladan a lo largo de su recta de acción (recta soporte). Pero, ¿qué ocurre si lo que se pretende es trasladar la fuerza a un punto que no esté sobre su recta soporte (es decir, paralelamente a sí misma)?.

Supongamos un sólido sometido a una única fuerza **F** aplicada en el punto A (figura 2.26).

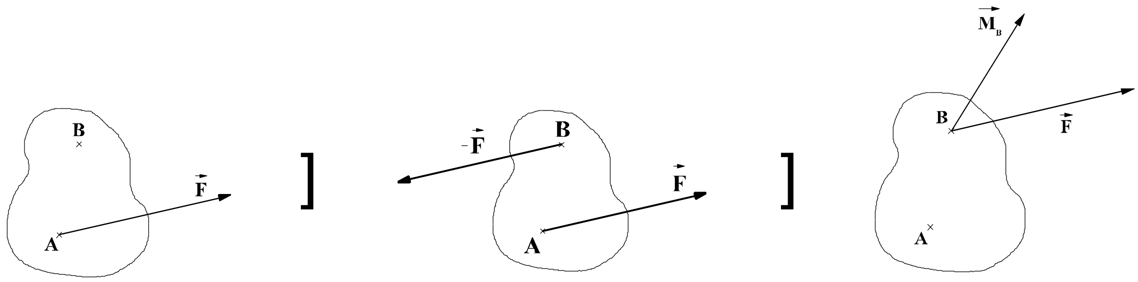


Figura 2.26

Se trata de aplicar la misma fuerza **F** en otro punto B del sólido de forma que los efectos físicos (mecánicos) sean los mismos que cuando estaba aplicada en A.

Añadimos un sistema con resultante nula y momento resultante con respecto a cualquier punto también nulo. Este sistema estará compuesto por dos vectores iguales y opuestos aplicados en un mismo punto, en este caso el punto B. Considerando ahora el conjunto de las fuerzas, tendremos un sistema con resultante $\mathbf{R} = \mathbf{F}$ aplicada en B y un par de momento $\mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{BA} \times \mathbf{F}$.

Si en lugar de una única fuerza **F** hubiera n fuerzas, se puede seguir el mismo proceso para cada una de ellas y, en definitiva, el sistema sería equivalente a una resultante $\mathbf{R}=\Sigma\mathbf{F}_i$ y un momento resultante $\mathbf{M}_B=\Sigma\mathbf{M}_{Bi}$.

C) $\mathbf{r}'_O$ paralelo a **R**

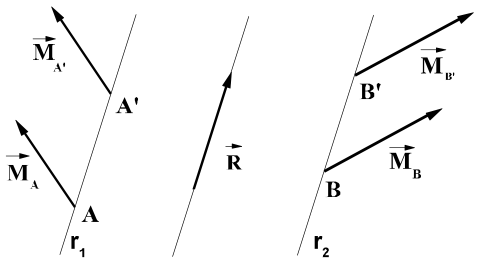


Figura 2.27

El momento resultante del sistema con respecto a puntos situados en una misma recta paralela a la resultante (**R**) es el mismo.

La dirección de la resultante define rectas paralelas a ella y caracterizadas cada una por el hecho de que el momento resultante del sistema es el mismo independientemente del punto de la recta elegido para calcularlo.

Dada una recta r_1 paralela a la resultante (**R**), el momento resultante del sistema es el mismo con respecto a cualquier punto de esa recta. Para otra recta paralela a **R**, r_2 ocurrirá igual, aunque el momento no tiene por qué valer lo mismo.

2.23 MOMENTO MÍNIMO

Si observamos la expresión (2.22) nos damos cuenta que el primer sumando es un vector siempre perpendicular a la resultante **R**. Es decir, su proyección en esa dirección es nula.

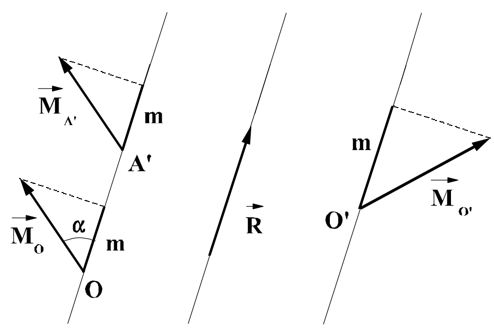


Figura 2.28

Esta observación nos conduce a una interesante conclusión si proyectamos en la dirección de la resultante los tres vectores de la igualdad (2.22).

$$\mathbf{M}_{O'} \cdot \frac{\mathbf{R}}{R} = \mathbf{M}_O \cdot \frac{\mathbf{R}}{R}$$

"La proyección en la dirección de la resultante del momento resultante del sistema es siempre la misma independientemente del punto con respecto al cual se haya calculado dicho momento".

La proyección del momento resultante del sistema en la dirección de la resultante (figura 2.28) es un invariante del sistema que llamaremos **momento mínimo** y que designaremos por la letra m.

$$\mathbf{m} = \mathbf{M}_O \cdot \frac{\mathbf{R}}{R} \tag{2.23}$$

Existirá en particular una recta paralela a **R** en la que el momento resultante del sistema tenga módulo $M_C=*m*$. A tal momento resultante le llamaremos vector momento mínimo

$$m = (m / R)\,\mathbf{R} \tag{2.24}$$

Hay dos formas de comprobar que efectivamente m es el valor escalar del momento resultante mínimo (es decir $*m*$ es el mínimo módulo que puede tener el momento resultante del sistema con respecto a cualquier punto):

A)

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{m} = \mathbf{P_R(M_O)} \\ \mathbf{m} = \mathrm{M_O} \cos\alpha \end{array}\right\} \quad \mathrm{M_O}\cos\alpha = \mathbf{P_R(M_O)} = \mathbf{M_O}\cdot\frac{\mathbf{R}}{\mathrm{R}}$$

$$\mathrm{M_O} = \frac{\mathbf{P_R(M_O)}}{\cos\alpha}$$

$$(\mathrm{M_O})_{\text{mín}} \Rightarrow \cos\alpha_{\text{máx}} \Rightarrow \alpha = 0,\pi$$

La dirección del vector momento mínimo es paralela a **R** y, por tanto, su valor escalar debe coincidir con m.

B) Si descomponemos $\mathbf{M}_\mathrm{O}$ en dos direcciones (figura 2.29), una paralela a **R** ($\mathbf{P}_\mathrm{O}$) y otra perpendicular a ella ($\mathbf{N}_\mathrm{O}$), se cumplirá:

$$\mathbf{M}_\mathrm{O} = \mathbf{P}_\mathrm{O} + \mathbf{N}_\mathrm{O}$$

$$\mathrm{M_O} = \sqrt{\mathrm{P_O^2 + N_O^2}} = \sqrt{\mathrm{m^2 + N_O^2}} \geq |\,\mathbf{m}\,|$$

Es decir, $(\mathrm{M_O})_{\text{mín}} = \mathrm{m}$

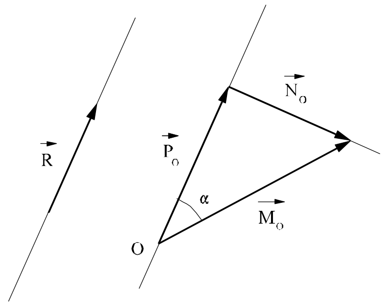


Figura 2.29

2.24 EJE CENTRAL

El eje central de un sistema de vectores deslizantes es el lugar geométrico de los puntos del espacio con respecto a los cuales el momento resultante del sistema es el vector momento mínimo.

Recordando lo estudiado en el apartado anterior, esta definición es equivalente a: lugar geométrico de los puntos del espacio con respecto a los cuales el momento resultante del sistema es paralelo a la dirección de la resultante.

En la propia definición de eje central va implícita la necesidad de que la resultante del sistema (**R**) sea no nula para que el eje central exista como tal.

Demostraremos a continuación que, si se cumple esta condición (**R**...**0**), el eje central existe y es una recta.

2.24.1 DETERMINACIÓN GEOMÉTRICA

Se trata de encontrar una recta paralela a la resultante y que cumpla la condición de que el momento resultante del sistema con respecto a cualquier punto de esa recta esté contenido en ella y sea, por lo tanto, paralelo a la resultante.

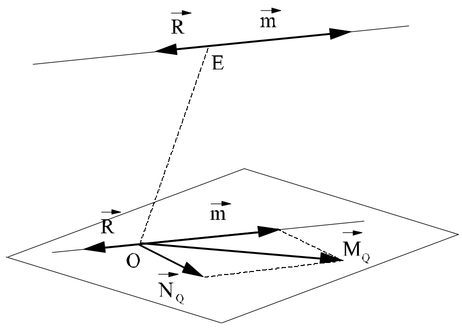


Figura 2.30

Sea $\mathbf{M}_\mathrm{O}$ el momento resultante del sistema con respecto al punto O. Descomponemos este vector en otros dos, uno paralelo a la resultante (**m**) y otro perpendicular a ella ($\mathbf{N}_\mathrm{O}$) (figura 2.30).

Así,

$$\mathbf{M}_\mathrm{O} = \mathbf{m} + \mathbf{N}_\mathrm{O}$$

Trazamos la recta OE, perpendicular al plano definido por la recta paralela a **R** que pasa por O y $\mathbf{M}_\mathrm{O}$.

El punto E debe estar a una distancia (d) de O tal que $\mathrm{N_O = Rd}$ y que el vector **OE** forme con **R** y $\mathbf{N}_\mathrm{O}$ un triedro a derechas.

Se puede comprobar fácilmente que una recta paralela a la resultante y que pase por E es el eje central del sistema.

2.24.2 DETERMINACIÓN ANALÍTICA

2.24.2.1 Ecuación general

Sea un sistema de referencia OXYZ en el que la resultante **R** y el momento resultante con respecto a un punto Q $\mathbf{M}_Q$ vienen representados por:

$$\mathbf{R} = R_x\,\mathbf{i} + R_y\,\mathbf{j} + R_z\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{M}_Q = M_{Qx}\,\mathbf{i} + M_{Qy}\,\mathbf{j} + M_{Qz}\,\mathbf{k}\ ;\ \text{siendo } Q(x_Q,y_Q,z_Q)$$

Suponemos que el punto P(x,y,z) es un punto del eje central.

Por el teorema de cambio de polo (2.22):

$$\mathbf{M}_P = \mathbf{M}_Q + \mathbf{r}_{PQ} \times \mathbf{R}$$

Donde $\mathbf{r}_{PQ} = (x_Q-x)\,\mathbf{i} + (y_Q-y)\,\mathbf{j} + (z_Q-z)\,\mathbf{k}$.

$$\mathbf{M}_P = [M_{Qx} + R_z(y_Q-y) - R_y(z_Q-z)]\,\mathbf{i} + [M_{Qy} + R_x(z_Q-z) - R_z(x_Q-x)]\,\mathbf{j} + [M_{Qz} + R_y(x_Q-x) - R_x(y_Q-y)]\,\mathbf{k}$$

La condición que deben cumplir los puntos del eje central es $\mathbf{M}_P$ paralelo a **R**, es decir:

$$[M_{Qx} + R_z(y_Q-y) - R_y(z_Q-z)]/R_x = [M_{Qy} + R_x(z_Q-z) - R_z(x_Q-x)]/R_y = [M_{Qz} + R_y(x_Q-x) - R_x(y_Q-y)]/R_z$$

Si hubiéramos elegido como punto Q el origen O del triedro de referencia, $x_Q=y_Q=z_Q=0$.

$$\frac{M_{Ox} - R_z y + R_y z}{R_x} = \frac{M_{Oy} - R_x z + R_z x}{R_y} = \frac{M_{Oz} - R_y x + R_x y}{R_z} \qquad (2.25)$$

2.24.2.2 Ecuación vectorial

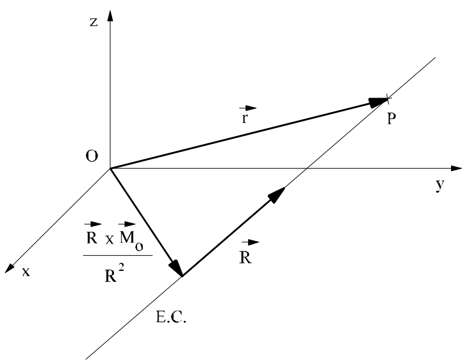


Figura 2.31

Sea **R** la resultante y $\mathbf{M}_O$ el momento resultante con respecto al origen de un sistema coordenado Oxyz, para un sistema de vectores deslizantes (figura 2.31). Por el teorema de cambio de polo (2.22) sabemos

$$\mathbf{M}_P = \mathbf{M}_O - \mathbf{r} \times \mathbf{R}$$

Si es P un punto del eje central, entonces $\mathbf{M}_P$ 2 **R** y,

$$\mathbf{M}_P \times \mathbf{R} = \mathbf{0} = \mathbf{M}_O \times \mathbf{R} - (\mathbf{r} \times \mathbf{R}) \times \mathbf{R}$$

Aplicando una de las propiedades del doble producto vectorial (2.12)

$$\mathbf{0} = \mathbf{M}_Q \times \mathbf{R} - (\mathbf{r}.\mathbf{R})\,\mathbf{R} + (\mathbf{R}.\mathbf{R})\,\mathbf{r}$$

donde el extremo del vector $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ recorre todos los puntos del eje central y tiene origen fijo en O. Introduciendo el parámetro 8 como

$$\lambda = \frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{r}}{R^2} = \frac{xR_x + yR_y + zR_z}{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

donde 8 es un número real y puede tomar cualquier valor, y despejando **r**, resulta

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{R}\times\mathbf{M_O}}{R^2} + \lambda\,\frac{\mathbf{R}}{R} \qquad (2.26)$$

que es la ecuación vectorial del eje central.

El primer término del segundo miembro representa el vector que con origen en O tiene por extremo el punto del eje central más próximo a O. Es perpendicular a la resultante y su módulo es igual a la mínima distancia entre el eje central y el origen O del sistema coordenado. Define el vector de posición de ese punto del eje central para 8=0.

El segundo término representa todos lo posibles vectores paralelos a la resultante al ir variando el parámetro 8. La suma de ambos términos proporciona el vector de posición de los puntos del eje central desde el sistema de referencia Oxyz.

2.25 INVARIANTES DE UN SISTEMA DE VECTORES DESLIZANTES

Hemos visto que en un sistema de vectores deslizantes existen magnitudes características que no cambian al cambiar de punto (como la resultante **R**) y otras que sí lo hacen (como el momento resultante $\mathbf{M}_O$). Decimos que una magnitud de un sistema de vectores deslizantes es invariante si no cambia cuando cambiamos de punto (es un concepto distinto del de invariancia vectorial general).

Todo sistema de vectores deslizantes tiene un número infinito de magnitudes invariantes, pero en el caso general solo existen dos invariantes independientes.

Ya hemos demostrado que el escalar m (momento mínimo) no depende del punto O elegido para calcular el momento resultante del sistema. Es un invariante llamado **invariante escalar**.

También la resultante (**R**) del sistema es un invariante, en este caso un **invariante vectorial**. Es necesario observar que, aunque el vector **R** no depende del triedro de referencia, sí lo hacen sus componentes. Es decir, el vector **R**, aún siendo el mismo independientemente del triedro de referencia elegido, tendrá distintas componentes en cada uno de ellos.

$$\mathbf{R} = R_x\,\mathbf{i} + R_y\,\mathbf{j} + R_z\,\mathbf{k} = R'_x\,\mathbf{i'} + R'_y\,\mathbf{j'} + R'_z\,\mathbf{k'}$$

El módulo de la resultante no depende, evidentemente, del triedro de referencia.

$$R = [R_x^2+R_y^2+R_z^2]^{1/2} = [R'^2_x+R'^2_y+R'^2_z]^{1/2}$$

2.26 TORSOR EQUIVALENTE

Ya vimos que en el caso más general un sistema de vectores deslizantes es físicamente equivalente a la resultante aplicada en un punto y al momento resultante del sistema con respecto a ese punto. Y que gracias a esta característica simplificábamos desde el punto de vista matemático la operación con estos sistemas.

Apoyándonos en el concepto de eje central podemos avanzar un paso más en esta simplificación. Si el punto O elegido para reducir el sistema es un punto cualquiera del espacio, **R** y $\mathbf{M}_O$ tendrán, en general, módulos no nulos y direcciones arbitrarias. Sin embargo, si el punto O pertenece al eje central, ambos vectores (**R** y $\mathbf{M}_O$) tendrán la misma dirección y $\mathbf{M}_O$ tendrá por valor escalar el momento mínimo m. Nos encontramos con un conjunto especial de vectores (figura 2.32) que llamaremos **TORSOR**:

"Conjunto de dos vectores (**R** y $\mathbf{M}_O$) a los que queda reducido un sistema general de vectores deslizantes cuando para esa reducción se elige un punto del eje central. Está caracterizado porque **R** es paralela a $\mathbf{M}_O$ y M_O=m"

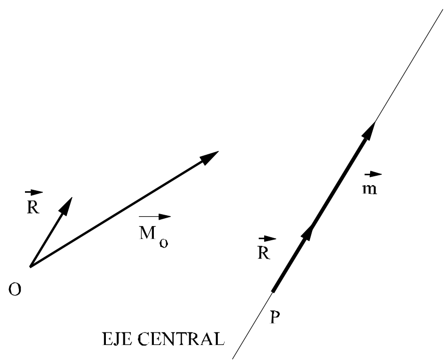


Figura 2.32

Resumiendo, en el caso más general (**R**.$\mathbf{M}_O$...0, es decir, **R**...**0**, $\mathbf{M}_O$...**0** y **R** no perpendicular a $\mathbf{M}_O$) el sistema se reduce a su torsor equivalente aplicado en un punto del eje central.

Analizamos los casos particulares en que **R**.$\mathbf{M}_O$=0:

a) **R**=**0** y $\mathbf{M}_O$...**0**

El sistema se reduce a un momento resultante $\mathbf{M}_O$ que es siempre el mismo con respecto a cualquier punto del espacio.

b) **R**...**0** y $\mathbf{M}_O$=**0** (en algún punto O)

El sistema tiene momento mínimo nulo (m=0) y se reduce a la resultante **R** aplicada en cualquier punto del eje central. Dicho eje es en este caso la recta paralela a **R** que pasa por O.

c) **R**...**0** y $\mathbf{M}_O$...**0** y **R** perpendicular $\mathbf{M}_O$

El sistema tiene momento mínimo nulo (m=0) y se reduce a la resultante **R** aplicada en cualquier punto del eje central (y a **R** y $\mathbf{M}_O$ perpendiculares en cualquier punto que no pertenezca al eje central).

d) **R**=**0** y $\mathbf{M}_O$=**0** (en algún punto O)

El sistema es equivalente al vector nulo.

2.27 SISTEMAS DE VECTORES DESLIZANTES DISTRIBUIDOS DE FORMA CONTINUA

En algunas ocasiones se nos presentará el problema de tratar sistemas de vectores deslizantes infinitesimales en módulo, distribuidos de forma continua sobre un cierto volumen, una superficie o una línea.

Sea un volumen V tal que por cada uno de sus elementos dV, cuya posición está determinada por el vector de posición **r** respecto a un punto de referencia O (figura 2.33), pasa un vector deslizante d**a**.

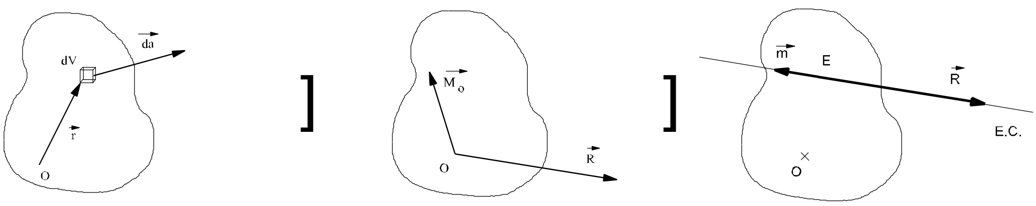


Figura 2.33a Figura 2.33b Figura 2.33c

Podemos utilizar el mismo tratamiento empleado en sistemas de vectores deslizantes sin más que sustituir las sumas a todos los vectores del sistema por integrales realizadas sobre todo el volumen V en el que están definidos los vectores distribuídos d**a**.

En consecuencia:

$$\mathbf{R} = \int_V d\mathbf{a} \qquad \mathbf{M_O} = \int_V \mathbf{r}\times d\mathbf{a} \tag{2.27}$$

y el sistema equivale, en cada punto O, a la resultante **R** y al momento resultante $\mathbf{M}_O$. Esto simplifica el problema al cálculo de estas dos incógnitas vectoriales incluso en los casos en que no sepamos nada acerca de cómo es la distribución de vectores d**a** sobre los puntos del volumen V, que es lo que sucede en la mayoría de los casos.

En los puntos del eje central el sistema se reduce al torsor equivalente:

$$\mathbf{R} = \int_V d\mathbf{a} \qquad \mathbf{m} = \frac{\mathbf{M_O}\cdot\mathbf{R}}{R^2}\,\mathbf{R} \tag{2.28}$$

y en los casos más simples en los que el momento mínimo es nulo, se reduce únicamente a la resultante **R** en tales puntos.

Todo ello es aplicable de la misma manera si en lugar de tratar con una distribución de vectores infinitesimales en un volumen V nos referimos a una superficie S o a una línea L. Lo utilizaremos a lo largo del curso para simplificar la resolución de ciertos problemas. En particular citaremos dos ejemplos: el concepto y definición de centro de gravedad, que se estudiará más adelante, y el modelo de fuerza puntual para explicar la interacción por contacto entre dos sólidos (figura 2.34), que vamos a considerar a continuación.

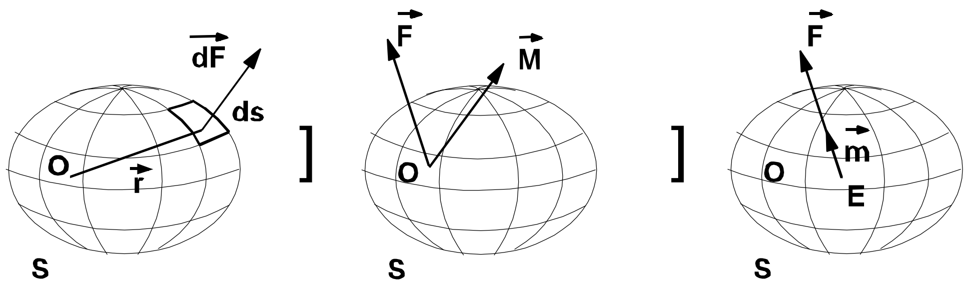


Figura 2.34a Figura 2.34b Figura 2.34c

En mecánica se plantea a menudo la cuestión de interpretar, de forma matemáticamente simple, cómo se produce la interacción por contacto entre dos sólidos, como ocurre, por ejemplo, cuando un taco golpea a una bola de billar, o cuando un sólido apoya sobre una superficie. En ambos casos el contacto no se produce solamente en un punto, sino en una cierta área de contacto S. Además, en general, no conocemos la forma en que se distribuyen las fuerzas de contacto sobre tal superficie S ni disponemos de modelos precisos que nos aproximen tal distribución.

Para resolver el problema asignamos a cada punto del área de contacto ds un vector fuerza d**F**, que sabemos que se ha de comportar como vector deslizante, como está experimentalmente comprobado que sucede con las fuerzas aplicadas sobre un sólido rígido (principio de transmisibilidad de las fuerzas que actúan sobre un sólido). Elegimos un punto de referencia O, que en general y por simplicidad se tomará como perteneciente a la superficie S, y sustituimos el sistema de fuerzas de contacto distribuidas sobre S por su sistema equivalente en O, constituido por:

$$\mathbf{R} = \int_S d\mathbf{F} \quad \text{y} \quad \mathbf{M_O} = \int_S \mathbf{r}\times d\mathbf{F} \tag{2.29}$$

De esta manera hemos reducido la explicación de la interacción por contacto a la fuerza **R** aplicada en O y al momento $\mathbf{M}_O$, que son las dos únicas magnitudes que necesitamos utilizar en el tratamiento del problema y que no requieren, como se ha justificado, el conocimiento preciso de la distribución de fuerzas por contacto.

Aún se puede simplificar más el problema si reducimos el sistema a un punto E del eje central, en cuyo caso la interacción por contacto equivale al torsor del sistema aplicado en E y constituido por **R** y el vector momento mínimo **m**=$\mathbf{M}_E$. Además, en la mayor parte de las situaciones que consideraremos el eje central cortará a la superficie S en un punto. Es más, generalmente trataremos problemas en los que el momento mínimo que representa la interacción por contacto es nulo y, en consecuencia, el sistema se reducirá únicamente a la resultante **R** aplicada en el punto del eje central que intersecta a la superficie de contacto. Se reduce así el estudio de fuerzas distribuidas, en general de forma complicada y desconocida, sobre un área S al caso más simple de tratar una fuerza **R** aplicada en un punto.

2.28 CASOS PARTICULARES DE SISTEMAS DE VECTORES

2.28.1 SISTEMA DE VECTORES CONCURRENTES.

Un sistema de vectores deslizantes es concurrente cuando las rectas soporte de todos los vectores del sistema pasan por un mismo punto (figura 2.35). Si este punto es el punto C (de concurrencia), el momento de cada uno de los vectores del sistema con respecto a ese punto es nulo y, por tanto, lo será el momento resultante del sistema. Es decir, el sistema tendrá momento mínimo nulo. En general, el sistema tendrá resultante no nula y, el eje central será una recta paralela a la resultante y que pase por el punto C.

Aplicando el teorema del cambio de polo (2.22), se puede deducir el Teorema de Varignon:

"El momento resultante de un sistema de vectores deslizantes concurrentes con respecto al punto O es igual al momento de la resultante supuesta aplicada en el punto C de concurrencia"

La demostración es inmediata y se propone como ejercicio.

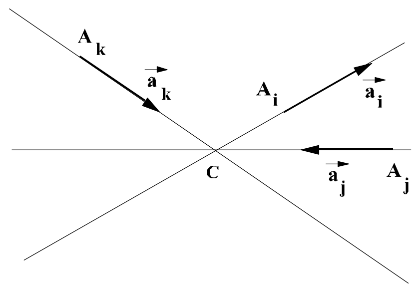


Figura 2.35

2.28.2 SISTEMA DE VECTORES PARALELOS

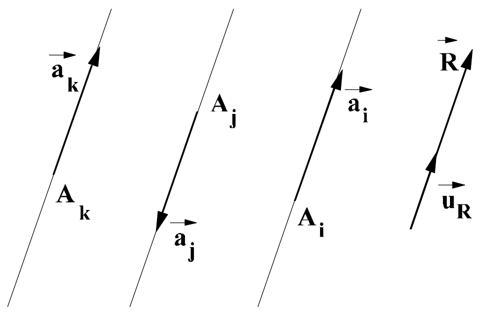


Figura 2.36

Un sistema de vectores deslizantes es paralelo cuando las rectas soporte de todos los vectores del sistema son paralelas entre sí (figura 2.36).

En general, el sistema tendrá resultante no nula. El momento mínimo del sistema será nulo, ya que el momento resultante del sistema con respecto a cualquier punto es perpendicular a la dirección a la que son paralelos los vectores del sistema y, por tanto, a la resultante.

Como consecuencia de lo anterior, el momento resultante del sistema con respecto a un punto es igual al momento de la resultante aplicada en el eje central con respecto a dicho punto.

2.28.2.1 Centro de un sistema de vectores paralelos y ligados

Dado un sistema de n vectores paralelos ligados {$\mathbf{a}_i$} aplicados en los puntos A_i y cuya dirección viene determinada por el versor **u**, el momento resultante del sistema respecto al origen de un triedro de referencia será:

$$\mathbf{M_O} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r_i} \times \mathbf{a_i}$$

y el momento con respecto a un punto cualquiera vendrá dado por el teorema del cambio de polo:

$$\mathbf{M_P} = \mathbf{M_O} + \mathbf{R} \times \mathbf{OP} = \mathbf{M_O} + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a_i} \times \mathbf{OP}$$

Como ya hemos visto, el momento mínimo es nulo y, por tanto, si el punto P es un punto del eje central, deberá cumplirse $\mathbf{M}_P=\mathbf{0}$. Es decir:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{r_i} \times \mathbf{a_i} + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a_i} \times \mathbf{OP} = \mathbf{0}$$

Sustituyendo $\mathbf{a}_i = a_i\mathbf{u}$ (donde a_i es la proyección sobre la recta orientada que definen los vectores paralelos previamente orientada, es decir, $a_i = \mathbf{a}_i . \mathbf{u}$):

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{r_i}) \times \mathbf{u} + \mathbf{u} \times \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{OP} = \mathbf{0}$$

$$\text{es decir:} \quad (\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{r_i} - \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{OP}) \times \mathbf{u} = \mathbf{0} \qquad (2.30)$$

Para que este producto vectorial sea cero, debe cumplirse:

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{r_i} - \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{OP} = \mathbf{0} \\ &\text{b)} \quad \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{r_i} - \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{OP} \right) \parallel \mathbf{u} \end{aligned} \qquad (2.31)$$

Examinaremos ambos casos por separado.

a) $\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{r_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{OP}$ y se puede despejar **OP**:

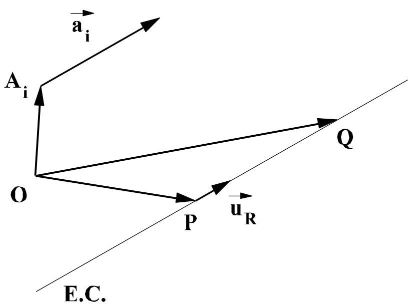


Figura 2.37

$$\mathbf{OP} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{r_i}}{\sum_{i=1}^{n} a_i}$$

Como P es un punto del eje central, la ecuación de este eje queda ahora perfectamente determinada (figura 2.37):

$$\mathbf{OQ} = \mathbf{OP} + 8\mathbf{u}$$

Observamos que si los vectores $\mathbf{a}_i$ son ligados y aplicados en los puntos A_i, el punto P queda perfectamente determinado.

Este punto no depende de la orientación de los vectores del sistema (versor **u**). Si variamos la orientación de los vectores ligados varía la dirección de la resultante y, en consecuencia, la del eje central, pero no varía el punto P que sigue siendo el mismo.

Este punto P es la intersección de los ejes centrales para distintas orientaciones del sistema de vectores paralelos y se denomina **CENTRO DEL SISTEMA** (a partir de este concepto se genera un método experimental para la determinación de centros de gravedad de sólidos, como veremos al estudiar estática del sólido rígido).

b) Si $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{r_i} - \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{OP} \right) \parallel \mathbf{u}$ se puede poner $\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{r_i} - \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{OP} = \lambda\, \mathbf{u}$

de donde $$\mathbf{OP} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_i \mathbf{r}_i - \lambda \mathbf{u}}{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_i}$$

y separando términos $$\mathbf{OP} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_i} - \frac{\lambda}{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_i} \mathbf{u} \qquad (2.33)$$

o lo que es lo mismo $$\mathbf{OP} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_i} - \mu \mathbf{u}$$

que es la ecuación del eje central.

El primer sumando posiciona un punto del eje central que, como ya sabemos, es el centro del sistema si los vectores son ligados.

2.28.3 SISTEMA DE VECTORES COPLANARIOS

Un sistema de vectores deslizantes es coplanario cuando todos los vectores están contenidos en un mismo plano (figura 2.38).

En este caso el momento resultante del sistema con respecto a cualquier punto del plano será perpendicular al plano y, en consecuencia a la resultante que, en general, será no nula y estará también contenida en el mismo plano.

La determinación gráfica del eje central es, en este caso muy sencilla, como se observa en la figura.

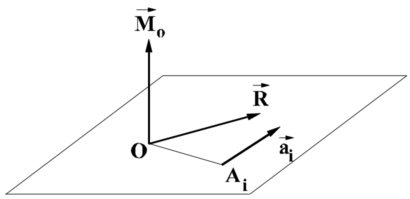


Figura 2.38