ÍNDICE

4.1 MOVIMIENTO RELATIVO. INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior hemos estudiado el movimiento de puntos con respecto a un único sistema de referencia. Trataremos ahora de generalizar lo estudiado para el caso de dos o más sistemas de referencia.

Suele ocurrir que la complejidad de un problema se reduce notablemente cuando somos capaces de elegir convenientemente los sistemas de referencia y descomponer el movimiento original en un conjunto de movimientos más sencillos.

En numerosas ocasiones se conoce el movimiento de una partícula con respecto a un cuerpo, también con movimiento conocido (por ejemplo, un avión) y en el que podemos fijar un sistema de referencia que, al estar ligado al cuerpo, se moverá de forma conocida con respecto al sistema de referencia en el que queremos estudiar el movimiento (por ejemplo, la tierra). Es en estas condiciones en las que será aplicable lo estudiado en este capítulo.

También nos será de utilidad cuando estudiemos la cinemática de los sólidos rígidos, ya que identificaremos el movimiento de los sólidos con el movimiento de sistemas de referencia ligados solidariamente a ellos.

Aplicaremos por último los conceptos de movimiento relativo cuando tengamos necesidad de aplicar las leyes de la dinámica en sistemas de referencia no inerciales, que serán definidos convenientemente más adelante.

Utilizaremos en todo el capítulo la denominación sistema de referencia fijo y sistema de referencia móvil para referirnos al sistema de referencia con respecto al cual queremos estudiar el movimiento (fijo) y al sistema de referencia auxiliar que nos ayudará a que el estudio resulte más sencillo (móvil), pero no hay que olvidar que es una forma de hablar y que, en el estudio cinemático no hay ninguna necesidad de que exista algún sistema de referencia realmente fijo (por otra parte cabría preguntarse ¿fijo respecto a qué?) y basta con conocer el movimiento de un sistema de referencia respecto a otro.

4.2 DERIVADA DE UN VECTOR EN DOS SISTEMAS DE REFERENCIA QUE SE MUEVEN UNO CON RESPECTO A OTRO

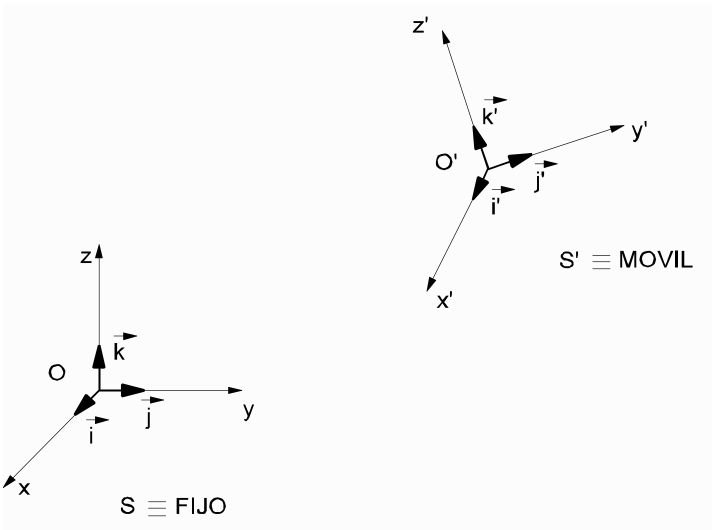

Figura 4.1

Sean dos sistemas de referencia S y S', cartesianos, con orígenes O y O' y ejes X,Y,Z y X',Y',Z' respectivamente (figura 4.1).

El triedro S' se puede mover de forma cualquiera con respecto al S (es decir, O' puede desplazarse y los versores **i'**, **j'** y **k'** pueden cambiar su orientación).

Ya sabemos que un vector existe y es invariante independientemente del sistema de referencia. En un instante determinado un vector **a**(t) tendrá una representación en S

$$\mathbf{a} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k} \qquad (4.1)$$

y otra en S'

$$\mathbf{a} = a'_x\mathbf{i}' + a'_y\mathbf{j}' + a'_z\mathbf{k}' \qquad (4.2)$$

expresiones que en general serán función del tiempo y variarán de forma distinta en cada sistema de referencia. ¿Existe alguna relación entre estas variaciones con el tiempo del vector **a**?. Es lo que tratamos de determinar.

El problema que hemos planteado es el de relacionar las derivadas temporales cuando éstas son realizadas (observadas) por dos observadores situados uno en cada sistema de referencia.

Para un observador situado en S', derivar la expresión (4.2) resulta muy simple, pues sólo varían con el tiempo los escalares a'_x, a'_y y a'_z, mientras que los versores **i'**, **j'** y **k'** son constantes.

$$\left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right)_{S'} = \frac{da_x'}{dt}\,\mathbf{i}' + \frac{da_y'}{dt}\,\mathbf{j}' + \frac{da_z'}{dt}\,\mathbf{k}' \qquad (4.3)$$

Los subíndices utilizados en las derivadas nos sirven para indicar el sistema de referencia en el cual se están realizando. En el caso de la variación con el tiempo de funciones escalares no existe ambigüedad en cuanto al sistema de referencia desde el que se realiza la derivada ya que ésta es la misma en cualquier sistema de referencia de acuerdo con el concepto newtoniano de tiempo absoluto.

Si el observador está situado en S, todo en la expresión (4.2) varía con el tiempo. Varían los escalares (de igual forma que para un observador en S') y también varían los versores **i'**, **j'** y **k'** (no en módulo pero sí en dirección).

$$\left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right)_S = \frac{da_x'}{dt}\mathbf{i}' + \frac{da_y'}{dt}\mathbf{j}' + \frac{da_z'}{dt}\mathbf{k}' + $$
$$+ a_x'\left(\frac{d\mathbf{i}'}{dt}\right)_S + a_y'\left(\frac{d\mathbf{j}'}{dt}\right)_S + a_z'\left(\frac{d\mathbf{k}'}{dt}\right)_S \tag{4.4}$$

Observamos que los tres primeros sumandos del segundo miembro de la expresión (4.4) coinciden con el segundo miembro de (4.3). Así,

$$\left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right)_{S'} + a_x'\left(\frac{d\mathbf{i}'}{dt}\right)_S + a_y'\left(\frac{d\mathbf{j}'}{dt}\right)_S + a_z'\left(\frac{d\mathbf{k}'}{dt}\right)_S \tag{4.5}$$

Se trata ahora de calcular las derivadas de los versores del sistema S' desde el sistema S. Hay que determinar las tres componentes de cada uno de los tres vectores derivada. Es decir, nueve incógnitas. Pero veremos enseguida que los vectores que estamos derivando tienen una serie de características (módulo constante y ángulo constante entre ellos) que restringen notablemente este número de incógnitas.

Imponemos primero la condición de módulo constante. Sabemos (Apartado 2.19.3) que la derivada de un vector de módulo constante (en este caso unidad) es perpendicular al propio vector. Si $\left(\frac{d\mathbf{i}'}{dt}\right)_S$ es perpendicular a **i'** y recordando la definición de producto vectorial (Apartado 2.13), necesariamente existirá un vector **p** que multiplicado vectorialmente por **i'** dé como resultado su derivada $\left(\frac{d\mathbf{i}'}{dt}\right)_S$. Y lo mismo ocurrirá para las derivadas de los otros versores, **j'** y **k'**.

$$\left(\frac{d\mathbf{i}'}{dt}\right)_s \perp \mathbf{i}' \quad \Rightarrow \quad \exists\ \mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)\ /\ \left(\frac{d\mathbf{i}'}{dt}\right)_s = \mathbf{p}\times\mathbf{i}' \tag{4.6}$$

$$\left(\frac{d\mathbf{j}'}{dt}\right)_s \perp \mathbf{j}' \quad \Rightarrow \quad \exists\ \mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)\ /\ \left(\frac{d\mathbf{j}'}{dt}\right)_s = \mathbf{q}\times\mathbf{j}' \tag{4.7}$$

$$\left(\frac{d\mathbf{k}'}{dt}\right)_s \perp \mathbf{k}' \quad \Rightarrow \quad \exists\ \mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)\ /\ \left(\frac{d\mathbf{k}'}{dt}\right)_s = \mathbf{r}\times\mathbf{k}' \tag{4.8}$$

Al hacer estos tres productos vectoriales, nos damos cuenta de que en cada uno de ellos hay un valor arbitrario (precisamente el de la componente del vector correspondiente en la dirección del versor por el cual estamos multiplicando)

$$\left(\frac{d\mathbf{i}'}{dt}\right)_s = \begin{vmatrix} \mathbf{i}' & \mathbf{j}' & \mathbf{k}' \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = p_3\,\mathbf{j}' - p_2\,\mathbf{k}' \tag{4.9}$$

$$\left(\frac{d\mathbf{j}'}{dt}\right)_s = \begin{vmatrix} \mathbf{i}' & \mathbf{j}' & \mathbf{k}' \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = q_3\,\mathbf{i}' + q_1\,\mathbf{k}' \tag{4.10}$$

$$\left(\frac{d\mathbf{k}'}{dt}\right)_s = \begin{vmatrix} \mathbf{i}' & \mathbf{j}' & \mathbf{k}' \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r_2\,\mathbf{i}' - r_1\,\mathbf{j}' \tag{4.11}$$

Las componentes que pueden tener cualquier valor son entonces p_1, q_2 y r_3.

Apliquemos ahora la condición de que los versores **i'**, **j'** y **k'** son ortogonales,

$$\mathbf{i}' \perp \mathbf{j}' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{i}'\cdot\mathbf{j}' = 0$$

derivando esta expresión con respecto al tiempo desde el sistema S,

$$\left(\frac{d\mathbf{i}'}{dt}\right)_s \cdot \mathbf{j}' + \mathbf{i}'\cdot\left(\frac{d\mathbf{j}'}{dt}\right)_s = 0$$

recordando (4.9) y (4.10) y efectuando los productos escalares resulta

$$p_3 = q_3 \tag{4.12}$$

y haciendo lo mismo para **j'** y **k'** y para **i'** y **k'** llegamos a

$$q_1 = r_1 \tag{4.13}$$

$$p_2 = r_2 \tag{4.14}$$

Recordemos que p_1 puede tomar cualquier valor, en particular podemos asignarle el correspondiente a q_1 y r_1. También q_2 es arbitrario y le asignamos el mismo valor que p_2 y r_2, y lo mismo ocurre con r_3 al que asignamos el valor obtenido para p_3 y q_3. Es decir, llegamos a la conclusión de que de las nueve incógnitas iniciales, sólo hay tres independientes y que los tres vectores **p**, **q** y **r** utilizados en las expresiones (4.6), (4.7) y (4.8) pueden ser iguales, ya que

$$p_1 = q_1 = r_1 \ ; \ \ p_2 = q_2 = r_2 \ ; \ \ p_3 = q_3 = r_3$$

y por tanto,

$$\mathbf{p} = \mathbf{q} = \mathbf{r}$$

A este único vector, cuya interpretación física veremos más adelante le denotaremos por **S** y a sus componentes en S' por S_1, S_2 y S_3, de modo que

$$\mathbf{\Omega} = \Omega_1\, \mathbf{i}' + \Omega_2\, \mathbf{j}' + \Omega_3\, \mathbf{k}' \tag{4.15}$$

Sustituyendo las expresiones (4.6), (4.7) y (4.8) en (4.4) obtenemos la relación entre las derivadas de un mismo vector efectuadas desde dos sistemas de referencia diferentes, que es

$$\left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right)_{S'} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{a} \tag{4.16}$$

Para un vector **b** de módulo constante y fijo en el sistema de referencia S (caso de los versores **i'** ,**j'** y **k'**) su derivada desde S' sera nula y, por tanto, su derivada desde S:

$$\left(\frac{d\mathbf{b}}{dt}\right)_S = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{b} \tag{4.17}$$

Recordemos que, por ahora, el vector **S** que aparece en la relación (4.16) ni es conocido ni tiene una interpretación física. Resolveremos estos interrogantes en el siguiente apartado.

4.3 RELACIÓN ENTRE LOS VECTORES VELOCIDAD DE UNA PARTÍCULA MATERIAL EN DOS SISTEMAS DE REFERENCIA EN MOVIMIENTO RELATIVO.

Utilicemos dos sistemas de referencia como los descritos en el apartado anterior. Sean el sistema S' -que consideramos "móvil"- que se mueve con respecto al sistema de referencia S -que consideramos "fijo"- y una particula material que tiene un movimiento cualquiera con respecto a ambos (figura 4.2),

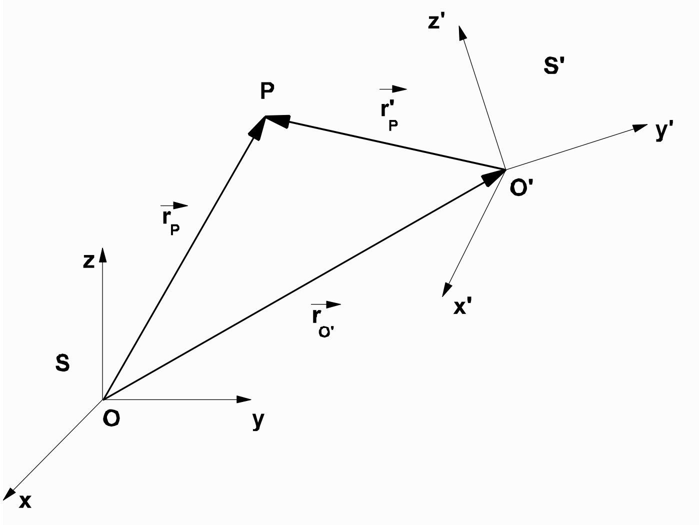

Figura 4.2

y sean $\mathbf{r}_P$ el vector de posición de la partícula material en el sistema de referencia S, $\mathbf{r'}_P$ el vector de posición de la partícula material en el sistema de referencia S' y $\mathbf{r}_{O'}$ el vector de posición del origen O' del sistema de referencia S' con respecto al sistema S.

Recordando la definición de velocidad instantánea, la partícula material tendrá velocidades $\mathbf{v}_P$ y $\mathbf{v'}_P$, medidas en S y S' respectivamente, dadas por

$$\mathbf{v_P} = \left(\frac{d\mathbf{r_P}}{dt}\right)_S \tag{4.18}$$

$$\mathbf{v}_P' = \left(\frac{d\mathbf{r}_P'}{dt}\right)_{S'} \tag{4.19}$$

A la velocidad $\mathbf{v}_P$ de la partícula material medida en S la llamamos "velocidad absoluta".
A la velocidad $\mathbf{v}'_P$ de la partícula material medida en S' la llamamos "velocidad relativa".

En general, utilizaremos el término "absoluto" para referirnos a cantidades medidas por el observador en el sistema de referencia S y emplearemos el término "relativo" para referirnos a cantidades medidas por el observador en S'.

Conviene insistir en que el término "absoluto" es puramente de nomenclatura, sin que $\mathbf{v}_P$ sea una velocidad absoluta en el sentido de la mecánica newtoniana, ya que no conocemos el movimiento del sistema S. Solamente cuando el sistema S fuese un sistema fijo en el espacio absoluto podríamos utilizar dicho término con propiedad.

Se puede encontrar una relación entre estas velocidades derivando, desde el sistema S, la ecuación que relaciona los vectores de posición de la partícula material en cada uno de los dos sistemas con el vector de posición del origen de coordenadas de S' respecto de S, que es

$$\mathbf{r_P} = \mathbf{r}_{O'} + \mathbf{r}_P'$$

y resulta

$$\left(\frac{d\mathbf{r_P}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\mathbf{r_{O'}}}{dt}\right)_S + \left(\frac{d\mathbf{r'_P}}{dt}\right)_S$$

Aplicando la ecuación (4.16)

$$\left(\frac{d\mathbf{r_P}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\mathbf{r_{O'}}}{dt}\right)_S + \left(\frac{d\mathbf{r'_P}}{dt}\right)_{S'} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r'_P} \tag{4.20}$$

Teniendo en cuenta (4.18) y (4.19) y designando $\left(\frac{d\mathbf{r_{O'}}}{dt}\right)_S$ por $\mathbf{v}_{O'}$ (que es la velocidad con que se mueve O' en el sistema S)

$$\mathbf{v_P} = \mathbf{v'_P} + \mathbf{v_{O'}} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r'_P} \tag{4.21}$$

El término $\left(\frac{d\mathbf{r'_P}}{dt}\right)_S$ se obtiene entonces de sumar dos vectores. Uno de ellos $\left(\frac{d\mathbf{r'_P}}{dt}\right)_{S'}$ que es nulo si el punto P está fijo al sistema S', es decir, si un observador ligado al sistema S' ve el punto P en reposo. Eso significa que este término, al que hemos llamado $\mathbf{v'}_P$ mide realmente la velocidad del punto P con respecto al sistema de referencia S' y que en esta velocidad no influye para nada el movimiento de S'. El otro sumando, **S**x$\mathbf{r'}_P$, se obtiene de derivar los vectores unitarios (**i'**, **j'**, **k'**) que definen en cada instante las direcciones de los ejes del sistema S'. Si estas direcciones no variaran en el tiempo, es decir, si el sistema S' no girara con respecto al S, éste término sería nulo. Si recordamos la expresión (3.20) vemos que para que este sumando sea una velocidad, **S** debe ser una velocidad angular de rotación. **S** mide los cambios de dirección de los versores de S' con respecto a direcciones fijas cualesquiera (en este caso las **i**, **j**, **k** de S).

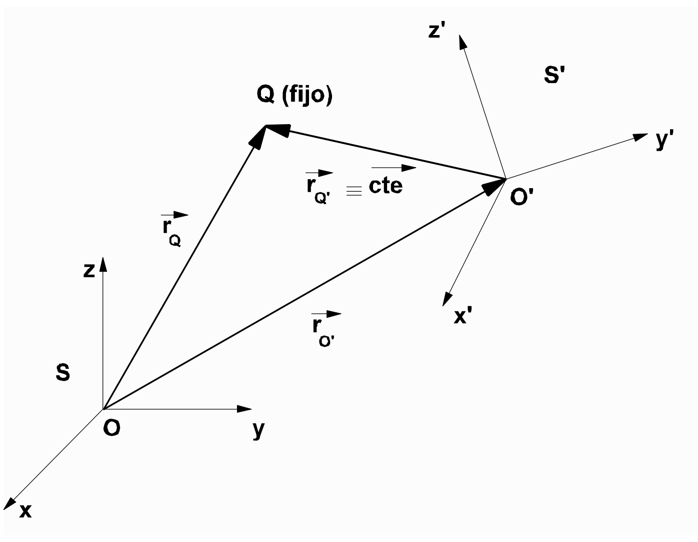

Figura 4.3

Podemos interpretar ya todos los términos de la fórmula (4.21):

$\mathbf{v}_P$ / velocidad absoluta (medida en el sistema S)

$\mathbf{v'}_P$ / velocidad relativa (medida en el sistema S')

$\mathbf{v}_{O'}$ + **S** x $\mathbf{r'}_P$ / velocidad de arrastre.

¿Qué significa físicamente la velocidad de arrastre?.

Volvamos al caso particular de un punto Q fijo al sistema "móvil" S' (figura 4.3). La velocidad relativa de Q ($\mathbf{v'}_Q$) será nula.

$\mathbf{v}_{O'}$ es la velocidad con la que se desplaza el punto O' (origen del sistema de referencia móvil S'). Es decir, está midiendo la velocidad de "traslación" del sistema móvil con respecto al fijo. ($\mathbf{S}$ x $\mathbf{r'}_Q$) mide la rotación de Q alrededor de un eje que pase por el punto O'. Como Q está fijo al sistema móvil S', este sistema gira alrededor de ese eje con tal velocidad angular. Nuevamente nos damos cuenta de que el vector $\mathbf{S}$ es físicamente una velocidad angular de rotación instantánea del sistema móvil con respecto al fijo.

La suma de estos dos términos se llama velocidad de arrastre porque es la velocidad debida al movimiento del sistema móvil. Hemos descompuesto el movimiento completo (**absoluto**) de un punto P en dos: uno que llamamos **relativo** y que es el movimiento que tiene el punto P con respecto al sistema de referencia móvil S' y otro que llamamos de **arrastre** que es debido al movimiento del sistema de referencia móvil S' con respecto al fijo S y que se puede obtener considerando el punto P fijo al sistema S'.

Asi, la expresión (4.21) también se puede escribir como

$$\mathbf{v}_{\mathbf{absoluta}} = \mathbf{v}_{\mathbf{relativa}} + \mathbf{v}_{\mathbf{arrastre}}$$

donde, recordando la nomenclatura utilizada

$$\mathbf{v}_{\mathbf{absoluta}} \equiv \mathbf{v}_{\mathbf{P}} = \left(\frac{d\mathbf{r}_{\mathbf{P}}}{dt}\right)_S$$

$$\mathbf{v}_{\mathbf{relativa}} \equiv \mathbf{v}_{\mathbf{P}}^{/} = \left(\frac{d\mathbf{r}_{\mathbf{P}}^{/}}{dt}\right)_{S^{/}}$$

$$\mathbf{v}_{\mathbf{arrastre}} \equiv \mathbf{v}_{\mathbf{O}^{/}} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{\mathbf{P}}^{/} = \left(\frac{d\mathbf{r}_{\mathbf{O}^{/}}}{dt}\right)_S + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{\mathbf{P}}^{/}$$

4.4 RELACIÓN ENTRE LOS VECTORES ACELERACIÓN DE UNA PARTÍCULA MATERIAL EN DOS SISTEMAS DE REFERENCIA EN MOVIMIENTO RELATIVO

Manteniendo los mismos criterios que en el apartado anterior, llamaremos aceleración absoluta del punto P (y la designaremos por $\mathbf{a}_P$), a la variación medida por un observador ligado al sistema de referencia S del vector velocidad absoluta. Es decir, $\mathbf{a_P} = \left(\dfrac{d\mathbf{v_P}}{dt}\right)_S$.
Llamaremos aceleración relativa (y la designaremos por $\mathbf{a'}_P$) a la variación medida por un observador ligado al sistema de referencia S' del vector velocidad relativa. Es decir,

$$\mathbf{a}'_{\mathbf{P}} = \left(\frac{d\mathbf{v}'_{\mathbf{P}}}{dt}\right)_{S'} .$$

Para encontrar la relación entre ambas derivaremos con respecto al tiempo la expresión (4.21) desde el sistema S

$$\mathbf{a_P} = \left(\frac{d\mathbf{v_P}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\mathbf{v}'_{\mathbf{P}}}{dt}\right)_S + \left(\frac{d\mathbf{v}_{\mathbf{O}'}}{dt}\right)_S + \left(\frac{d}{dt}(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}'_{\mathbf{P}})\right)_S \tag{4.22}$$

Aplicamos la relación (4.16) entre las derivadas en dos sistemas de referencia y tenemos

$$\left(\frac{d\mathbf{v}'_{\mathbf{P}}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\mathbf{v}'_{\mathbf{P}}}{dt}\right)_{S'} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}'_{\mathbf{P}} \tag{4.23}$$

y también

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}'_{\mathbf{P}})\right)_S &= \left(\frac{d\mathbf{\Omega}}{dt}\right)_S \times \mathbf{r}'_{\mathbf{P}} + \mathbf{\Omega} \times \left(\frac{d\mathbf{r}'_{\mathbf{P}}}{dt}\right)_S = \\ &= \left(\frac{d\mathbf{\Omega}}{dt}\right)_S \times \mathbf{r}'_{\mathbf{P}} + \mathbf{\Omega} \times \left[\left(\frac{d\mathbf{r}'_{\mathbf{P}}}{dt}\right)_{S'} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}'_{\mathbf{P}}\right] = \\ &= \left(\frac{d\mathbf{\Omega}}{dt}\right)_S \times \mathbf{r}'_{\mathbf{P}} + \mathbf{\Omega} \times \left(\frac{d\mathbf{r}'_{\mathbf{P}}}{dt}\right)_{S'} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}'_{\mathbf{P}}) \end{aligned} \tag{4.24}$$

Hagamos algunas observaciones sobre los términos que aparecen en (4.24). En primer lugar nos damos cuenta de que

$$\left(\frac{d\mathbf{\Omega}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\mathbf{\Omega}}{dt}\right)_{S'} = \frac{d\mathbf{\Omega}}{dt}$$

ya que al cambiar de sistema de referencia nos aparece el término **S** x **S** que es nulo. Esto significa que la aceleración angular **"** del sistema de referencia S' con respecto al S es la misma medida en un sistema que en otro.

Hay también un término ya conocido. $\left(\dfrac{d\mathbf{r}'_P}{dt}\right)_{S'}$ es la velocidad relativa de P. Así, la expresión (4.24) queda:

$$\left(\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}'_P)\right)_S = \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\times\mathbf{r}'_P + \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{v}'_P + \boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}'_P) \tag{4.25}$$

Sustituyendo (4.23) y (4.25) en (4.22) y llamando $\mathbf{a}_{O'} = \left(\dfrac{d\mathbf{v}_{O'}}{dt}\right)_S$ a la aceleración de O' medida por un observador ligado al sistema S tenemos

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}'_P + \mathbf{a}_{O'} + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\times\mathbf{r}'_P + \boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}'_P) + 2\,\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{v}'_P \tag{4.26}$$

Identificamos el término correspondiente a la aceleración relativa (aunque ya sabemos que es, por definición, $\mathbf{a}'_P$) haciendo nulos aquéllos términos en los que intervengan movimientos del sistema móvil. Es decir, suponiendo nulos los términos correspondientes a traslación del origen ($\mathbf{a}_{O'}$) y a la rotación de los ejes (todos aquéllos en los que aparezca $\boldsymbol{\Omega}$ o su derivada). Así, vemos que el único término no nulo es

$$\mathbf{a}'_P = \left(\frac{d\mathbf{v}'_P}{dt}\right)_{S'}$$

como ya sabíamos.

Tratamos ahora de identificar cada uno de los sumandos correspondientes a la aceleración de arrastre. Recordamos que el concepto de arrastre va ligado únicamente al movimiento del sistema de referencia móvil (traslación del origen y rotación de los ejes). Para ello supongamos que la partícula material no se mueve con respecto a S'. Así, serán nulos aquéllos términos en los que aparezcan velocidades o aceleraciones relativas ($\mathbf{v}'_P$ o $\mathbf{a}'_P$). La aceleración de arrastre será entonces

$$\mathbf{a}_{O'} + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\times\mathbf{r}'_P + \boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}'_P)$$

donde claramente identificamos el término correspondiente a la traslación del origen ($\mathbf{a}_{O'}$) y las dos componentes, tangencial y normal de la aceleración debida al giro de los ejes móviles, $\dfrac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\times\mathbf{r}'_P$ y $\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}'_P)$, respectivamente.

El último término que no queda englobado en ninguno de los anteriores es $2\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{v}'_P$ y recibe el nombre de aceleración complementaria o de Coriolis. Aparece por el efecto combinado del giro de los ejes móviles y del movimiento relativo de la partícula material con respecto a ellos.

Resumiendo, la expresión (4.26) se puede escribir también como

$$\mathbf{a}_{\mathbf{absoluta}} = \mathbf{a}_{\mathbf{relativa}} + \mathbf{a}_{\mathbf{arrastre}} + \mathbf{a}_{\mathbf{Coriolis}}$$

donde, recordando la nomenclatura utilizada

$$\mathbf{a}_{\mathbf{absoluta}} \equiv \mathbf{a}_{\mathbf{P}} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_{\mathbf{P}}}{\mathrm{dt}}\right)_{S}$$

$$\mathbf{a}_{\mathbf{relativa}} \equiv \mathbf{a}_{\mathbf{P}}^{/} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_{\mathbf{P}}^{/}}{\mathrm{dt}}\right)_{S^{/}}$$

$$\mathbf{a}_{\mathbf{arrastre}} \equiv \mathbf{a}_{\mathbf{O}^{/}} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{dt}} \times \mathbf{r}_{\mathbf{P}}^{/} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{\mathbf{P}}^{/})$$

$$\mathbf{a}_{\mathbf{Coriolis}} \equiv 2\,\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{\mathbf{P}}^{/}$$

Existe un caso particular interesante que será estudiado con detalle en dinámica que es aquél en el cual observadores situados en dos sistemas distintos que estén en movimiento relativo uno con respecto a otro observan para una partícula material la misma aceleración. Es decir, cuando $\mathbf{a}_P = \mathbf{a'}_P$. De la ecuación (4.26) deducimos que esto sólo ocurre cuando el sistema móvil S' no gira con respecto a S (**S** y su derivada son nulas) y además el origen O' se desplaza con velocidad constante ($\mathbf{a}_{O'} = \mathbf{0}$). Es decir, cuando el movimiento de S' con respecto a S es de traslación, rectílineo y uniforme.

4.5 COMPOSICIÓN DE ROTACIONES

Como hemos visto, el movimiento general de un sistema S' de referencia respecto a otro S viene representado por una traslación de conjunto definida mediante los vectores velocidad y aceleración $\mathbf{v}_{O'}$ y $\mathbf{a}_{O'}$ del origen de S', referidos a S, y por una rotación instantánea, determinada por el vector velocidad angular de rotación $\mathbf{\Omega}$ y por el vector aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ del sistema S' respecto al sistema S (Figura 4.4(a)).

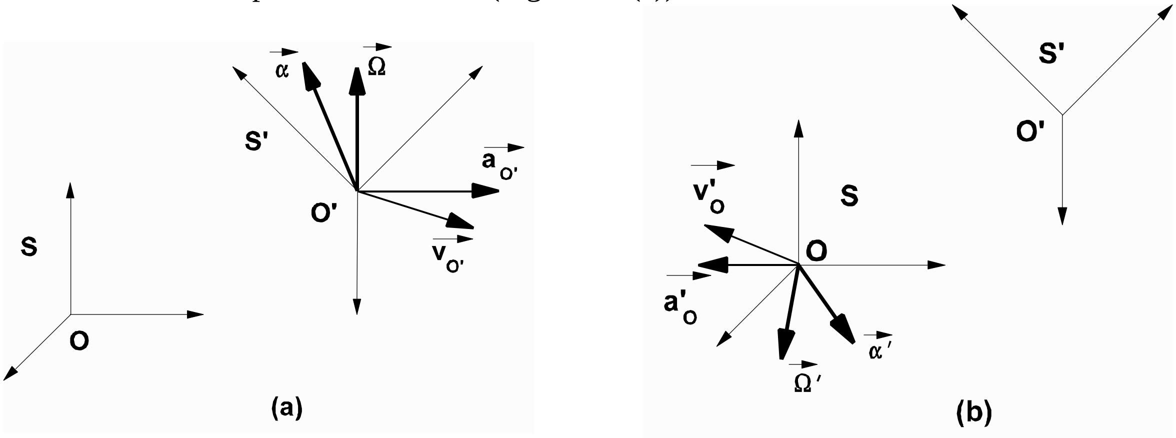

Figura 4.4

Los valores de $\mathbf{\Omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ (con $\mathbf{\Omega}$ no paralelo a $\boldsymbol{\alpha}$ en general) son únicos para un único sistema de referencia S' en cada instante de tiempo. Como un sistema de referencia suele estar ligado a un sólido rígido, lo anterior es aplicable a sólidos rígidos de la misma manera: un sólido rígido sólo puede tener una única rotación instantánea respecto a un sistema de referencia S.

La situación anterior es simétrica. Un observador ligado a S' verá que el sistema S se mueve respecto a él con una traslación de su origen

$$\mathbf{v}_{\mathbf{O}}' = -\mathbf{v}_{\mathbf{O}'} \qquad \mathbf{a}_{\mathbf{O}} = -\mathbf{a}_{\mathbf{O}'}$$

y con una rotación instantánea

$$\mathbf{\Omega}' = -\mathbf{\Omega} \qquad \boldsymbol{\alpha}' = -\boldsymbol{\alpha}$$

como se indica en la figura 4.4(b).

En ocasiones, y por simplicidad, se suelen representar los vectores característicos de la rotación de un sistema S' (o de un sólido rígido) respecto a otro S en componentes mediante

$$\mathbf{\Omega} = \Omega_x\,\mathbf{i} + \Omega_y\,\mathbf{j} + \Omega_z\,\mathbf{k}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\Omega}{dt} = \alpha_x\,\mathbf{i} + \alpha_y\,\mathbf{j} + \alpha_z\,\mathbf{k}$$

donde hay que interpretar Ω_x, Ω_y y Ω_z como las componentes del vector velocidad angular instantánea de rotación, único, de S' respecto a S y nunca como rotaciones independientes aplicadas sobre el mismo sistema de referencia o sobre el mismo sólido rígido, según sea el caso. Las mismas consideraciones son aplicables para el vector aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$.

No obstante, es posible definir sistemas de referencia móviles que incluyan los movimientos diferentes de dos o más sólidos rígidos y, en este caso, la rotación del sistema vendrá dada por la composición de las rotaciones de los sólidos cuyos movimientos incluye.

Considérense tres sistemas de referencia S, S' y S", cada uno de ellos ligado a un único sólido. Sean $\mathbf{S}_1$ y $\mathbf{"}_1$ la velocidad angular y aceleración angular de S' respecto de S y $\mathbf{S}_2$ y $\mathbf{"}_2$ las correspondientes de S" respecto a S' (Figura 4.5(a)). Obtendremos la expresión de la velocidad angular $\mathbf{S}$ y de la aceleración angular $\mathbf{"}$ de rotación de S" respecto de S (Figura 4.5(b)).

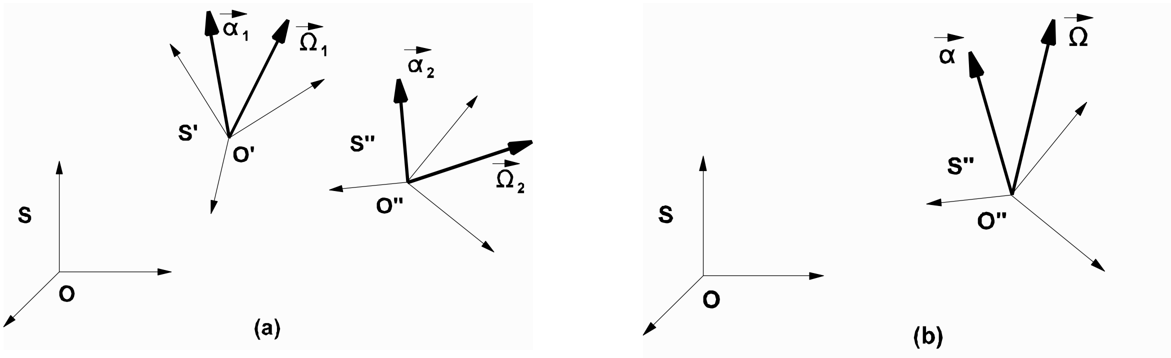

Figura 4.5

La velocidad angular de la rotación compuesta de S" respecto a S viene dada por

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_1 + \boldsymbol{\Omega}_2$$

por la definición de vector velocidad angular.

La aceleración angular la obtenemos derivando la expresión anterior respecto al tiempo en S

$$\left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\Omega}_1 + \boldsymbol{\Omega}_2)\right)_S = \left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}_1}{dt}\right)_S + \left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}_2}{dt}\right)_S =$$

$$= \left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}_1}{dt}\right)_S + \left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}_2}{dt}\right)_{S'} + \boldsymbol{\Omega}_1 \times \boldsymbol{\Omega}_2$$

y como, por definición

$$\boldsymbol{\alpha} = \left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\right)_S \qquad \boldsymbol{\alpha}_1 = \left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}_1}{dt}\right)_S \qquad \boldsymbol{\alpha}_2 = \left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}_2}{dt}\right)_{S'}$$

resulta

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\Omega}_1 \times \boldsymbol{\Omega}_2$$

El término $\mathbf{S}_1$ x $\mathbf{S}_2$ representa la aceleración angular de arrastre, que explica el cambio en dirección de $\mathbf{S}_2$ debido al hecho de que es arrastrada por la rotación $\mathbf{S}_1$. No puede hacer variar el módulo de $\mathbf{S}_2$ ya que es perpendicular a ella. Siempre tiene la forma "(velocidad angular que arrastra) x (velocidad angular arrastrada)".

El procedimiento anterior se puede aplicar a un número cualquiera de rotaciones independientes (es decir, que actúan sobre sólidos con movimientos diferentes entre sí pero sometidos a ligaduras mutuas) en las condiciones especificadas.

La composición de rotaciones anterior determina cómo va a ser el movimiento de rotación de S" respecto a S, pero queda por determinar cuál va a ser la traslación del origen de S" respecto a S. Se verifica que

$$\mathbf{v}_{\mathbf{O}''} = \mathbf{v}_{\mathbf{O}'} + \mathbf{v}'_{\mathbf{O}''} + \boldsymbol{\Omega}_1 \times \mathbf{r}'_{\mathbf{O}''}$$

$$\mathbf{a}_{\mathbf{O}''} = \mathbf{a}_{\mathbf{O}'} + \mathbf{a}'_{\mathbf{O}''} + \boldsymbol{\alpha}_1 \times \mathbf{r}'_{\mathbf{O}''} + \boldsymbol{\Omega}_1 \times (\boldsymbol{\Omega}_1 \times \mathbf{r}'_{\mathbf{O}''}) + 2\,\boldsymbol{\Omega}_1 \times \mathbf{v}'_{\mathbf{O}''}$$

como es relativamente fácil comprobar (se recomienda como ejercicio, así como justificar que las expresiones anteriores son coherentes con las relaciones entre velocidades y aceleraciones para los sistemas S y S', por un lado, y S' y S", por otro).

Un caso particular simple ocurre cuando los ejes de las dos rotaciones instantáneas, $\mathbf{S}_1$,"$_1$ y $\mathbf{S}_2$,"$_2$, se cortan en un punto.

Entonces es posible hacer coincidir los orígenes de los sistemas S' y S" en ese punto (O'=O") con lo que

$$\mathbf{r}'_{\mathbf{O}''} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{v}'_{\mathbf{O}''} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{a}'_{\mathbf{O}''} = \mathbf{0}$$

y resulta

$$\mathbf{v}_{\mathbf{O}''} = \mathbf{v}_{\mathbf{O}'} \qquad \mathbf{a}_{\mathbf{O}''} = \mathbf{a}_{\mathbf{O}'}$$

con lo que la composición de sistemas móviles S' y S" se reduce únicamente a la composición de rotaciones y no afecta a la traslación del origen.

Con las consideraciones anteriores, las relaciones generales entre velocidades y aceleraciones, (4.21) y (4.26), se pueden aplicar para los sistemas S y S'$_c$ (composición de S' y S") sin ningún problema.