ÍNDICE

6.1 INTRODUCCIÓN

Un sistema de partículas materiales es un conjunto $\{m_i\}_{i=1,N}$ de N partículas, cada una de ellas con masa m_i, que constituyen un sistema cerrado (no puede intercambiar materia con el exterior, es decir no se admiten ni más ni menos partículas, pero sí puede haber intercambio de energía con el exterior). Por lo demás no se imponen al sistema más restricciones y cada partícula m_i puede estar o no sometida a ligaduras, tanto procedentes del sistema (es decir, de otras partículas m_j) como del exterior (mediante interacción con otros sistemas ajenos al que nos ocupa).

La regla básica para estudiar un sistema de partículas es simple: cada una de ellas cumple la ecuación fundamental de la dinámica (5.26) en un sistema de referencia inercial. Si conocemos la resultante de las fuerzas que actúan sobre cada partícula, mediante la integración del sistema de 3N ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento del sistema (tres ecuaciones diferenciales escalares de segundo orden del tipo de las (5.27) para cada partícula, en el caso general) obtendremos la solución completa a la evolución dinámica del sistema, dada por los vectores de posición $\mathbf{r}_i(t)$ de cada una de las partículas que lo componen, siempre que sean conocidas las condiciones iniciales ($\mathbf{r}_{0i}=\mathbf{r}_i(t=0)$ y $\mathbf{v}_{0i}=\mathbf{v}_i(t=0)$, para $i=1,...,N$).

Sin embargo, este procedimiento, que ya se mostraba complicado en muchos casos para una sola partícula, se hace casi imposible de aplicar en la práctica para un sistema de N partículas materiales, tanto más cuanto mayor sea N y haciendo abstracción de casos particulares triviales.

Por esta razón cobran gran importancia los teoremas fundamentales y las leyes de conservación en la dinámica de sistemas de partículas materiales, que si bien nos proporcionan una información parcial sobre la evolución del sistema, son relativamente sencillos de aplicar y en muchos casos suficientes.

En este capítulo se expondrán los enunciados, demostraciones y significado de los teoremas y leyes fundamentales de la dinámica para un sistema de partículas materiales. Los resultados serán aplicables más adelante para el sólido rígido, un sistema de partículas definido mediante unas ligaduras específicas entre las partes que lo componen. Al final del capítulo se tratarán con cierto detalle las colisiones, como ejemplo de aplicación a un sistema de dos partículas que interaccionan entre sí, bajo ciertas condiciones, mediante percusiones.

6.2 NOTACIÓN Y DEFINICIONES BÁSICAS

6.2.1 SISTEMA DE PARTÍCULAS MATERIALES.

Denotaremos por $\{m_i\}_{i=1,N}$ a un sistema de N partículas materiales. Mientras no se diga lo contrario supondremos que la posición, dada por el vector de posición $\mathbf{r}_i$ para cada partícula m_i, está representada en un sistema de referencia inercial triortogonal S (Figura 6.1).

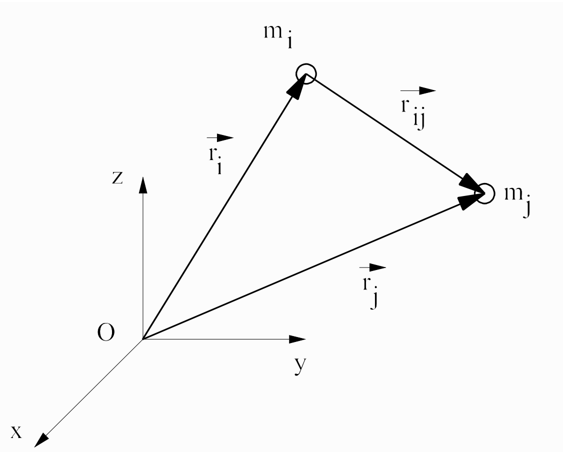


Figura 6.1

El vector de posición relativa de la partícula j respecto de la i se denota por $\mathbf{r}_{ij}$ y es igual a

$$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i = -\mathbf{r}_{ji} \tag{6.1}$$

donde $\mathbf{r}_{ji}$ representa el vector posición relativa de m_i respecto de m_j, evidentemente.

Si consideramos un sistema de referencia no inercial S'_i con origen en la partícula m_i y con movimiento de traslación respecto de S, las derivadas de cualquier vector función del tiempo son iguales en S y en S'_i. Derivando la expresión (6.1) se obtiene

$$\mathbf{v}_{ij} = \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i$$

que representa la velocidad relativa de m_j respecto de m_i medida en cualquier sistema de referencia S'_i que cumpla las condiciones especificadas. De forma análoga

$$\mathbf{a}_{ij} = \mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i$$

representa la aceleración relativa de m_j respecto de m_i en tales condiciones.

6.2.2 FUERZAS EXTERIORES Y FUERZAS INTERIORES.

Denotaremos mediante $\mathbf{F}_i$ a la resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre la partícula m_i. Cada partícula m_i puede interaccionar con otras partículas que no pertenezcan al sistema. Supongamos que m_i interacciona con η sistemas exteriores y sea ν uno cualquiera de ellos. La interacción entre los sistemas m_i y ν se manifiesta mediante un par de acción y reacción $\mathbf{F}_{\nu i}$=-$\mathbf{F}_{i\nu}$, donde $\mathbf{F}_{i\nu}$, que representa la fuerza que actúa sobre ν debido a su interacción con m_i, no nos interesa, porque ν no forma parte de nuestro sistema de partículas.

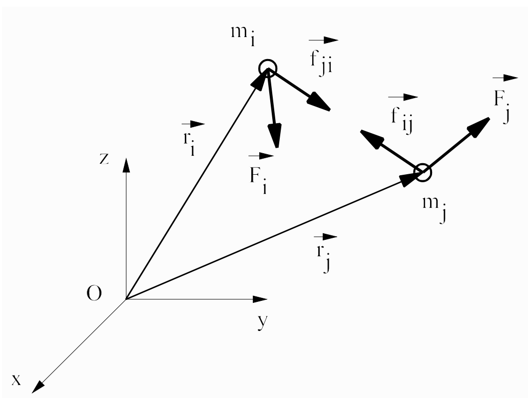


Figura 6.2

La fuerza exterior resultante que actúa sobre m_i viene dada por

$$\mathbf{F_i} = \sum_{\nu=1}^{\eta} \mathbf{F_{\nu i}}$$

Por otra parte, cada dos partículas m_i y m_j pueden interaccionar entre sí mediante un par de acción y reacción y este tipo de interacción procede del interior del sistema. Denotaremos por $\mathbf{f}_{ij}$ a la fuerza interior resultante que actúa sobre la partícula m_j debido a su interacción con m_i. Supondremos que todas las fuerzas interiores verifican la ley fuerte de acción y reacción, con lo que

$$\mathbf{f_{ij}} = -\mathbf{f_{ji}} \tag{6.2}$$

y tienen la misma recta soporte, definida por el vector posición relativa $\mathbf{r}_{ij}$, con lo que se cumple que

$$\mathbf{r_{ij}} \times \mathbf{f_{ij}} = \mathbf{r_{ij}} \times \mathbf{f_{ji}} = \mathbf{0} \tag{6.3}$$

Así, por ejemplo, en un sistema de partículas materiales situado en las proximidades de la superficie de la tierra, cada partícula m_i está sometida al peso $\mathbf{F}_{gi}=m_i\mathbf{g}$, que es una fuerza exterior ya que representa la interacción con el campo de gravedad de la tierra, que no forma parte del sistema.

Al mismo tiempo, cada dos partículas m_i y m_j pueden interaccionar entre sí mediante fuerzas interiores $\mathbf{f}_{ij}$, $\mathbf{f}_{ji}$, por colisiones entre ellas, por estar cargadas eléctricamente, etc.

La fuerza total que actúa sobre cada partícula m_i del sistema viene dada por

$$\mathbf{F_i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \mathbf{f_{ji}} \tag{6.4}$$

donde se excluye j=i en el sumatorio, ya que m_i no ejerce fuerza sobre sí misma.

6.2.3 CANTIDAD DE MOVIMIENTO.

Cada partícula del sistema tiene una cantidad de movimiento $\mathbf{p}_i=m_i\mathbf{v}_i$. Se define la cantidad de movimiento total del sistema de partículas materiales mediante

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p_i} = \sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{v_i} \tag{6.5}$$

que no está asociada a ninguna partícula en concreto, sino a todo el sistema.

6.2.4 MOMENTO CINÉTICO.

El momento cinético de cada partícula respecto a un punto O viene dado por $\mathbf{L}_{Oi} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ (por sencillez se ha elegido como punto el origen del sistema de referencia que estamos considerando). Se define el momento cinético total del sistema de partículas materiales como

$$\mathbf{L_O} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r_i} \times \mathbf{p_i} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r_i} \times (m_i \mathbf{v_i}) \qquad (6.6)$$

El significado del momento cinético $\mathbf{L}_O$, así como del resto de las magnitudes que se están definiendo, se analizará más adelante.

6.2.5 ENERGÍA CINÉTICA.

La energía cinética total de un sistema de partículas materiales se define como la suma de las energías cinéticas de cada partícula

$$E_c = \sum_{i=1}^{N} E_{ci} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2 \qquad (6.7)$$

6.2.6 ENERGÍA POTENCIAL.

La energía potencial de un sistema de partículas materiales puede proceder de la interacción de cada partícula m_i del sistema con otras partículas exteriores al mismo mediante fuerzas conservativas, y en este caso hablaremos de energía potencial exterior E_p^{Ext}, o bien de la interacción entre cada dos partículas del sistema mediante fuerzas conservativas, y en este caso hablaremos de energía potencial interior y la denotaremos por E_p^{Int}. Hay que tener en cuenta que existirán fuerzas exteriores e interiores tanto de tipo conservativo como de tipo disipativo en general.

Para definir la energía potencial exterior supongamos que una partícula genérica m_i interacciona con η sistemas exteriores y que μ de tales interacciones son conservativas ($\mu \leq \eta$). Sea ν uno de estos μ sistemas. La energía potencial de interacción entre m_i y ν viene dada por $E_p^{\nu i}$ y la energía potencial total de interacción de m_i con el exterior del sistema por

$$E_p^{\,i} = \sum_{\nu=1}^{\mu} E_p^{\nu i}$$

Se define la energía potencial exterior total del sistema de partículas materiales como

$$E_p^{Ext} = \sum_{i=1}^{N} E_p^{i} \tag{6.8}$$

La energía potencial exterior representa el intercambio de energía del sistema con el exterior debido a fuerzas conservativas. El sistema también puede intercambiar energía mediante fuerzas disipativas con el exterior (hemos exigido al sistema que sea cerrado, no aislado).

Para el caso de la energía potencial interior se procede de forma análoga. Para dos partículas m_i y m_j del sistema, llamaremos E_p^{ij} a la energía potencial total de interacción mediante fuerzas de tipo conservativo entre ambas. Se define la energía potencial interior del sistema de partículas materiales como la suma de las energías potenciales E_p^{ij} de interacción entre cada par de partículas, extendida a todos los posibles pares ij, con $i \neq j$, ya que una partícula no interacciona consigo misma. Es decir

$$E_p^{Int} = \sum_{\substack{\forall \text{ pares } ij \\ i \neq j}}^{N} E_p^{ij}$$

Esta expresión se puede convertir en un sumatorio doble

$$E_p^{Int} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} E_p^{ij} \tag{6.9}$$

que es el que utilizaremos habitualmente. La equivalencia es fácil de ver, ya que

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} E_p^{ij} = \sum_{\substack{\forall \text{ pares } ij \\ i \neq j}} (E_p^{ij} + E_p^{ji})$$

y como la energía potencial de interacción entre cada dos partículas es única, se cumple que $E_p^{ij} + E_p^{ji} = 2E_p^{ij}$ y resulta

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} E_p^{ij} = 2 \sum_{\substack{\forall \text{ pares } ij \\ i \neq j}} E_p^{ij}$$

La energía potencial total de interacción de una partícula m_i con el resto de las N-1 partículas m_j del sistema es

$$E_p^{i\,Int} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} E_p^{ij} \tag{6.10}$$

de donde se puede expresar la ecuación (6.9) como

$$E_p^{Int} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} E_p^{i\ Int} \qquad (6.11)$$

La energía potencial interior pertenece únicamente al sistema de partículas, pero la energía potencial exterior es compartida con otros sistemas diferentes.

6.3 CENTRO DE MASAS DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS MATERIALES

6.3.1 DEFINICIÓN DE CENTRO DE MASAS.

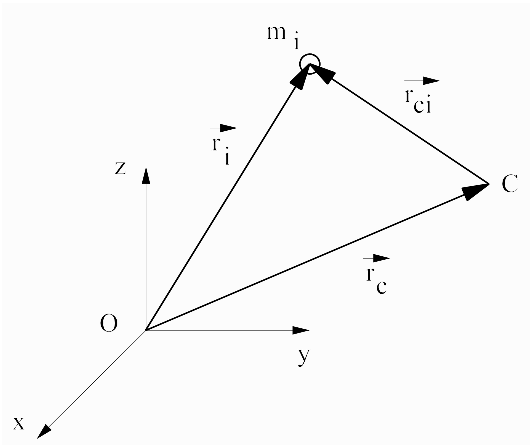


Figura 6.3

Se define el centro de masas de un sistema de partículas como el punto C cuyo vector de posición viene dado por

$$\mathbf{r_C} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r_i}}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \qquad (6.12)$$

Si definimos la masa total del sistema como

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i \qquad (6.13)$$

la ecuación (6.12) se convierte en

$$M\,\mathbf{r_C} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r_i} \qquad (6.14)$$

Las coordenadas del centro de masas en un sistema de referencia OXYZ vienen dadas por

$$x_C = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i x_i \qquad y_C = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i y_i \qquad z_C = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i z_i$$

donde (x_i, y_i, z_i) representan las coordenadas de la partícula m_i en tal sistema.

6.3.2 MOVIMIENTO DEL CENTRO DE MASAS.

Derivando respecto al tiempo la ecuación (6.14) que define el centro de masas, se obtiene

$$M\mathbf{v_C} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v_i} = \mathbf{p} \tag{6.15}$$

que nos indica que la cantidad de movimiento **p** del sistema de partículas es igual a la masa total M multiplicada por la velocidad $\mathbf{v}_C$ del centro de masas.

Volviendo a derivar la ecuación (6.15) resulta

$$M\mathbf{a_C} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\mathbf{v_i}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \tag{6.16}$$

donde $\mathbf{a}_C$ es la aceleración del centro de masas. Para interpretar qué representa la derivada de **p** respecto al tiempo, apliquemos la segunda ley de Newton a una partícula genérica m_i del sistema, que estará sometida a una fuerza exterior resultante $\mathbf{F}_i$ y a N-1 fuerzas interiores resultantes $\mathbf{f}_{ji}$ procedentes de las otras j partículas (j=1,...,N, con $j \neq i$). En consecuencia

$$\mathbf{F_i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \mathbf{f_{ji}} = m_i \mathbf{a_i} = \frac{d\mathbf{p_i}}{dt} \tag{6.17}$$

Sumando estas ecuaciones para las N partículas del sistema se obtiene

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F_i} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \mathbf{f_{ji}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\mathbf{p_i}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{p_i} \right) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \tag{6.18}$$

Definiendo la resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema como

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F_i}$$

y teniendo en cuenta que

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \mathbf{f_{ji}} = \sum_{\substack{\forall \text{ pares } ij \\ i\neq j}} (\mathbf{f_{ij}} + \mathbf{f_{ji}}) = \mathbf{0}$$

ya que las fuerzas interiores cumplen la ley de acción y reacción (ecuación 6.2), de la ecuación (6.18) resulta

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \tag{6.19}$$

lo que indica que la resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema es igual a la derivada respecto al tiempo de la cantidad de movimiento total del sistema.

De las ecuaciones (6.16) y (6.19) se obtiene

$$\mathbf{F} = M\mathbf{a_C} \tag{6.20}$$

que es la expresión matemática del teorema del centro de masas, cuyo enunciado es:

> "El centro de masas de un sistema de partículas materiales se mueve como una partícula material de masa igual a la masa total del sistema y sometida a la resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema".

En un sistema de partículas en el que la resultante de las fuerzas exteriores sea nula el centro de masas seguirá un movimiento rectilíneo uniforme o permanecerá en reposo y la cantidad de movimiento total del sistema se mantendrá constante. Es decir

$$\text{Si} \quad \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a_C} = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \mathbf{v_C} = \mathbf{cte}. \tag{6.21}$$

6.3.3 EL SISTEMA DE REFERENCIA CENTRO DE MASAS.

Dado un sistema de partículas materiales siempre es posible definir un sistema de referencia, con origen en el centro de masas y con movimiento de traslación respecto a cualquier sistema de referencia inercial. A un sistema de referencia de este tipo le llamaremos **sistema centro de masas**, o abreviadamente **sistema CM**.

Como el centro de masas sigue un movimiento acelerado, salvo si $\mathbf{F}=\mathbf{0}$, el sistema CM no será inercial en general, pero al ser su movimiento de traslación las derivadas de cualquier vector respecto al tiempo tendrán el mismo valor en él que en cualquier sistema inercial. La única fuerza de inercia que aparecerá sobre una partícula m_i en el sistema CM será $-m_i\mathbf{a}_C$. En el caso de que la resultante de las fuerzas exteriores sea nula el sistema CM es un sistema de referencia inercial, ya que entonces $\mathbf{a}_C=\mathbf{0}$.

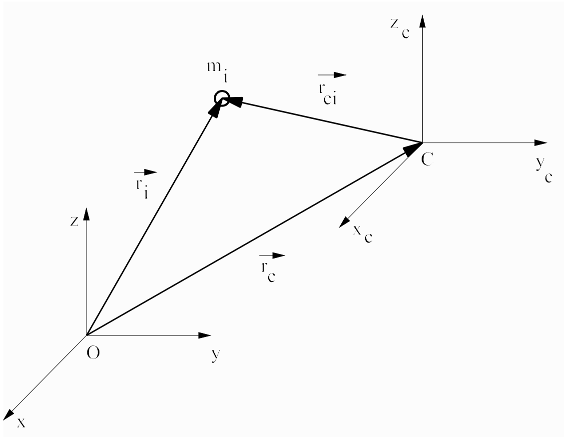


Figura 6.4

El vector de posición del centro de masas en el sistema CM es, evidentemente, $\mathbf{r}_{CC}=\mathbf{0}$ (Figura 6.4). Aplicando la definición (6.12) resulta

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r_{Ci}} = \mathbf{0} \tag{6.22}$$

donde $\mathbf{r}_{Ci}$ es el vector de posición de m_i en el sistema CM.

Derivando la ecuación anterior se obtiene

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v_{Ci}} = \mathbf{0} \tag{6.23}$$

o, lo que es lo mismo

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{p_{Ci}} = \mathbf{p_C} = \mathbf{0}$$

es decir, la cantidad de movimiento total del sistema de partículas respecto al sistema CM es nula.

Volviendo a derivar respecto al tiempo la ecuación (6.23) resulta

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{a}_{Ci} = \mathbf{0} \tag{6.24}$$

El movimiento del centro de masas, regido por la ecuación (6.20), representa la traslación total de todo el sistema de partículas debida a las fuerzas exteriores que actúan sobre él, pero no dice nada respecto a cómo es el movimiento de las partículas del sistema respecto al centro de masas, que suele ser el más complejo de estudiar. En ocasiones es muy útil situarse en el sistema CM, sobre todo si es inercial, y utilizar las ecuaciones (6.22), (6.23) y (6.24) para simplificar el estudio del movimiento del sistema de partículas relativo al centro de masas.

6.4 TEOREMA DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO.

La ecuación (6.19) escrita en la forma $\mathbf{F}\,dt = d\mathbf{p}$ puede ser integrada entre dos instantes t_1 y t_2 y conduce a

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,dt = \int_{\mathbf{p}_1}^{\mathbf{p}_2} d\mathbf{p} = \mathbf{p_2} - \mathbf{p_1} \tag{6.25}$$

Se define el impulso total de las fuerzas exteriores al sistema de partículas como

$$\mathbf{I}^{\mathbf{Ext}} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,dt$$

lo que permite escribir la ecuación (6.25) como

$$\mathbf{I}^{\mathbf{Ext}} = \mathbf{p_2} - \mathbf{p_1} \tag{6.26}$$

que constituye la expresión del teorema de la cantidad de movimiento, cuyo enunciado es:

> "El impulso total de las fuerzas exteriores que actúan sobre un sistema de partículas materiales en un intervalo de tiempo es igual a la variación de la cantidad de movimiento total del sistema en ese intervalo".

El teorema indica, como ya lo hacía la ecuación (6.19), que los cambios de la cantidad de movimiento del sistema se deben sólo a las fuerzas exteriores y las fuerzas interiores no influyen en ellos.

Como consecuencia inmediata se deduce el teorema de conservación de la cantidad de movimiento:

> "Si la resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre un sistema de partículas es nula en un intervalo de tiempo, entonces la cantidad de movimiento del sistema se mantiene constante en ese intervalo".

En efecto, a partir de la ecuación (6.19) se obtiene que

$$\mathbf{F} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p} = \mathbf{cte} \tag{6.27}$$

este resultado es equivalente a que $\mathbf{v}_C = \mathbf{cte}$ en estas condiciones, ya que $\mathbf{p} = M\mathbf{v}_C$, como se vio en la ecuación (6.15).

6.5 MOMENTO CINÉTICO DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS MATERIALES

6.5.1 EL MOMENTO CINÉTICO EN SISTEMAS DE REFERENCIA INERCIALES.

Para un sistema inercial S el momento cinético de un sistema de partículas respecto al origen O está definido por la ecuación (6.6)

$$\mathbf{L_O} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r_i} \times \mathbf{p_i}$$

donde $\mathbf{r}_i$ y $\mathbf{p}_i$ representan el vector de posición respecto a O y la cantidad de movimiento de la partícula m_i en tal sistema de referencia. La definición se puede aplicar a cualquier otro punto del sistema S. Sea P un punto cuyo vector de posición en S viene dado por $\mathbf{r}_P$ y sea $\mathbf{r}_{Pi}=\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_P$ el vector de posición relativa de la partícula m_i respecto al punto P.

El momento cinético del sistema de partículas respecto a P viene dado por

$$\mathbf{L_P} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r_{Pi}} \times \mathbf{p_i} \tag{6.28}$$

y está relacionado con $\mathbf{L}_O$ mediante

$$\mathbf{L_O} = \mathbf{L_P} + \mathbf{r_P} \times \mathbf{p} \tag{6.29}$$

como es inmediato comprobar. El punto P puede ser fijo ($\mathbf{r}_P=\mathbf{cte}$) o móvil, en cuyo caso describirá una trayectoria en el sistema S y tendrá una cierta velocidad $\mathbf{v}_P$ y una aceleración $\mathbf{a}_P$ en cada instante.

Si el punto P es el centro de masas del sistema la ecuación (6.29) toma la forma

$$\mathbf{L_O} = \mathbf{L_C} + \mathbf{r_C} \times \mathbf{p} \tag{6.30}$$

que permite interpretar el momento cinético $\mathbf{L}_O$ respecto a un punto O, como el momento cinético respecto al centro de masas, $\mathbf{L}_C$, más el momento de la cantidad de movimiento del sistema de partículas aplicada en C respecto al punto O. La ecuación (6.30) se puede poner también en la forma

$$\mathbf{L_O} = \mathbf{L_C} + M\,\mathbf{r_C} \times \mathbf{v_C}$$

6.5.2 TEOREMA DEL MOMENTO CINÉTICO RESPECTO A UN PUNTO FIJO EN UN SISTEMA DE REFERENCIA INERCIAL.

Dado un sistema de referencia inercial S y un sistema de partículas materiales, para cada una de ellas se cumple el teorema del momento cinético respecto a cualquier punto fijo de S. En particular, eligiendo por sencillez el origen O del sistema de referencia, cada partícula m_i verifica

$$\mathbf{M_{Oi}} = \frac{d\mathbf{L_{Oi}}}{dt}$$

es decir

$$\mathbf{r_i} \times (\mathbf{F_i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \mathbf{f_{ji}}) = \frac{d\mathbf{L_{Oi}}}{dt} \qquad i = 1, ..., N \tag{6.31}$$

Sumando las N ecuaciones (6.31) se obtiene

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{r_i} \times \mathbf{F_i} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \mathbf{r_i} \times \mathbf{f_{ji}} = \frac{d}{dt}(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{L_{Oi}}) \tag{6.32}$$

El primer término del primer miembro de (6.32) es, por definición, el momento total de las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema, respecto al punto O,

$$\mathbf{M_O^{Ext}} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r_i} \times \mathbf{F_i}$$

El segundo término del primer miembro es nulo

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \mathbf{r_i} \times \mathbf{f_{ji}} = \sum_{\substack{\forall \text{ pares } ij \\ i\neq j}} (\mathbf{r_i} \times \mathbf{f_{ji}} + \mathbf{r_j} \times \mathbf{f_{ij}}) = \sum_{\substack{\forall \text{ pares } ij \\ i\neq j}} (\mathbf{r_j} - \mathbf{r_i}) \times \mathbf{f_{ij}} = \sum_{\substack{\forall \text{ pares } ij \\ i\neq j}} \mathbf{r_{ij}} \times \mathbf{f_{ij}} = \mathbf{0}$$

donde se han tenido en cuenta las expresiones (6.2) y (6.3).

El segundo miembro de la ecuación (6.32) representa la derivada del momento cinético del sistema de partículas respecto al punto O (ecuación 6.6).

En consecuencia, la ecuación (6.32) se transforma en

$$\mathbf{M_O^{Ext}} = \frac{d\mathbf{L_O}}{dt} \tag{6.33}$$

que es la expresión del teorema del momento cinético para un sistema de partículas materiales, cuyo enunciado es:

> "El momento dinámico total de las fuerzas exteriores que actúan sobre un sistema de partículas, respecto a un punto O fijo en un sistema inercial, es igual a la derivada respecto al tiempo del momento cinético del sistema de partículas, respecto al mismo punto O".

Este teorema es válido sólo si las fuerzas interiores cumplen el principio fuerte de acción y reacción, como se ha exigido en la deducción.

El teorema se cumple para cualquier punto fijo en el sistema S, pero no para puntos móviles. En el caso de que P sea un punto móvil, se propone como ejercicio demostrar que

$$\mathbf{M}_\mathbf{P}^{\mathbf{Ext}} = \frac{d\mathbf{L}_\mathbf{P}}{dt} + \mathbf{v}_\mathbf{P} \times \mathbf{p}$$

Si el punto móvil P es el centro de masas del sistema (P=C) el último término de la expresión anterior se anula

$$\mathbf{v}_\mathbf{C} \times \mathbf{p} = \mathbf{v}_\mathbf{C} \times (M\,\mathbf{v}_\mathbf{C}) = \mathbf{0}$$

y la ecuación anterior adopta la misma forma que (6.33)

$$\mathbf{M}_\mathbf{C}^{\mathbf{Ext}} = \frac{d\mathbf{L}_\mathbf{C}}{dt} \tag{6.34}$$

válida cualquiera que sea la forma en que se mueva el centro de masas.

Como consecuencia evidente de la ecuación (6.33) se deduce el teorema de conservación del momento cinético:

> "Si es nulo el momento resultante, respecto de un punto fijo, de las fuerzas exteriores que actúan sobre un sistema de partículas materiales, entonces el momento cinético del sistema respecto a dicho punto se conserva constante".

En efecto

$$\mathbf{M}_\mathbf{O}^{\mathbf{Ext}} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{L}_\mathbf{O}}{dt} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}_\mathbf{O} = \mathbf{cte} \tag{6.35}$$

6.5.3 EL TEOREMA DEL MOMENTO CINÉTICO EN SISTEMAS NO INERCIALES.

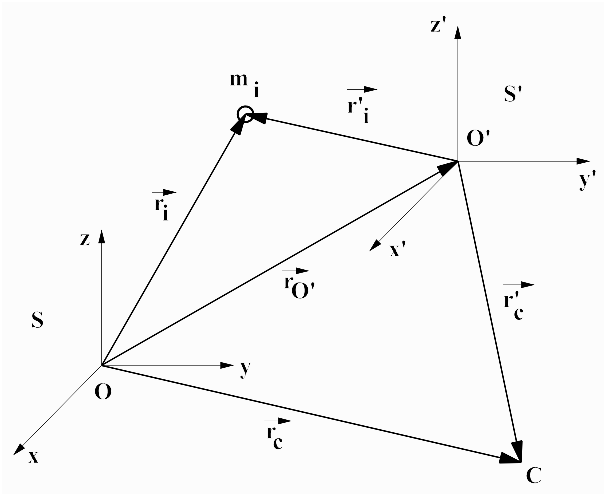


Figura 6.5

Consideremos un sistema de referencia no inercial S' (Figura 6.5). Cada partícula m_i del sistema de partículas materiales debe de cumplir, respecto a un punto fijo O' de S' (que por sencillez será el origen de S'), la ecuación (5.71)

$$\mathbf{M}_{O'i} + \mathbf{M}'_{O'i} = \left(\frac{d\mathbf{L}'_{O'i}}{dt}\right)_{S'}$$

o, equivalentemente

$$\mathbf{r}'_i \times (\mathbf{F}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \mathbf{f}_{ji}) + \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}'_i = \left(\frac{d\mathbf{L}'_{O'i}}{dt}\right)_{S'} \qquad i = 1,...,N$$

donde $\mathbf{F}'_i$ es la fuerza de inercia que actúa sobre la partícula m_i (se ha utilizado la notación de fuerza exterior porque, evidentemente, no procede del sistema de partículas, aunque no hay que olvidar que no representa ninguna interacción real con otro sistema físico). Sumando las N ecuaciones anteriores obtenemos

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}'_i = \left[\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{L}'_{O'i}\right)\right]_{S'}$$

ya que el sumatorio doble se anula en las mismas condiciones vistas en el apartado anterior. En una notación diferente, la ecuación anterior es

$$\mathbf{M}^{\mathbf{Ext}}_{O'} + \mathbf{M}'_{O'} = \left(\frac{d\mathbf{L}'_{O'}}{dt}\right)_{S'} \tag{6.36}$$

El primer término de la ecuación (6.36) representa el momento resultante de las fuerzas exteriores respecto a O'

$$\mathbf{M}^{\mathbf{Ext}}_{O'} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i$$

donde $\mathbf{r}'_i$ es el vector de posición de la partícula m_i en S' y $\mathbf{F}_i$ la fuerza exterior resultante que actúa sobre ella.

$\mathbf{M}'_{O'}$ representa el momento total, respecto a O', de las fuerzas de inercia que actúan sobre cada partícula m_i del sistema

$$\mathbf{M}'_{O'} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}'_i$$

El último término

$$\left(\frac{d\mathbf{L}'_{O'}}{dt}\right)_{S'} = \left[\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}'_i \times (m_i \mathbf{v}'_i)\right)\right]_{S'}$$

es la derivada del momento cinético del sistema respecto a O', relativo al sistema de referencia S', ya que $\mathbf{v}'_i$ representa la velocidad de m_i en S'.

En el caso general de un sistema de referencia con un movimiento cualquiera de traslación más rotación, las fuerzas de inercia $\mathbf{F}'_i$ se expresan en función de cuatro términos y la forma que adopta $\mathbf{M}'_{O'}$ es muy complicada.

Un caso particular sencillo y útil en muchas ocasiones se da cuando el sistema no inercial S' está en movimiento de traslación respecto a cualquier sistema inercial S. En este supuesto sólo existe fuerza de inercia debido a la aceleración del origen del sistema móvil $\mathbf{a}_{O'}$

$$\mathbf{F}'_i = -m_i \mathbf{a}_{O'}$$

y, en consecuencia

$$\mathbf{M}'_{O'} = -\sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}'_i \times (m_i \mathbf{a}_{O'}) = -\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}'_i\right) \times \mathbf{a}_{O'} = -M\, \mathbf{r}'_C \times \mathbf{a}_{O'}$$

donde $\mathbf{r}'_C$ representa el vector de posición del centro de masas en el sistema S'.

Sustituyendo este último resultado en (6.36) obtenemos

$$\mathbf{M}_{\mathbf{O}'}^{\mathbf{Ext}} = \frac{d\mathbf{L}_{\mathbf{O}'}^{\prime}}{dt} + M\,\mathbf{r}_{\mathbf{C}}^{\prime} \times \mathbf{a}_{\mathbf{O}'} \qquad (6.37)$$

La expresión (6.37) se reduce a la forma habitual del teorema del momento cinético (6.33), es decir a

$$\mathbf{M}_{\mathbf{O}'}^{\mathbf{Ext}} = \frac{d\mathbf{L}_{\mathbf{O}'}^{\prime}}{dt} \qquad (6.38)$$

siempre que $\mathbf{r}'_C \times \mathbf{a}_{O'} = \mathbf{0}$, lo que supone uno de los siguientes casos:

a) $\mathbf{r}'_C = \mathbf{0}$. Es decir O' = C (el punto O' es el centro de masas del sistema de partículas y S' representa el sistema CM).

b) $\mathbf{a}_{O'} = \mathbf{0}$. La aceleración de O' es nula. Si $\mathbf{a}_{O'}$ es nula en todo instante entonces el sistema S' es inercial, pero si no es así puede cumplirse (6.38) aunque sólo sea para algún instante de tiempo determinado.

c) $\mathbf{r}'_C \parallel \mathbf{a}_{O'}$. Como tanto $\mathbf{r}'_C$ como $\mathbf{a}_{O'}$ tienen origen en el punto O', el hecho de que sean paralelos indica que han de ser colineales: las rectas soporte de $\mathbf{r}'_C$ y $\mathbf{a}_{O'}$ coinciden.

6.6 TRABAJO Y ENERGÍA EN UN SISTEMA DE PARTÍCULAS MATERIALES

6.6.1 TEOREMA DE LA ENERGÍA CINÉTICA.

Considérese un sistema de partículas materiales $\{m_i\}_{i=1,N}$ referido a un sistema inercial S y sean t_1 y t_2 dos instantes de tiempo determinados de la evolución del sistema. En el intervalo entre t_1 y t_2 realizan trabajo tanto las fuerzas exteriores como las interiores. El teorema de la energía cinética para cada partícula m_i del sistema viene dado por

$$W_i = E_c^i(2) - E_c^i(1)$$

que, en forma desarrollada, se puede escribir como

$$\int_{1\,C_i}^{2} \mathbf{F_i}\cdot d\mathbf{r_i} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \int_{1\,C_i}^{2} \mathbf{f_{ji}}\cdot d\mathbf{r_i} = \frac{1}{2} m_i v_{i2}^2 - \frac{1}{2} m_i v_{i1}^2 \quad ; \quad i=1,...,N$$

siendo C_i la trayectoria de m_i entre t_1 y t_2 en el sistema S. Omitiremos C_i en lo sucesivo para simplificar la notación.

Sumando las N ecuaciones anteriores se obtiene

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{1}^{2} \mathbf{F_i}\cdot d\mathbf{r_i} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \int_{1}^{2} \mathbf{f_{ji}}\cdot d\mathbf{r_i} = \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{1}{2} m_i v_{i2}^2 \right) - \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{1}{2} m_i v_{i1}^2 \right) \qquad (6.39)$$

donde el último miembro representa la diferencia de energía cinética del sistema de partículas entre los instantes t_1 y t_2, es decir

$$E_c(2) - E_c(1) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{2} m_i v_{i2}^2 \right) - \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{2} m_i v_{i1}^2 \right)$$

Definimos el trabajo total de las fuerzas exteriores como

$$W^{Ext} = \sum_{i=1}^{N} \int_1^2 \mathbf{F_i} \cdot d\mathbf{r_i} \qquad (6.40)$$

y el trabajo total de las fuerzas interiores como

$$W^{Int} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \int_1^2 \mathbf{f_{ji}} \cdot d\mathbf{r_i} \qquad (6.41)$$

Teniendo en cuenta las definiciones (6.40) y (6.41), la ecuación (6.39) se puede escribir como

$$W^{Ext} + W^{Int} = E_c(2) - E_c(1) \qquad (6.42)$$

que constituye la expresión del teorema de la energía cinética para un sistema de partículas materiales, cuyo enunciado es:

> "El trabajo total de las fuerzas, tanto exteriores como interiores, que actúan sobre un sistema de partículas en un intervalo de tiempo es igual al cambio de la energía cinética del sistema de partículas en ese intervalo".

Una consecuencia inmediata es el teorema de conservación de la energía cinética:

> "Si el trabajo total de las fuerzas que actúan sobre un sistema de partículas es nulo en un intervalo de tiempo, entonces la energía cinética del sistema tiene el mismo valor al final y al principio del intervalo".

6.6.2 FUERZAS INTERIORES CONSERVATIVAS. ENERGÍA PROPIA DEL SISTEMA DE PARTÍCULAS.

En el caso de que todas las fuerzas interiores $\mathbf{f}_{ij}$ sean de tipo conservativo, existe energía potencial de interacción E_p^{ij} entre cada par de partículas m_i y m_j y se verifica que

$$\mathbf{f_{ji}} = -\nabla_i E_p^{ij} \qquad (6.43)$$

donde conviene recordar que $\mathbf{f}_{ji}$ representa la fuerza interior que actúa sobre m_i debido a su interacción con m_j y, en consecuencia, para expresar el gradiente hemos utilizado en el operador nabla el subíndice i de la partícula sobre la que actúa la fuerza que estamos considerando. Para $\mathbf{f}_{ji}$ la derivación se debe realizar respecto a la posición $\mathbf{r}_i$ que ocupa su punto de aplicación, que es la partícula m_i. Análogamente, para $\mathbf{f}_{ij}$ se cumple que

$$\mathbf{f_{ij}} = -\nabla_j E_p^{ij} \qquad (6.44)$$

y en este caso ∇_j indica que la derivación se debe realizar respecto a la posición $\mathbf{r}_j$, ya que $\mathbf{f}_{ij}$ está aplicada en la partícula m_j.

Sólo consideraremos aquí fuerzas de interacción que verifiquen la ley fuerte de acción y reacción (ecuaciones 6.2 y 6.3), con lo que se ha de cumplir que

$$\nabla_i E_p^{ij} = -\nabla_j E_p^{ij} \qquad (6.45)$$

Los resultados que obtengamos basándonos en la ecuación anterior serán válidos únicamente para energías potenciales que cumplan tal condición. En particular, las energías potenciales gravitatoria o electrostática, como cualquier energía potencial de interacción de tipo radial, verifican la ecuación (6.45) (se propone la demostración como ejercicio).

Si todas las fuerzas interiores son conservativas, el trabajo total de fuerzas interiores se puede poner como

$$W^{Int} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \int_1^2 \mathbf{f_{ji}} \cdot d\mathbf{r_i} \tag{6.46}$$

y también como

$$W^{Int} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \int_1^2 \mathbf{f_{ij}} \cdot d\mathbf{r_j} \tag{6.47}$$

ya que los índices se pueden permutar dentro del integrando sin que cambie el resultado, al estar extendida la suma a todos los posibles pares ij , con $i \neq j$.

Sumando las ecuaciones (6.46) y (6.47) obtenemos

$$W^{Int} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \int_1^2 (\mathbf{f_{ji}} \cdot d\mathbf{r_i} + \mathbf{f_{ij}} \cdot d\mathbf{r_j}) \tag{6.48}$$

Teniendo en cuenta (6.43), (6.44) y (6.45) resulta

$$\mathbf{f_{ji}} \cdot d\mathbf{r_i} + \mathbf{f_{ij}} \cdot d\mathbf{r_j} = -\nabla_i E_p^{ij} \cdot d\mathbf{r_i} - \nabla_j E_p^{ij} \cdot d\mathbf{r_j} = -\nabla_i E_p^{ij} \cdot (d\mathbf{r_i} - d\mathbf{r_j}) = -\nabla_i E_p^{ij} \cdot d\mathbf{r_{ji}}$$

Incluyendo este resultado en el integrando de la ecuación (6.48) se obtiene

$$W^{Int} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \int_1^2 \nabla_i E_p^{ij} \cdot d\mathbf{r_{ji}}$$

es decir

$$W^{Int} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \int_1^2 dE_p^{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \left(E_p^{ij}(1) - E_p^{ij}(2) \right)$$

Recordando la definición de energía potencial interna, ecuación (6.9), la expresión anterior se puede poner como

$$W^{Int} = E_p^{Int}(1) - E_p^{Int}(2) \tag{6.49}$$

sólo en el supuesto de que todas las fuerzas interiores sean conservativas.

Incluyendo (6.49) en la expresión del teorema de la energía cinética (ecuación 6.42), se obtiene

$$W^{Ext} + E_p^{Int}(1) - E_p^{Int}(2) = E_c(2) - E_c(1)$$

y, reagrupando términos,

$$W^{Ext} = [\, E_c(2) + E_p^{Int}(2)] - [\, E_c(1) + E_p^{Int}(1)] \tag{6.50}$$

La suma de la energía cinética más la energía potencial interior se denomina energía propia del sistema. La ecuación (6.50) indica que si todas las fuerzas interiores son conservativas, entonces el trabajo total de las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema en un intervalo de tiempo es igual a la variación de la energía propia del sistema en ese intervalo. Como consecuencia inmediata, si el trabajo de las fuerzas exteriores es nulo se conserva la energía propia del sistema en ese intervalo, en el supuesto considerado.

6.6.3 FUERZAS EXTERIORES CONSERVATIVAS.

El trabajo de las fuerzas exteriores (ecuación 6.40) viene dado, en el caso de fuerzas conservativas, por

$$W^{Ext} = \sum_{i=1}^{N} \int_1^2 \mathbf{F_i} \cdot d\mathbf{r_i} = -\sum_{i=1}^{N} \int_1^2 \nabla_i E_p^i \cdot d\mathbf{r_i} \tag{6.51}$$

donde conviene recordar que E_p^i representa la energía potencial de interacción de la partícula m_i con otras partículas ajenas al sistema.

Teniendo en cuenta que

$$\int_1^2 \nabla_i E_p^i \cdot d\mathbf{r_i} = \int_1^2 dE_p^i = E_p^i(2) - E_p^i(1)$$

la ecuación (6.51) se puede escribir como

$$W^{Ext} = E_p^{Ext}(1) - E_p^{Ext}(2) \tag{6.52}$$

siendo E_p^{Ext} la energía potencial exterior del sistema (ecuación 6.8). Es decir, el trabajo de las fuerzas exteriores de tipo conservativo que actúan sobre el sistema es igual a la variación de la energía potencial exterior del sistema, cambiada de signo. La energía potencial exterior no es "propia" del sistema, sino compartida con otros sistemas, ya que supone un intercambio de energía con partículas ajenas al mismo.

6.6.4 EL TEOREMA DE LA ENERGÍA MECÁNICA PARA UN SISTEMA DE PARTÍCULAS MATERIALES.

En el caso general, sobre un sistema de partículas materiales actuarán tanto fuerzas conservativas como disipativas. Las denotaremos mediante los subíndices C y D, respectivamente. La fuerza exterior resultante que actúa sobre la partícula m_i se puede descomponer en

$$\mathbf{F_i} = \mathbf{F_{Ci}} + \mathbf{F_{Di}}$$

donde $\mathbf{F}_{Ci}$ es la resultante de las fuerzas exteriores conservativas que actúan sobre m_i y $\mathbf{F}_{Di}$ la resultante de fuerzas exteriores disipativas sobre m_i. De forma similar, la fuerza interior que actúa sobre la partícula m_i debida a la interacción entre m_i y m_j, se puede expresar, en el caso general, como

$$\mathbf{f_{ji}} = \mathbf{f_{Cji}} + \mathbf{f_{Dji}}$$

El trabajo total de las fuerzas exteriores se puede escribir entonces como sigue

$$W^{Ext} = \sum_{i=1}^{N} \int_1^2 \mathbf{F_{Ci}} \cdot d\mathbf{r_i} + \sum_{i=1}^{N} \int_1^2 \mathbf{F_{Di}} \cdot d\mathbf{r_i} = W_C^{Ext} + W_D^{Ext}$$

Teniendo en cuenta (6.52) la ecuación anterior equivale,

$$W^{Ext} = E_p^{Ext}(1) - E_p^{Ext}(2) + W_D^{Ext} \tag{6.53}$$

Análogamente, para el trabajo de las fuerzas interiores

$$W^{Int} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \int_1^2 \mathbf{f_{Cij}} \cdot d\mathbf{r_j} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \int_1^2 \mathbf{f_{Dij}} \cdot d\mathbf{r_j} = W_C^{Int} + W_D^{Int}$$

que, teniendo en cuenta la ecuación (6.49), se reduce a

$$W^{Int} = E_p^{Int}(1) - E_p^{Int}(2) + W_D^{Int} \tag{6.54}$$

Llamaremos W_D al trabajo total de fuerzas disipativas que actúan sobre el sistema

$$W_D = W_D^{Ext} + W_D^{Int}$$

Sustituyendo las ecuaciones (6.53) y (6.54) en la expresión del teorema de la energía cinética (6.42) y reagrupando términos resulta

$$W_D = [E_c(2) + E_p^{Ext}(2) + E_p^{Int}(2)] - [E_c(1) + E_p^{Ext}(1) + E_p^{Int}(1)] \tag{6.55}$$

Se define la energía mecánica de un sistema de partículas materiales como

$$E = E_c + E_p^{Ext} + E_p^{Int} \tag{6.56}$$

con lo que la ecuación (6.55) se puede escribir en forma simplificada como

$$W_D = E(2) - E(1) \tag{6.57}$$

que constituye la expresión del teorema de la energía mecánica, cuyo enunciado es:

> "El trabajo total de las fuerzas disipativas que actúan sobre un sistema de partículas materiales en un intervalo de tiempo es igual a la variación de la energía mecánica del sistema en ese intervalo, respecto a un sistema de referencia inercial".

6.6.5 CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA.

Si en la ecuación (6.57) $W_D = 0$, entonces

$$E(1) = E(2) = \text{constante} \qquad (6.58)$$

que es la expresión del teorema de conservación de la energía mecánica:

> "Si el trabajo total de las fuerzas disipativas es nulo, entonces se conserva la energía mecánica del sistema de partículas".

La ecuación (6.58) se puede escribir como

$$E_c + E_p^{Ext} + E_p^{Int} = \text{constante}$$

lo que implica que si el sistema evoluciona en un intervalo de tiempo Δt con $W_D = 0$, entonces

$$\Delta E_p^{Ext} = -\Delta(E_c + E_p^{Int})$$

es decir, el incremento de energía potencial que adquiere el sistema procedente del exterior es igual y de signo contrario al incremento de energía propia del sistema de partículas.

6.6.6 TRABAJO Y ENERGÍA PARA UN SISTEMA DE PARTÍCULAS MATERIALES EN SISTEMAS NO INERCIALES.

Formalmente se pueden adaptar todos los resultados obtenidos en los apartados (6.6.1) a (6.6.5) para el caso de un sistema de referencia no inercial S', sin más que tener en cuenta el trabajo de las fuerzas de inercia que se manifiestan en S'. Tales fuerzas ficticias no se pueden clasificar como exteriores o interiores, porque no son fuerzas reales, pero en S' se comportan como si fueran fuerzas exteriores al sistema de partículas. Del mismo modo, no cabe considerar el trabajo que realizan las fuerzas de inercia como estrictamente equivalente al trabajo de las fuerzas reales.

En un sistema de referencia no inercial S' los trabajos de las fuerzas exteriores e interiores vienen dados por

$$W^{Ext} = \sum_{i=1}^{N} \int_{1C_i'}^{2} \mathbf{F_i} \cdot d\mathbf{r_i}' \qquad W^{Int} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \int_{1C_i'}^{2} \mathbf{f_{ji}} \cdot d\mathbf{r_i}'$$

que son diferentes a los calculados en un sistema inercial S al cambiar la trayectoria, C'_i y $d\mathbf{r}'_i$, de cada partícula m_i.

El trabajo de las fuerzas de inercia viene dado por

$$W' = \sum_{i=1}^{N} \int_{1C_i'}^{2} \mathbf{F_i}' \cdot d\mathbf{r_i}'$$

donde F'_i representa la fuerza de inercia total que actúa sobre la partícula m_i.

Como cada partícula del sistema cumple la ecuación fundamental de la dinámica en sistemas no inerciales, que es de la forma

$$\mathbf{F_i} + \sum_{j=1}^{N} \mathbf{f_{ji}} + \mathbf{F_i}' = m_i \left(\frac{d\mathbf{v_i}'}{dt} \right)_{S'}$$

por un procedimiento similar al utilizado en la sección (6.6.1) se puede deducir el teorema de la energía cinética para un sistema no inercial y resulta

$$W^{Ext} + W^{Int} + W' = E_c'(2) - E_c'(1) \qquad (6.59)$$

es decir, el trabajo total de las fuerzas exteriores e interiores, más el trabajo de las fuerzas de inercia, es igual a la variación de la energía cinética calculada desde S'.

El resto de los teoremas deducidos para el trabajo y la energía en sistemas de partículas pueden adaptarse formalmente a un sistema no inercial sin más que incluir el efecto del trabajo de las fuerzas de inercia, W'.

En particular, para el sistema CM la única fuerza que actúa sobre cada partícula m_i es $-m_i\mathbf{a}_C$ y el trabajo W' vale

$$W' = -\sum_{i=1}^{N} \int_{1C_i'}^{2} m_i \mathbf{a_C}\cdot d\mathbf{r_i}' = -\int_{1C_i'}^{2} \mathbf{a_C}\cdot\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\, d\mathbf{r_i}'\right)$$

pero en el sistema CM

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\,\mathbf{r_i}' = \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{i=1}^{N} m_i\, d\mathbf{r_i}' = \mathbf{0}$$

luego W' = 0 y la ecuación (6.59) toma la misma forma que el teorema de la energía cinética en sistemas inerciales (ecuación 6.42). Lo mismo sucede para el resto de los teoremas vistos en las secciones anteriores, (6.6.1) a (6.6.5).

6.6.7 ENERGÍA CINÉTICA REFERIDA AL CENTRO DE MASAS.

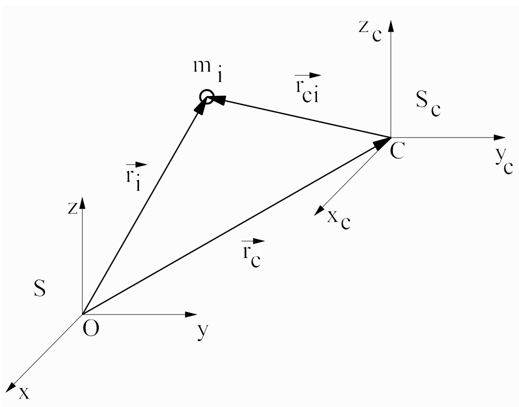


Figura 6.6

Considérese un sistema de referencia inercial S y un sistema CM, S_C, característico de un sistema de partículas materiales $\{m_i\}_{i=1,N}$ (figura 6.6).

La energía cinética respecto al sistema S es

$$E_c = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 \tag{6.60}$$

y respecto al sistema CM

$$E_{cC} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_{Ci}^2 \tag{6.61}$$

Los vectores de posición de una misma partícula m_i respecto a los dos sistemas de referencia están relacionados por

$$\mathbf{r_i} = \mathbf{r_C} + \mathbf{r_{Ci}}$$

Podemos derivar esta ecuación respecto al tiempo sin problemas, ya que el sistema CM tiene movimiento de traslación respecto a S y las derivadas coinciden en ambos sistemas. Resulta

$$\mathbf{v_i} = \mathbf{v_C} + \mathbf{v_{Ci}}$$

donde $\mathbf{v}_{Ci}$ representa la velocidad de m_i en el sistema CM. Elevando al cuadrado esta expresión se obtiene

$$v_i^2 = (\mathbf{v_C} + \mathbf{v_{Ci}})\cdot(\mathbf{v_C} + \mathbf{v_{Ci}}) = v_C^2 + 2\,\mathbf{v_C}\cdot\mathbf{v_{Ci}} + v_{Ci}^2$$

que, sustituida en (6.60), conduce a

$$E_C = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_C^2 + \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v_C}\cdot\mathbf{v_{Ci}} + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_{Ci}^2 \tag{6.62}$$

El segundo término del último miembro es nulo. En efecto

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v_C}\cdot\mathbf{v_{Ci}} = \mathbf{v_C}\cdot\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v_{Ci}}\right) = 0$$

con lo que la ecuación (6.62) se reduce a

$$E_c = \frac{1}{2} M v_C^2 + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_{Ci}^2 \tag{6.63}$$

conocida como teorema de Koenig:

> "La energía cinética de un sistema de partículas materiales es igual a la energía cinética asociada al centro de masas si suponemos toda la masa del sistema concentrada en él, más la energía cinética relativa al centro de masas".

Como se dijo en el apartado (6.6.6), a pesar de que el sistema CM no es inercial, los teoremas del trabajo y la energía adoptan en él la misma forma que en los sistemas inerciales. Así, respecto al sistema S el teorema de la energía cinética se expresa

$$W^{\,Ext} + W^{\,Int} = E_c(2) - E_c(1)$$

y respecto al sistema CM

$$W^{Ext}_{(C)} + W^{Int}_{(C)} = E_{cC}(2) - E_{cC}(1)$$

Restando estas dos ecuaciones y teniendo en cuenta el teorema de Koenig, resulta

$$\left(W^{\,Ext} + W^{\,Int}\right) - \left(W^{Ext}_{(C)} + W^{Int}_{(C)}\right) = \frac{1}{2}Mv^2_{C2} - \frac{1}{2}Mv^2_{c1}$$

es decir, el trabajo total de las fuerzas que actúan sobre el sistema, en S, es igual al trabajo total en el sistema CM más el incremento de energía cinética de la masa total M si la consideramos concentrada en el centro de masas.

6.7 COLISIONES.

6.7.1 COLISIONES CENTRALES. LÍNEA DE CHOQUE.

El término colisión es muy amplio y se refiere, en general, a interacciones rápidas entre partículas o sistemas de partículas, con contacto o a distancia. En este capítulo se tratarán únicamente las colisiones mecánicas que suponen un contacto entre cuerpos rígidos y elásticos y que tengan superficies exteriores suficientemente suaves, de manera que el modelo de partícula material aplicado a los cuerpos en colisión aproxime razonablemente bien la situación real. No obstante, no siempre es posible ignorar las dimensiones o la forma de las partículas que colisionan, incluso bajo las hipótesis indicadas. Hablaremos indistintamente de colisión o de choque para referirnos al mismo concepto.

El que la interacción sea muy rápida indica que las fuerzas que se intercambian en el choque generan impulsos del tipo percusión. Supongamos que dos cuerpos 1 y 2 colisionan permaneciendo en contacto durante un tiempo pequeño Δt y que en ese intervalo interaccionan mediante un par de acción y reacción $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$. Las percusiones que intercambian durante la colisión están dadas por

$$\mathbf{P_{21}} = \int_0^{\Delta t} \mathbf{F_{21}}\,dt = -\int_0^{\Delta t} \mathbf{F_{12}}\,dt = -\mathbf{P_{12}} \qquad (6.64)$$

donde $\mathbf{P}_{21}$ representa la percusión que recibe el cuerpo 1 y $\mathbf{P}_{12}$ la que recibe el 2, y siempre para Δt muy pequeño. De hecho, Δt va a ser despreciable en la mayoría de los casos.

Se define la línea de choque, l, como la recta que contiene a las percusiones $\mathbf{P}_{12}$ y $\mathbf{P}_{21}$ (figura 6.7). Se suele determinar vectorialmente la línea de choque mediante un vector unitario $\mathbf{u}_l$, de sentido arbitrario, y el punto de contacto en el instante del choque.

Decimos que una colisión es central cuando la línea de choque contiene a los centros de masa de los cuerpos que colisionan (figura 6.7 a). En caso contrario hablaremos de choque excéntrico (figura 6.7 b). El choque central supone que los cuerpos en contacto tienen superficies exteriores suaves, que las percusiones intercambiadas no incluyen efectos de fuerzas de fricción y que sus tamaños y formas no son muy diferentes, entre otras cosas. Si se producen fuerzas de fricción durante el choque, aún en el supuesto de que se respeten el resto de las condiciones, puede aparecer una componente tangencial a las superficies de contacto en las percusiones, (figura 6.7 b), y en este caso el choque será excéntrico. Estudiaremos sólo choques centrales.

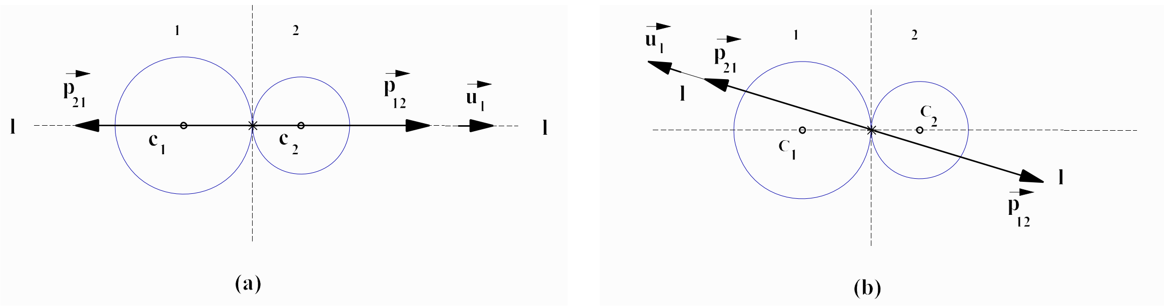


Figura 6.7

Un choque central es directo cuando los vectores velocidad de las partículas inmediatamente antes y después de la colisión están contenidos en la línea de choque. Un choque central es oblicuo cuando no sucede lo anterior.

En este caso se define el plano de choque como el plano determinado por los vectores velocidad de las partículas inmediatamente antes y después del choque. Evidentemente, el plano de choque contiene a la línea de choque. Llamaremos línea normal a la recta perpendicular a la línea de choque que pasa por el punto de contacto y está contenida en el plano de choque. La línea normal está caracterizada por un vector unitario $\mathbf{u}_n$, perpendicular a $\mathbf{u}_l$, determinado salvo en sentido.

Los choques centrales imponen muchas condiciones a las partículas que colisionan, como se ha visto. Por ejemplo, las colisiones entre bloques rectangulares de las mismas dimensiones, en movimientos rectilíneo, con contacto completo en dos de sus caras se aproximan bien mediante un choque central directo y, en general, las colisiones entre esferas rígidas, lisas y pulidas se pueden aproximar mediante choques centrales.

En casos más generales se suelen presentar problemas. Conviene pensar en términos de esferas para los cuerpos que colisionan de forma central, si no se especifica lo contrario.

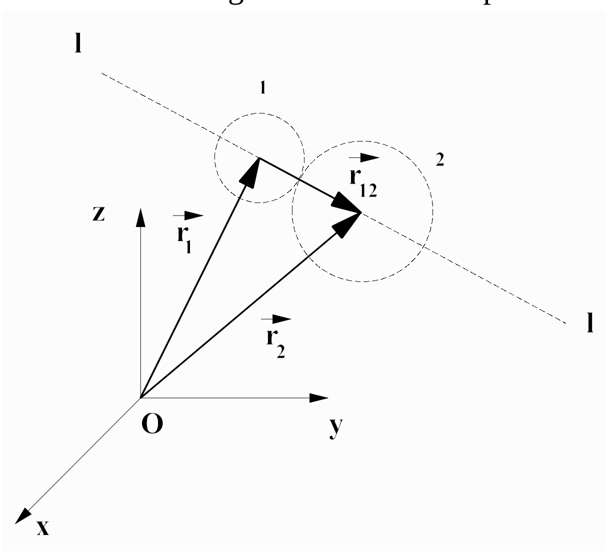


Figura 6.8

Para aplicar los conceptos anteriores al choque central entre dos esferas de radios R_1 y R_2, en el caso general, consideremos un sistema de referencia S y sean $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ los vectores de posición de los centros de cada esfera, variables con el tiempo.

El vector de posición relativa viene dado por $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ (figura 6.8). Para que se produzca una colisión entre ambas es necesario que en un instante t_c se verifique

$$|\mathbf{r_{12}}(t_c)| = R_1 + R_2 \tag{6.65}$$

ya que esto implica contacto en un punto.

La condición anterior no es suficiente. Hay que exigir además que la proyección de la velocidad relativa del centro de una esfera respecto a la otra sobre la dirección que une sus centros no sea nula, es decir

$$\mathbf{v_{21}}(t_c)\cdot\mathbf{u_{12}}(t_c) > 0 \tag{6.66}$$

ya que en caso contrario las velocidades de cada esfera serían paralelas y se rozarían en un punto en el instante t_c, pero sin chocar. En la expresión anterior $\mathbf{v}_{21}$ es la velocidad relativa de 1 respecto de 2 ($\mathbf{v}_{21} = \mathbf{v}_1$ - $\mathbf{v}_2$) y $\mathbf{u}_{12}$ el versor asociado al vector de posición relativa $\mathbf{r}_{12}$. El signo > se debe a que exigimos que la velocidad relativa sea de acercamiento entre ambas esferas. Si se cumplen (6.65) y (6.66) hay choque en el instante t_c y si, además, las percusiones intercambiadas tienen recta soporte que contiene a los centros de masa de ambas esferas, entonces el choque es central.

La línea de choque viene determinada por la dirección del vector de posición relativa de los centros de masa de ambas esferas en el instante de choque t_c, es decir

$$\mathbf{u_l} = \mathbf{u_{12}}(t_c) \tag{6.67}$$

y por el punto de contacto entre ambas.

En muchas ocasiones se desprecian las dimensiones de las esferas y se tratan como partículas puntuales. Si, debido a ello, no se dispone de datos sobre los radios R_1 y R_2, entonces no se puede aplicar la ecuación (6.65) para determinar el instante de choque t_c ni tampoco la (6.67) para determinar $\mathbf{u}_l$ en ese instante. Sin embargo, bajo todas las condiciones impuestas, se puede obtener la línea de choque mediante

$$\mathbf{u_l} = \frac{\mathbf{v_{12}}(t_c)}{v_{12}(t_c)}$$

el vector unitario asociado a la velocidad relativa en el instante t_c. La condición (6.66) hace $v_{12}(t_c)$ no nula en el supuesto de que haya choque y en consecuencia $\mathbf{u}_l$ está definido.

6.7.2 CHOQUE CENTRAL DIRECTO.

En el choque central directo, las velocidades de las partículas antes y después de la colisión están contenidas en la línea de choque y el problema es unidimensional. Sean $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ las velocidades de cada partícula antes del choque, paralelas al vector unitario $\mathbf{u}_l$ que define la línea de choque, y $v_1=\mathbf{v}_1.\mathbf{u}_l$ y $v_2=\mathbf{v}_2.\mathbf{u}_l$ sus proyecciones sobre $\mathbf{u}_l$ y sean v_1' y v_2' las proyecciones de las velocidades de ambas partículas después del choque (figura 6.9).

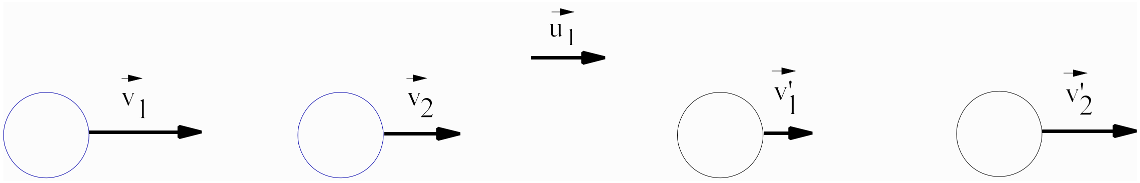


Figura 6.9

Como la interacción durante la colisión se produce sólo mediante dos fuerzas interiores de acción y reacción, la suma de fuerzas exteriores sobre el sistema durante el choque es igual a cero y se conserva la cantidad de movimiento. Según la línea de choque, se cumple

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \tag{6.68}$$

Suponiendo conocidas v_1 y v_2 el problema plantea dos incógnitas, v_1' y v_2'. Necesitamos otra ecuación aparte de (6.68) y nos la va a proporcionar el coeficiente de restitución.

La interacción por contacto que estamos estudiando se produce mediante percusiones que tienen su origen en las deformaciones elásticas de los materiales que colisionan y que se pueden evaluar mediante el coeficiente de restitución e, definido como el cociente, cambiado de signo, entre las velocidades relativas después y antes de la colisión para un choque central directo, es decir,

$$e = -\frac{v_2' - v_1'}{v_2 - v_1} \tag{6.69}$$

El coeficiente de restitución depende de las propiedades elásticas de los materiales de que están formados los objetos que colisionan, respetando siempre las restricciones impuestas a los choques centrales y suponiendo que sus superficies exteriores están suficientemente pulidas.

Las ecuaciones (6.68) y (6.69) permiten determinar las incógnitas v_1' y v_2' suponiendo conocido el coeficiente de restitución para los dos cuerpos que chocan.

6.7.3 COEFICIENTE DE RESTITUCIÓN.

Cuando dos cuerpos colisionan existe contacto entre ellos en un intervalo de tiempo Δt, generalmente muy corto, durante el cual se producen deformaciones elásticas en ambos que son las responsables de las fuerzas de acción y reacción que generan la percusión intercambiada en el choque. Las percusiones y el coeficiente de restitución dependen de las propiedades elásticas de los materiales que colisionan y que explican su deformación y posterior recuperación, total o parcial, de la forma original.

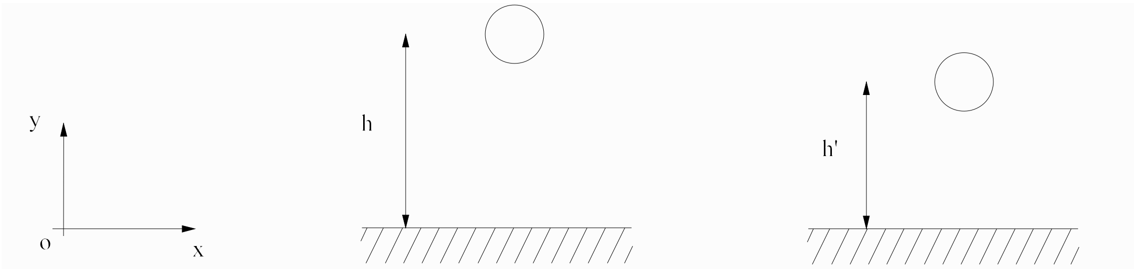


Figura 6.10

Una forma sencilla de medir experimentalmente coeficientes de restitución entre dos materiales, utilizando la ecuación (6.69), consiste en preparar una superficie lisa fija constituida por uno de ellos y dejar caer desde una cierta altura h una esfera del otro tipo (figura 6.10).

La esfera choca contra la superficie con una velocidad $v = -\sqrt{2gh}$ y rebota con una velocidad v' que le permite alcanzar una altura h', siendo $v' = \sqrt{2gh'}$ donde los signos son coherentes con el sistema de referencia OXY representado en la figura y, dado que la superficie está fija, las velocidades absolutas antes y después del choque, v y v', coinciden con las velocidades relativas para esta colisión. En consecuencia, la aplicación de la ecuación (6.69) lleva en este caso a

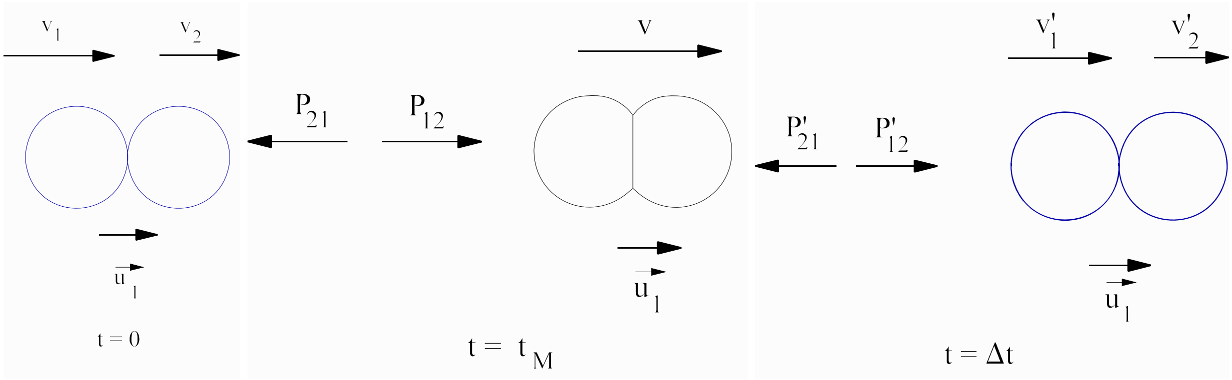
$$e = -\frac{v'}{v} = \sqrt{\frac{h'}{h}}$$

Midiendo las alturas h y h' se puede determinar experimentalmente el coeficiente de restitución.

Como se observa, hay dos claras situaciones límite. Si h'=h no se disipa energía mecánica en el choque y hablaremos de **choque elástico**. Si h'=0 la esfera se queda adosada a la superficie, la disipación de energía mecánica en otras formas de energía entre los cuerpos en colisión es máxima y hablaremos de **choque inelástico**. En el caso intermedio, $h>h'\neq 0$, diremos que el choque es **semielástico**.

El coeficiente de restitución está relacionado con las percusiones que actúan sobre los cuerpos que chocan.

Para entenderlo analicemos la colisión central directa entre dos esferas durante el intervalo de tiempo Δt que dura el choque, que supondremos que comienza en t=0 y acaba en $t=\Delta t$ (figura 6.11).



(a) (b) (c)

Figura 6.11

En el instante en el que comienza la colisión, las velocidades de cada esfera son v_1 y v_2 y aún no ha comenzado su deformación (figura 6.11 a). Supongamos que la máxima deformación tiene lugar en un instante Δt_M, $0<\Delta t_M<\Delta t$, según se indica en la figura 6.11 b. Denotemos por P_{21} y P_{12} a las percusiones que generan las dos fuerzas elásticas de interacción sobre las esferas 1 y 2 respectivamente, dadas por

$$P_{21} = \int_0^{\Delta t_M} F_{21}\, dt = -P_{12} \tag{6.70}$$

y a las que llamaremos percusiones deformadoras.

Por el teorema de la cantidad de movimiento y suponiendo que durante el choque no actúan más fuerzas sobre el sistema que las de deformación elástica indicadas, se verifica que

$$-P_{21} = m_1 V - m_1 v_1 \tag{6.71}$$

$$P_{12} = m_2 V - m_2 v_2 \tag{6.72}$$

donde m_1 y m_2 representan las masas de cada esfera y V es la velocidad en el instante Δt_M, idéntica para ambas, ya que en ese instante la velocidad relativa entre ambas es nula.

En el instante Δt cesa la colisión y las velocidades de las esferas, ya independientes, son v_1' y v_2' (figura 6.11c). Entre los instantes Δt_M e Δt actúan sobre 1 y 2 las percusiones P'_{21} y P'_{12}, respectivamente, a las que llamaremos percusiones restauradoras y verifican

$$P'_{21} = \int_{\Delta t_M}^{\Delta t} F_{21}\, dt = -P'_{12} \tag{6.73}$$

En los mismos supuestos que hemos considerado antes, se cumple el teorema de la cantidad de movimiento, en la forma

$$-P_{21}' = m_1 v_1' - m_1 V \tag{6.74}$$

$$P_{12}' = m_2 v_2' - m_2 V \tag{6.75}$$

Dividiendo la ecuación (6.74) entre la (6.71) se obtiene

$$\frac{P_{21}'}{P_{21}} = \frac{v_1' - V}{V - v_1} \tag{6.76}$$

y dividiendo (6.75) entre (6.72)

$$\frac{P_{12}'}{P_{12}} = \frac{v_2' - V}{V - v_2} \tag{6.77}$$

Teniendo en cuenta (6.70) y (6.73) se verifica que

$$\frac{P_{21}'}{P_{21}} = \frac{P_{12}'}{P_{12}} = \frac{v_1' - V}{V - v_1} = \frac{v_2' - V}{V - v_2} = \frac{(v_1' - V) - (v_2' - V)}{(V - v_1) - (V - v_2)} = -\frac{v_2' - v_1'}{v_2 - v_1}$$

y recordando la definición de coeficiente de restitución (6.69), resulta

$$e = \frac{P_{21}'}{P_{21}} = \frac{P_{12}'}{P_{12}} \tag{6.78}$$

es decir, el coeficiente de restitución es igual al cociente entre la percusión restauradora y la percusión deformadora en un choque.

En el caso de un choque elástico, e=1 indica que la percusión restauradora es igual a la deformadora. Para el choque inelástico, e=0, la percusión restauradora es nula y, en consecuencia, los dos cuerpos en colisión no se despegan después del choque. En el caso de choques semielásticos, la percusión restauradora es siempre menor que la deformadora. En cualquier caso, el coeficiente de restitución depende, como las percusiones que se intercambian en la colisión, de las propiedades elásticas de ambos materiales.

6.7.4 CHOQUE CENTRAL OBLICUO.

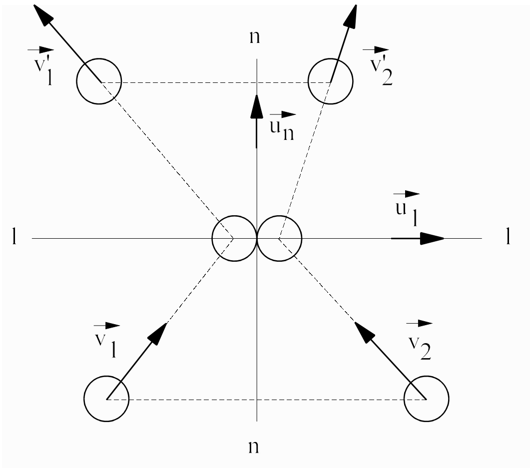


Figura 6.12

En el choque central oblicuo, la línea de choque l contiene a las percusiones que intercambian las dos partículas, pero no a las velocidades antes y después del choque (figura 6.12).

Dado que sólo se produce choque en la dirección de $\mathbf{u}_l$, utilizando el sistema de ejes $\mathbf{u}_l$, $\mathbf{u}_n$ de la figura y proyectando las velocidades según estos ejes, se verifica que las componentes de las velocidades de cada partícula en la dirección normal $\mathbf{u}_n$ se mantienen constantes antes y después de la colisión, es decir

$$
\begin{aligned}
v_{1n}^{\prime} &= \mathbf{v_1^{\prime}} \cdot \mathbf{u_n} = \mathbf{v_1} \cdot \mathbf{u_n} = v_{1n} \\
v_{2n}^{\prime} &= \mathbf{v_2^{\prime}} \cdot \mathbf{u_n} = \mathbf{v_2} \cdot \mathbf{u_n} = v_{2n}
\end{aligned}
\tag{6.79}
$$

Por otra parte, para las proyecciones de las velocidades según $\mathbf{u}_l$ la colisión se comporta como un choque central directo, es decir, se verifican las ecuaciones (6.68) y (6.69) que, en nuestro caso, se escriben como

$$
(m_1 \mathbf{v_1} + m_2 \mathbf{v_2}) \cdot \mathbf{u_l} = (m_1 \mathbf{v_1^{\prime}} + m_2 \mathbf{v_2^{\prime}}) \cdot \mathbf{u_l}
$$

o bien, en otra notación

$$
m_1 v_{11} + m_2 v_{21} = m_1 v_{11}^{\prime} + m_2 v_{21}^{\prime} \tag{6.80}
$$

y

$$
e = -\frac{(\mathbf{v_2^{\prime}} - \mathbf{v_1^{\prime}}) \cdot \mathbf{u_l}}{(\mathbf{v_2} - \mathbf{v_1}) \cdot \mathbf{u_l}} = -\frac{v_{21}^{\prime} - v_{11}^{\prime}}{v_{21} - v_{11}} \tag{6.81}
$$

Las cuatro ecuaciones (6.79), (6.80) y (6.81) nos permiten determinar las velocidades finales $\mathbf{v}_1$' y $\mathbf{v}_2$' si conocemos las velocidades iniciales, el coeficiente de restitución, y somos capaces de hallar la línea de choque $\mathbf{u}_l$ y el plano de choque determinado por $\mathbf{u}_l$ y $\mathbf{u}_n$. La conservación de la cantidad de movimiento en el plano de choque, que está contenida en las ecuaciones (6.79) y (6.80) no permite resolver el problema por sí sola.

6.7.5 EL SISTEMA DE DOS PARTÍCULAS MATERIALES EN EL SISTEMA DE REFERENCIA CM.

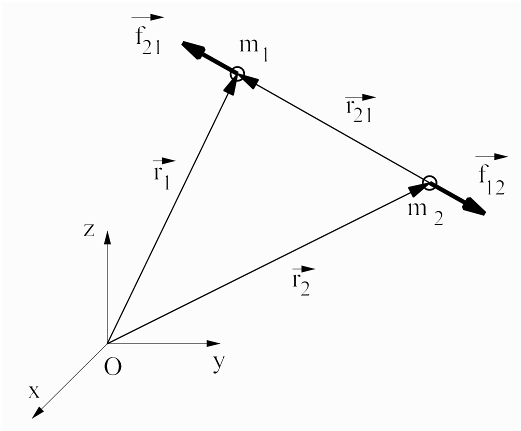


Figura 6.13

Consideremos un sistema aislado formado por dos partículas m_1 y m_2 que sólo interaccionan entre sí mediante el par de acción y reacción $\mathbf{f}_{21} = -\mathbf{f}_{12}$ (figura 6.13). Las ecuaciones que describen el movimiento de cada partícula en un sistema inercial están dadas por

$$\mathbf{f}_{21} = m_1 \mathbf{a}_1 \qquad \mathbf{f}_{12} = m_2 \mathbf{a}_2 \tag{6.82}$$

que cumplen

$$\mathbf{f}_{12} + \mathbf{f}_{21} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\mathbf{a}_1$$

La aceleración relativa de la partícula m_1 respecto a m_2 es

$$\mathbf{a}_{21} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_2}\mathbf{a}_1$$

que sustituida en (6.82) resulta

$$\mathbf{f}_{21} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{a}_{21}$$

Se define la masa reducida de m_1 y m_2 como

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

con lo que

$$\mathbf{f}_{21} = \mu\, \mathbf{a}_{21} \tag{6.83}$$

que es la ley que rige el movimiento relativo de m_1 respecto a m_2. Como es fácil comprobar, también

$$\mathbf{f}_{12} = \mu\, \mathbf{a}_{12}$$

para el movimiento relativo de m_2 respecto a m_1.

Al no actuar fuerzas exteriores sobre el sistema, la aceleración del centro de masas es nula ($\mathbf{a}_c = \mathbf{0}$) y el sistema CM es inercial.

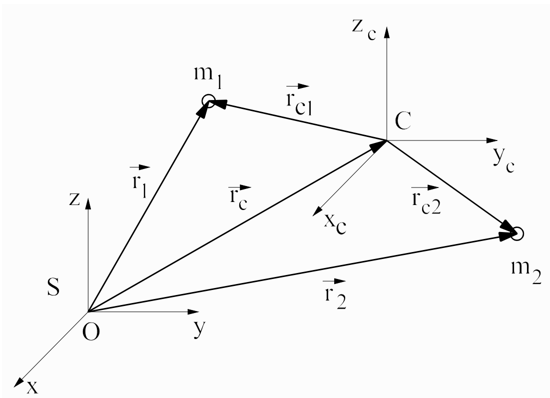


Figura 6.14

Las posiciones relativas al sistema CM (figura 6.14) vienen dadas por

$$\mathbf{r}_{c1} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_c = \mathbf{r}_1 - \frac{(m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2)}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r}_{21}$$

$$\mathbf{r}_{c2} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_c = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r}_{12}$$

que verifican, como es fácil comprobar, que

$$m_1\,\mathbf{r_{c1}} + m_2\,\mathbf{r_{c2}} = \mathbf{0}$$

Las velocidades y aceleraciones relativas al centro de masas son

$$\mathbf{v_{c1}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\,\mathbf{v_{21}} \qquad \mathbf{v_{c2}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\,\mathbf{v_{12}}$$

$$\mathbf{a_{c1}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\,\mathbf{a_{21}} \qquad \mathbf{a_{c2}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\,\mathbf{a_{12}}$$

que cumplen que $m_1\mathbf{v_{c1}} + m_2\mathbf{v_{c2}} = \mathbf{0}$ y $m_1\mathbf{a_{c1}} + m_2\mathbf{a_{c2}} = \mathbf{0}$.

La expresión anterior de $\mathbf{a}_{c1}$ junto con (6.83)equivale, evidentemente, a

$$\mathbf{f_{21}} = m_1\,\mathbf{a_{c1}}$$

que es la ecuación fundamental de la dinámica en el sistema CM, inercial, como se ha dicho.

El estudio de una colisión entre dos partículas admite un tratamiento sencillo en el sistema CM.

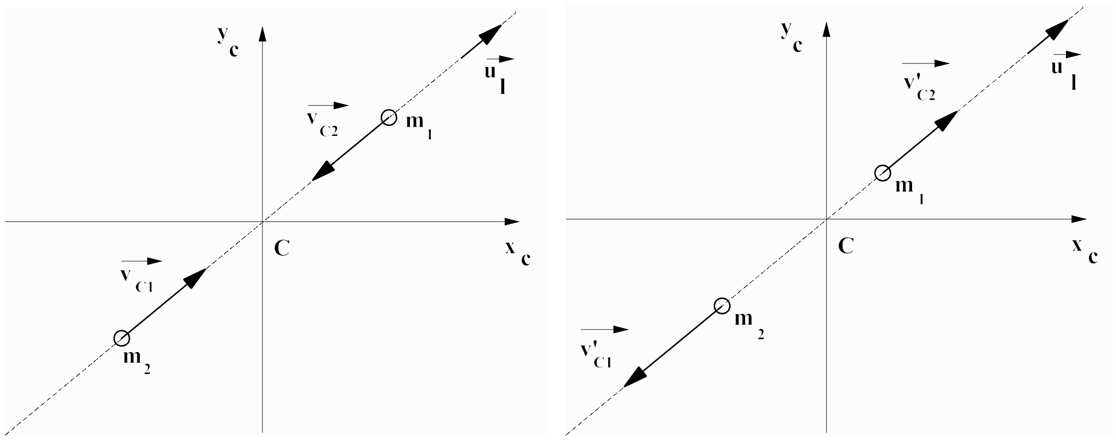


Figura 6.15

En la figura 6.15 se ha representado un caso simple de colisión para mayor claridad, pero el desarrollo que seguiremos es general, para partículas materiales. En el sistema CM se verifica que

$$\mathbf{v_{c1}} = -\frac{m_2}{m_1}\,\mathbf{v_{c2}}$$

y la línea de choque viene determinada por

$$\mathbf{u_l} = \frac{\mathbf{v_{c1}}}{v_{c1}} = -\frac{\mathbf{v_{c2}}}{v_{c2}}$$

donde sólo el signo es arbitrario, siendo $\mathbf{v}_{c1}$ y $\mathbf{v}_{c2}$ las velocidades inmediatamente antes de la colisión. Ahora bien, la línea de choque es la misma para el sistema CM que para cualquier otro sistema inercial.

Teniendo en cuenta que

$$\mathbf{v_{c1}} = \mathbf{v_1} - \mathbf{v_c} \qquad \mathbf{v_{c2}} = \mathbf{v_2} - \mathbf{v_c}$$

y, en consecuencia

$$\mathbf{v_{c1}} - \mathbf{v_{c2}} = \mathbf{v_1} - \mathbf{v_2} = \mathbf{v_{21}}$$

$$\mathbf{v_{c1}} - \mathbf{v_{c2}} = \frac{m_1 + m_2}{m_2}\,\mathbf{v_{c1}} \qquad \mathbf{v_{c1}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\,\mathbf{v_{21}}$$

resulta

$$\mathbf{u_l} = \frac{\mathbf{v_{c1}}}{v_{c1}} = \frac{\mathbf{v_{21}}}{v_{21}}$$

que permite calcular la línea de choque en el caso límite de partículas puntuales. Hay que tener en cuenta que no es más que una aproximación, aceptable en ocasiones, de la situación real, en la que las partículas que colisionan tienen dimensiones.

En el sistema CM el coeficiente de restitución viene dado por

$$e = -\frac{v'_{c1}}{v_{c1}} = -\frac{v'_{c2}}{v_{c2}} \tag{6.84}$$

donde v'_{c1} y v'_{c2} son las proyecciones de las velocidades de las partículas sobre $\mathbf{u}_l$ inmediatamente después del choque y v_{c1} y v_{c2} representan lo mismo inmediatamente antes del choque. En efecto, por la definición de coeficiente de restitución, de (6.81) resulta

$$e = -\frac{\mathbf{v}'_{21}\cdot\mathbf{u}_l}{\mathbf{v}_{21}\cdot\mathbf{u}_l} = -\frac{(\mathbf{v}'_{c1}-\mathbf{v}'_{c2})\cdot\mathbf{u}_l}{(\mathbf{v}_{c1}-\mathbf{v}_{c2})\cdot\mathbf{u}_l} =$$

$$= -\frac{\dfrac{m_1+m_2}{m_1}\mathbf{v}'_{c1}\cdot\mathbf{u}_l}{\dfrac{m_1+m_2}{m_1}\mathbf{v}_{c1}\cdot\mathbf{u}_l} = -\frac{v'_{c1}}{v_{c1}}$$

y del mismo modo se demuestra para v'_{c2} y v_{c2}.

6.7.6 ENERGÍA CINÉTICA EN EL CHOQUE.

En una colisión se disipa, en general, energía cinética en otras formas de energía no mecánica. La energía cinética inmediatamente antes de una colisión entre dos partículas se puede expresar, en un sistema de referencia inercial, mediante

$$E_c = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_c^2 + \frac{1}{2}m_1 v_{c1}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{c2}^2$$

e, inmediatamente después del choque, por

$$E'_c = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_c^2 + \frac{1}{2}m_1 v'^2_{c1} + \frac{1}{2}m_2 v'^2_{c2}$$

Como v_c no ha variado durante el choque, resulta que la disipación de energía cinética es

$$E_c - E'_c = \frac{1}{2}(m_1 v_{c1}^2 + m_2 v_{c2}^2 - m_1 v'^2_{c1} - m_2 v'^2_{c2})$$

es decir, igual en un sistema inercial cualquiera que en el sistema CM, durante el choque.

De la ecuación (6.84) resulta

$$v'^2_{c1} = e^2 v_{c1}^2 \qquad v'^2_{c2} = e^2 v_{c2}^2$$

que sustituido en la expresión anterior conduce a

$$E_c - E'_c = (1-e^2)\left(\frac{1}{2}m_1 v_{c1}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{c2}^2\right)$$

y teniendo en cuenta que la energía cinética antes del choque en el sistema CM viene definida por

$$E_{cc} = \frac{1}{2}m_1 v_{c1}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{c2}^2$$

equivale a

$$E_c - E'_c = (1-e^2)E_{cc} \tag{6.85}$$

La energía cinética disipada en un choque depende del coeficiente de restitución:

- Si e=1 (choque elástico) se conserva la energía cinética (E_c=E_c') y no hay disipación.
- Si e=0 (choque inelástico) la disipación de energía cinética es máxima. En este caso

  $$E'_c = E_c - E_{cc} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_c^2$$

  y las dos partículas quedan unidas después de la colisión (no queda energía cinética relativa al centro de masas).
- Si 0<e<1 (choque semielástico) hay una disipación parcial de la energía relativa al centro de masas

  $$E'_c = E_c - (1-e^2)E_{cc} < E_c$$

  ya que $1-e^2>0$.