

# ÍNDICE

7.1	INTRODUCCIÓN. . . . .	7.3
7.1.1	MOVIMIENTO PLANO DE UN SÓLIDO RÍGIDO. . . . .	7.3
7.1.2	SISTEMA DE FUERZAS APLICADAS SOBRE UN SÓLIDO RÍGIDO. . . . .	7.4
7.2	CENTRO DE MASAS DE UN SOLIDO RÍGIDO. . . . .	7.6
7.2.1	DENSIDAD DE UN SÓLIDO RÍGIDO. . . . .	7.6
7.2.2	DEFINICIÓN DE CENTRO DE MASAS DE UN SÓLIDO RÍGIDO. . . . .	7.8
7.2.3	CENTROIDE. . . . .	7.9
7.2.4	CÁLCULO DE CENTROIDES DE ÁREAS Y DE LÍNEAS PLANAS. . . . .	7.9
	7.2.4.1 Teorema primero de guldin-pappus. . . . .	7.9
	7.2.4.2 Teorema segundo de guldin-pappus. . . . .	7.10
	7.2.4.3 Aplicaciones. . . . .	7.11
7.2.5	ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO DEL CENTRO DE MASAS DE UN SÓLIDO RÍGIDO. . . . .	7.12
7.2.6	IMPULSO MECÁNICO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO PARA UN SÓLIDO RÍGIDO. . . . .	7.13
7.2.7	MOVIMIENTO DEL CENTRO DE MASAS EN SISTEMAS NO INERCIALES. . .	7.14
7.2.8	CENTRO DE GRAVEDAD. . . . .	7.14
7.3	MOVIMIENTO DE UN SÓLIDO RÍGIDO CON UN EJE FIJO. . . . .	7.17
7.3.1	MOVIMIENTO DEL CENTRO DE MASAS. . . . .	7.17
7.3.2	MOMENTO CINÉTICO. . . . .	7.18
7.3.3	PÉNDULO FÍSICO. . . . .	7.20
7.4	MOMENTOS Y PRODUCTOS DE INERCIA. . . . .	7.22
7.4.1	MOMENTOS DE INERCIA. . . . .	7.22
7.4.2	RADIO DE GIRO. . . . .	7.24
7.4.3	PRODUCTOS DE INERCIA. . . . .	7.25
7.4.4	MOMENTOS DE INERCIA DE ÁREAS PLANAS. . . . .	7.27
7.4.5	TEOREMA DE STEINER. . . . .	7.28
7.5	MOMENTO CINÉTICO DE UN SOLIDO RÍGIDO. . . . .	7.30
7.5.1	MOMENTO CINÉTICO EN EL MOVIMIENTO GENERAL. . . . .	7.30
7.5.2	TEOREMA DEL MOMENTO CINÉTICO PARA EL MOVIMIENTO PLANO DEL SÓLIDO RÍGIDO. . . . .	7.32
7.5.3	ECUACIONES DE LA DINÁMICA DEL MOVIMIENTO PLANO. . . . .	7.33
7.6	TRABAJO Y ENERGÍA MECÁNICA PARA UN SÓLIDO RÍGIDO. . . . .	7.35
7.6.1	TRABAJO DE LAS FUERZAS QUE ACTÚAN SOBRE EL SÓLIDO. . . . .	7.35
7.6.2	ENERGÍA CINÉTICA DE UN SÓLIDO RÍGIDO EN MOVIMIENTO PLANO. . .	7.37
7.6.3	TEOREMA DE LA ENERGÍA CINÉTICA PARA EL MOVIMIENTO PLANO DEL SÓLIDO RÍGIDO. . . . .	7.38
7.6.4	ENERGÍA POTENCIAL DE UN SÓLIDO RÍGIDO EN EL CAMPO DE GRAVEDAD TERRESTRE. . . . .	7.38
7.6.5	TEOREMA DE LA ENERGÍA MECÁNICA PARA UN SÓLIDO RÍGIDO. . . . .	7.39

## 7.1 INTRODUCCIÓN

Un sólido rígido es un caso especial ideal de sistema de partículas materiales, en el que cada dos partículas 1 y 2 cualesquiera están sometidas a ligaduras rígidas, de manera que la distancia entre ellas ( $|\mathbf{r}_{12}| = \text{cte}$ ) no cambia independientemente del movimiento que siga el sólido o del sistema de fuerzas aplicadas sobre él.

El sólido rígido supone un caso límite ideal y aproxima bastante bien la situación real de objetos rígidos, siempre que no nos preocupen las pequeñas deformaciones que se producen en la práctica bajo la acción de fuerzas o de pares y sólo nos interese estudiar su movimiento. El estudio de las deformaciones producidas por fuerzas o por pares en sólidos elásticos corresponde a la teoría de la elasticidad y no nos ocuparemos aquí de ello.

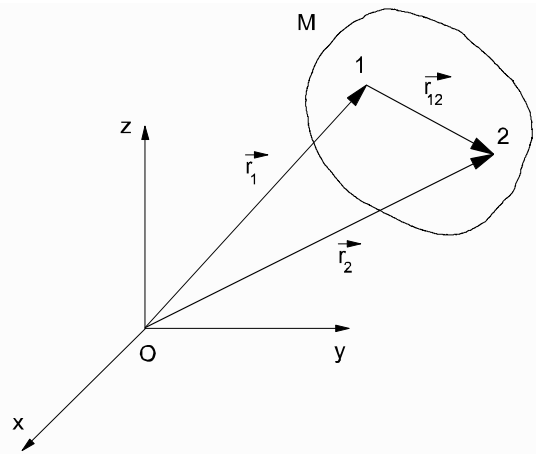


Figura 7.1

Todos los teoremas estudiados en el capítulo 6 para un sistema de partículas son utilizables, debidamente adaptados para un sólido rígido.

En el caso de que un sólido no esté sometido a más ligaduras que las internas, el número de grados de libertad para estudiar su movimiento es seis. Esta situación corresponde al estudio general del movimiento de un sólido en tres dimensiones que, como se vio, equivale a una traslación instantánea de uno de sus puntos (tres grados de libertad) más una rotación instantánea en torno a un eje que pase por ese punto (otros tres grados de libertad). Este caso general es bastante complejo de estudiar dinámicamente y no nos ocuparemos de él más que de forma parcial. Sólo haremos un estudio dinámico completo del movimiento plano.

### 7.1.1 MOVIMIENTO PLANO DE UN SÓLIDO RÍGIDO

Decimos que un sólido rígido sigue un movimiento plano cuando las trayectorias de cada uno de sus puntos están contenidas en el mismo plano o en planos paralelos. Cualquier sección del sólido perteneciente a uno de estos planos paralelos en un cierto instante sigue contenida en él a lo largo del movimiento.

Si el movimiento plano de un sólido rígido es únicamente de traslación, la velocidad angular es nula ( $\mathbf{T} = \mathbf{0}$ ), y el sólido equivale a

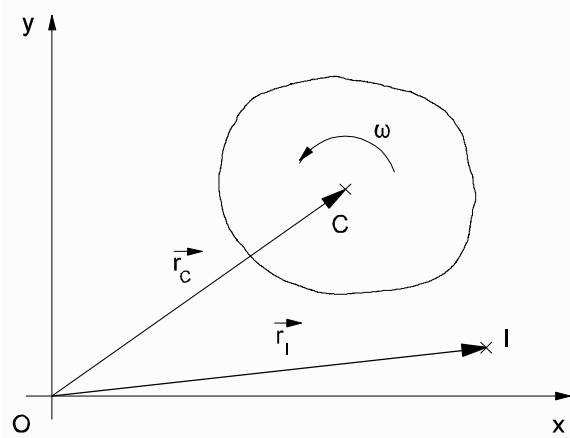


Figura 7.2

una partícula material que sigue una trayectoria plana, ya que en este caso todos sus puntos se mueven de la misma forma y sus trayectorias son idénticas o paralelas. En este caso son suficientes dos grados de libertad para estudiar el movimiento.

Definimos el plano del movimiento como el que contiene a la trayectoria del centro de masas,  $C$ , del sólido y la sección central como la intersección del sólido con el plano del movimiento (figura 7.2). En esta figura el plano del movimiento es el  $OXY$  y está representada la sección central.

En el caso en que exista rotación, el vector velocidad angular  $\mathbf{T}$  es perpendicular en todo instante al plano del movimiento ( $\mathbf{T} = T\mathbf{k}$  en el caso de la figura 7.2). Como la velocidad de cada punto del sólido está contenida en un plano perpendicular a  $\mathbf{T}$ , entonces existe eje instantáneo de rotación, siempre que  $\mathbf{T} \neq \mathbf{0}$ , y es perpendicular al plano del movimiento. Se define el centro instantáneo de rotación,  $I$ , como la intersección del eje instantáneo de rotación con el plano del movimiento.

Para estudiar el movimiento plano de un sólido rígido es conveniente, por simplicidad, situarse en la sección central del sólido. En este supuesto, utilizaremos en lo sucesivo las definiciones y notación indicadas.

Un caso particular de movimiento plano consiste en el movimiento de un sólido rígido respecto a un eje fijo. En estas condiciones el centro instantáneo de rotación está determinado por la intersección del eje con el plano del movimiento. El eje de rotación impone una interacción por contacto con el sólido sobre el que aparecerán, en general, fuerzas y pares de reacción.

### 7.1.2 SISTEMA DE FUERZAS APLICADAS SOBRE UN SÓLIDO RÍGIDO

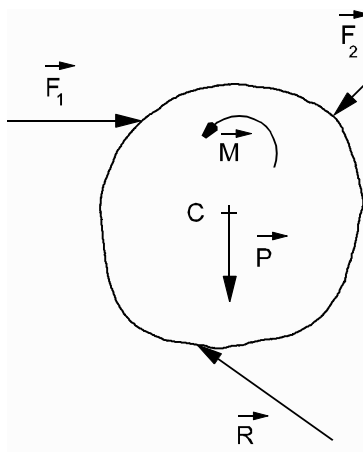


Figura 7.3

Considérese un sólido rígido sometido a un conjunto de fuerzas como el de la figura 7.3. Se han representado el peso  $\mathbf{P}$ , aplicado en el centro de masas  $C$ , dos fuerzas directamente aplicadas,  $\mathbf{F}_1$  y  $\mathbf{F}_2$ , una fuerza de reacción en un apoyo,  $\mathbf{R}$ , y un par de fuerzas, de resultante nula y momento  $\mathbf{M}$ , no aplicado en ningún punto específico por ser un vector libre. Las únicas fuerzas aplicadas sobre un sólido rígido que tendremos que considerar son las exteriores, ya que las ligaduras rígidas imponen que no haya variación de la distancia entre cada dos puntos del sólido y se puede considerar que todas las fuerzas interiores cancelan estrictamente sus efectos dinámicos.

A un diagrama como el de la figura 7.3 se le denomina diagrama de sólido libre o diagrama de fuerzas que actúan sobre el sólido. En él se representan **únicamente** las fuerzas y pares aplicados, que sustituyen a los cuerpos o ligaduras con los que interacciona.

Las fuerzas que actúan sobre un sólido rígido cumplen:

1. El modelo de fuerza puntual. Como ya se indicó en el capítulo 2, a pesar de que muchas fuerzas se transmiten sobre una superficie de contacto, es posible reducirlas a una única fuerza, o a una fuerza y un par, con un punto de aplicación bien determinado.
2. La ley del paralelogramo de suma vectorial. El efecto que producen varias fuerzas sobre un sólido es igual al que produce su suma vectorial, consideradas como sistema de vectores equivalente en cada punto.
3. El principio de transmisibilidad. El efecto de una fuerza sobre un sólido rígido no cambia si desplazamos el punto de aplicación a lo largo de su recta soporte.

Las tres condiciones anteriores implican que las fuerzas que actúan sobre un sólido rígido se comportan como un sistema de vectores deslizantes, al que llamaremos sistema de fuerzas aplicadas sobre el sólido rígido.

El sistema de fuerzas se puede reducir, en cada punto,  $O$ , a un sistema equivalente, simplificado, constituido por la fuerza resultante,  $\mathbf{F}$ , y por el momento resultante,  $\mathbf{M}_O$ .

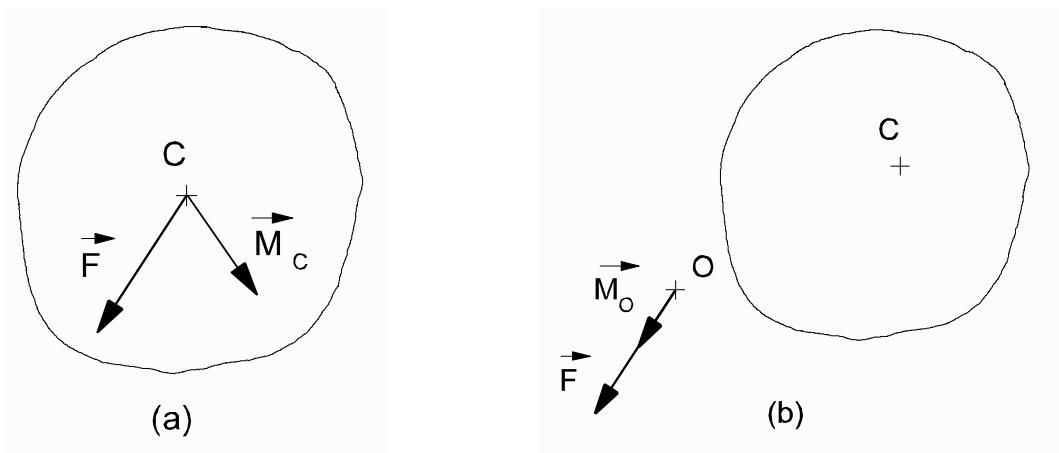


Figura 7.4

En la figura 7.4(a) se ha reducido el sistema de fuerzas de la figura 7.3 al centro de masas, cualitativamente. En la figura 7.4(b) se ha reducido a un punto del eje central,  $O$ , que se ha supuesto que ni siquiera pertenece al sólido.

La evolución dinámica del sólido rígido depende del sistema de fuerzas aplicado sobre él y los tres sistemas de las figuras 7.3 y 7.4 (a) y (b) son equivalentes en este sentido.

Como veremos, la dinámica del movimiento de traslación del sólido viene impuesta por la resultante  $\mathbf{F}$  y la dinámica del movimiento de rotación por el momento resultante,  $\mathbf{M}_C$ , respecto al centro de masas por ejemplo (aunque no forzosamente).

Así, en el caso de un sólido en movimiento de traslación, el eje central del sistema de fuerzas debe contener al centro de masas y el momento mínimo ha de ser nulo: el sistema equivale únicamente a la resultante  $\mathbf{F}$  aplicada en el centro de masas.

En el caso de un sólido en rotación alrededor de un eje fijo que contenga al centro de masas la resultante del sistema de fuerzas ha de ser nula y el sistema equivale únicamente a un par.

Para un sólido rígido en movimiento plano el momento mínimo es siempre nulo y el eje central está contenido en el plano del movimiento.

El caso particular de sistema de fuerzas nulo (resultante nula y momento resultante nulo) implica el equilibrio del sólido y se estudiará más adelante, en estática.

Se recomienda, como ejercicio, analizar los cuatro casos expuestos.

## 7.2 CENTRO DE MASAS DE UN SÓLIDO RÍGIDO

### 7.2.1 DENSIDAD DE UN SÓLIDO RÍGIDO

Dado un sólido rígido de masa total  $M$  y volumen  $V$ , se define su densidad media como

$$\rho_m = \frac{M}{V}$$

En el caso general, la concentración de masa por unidad de volumen puede ser diferente de unas regiones a otras del sólido. Así, si seleccionamos un volumen  $\Delta V_1$  cuya masa total sea  $\Delta M_1$  en una cierta zona del sólido y hacemos lo mismo para otra zona distinta, de volumen  $\Delta V_2$  y masa  $\Delta M_2$ , las densidades medias no serán iguales en el caso general

$$\rho_{m1} = \frac{\Delta M_1}{\Delta V_1} \neq \frac{\Delta M_2}{\Delta V_2} = \rho_{m2}$$

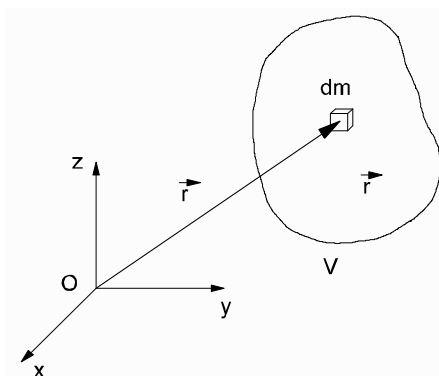


Figura 7.5

Se define la densidad volúmica de masa (cantidad de masa por unidad de volumen) en cada punto del sólido rígido como

$$\rho = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta v} = \frac{dm}{dv} \quad (7.1)$$

que, como se ha razonado, puede tomar distintos valores en puntos diferentes y, en consecuencia, representa un campo escalar  $D(x,y,z)$  (o, simplificadaamente  $D(\mathbf{r})$ ) definido en cada punto del volumen  $V$  que ocupa el sólido rígido (fuera del volumen  $V$ ,  $D=0$ , aunque también pueden existir puntos interiores donde  $D$  sea nula).

La definición anterior de densidad también se puede aplicar a sistemas que no sean sólidos

rígidos, como fluidos compresibles o incompresibles. La particularidad característica en el caso de un sólido consiste en que en un mismo punto la densidad tiene siempre el mismo valor, o, lo que es equivalente, el campo escalar  $D(\mathbf{r})$  es estacionario en la región  $V$  donde está definido.

Hay ocasiones en las que las únicas dimensiones importantes en el estudio de un sólido rígido representan una superficie  $S$  o una línea  $L$ , en lugar de un volumen  $V$ . En ellos se definen las densidades medias y en cada punto, por unidad de superficie (o superficiales), como

$$\sigma_m = \frac{M}{S} \quad \sigma = \frac{dm}{ds}$$

y las densidades media y en cada punto, por unidad de longitud (o longitudinales), como

$$\lambda_m = \frac{M}{L} \quad \lambda = \frac{dm}{dl}$$

La masa  $M$  total del sólido rígido está relacionada con la densidad, en cada uno de los tres casos considerados, mediante

$$M = \int_V \rho(\mathbf{r}) dm \quad M = \int_S \sigma(\mathbf{r}) dm \quad M = \int_L \lambda(\mathbf{r}) dm$$

donde, para aplicar estas relaciones, es necesario que el elemento de masa  $dm$  esté, todo él, en una posición  $\mathbf{r}$  en la que el valor de la densidad ( $D(\mathbf{r})$ ,  $F(\mathbf{r})$  o  $\mathcal{G}(\mathbf{r})$ , según el caso) esté unívocamente determinado para que así los integrandos estén bien definidos y sea posible calcular las integrales correspondientes.

Decimos que un sólido rígido es homogéneo cuando su densidad es constante (tiene el mismo valor en todos los puntos), es decir

$$\rho = \text{cte} \quad \sigma = \text{cte} \quad \lambda = \text{cte}$$

según el caso considerado.

Para un sólido homogéneo la densidad media coincide con la densidad en cada punto:

$$\rho = \frac{M}{V} \quad \sigma = \frac{M}{S} \quad \lambda = \frac{M}{L}$$

Las ecuaciones de dimensiones y unidades SI de cada una de las densidades definidas son

$$\begin{aligned} [D] &= L^{-3}M & [F] &= L^{-2}M & [\mathcal{G}] &= L^{-1}M \\ 1 \text{ m}^{-3}.\text{kg} & & 1 \text{ m}^{-2}.\text{kg} & & 1 \text{ m}^{-1}.\text{kg} & \end{aligned}$$

## 7.2.2 DEFINICIÓN DE CENTRO DE MASAS DE UN SÓLIDO RÍGIDO

La definición (6.12) de centro de masas es aplicable, tal cual, a un sólido que pueda considerarse constituido por partículas materiales independientes. En el caso de que el sólido rígido tenga una masa  $M$  distribuida de forma continua en un volumen  $V$ , su centro de masas  $C$  viene definido, respecto al sistema de referencia  $S$ , por el vector de posición

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{M} \int_V \mathbf{r} \, dm \quad (7.2)$$

o, equivalentemente, sus coordenadas en tal sistema de referencia están dadas por

$$x_c = \frac{1}{M} \int_V x \, dm \quad y_c = \frac{1}{M} \int_V y \, dm \quad z_c = \frac{1}{M} \int_V z \, dm$$

El vector  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  indica la posición del punto de masa  $dm$  que estemos considerando. Para obtener un integrando que sea fácil de manejar matemáticamente es necesario expresar de otras formas  $dm$ . Sea  $D(\mathbf{r})$  (o  $F(\mathbf{r})$  o  $\delta(\mathbf{r})$ ) el valor de la densidad en el punto definido por el vector de posición  $\mathbf{r}$  y  $dv$  (o  $ds$  o  $dl$ ) un elemento de volumen infinitesimal en torno a ese punto (o de superficie o de longitud). Se cumple que

$$dm = \rho(\mathbf{r})dv \quad dm = \sigma(\mathbf{r})ds \quad dm = \lambda(\mathbf{r})dl$$

según sea el caso.

En realidad sólo hemos de exigir que el valor de la densidad sea el mismo en el elemento  $dv$  (o  $ds$ , o  $dl$ ) elegido, por lo que es frecuente tratar con elementos infinitesimales  $dv$ ,  $ds$  o  $dl$ , de volumen, superficie o longitud, pero cuyas dimensiones sean finitas, siempre que existan simetrías en el sólido que permitan simplificar el problema de esta forma.

La expresión (7.2) se puede escribir de las formas

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_c &= \frac{1}{M} \int_V \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dv \\ \mathbf{r}_c &= \frac{1}{M} \int_S \mathbf{r} \sigma(\mathbf{r}) ds \\ \mathbf{r}_c &= \frac{1}{M} \int_L \mathbf{r} \lambda(\mathbf{r}) dl \end{aligned} \quad (7.3)$$

según sea el caso que se esté tratando. Las ecuaciones (7.3) son calculables matemáticamente siempre que conozcamos las funciones densidad respectivas.

El centro de masas  $C$  de un sólido rígido representa, dinámicamente, el punto fundamental

para explicar la traslación instantánea del sólido, como veremos más adelante.

### 7.2.3 CENTROIDE

Para un sólido rígido homogéneo, la densidad es constante y la primera de las ecuaciones (7.3) se puede escribir como

$$\mathbf{r}_C = \frac{1}{M} \int_V \mathbf{r} \rho \, dv = \frac{\rho}{\rho V} \int_V \mathbf{r} \, dv = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{r} \, dv$$

y lo mismo para las otras dos. Es decir, en este caso las definiciones de centro de masa para sólidos homogéneos que representan volúmenes, áreas o líneas, se reducen a

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_C &= \frac{1}{V} \int_V \mathbf{r} \, dv \\ \mathbf{r}_C &= \frac{1}{S} \int_S \mathbf{r} \, ds \\ \mathbf{r}_C &= \frac{1}{L} \int_L \mathbf{r} \, dl \end{aligned} \tag{7.4}$$

respectivamente. Como se ve, en estas expresiones no hay ya ninguna referencia a masas ni a densidades, sino sólo a formas geométricas y volúmenes, áreas o superficies. Las ecuaciones (7.4) constituyen la definición de centroide de un volumen  $V$ , de una superficie  $S$  y de una línea  $L$ , en el orden indicado.

Así, el centroide de una figura geométrica coincide con el centro de masas de un sólido macizo y homogéneo que ocupe el volumen, la superficie o la longitud de tal figura, sea cual sea la masa del sólido.

### 7.2.4 CÁLCULO DE CENTROIDES DE ÁREAS Y DE LÍNEAS PLANAS

Para la determinación de centroides de áreas o de líneas planas son muy útiles los dos teoremas de Guldin-Pappus.

#### 7.2.4.1 Teorema primero de guldin-pappus

El volumen de revolución,  $V$ , generado por un área plana al rotar una vuelta completa en torno a un eje contenido en el plano y que no la corta es igual al valor del área multiplicado por la longitud que recorre su centroide en esa revolución. Es decir



$$V = 2\pi d_C S \quad (7.5)$$

donde  $d_C$  representa la distancia entre el centroide  $C$  del área  $S$  y el eje de revolución.

La demostración es sencilla. Sea un área plana  $S$  que descomponemos en elementos infinitesimales  $ds$  de coordenadas  $(x,y)$  (figura 7.6).

En una revolución completa en torno al eje  $OY$  (que no debe cortar al área  $S$ ) el elemento  $ds$  genera un volumen

$$dv = 2\pi x ds$$

Integrando la expresión anterior a todo el área  $S$  se obtiene

$$V = \int_v dv = 2\pi \int_s x ds$$

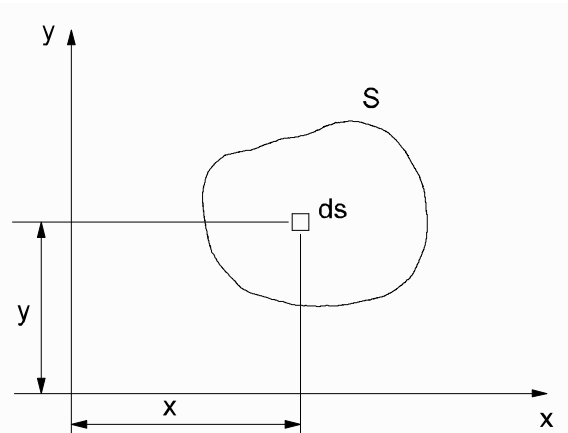


Figura 7.6

donde  $V$  representa el volumen generado por toda el área  $S$  en la revolución en torno a  $OY$ . Por la definición (7.4) de centroide resulta

$$V = 2\pi x_C S$$

#### 7.2.4.2 Teorema segundo de guldin-pappus

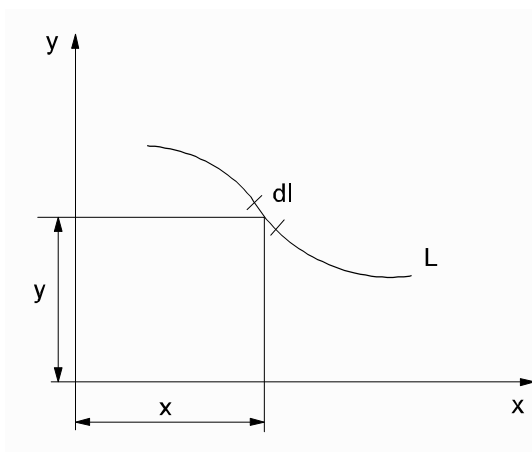


Figura 7.7

La superficie de revolución,  $S$ , generada por un elemento de línea plana al rotar una vuelta completa el torno a un eje contenido en su plano y que no la corta, es igual a la longitud  $L$  de la línea, multiplicada por la longitud que recorre su centroide en esa revolución. Es decir

$$S = 2\pi d_C L \quad (7.6)$$

siendo  $d_C$  la distancia entre el centroide  $C$  de  $L$  y el eje de revolución.

La demostración es prácticamente igual que en el caso anterior.

Sea una línea plana de longitud  $L$ . Dividámosla en elementos infinitesimales  $dl$  de coordenadas  $(x,y)$  e imaginemos una revolución completa en torno al eje  $OX$  (Figura 7.7). El

área  $dS$  generada por el elemento  $dl$  al rotar una vuelta es

$$dS = 2\pi y dl$$

e integrando a todo el elemento de línea  $L$ ,

$$S = \int_L dS = 2\pi \int_L y dl$$

Finalmente, por la definición (7.4) de centroide se obtiene

$$S = 2\pi y_c L$$

### 7.2.4.3 Aplicaciones

Los teoremas de Guldin-Pappus son útiles, en primer lugar, para calcular centroides de áreas o líneas planas simples. Así, por ejemplo, el centroide de un semicírculo de radio  $R$  viene dado por

$$d_c = \frac{4R}{3\pi}$$

donde  $d_c$  representa la distancia entre el centroide y el diámetro del semicírculo. Análogamente, la posición del centroide de una semicircunferencia viene dada por

$$d_c = \frac{2R}{\pi}$$

respecto a su diámetro.

Los teoremas de Guldin-Pappus sirven también para calcular volúmenes o áreas de revolución. Así, el volumen de un toroide generado por un círculo de radio  $r$  al girar en torno a un eje que no lo corta y siendo  $R$  la distancia entre el centro del círculo y el eje de revolución, es:

$$V = 2\pi^2 R r^2$$

y la superficie toroidal, en las mismas condiciones,

$$S = 4\pi^2 R r$$

Los dos teoremas se pueden generalizar. En el caso de que el eje corte a la superficie, entonces

$$V_2 - V_1 = \pm 2\pi d_c S$$

siendo  $V_1$  y  $V_2$  los volúmenes de revolución generados por cada una de las dos superficies,  $S_1$  y  $S_2$ , en que divide el eje a la superficie total ( $S=S_1+S_2$ ). El signo  $\pm$  indica que es necesario definir un sentido en el eje que contiene a  $d_c$  (perpendicular al eje de rotación).

Análogamente, para una línea

$$S_2 - S_1 = \pm 2\pi d_c L$$

con consideraciones similares a las del caso anterior.

Se propone como ejercicio demostrar todos los resultados expuestos en este apartado.

## 7.2.5 ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO DEL CENTRO DE MASAS DE UN SÓLIDO RÍGIDO

La ecuación (6.20) que explica el movimiento del centro de masas de un sistema de partículas es aplicable al caso de un sólido rígido. En efecto, a partir de la definición (7.2)

$$M\mathbf{r}_C = \int_M \mathbf{r} dm$$

referida a un sistema inercial  $S$ . Derivando obtenemos:

$$M\mathbf{v}_C = \frac{d}{dt} \int_M \mathbf{r} dm = \int_M \frac{d\mathbf{r}}{dt} dm = \int_M \mathbf{v} dm$$

ya que la integral está extendida a puntos de masa infinitesimal,  $dm$ , fijos y, en consecuencia, la derivación no afecta más que al vector de posición  $\mathbf{r}$ .

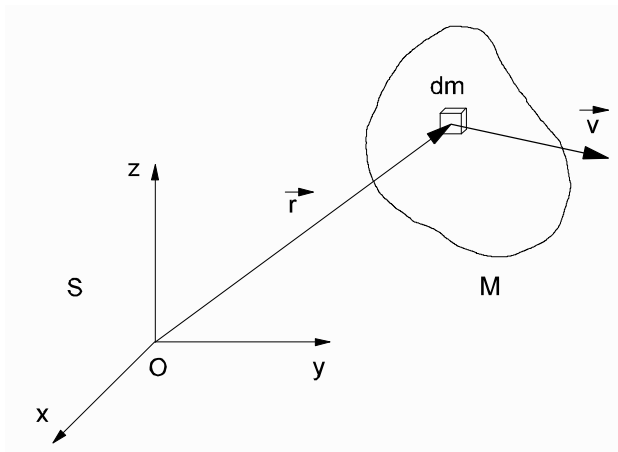


Figura 7.8

El término  $\mathbf{v}dm=d\mathbf{p}$  representa la cantidad de movimiento de la partícula  $dm$  (figura 7.8).

Por definición (ecuación 6.5), la cantidad de movimiento del sólido rígido es

$$\mathbf{p} = \int_M d\mathbf{p} = \int_M \mathbf{v} dm$$

y resulta

$$\mathbf{p} = M\mathbf{v}_C \quad (7.7)$$

Derivando esta última expresión y teniendo en cuenta (6.19), válida para todo sistema de partículas materiales (en particular para

un sólido rígido), resulta

$$\mathbf{F} = M \mathbf{a}_C \quad (7.8)$$

donde  $\mathbf{F}$  es la resultante de las fuerzas aplicadas sobre el sólido (sólo exteriores, evidentemente).

La expresión (7.8) es la ecuación del movimiento del centro de masas de un sólido rígido, e indica que el centro de masas se mueve como si fuese una partícula material, de masa igual a toda la masa  $M$  del sólido, que estuviera sometida a la resultante de las fuerzas,  $\mathbf{F}$ , aplicadas sobre el sólido.

En el caso general, el sistema de fuerzas aplicadas, reducidas al centro de masas, viene representado por la resultante  $\mathbf{F}$  y por el momento resultante  $\mathbf{M}_C$ . Como hemos visto,  $\mathbf{F}$  explica la traslación del centro de masas, siendo este punto privilegiado en tal sentido (ningún otro punto verifica una ecuación del tipo de la (7.8), en general). Más adelante, al estudiar el teorema del momento cinético, veremos que  $\mathbf{M}_C$  explica la rotación propia instantánea del sólido, si bien en este caso pueden existir otros puntos aparte de  $C$  válidos como referencia para estudiar tal rotación.

En el supuesto de que la reducción del sistema de fuerzas al centro de masas venga dada únicamente por la resultante  $\mathbf{F}$  (es decir, si  $\mathbf{M}_C = \mathbf{0}$ ) entonces el sólido seguirá un movimiento de traslación y su estudio dinámico equivaldrá estrictamente al de una partícula material de masa  $M$  sometida a la fuerza  $\mathbf{F}$ .

## 7.2.6 IMPULSO MECÁNICO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO PARA UN SÓLIDO RÍGIDO

La ecuación (7.8) se puede escribir como

$$\mathbf{F} dt = d\mathbf{p}$$

que integrada entre dos instantes  $t_1$  y  $t_2$  resulta

$$\mathbf{I} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \int_1^2 d\mathbf{p} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = M \mathbf{v}_{C2} - M \mathbf{v}_{C1} \quad (7.9)$$

que es la expresión del teorema de la cantidad de movimiento para un sólido rígido.

Si la resultante de las fuerzas que actúan sobre el sólido es nula, entonces se conserva su cantidad de movimiento

$$\mathbf{F} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p} = \text{cte} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_C = \text{cte}$$

y el centro de masas sigue un movimiento rectilíneo uniforme. En este caso habrá una rotación en torno a un eje instantáneo que pase por el centro de masas, si  $\mathbf{M}_C \dots \mathbf{0}$ , o bien el movimiento del sólido será de traslación, rectilíneo y uniforme, si  $\mathbf{M}_C = \mathbf{0}$ .

### 7.2.7 MOVIMIENTO DEL CENTRO DE MASAS EN SISTEMAS NO INERCIALES

En un sistema  $S'$  no inercial, el sistema de fuerzas reales aplicadas sobre el sólido se puede reducir a la resultante  $\mathbf{F}$  y al momento resultante  $\mathbf{M}_C$ , en el centro de masas, y las fuerzas de inercia se reducen a una resultante  $\mathbf{F}'$  y a un momento resultante  $\mathbf{M}'_C$ , ficticio en tal punto (figura 7.9).

Por un procedimiento similar al utilizado para deducir la expresión (7.8) es fácil demostrar que en este caso se verifica

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}' = \mathbf{M}\mathbf{a}'_C \quad (7.10)$$

siendo  $\mathbf{a}'_C$  la aceleración del centro de masas relativa al sistema no inercial  $S'$ . La resultante de las fuerzas de inercia viene dada por:

$$\mathbf{F}' = -\mathbf{M}\mathbf{a}_O - \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times (\mathbf{M}\mathbf{r}'_C) - \boldsymbol{\Omega} \times [\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{M}\mathbf{r}'_C)] - 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{M}\mathbf{v}'_C)$$

cuya demostración se propone como ejercicio.

Como se ve, la trayectoria del centro de masas en el sistema  $S'$  viene impuesta por  $\mathbf{F} + \mathbf{F}'$  mientras que  $\mathbf{M}_C$  y  $\mathbf{M}'_C$  no influyen sobre ella.

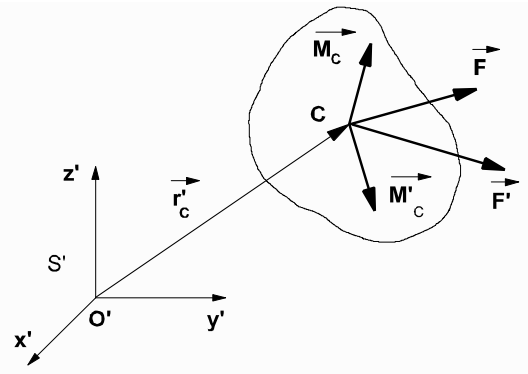


Figura 7.9

### 7.2.8 CENTRO DE GRAVEDAD

A diferencia de una partícula material, un sólido rígido tiene dimensiones finitas. Su masa total  $M$  está distribuida, en general, sobre un cierto volumen  $V$ . Consideremos un sólido sometido a un campo gravitatorio  $\mathbf{g}(\mathbf{r})$  que supondremos central y con centro en  $O$ , por sencillez, y calculemos la fuerza total que actúa sobre el sólido así como su recta soporte.

Si se considera al sólido formado por partículas de masa infinitesimal  $dm$  cuya posición respecto a  $O$  viene dada por el vector  $\mathbf{r}$ , el campo gravitatorio será diferente en el punto que ocupa cada una de ellas (figura 7.10). La dirección de  $\mathbf{g}$  cambia para dos puntos que no pertenezcan a una misma recta que contenga al centro del campo  $O$ . El módulo de  $\mathbf{g}$  cambia para dos puntos situados a diferente distancia de  $O$ .

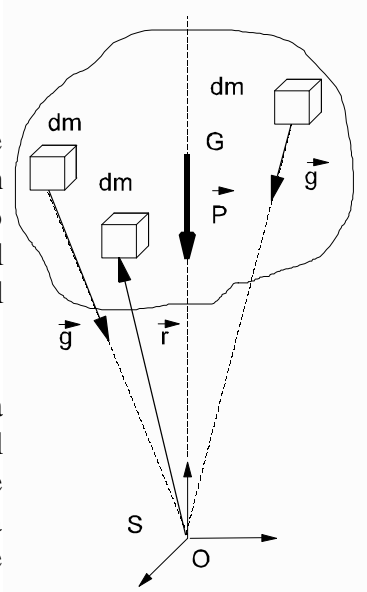


Figura 7.10

La fuerza total que ejerce el campo gravitatorio sobre el sólido viene representada por el sistema de vectores deslizantes  $\mathbf{g}dm$  distribuidos de forma continua en el volumen  $V$ . Su resultante, que llamaremos peso del sólido, es

$$\mathbf{P} = \int_M \mathbf{g}(\mathbf{r}) \, dm \quad (7.11)$$

El sistema de vectores deslizantes considerado tiene momento mínimo nulo, ya que es concurrente en O. En consecuencia, el sistema se puede reducir a la resultante  $\mathbf{P}$ , aplicada únicamente en los puntos del eje central, que contiene al punto O. El eje central está definido por O y por la dirección de  $\mathbf{P}$ . La respuesta del sólido al campo gravitatorio  $\mathbf{g}(\mathbf{r})$  está totalmente determinada por la resultante  $\mathbf{P}$  aplicada en cualquiera de los puntos del eje central.

Si cambiamos la orientación del sólido respecto al campo gravitatorio, el valor del peso  $\mathbf{P}$  cambiará en general y también lo hará su recta de aplicación.

La situación descrita es complicada, ya que obliga a realizar un cálculo del peso y de su recta soporte, en cada caso, para resolver cualquier problema de dinámica del sólido rígido (además, cambian a lo largo del movimiento).

En la práctica totalidad de los problemas que pueden presentarse, las dimensiones del sólido suelen ser despreciables frente a las de la tierra, que representa el único campo de gravedad importante. En estas condiciones podemos simplificar el problema considerando el campo de gravedad terrestre uniforme y de valor igual al de la aceleración de la gravedad local.

Bajo el supuesto anterior, el sistema de fuerzas distribuidas  $\mathbf{g}dm$  constituye un sistema de vectores infinitesimales paralelos, cuyo centro G, que llamaremos centro de gravedad del sólido, viene dado por

$$\mathbf{r}_G = \frac{\int_M |\mathbf{g}| \mathbf{r} \, dm}{\int_M |\mathbf{g}| \, dm} \quad (7.12)$$

respecto a un sistema de referencia cualquiera (véase, en el capítulo 2, el apartado Sistema de vectores paralelos). Para que la definición anterior sea válida es necesario considerar a los vectores  $\mathbf{g}dm$  ligados a los puntos definidos por cada elemento  $dm$  (es decir, un vector de posición  $\mathbf{r}$  fijo). En caso contrario  $\mathbf{r}_G$  no define un punto único, sino el eje central del sistema de vectores distribuido sobre el volumen que ocupa el sólido.

Con las aproximaciones y simplificaciones realizadas, el centro de gravedad de un sólido rígido, dado por la ecuación (7.12), coincide con su centro de masas. En efecto, si  $\mathbf{g}=\text{cte}$ , entonces

$$\mathbf{r}_G = \frac{\mathbf{g} \int_M \mathbf{r} \, dm}{\mathbf{g} \int_M dm} = \frac{1}{M} \int_M \mathbf{r} \, dm = \mathbf{r}_C$$

y el peso total, ecuación (7.11), es en este caso

$$\mathbf{P} = \mathbf{g} \int_M dm = M \mathbf{g}$$

y así se utilizará en las aplicaciones prácticas.

Conviene tener en cuenta, no obstante, que en general la recta soporte del peso no contiene al centro de masas, aunque la distancia entre ambos sea muy pequeña y despreciable para sólidos de dimensiones normales. Ello implica que la reducción del peso al centro de masas se traduce en la resultante  $\mathbf{P}$  y en un par de momento  $\mathbf{m}_C$  despreciable, pero no nulo. En situaciones en las que  $\mathbf{m}_C$  sea el único par que actúa, debe ser tenido en cuenta, ya que puede ser fuente de inestabilidades como sucede en el movimiento de satélites artificiales, por ejemplo.

La aplicación de la ecuación (7.12) para el cálculo de centros de gravedad de sólidos reales puede ser complicada. Para un sólido rígido, la densidad es variable de unos puntos a otros y su contorno puede ser irregular, en el caso más general. Un procedimiento experimental simple para determinar centros de gravedad consiste en aplicar la propiedad de que el centro de un sistema de vectores paralelos ligados, representa la intersección de los ejes centrales que se obtienen por rotación global del correspondiente sistema de vectores deslizantes paralelos.

Así, si suspendemos un sólido rígido de diferentes puntos fijos, los sucesivos segmentos del sólido definidos por las distintas verticales trazadas desde esos puntos, deben de cortarse en el centro de gravedad (figura 7.11).

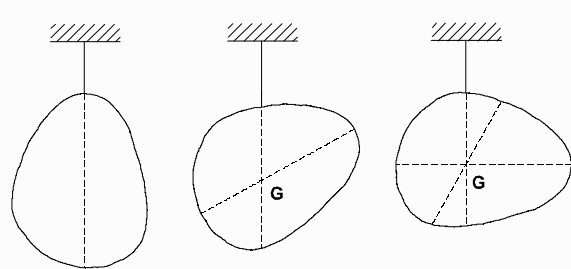


Figura 7.11

Como resumen final, el centro de masas es el punto adecuado para representar la fuerza total resultante  $\mathbf{F}$  que actúa sobre el sólido, que es la que impone su movimiento de traslación. El centro de gravedad es el punto donde se debe aplicar el peso del sólido. Consideraremos que ambos coinciden para las aplicaciones prácticas.

## 7.3 MOVIMIENTO DE UN SÓLIDO RÍGIDO CON UN EJE FIJO

### 7.3.1 MOVIMIENTO DEL CENTRO DE MASAS

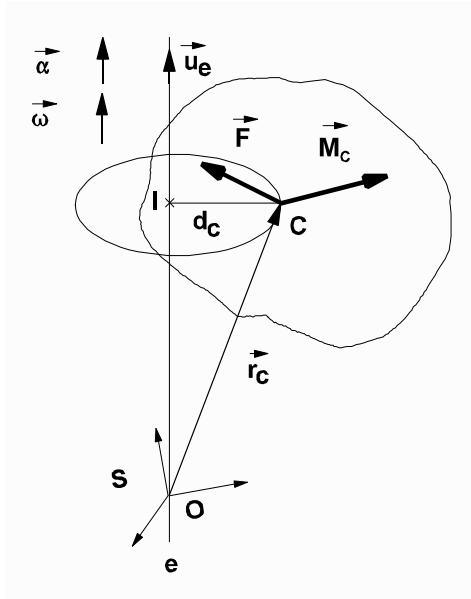


Figura 7.12

Un caso particular sencillo de movimiento plano es el de un sólido que gira alrededor de un eje fijo. Como se vio en el capítulo 4, en este caso el movimiento es de rotación con velocidad y aceleración angulares  $\mathbf{T}$  y  $\mathbf{''}$  paralelas al eje. Orientamos el eje mediante un vector unitario  $\mathbf{u}_e$  dado por  $\mathbf{u}_e = \frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|}$  definido salvo si  $\mathbf{T}=0$ , en cuyo caso se define mediante el vector  $\mathbf{''}$  de la misma forma que se ha hecho con  $\mathbf{T}$ .

El movimiento de cada punto del sólido será circular, en torno al eje de rotación. En particular, el centro de masas C seguirá una trayectoria circular de radio  $d_c$  (figura 7.12).

Sea O un punto fijo del eje, que adoptaremos como origen de un sistema de referencia inercial S, y sean  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{M}_C$  la reducción al centro de masas C del sistema de fuerzas aplicadas sobre el sólido. La resultante  $\mathbf{F}$  debe explicar el movimiento de C de acuerdo con la ecuación 7.8, que es

$$\mathbf{F} = M \mathbf{a}_C$$

Según se vio en el apartado 3.7, la velocidad de un punto C se puede expresar como

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{T} \times \mathbf{r}_C$$

La cantidad de movimiento del sólido es

$$\mathbf{p} = M \mathbf{v}_C = M \mathbf{T} \times \mathbf{r}_C$$

y se verifica que

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = M \mathbf{a}_C = M \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_C + M \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_C)$$

Proyectando la ecuación anterior según los ejes del triedro intrínseco para el movimiento de C se obtienen las componentes tangencial y normal de la fuerza resultante

$$\mathbf{F}_t = M \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_C \quad \mathbf{F}_n = M \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_C) \quad (7.13)$$

La velocidad y la aceleración de cualquier otro punto del sólido se obtienen mediante los campos de velocidades y aceleraciones. En particular, para puntos del eje

$$\mathbf{v}_O = \mathbf{0} \quad \mathbf{a}_O = \mathbf{0} \quad \boldsymbol{\alpha} \text{ O } \mathbf{0} \text{ eje}$$



En este caso es evidente que el eje instantáneo de rotación es el eje  $e$ , impuesto como condición. El centro instantáneo de rotación  $I$  es la intersección del eje de rotación con la sección central (figura 7.12).

### 7.3.2 MOMENTO CINÉTICO.

Para describir el movimiento del centro de masas nos hemos apoyado en que la velocidad angular de rotación  $\boldsymbol{\omega}$  y la aceleración angular de rotación  $\boldsymbol{\alpha}$  estaban determinadas, pero no disponemos aún de una ecuación dinámica que nos permita obtenerlas en función de las fuerzas y pares aplicados. Esta ecuación nos la proporciona el teorema del momento cinético respecto al eje fijo.

Sea  $O$  un punto fijo del eje de rotación y  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{M}_O$  la reducción al punto  $O$  del sistema de fuerzas aplicadas sobre el sólido.

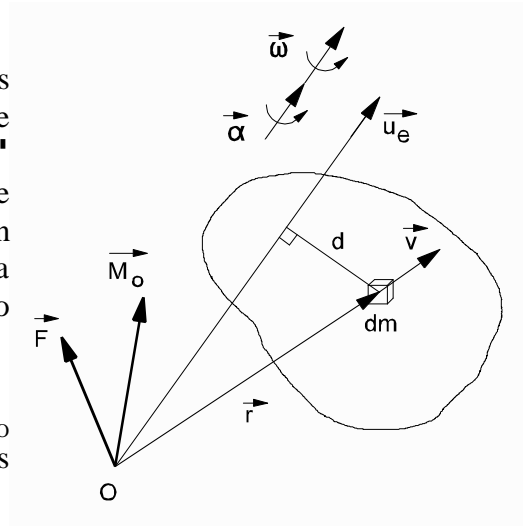


Figura 7.13

El momento cinético de cada partícula  $dm$  respecto al eje es

$$dL_e = dL_O \cdot \mathbf{u}_e$$

donde

$$\begin{aligned} dL_O &= \mathbf{r} \times (\mathbf{v} dm) = [\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] dm = \\ &= [r^2 \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}] dm \end{aligned}$$

con lo que

$$dL_e = [r^2 (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{u}_e) - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) (\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}_e)] dm$$

pero, teniendo en cuenta que

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_e = T \quad \mathbf{T} \cdot \mathbf{r} = T P_e(\mathbf{r}) \quad \text{y} \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{u}_e = P_e(\mathbf{r})$$

y que

$$r^2 - P_e^2(\mathbf{r}) = d^2$$

siendo  $d$  la distancia entre  $dm$  y el eje  $e$  (figura 7.13), se obtiene que

$$dL_e = T d^2 dm$$

Integrando para todos los puntos  $dm$  del sólido, resulta

$$L_e = \omega \int_M d^2 dm$$

ya que  $T$  no depende de las variables de integración.

Se define el momento de inercia  $I_e$  del sólido con respecto al eje  $e$  como

$$I_e = \int_M d^2 dm \quad (7.14)$$

con lo que

$$L_e = I_e \omega \quad (7.15)$$

Además, como el eje es fijo,  $I_e$  no depende del tiempo; tiene el mismo valor a lo largo del movimiento del sólido.

Aplicando el teorema del momento cinético respecto a un eje fijo para un sistema de partículas, resulta

$$M_e = \frac{dL_e}{dt} = I_e \frac{d\omega}{dt} = I_e \alpha \quad (7.16)$$

donde  $M_e = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{u}_e$  y  $\alpha = \ddot{\theta} \mathbf{u}_e$ .

Como el eje de rotación es fijo,  $\theta$  queda determinada por su proyección sobre él ( $\theta$ ) que está dada por la ecuación (7.16), y  $T$  se obtiene por integración a partir de  $\theta$ .

En el caso general ni  $\mathbf{L}_O$  ni  $\mathbf{M}_O$  están contenidos en el eje de rotación (es decir,  $^*L_e^* = ^*L_O \cdot \mathbf{u}_e^* \dots ^*L_O^*$ , e igual para  $\mathbf{M}_O$ ). Las componentes de  $\mathbf{M}_O$  según el plano perpendicular al eje se interpretan como pares de reacción que actúan sobre el sólido, debidos a su interacción con el eje. Sobre ello se tratará más adelante. En cualquier caso, el movimiento de rotación del sólido, caracterizado por  $T$  y  $\theta$ , se debe únicamente a las proyecciones sobre el eje fijo,  $L_e$  y  $M_e$ .

Si el momento resultante respecto al eje es nulo, entonces se conserva el momento cinético respecto al eje y la velocidad angular de rotación es constante:

$$M_e = 0 \quad \text{Y} \quad \ddot{\theta} = 0 ; \quad T = \text{cte} ; \quad L_e = \text{cte}$$

En este caso la resultante de las fuerzas,  $\mathbf{F}$ , será nula si el centro de masas está contenido en el eje y no nula, aunque perpendicular al eje, en caso contrario.

### 7.3.3 PÉNDULO FÍSICO

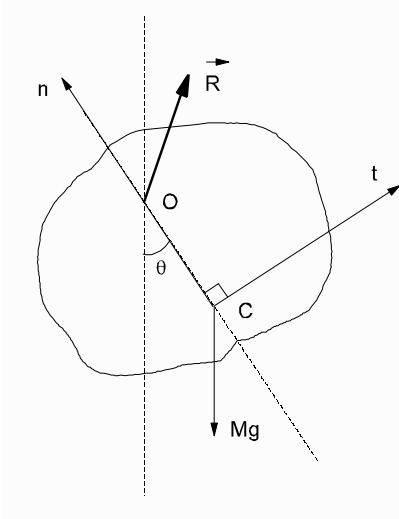


Figura 7.14

El péndulo físico consiste en un sólido rígido que puede moverse un torno a un eje horizontal ideal (sin pares de fricción). En la figura 7.14 se representa la sección central del sólido, sometido a dos fuerzas, el peso aplicado en el centro de masas y la reacción  $\mathbf{R}$  en el punto O del eje de rotación. En la posición representada  $t$  y  $n$  son las direcciones tangente y normal del movimiento circular de radio OC del centro de masas. No se dibujan los pares de reacción sobre el eje ya que no influyen en el movimiento.

El problema plantea un único grado de libertad. La variable más adecuada para determinar la posición del sólido en cada instante es el ángulo  $\theta$  que forma el segmento OC con la vertical. Aplicando el teorema del momento cinético respecto al eje de rotación (ecuación 7.16), y llamando  $r_C$  a la distancia entre O y C, obtenemos

$$-Mgr_C \text{sen}\theta = I_e \alpha = I_e \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

es decir

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{Mgr_C}{I_e} \text{sen}\theta = 0$$

que es la ecuación diferencial característica de un péndulo físico ideal. Es una ecuación no lineal cuya solución es algo complicada. Para pequeñas oscilaciones ( $\theta$  pequeño) podemos utilizar la aproximación

$$\text{sen}\theta \approx \theta$$

con lo que la ecuación se hace lineal

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{Mgr_C}{I_e} \theta = 0$$

y es característica de un movimiento armónico simple (aunque en este caso en la variable  $\theta$ ), de periodo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_e}{Mgr_C}}$$

cuya solución general es

$$\theta = \theta_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t - \phi\right)$$

La amplitud del movimiento viene dada por  $\theta_0$  y la posición inicial por la fase inicial  $\phi$ . La velocidad angular y la aceleración angular de rotación son

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = -\frac{2\pi}{T} \theta_0 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}t - \phi\right)$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = -\frac{4\pi^2}{T^2} \theta_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \phi\right) = -\frac{4\pi^2}{T^2} \theta$$

Las componentes de la reacción  $\mathbf{R}$  según las direcciones tangente y normal del movimiento del centro de masas, vienen dadas en función de  $\theta$  por

$$\mathbf{R}_t = M\left(g - \frac{4\pi^2}{T^2} r_C\right) \theta$$

$$\mathbf{R}_n = Mg\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) + M\frac{4\pi^2}{T^2} r_C (\theta_0^2 - \theta^2)$$

en la aproximación de pequeñas oscilaciones. La deducción se propone como ejercicio.

El péndulo físico se reduce al péndulo matemático si  $I_e = M r_C^2$  (que corresponde a una masa puntual  $M$  situada en  $C$ ).

En este caso el periodo vale

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r_C}{g}}$$

como es fácil comprobar.

## 7.4 MOMENTOS Y PRODUCTOS DE INERCIA

### 7.4.1 MOMENTOS DE INERCIA

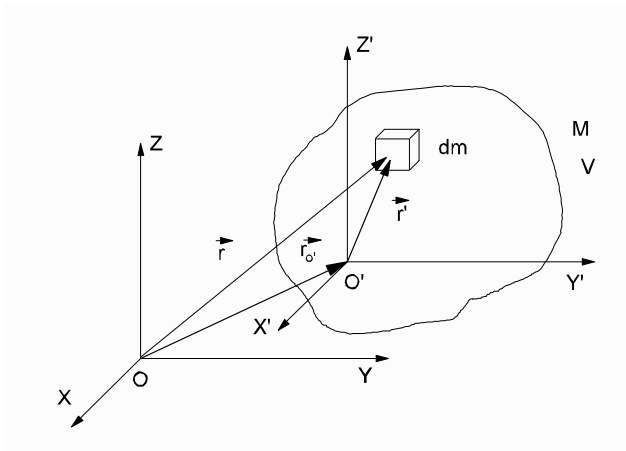


Figura 7.15

Dado un sólido rígido de masa  $M$  y que ocupa un volumen  $V$ , se define su momento de inercia respecto a un punto, respecto a un eje o respecto a un plano como

$$I = \int_M d^2 dm \quad (7.17)$$

siendo  $d$  la distancia del elemento  $dm$  al punto, eje o plano, respectivamente (figura 7.15).

Para que la definición anterior tenga sentido, la distancia  $d$  debe caracterizar completamente al elemento  $dm$  para que así

esté definido el integrando en la ecuación (7.17) y se pueda calcular la integral. En muchas ocasiones, en las que el sólido presenta simetrías, se pueden elegir elementos  $dm = Ddv$  que permitan simplificar el cálculo de momentos de inercia, reduciendo la integral (7.17), que en general implica tres variables de integración, a dos variables e incluso a una.

Si el sólido está en movimiento respecto al punto, eje o plano que consideremos, entonces el momento de inercia es una función del tiempo y cambia a lo largo del movimiento. El momento de inercia es constante cuando el punto, eje o plano están ligados al sólido.

Dinámicamente, encontraremos un importante sentido físico al momento de inercia respecto al eje instantáneo de rotación y deslizamiento (en el caso general) para un sólido en movimiento: El momento de inercia respecto a tal eje representa el coeficiente con que el sólido responde mediante una rotación al momento resultante aplicado sobre él, de forma análoga a como la masa  $M$  representa el coeficiente con el que el centro de masas del sólido responde mediante una traslación a la fuerza resultante aplicada sobre él. El momento de inercia respecto a un eje representa para la rotación del sólido lo mismo que la masa para su traslación.

Los momentos de inercia respecto a puntos o planos no tienen un significado tan claro, dinámicamente. Sin embargo son útiles en muchas ocasiones para el cálculo de momentos de inercia respecto a ejes.

La ecuación de dimensiones y unidad SI del momento de inercia de un sólido rígido son

$$[I] = L^2M \quad 1 \text{ m}^2 \cdot \text{kg}$$

como es evidente.

Para el sólido y los sistemas de ejes  $S$  y  $S'$ , paralelos, de la figura 7.15, donde la posición del elemento genérico  $dm$  viene determinada por

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad \mathbf{r}' = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}$$

los momentos de inercia respecto a los puntos O y O' son diferentes y viene dados por

$$I_O = \int_M (x^2 + y^2 + z^2) \, dm \quad \neq \quad I_{O'} = \int_M (x'^2 + y'^2 + z'^2) \, dm$$

y lo mismo sucede, en general, para los momentos de inercia respecto a los distintos ejes o planos.

Los momentos de inercia respecto a los ejes coordenados del sistema S están dados por

$$I_x = \int_M (y^2 + z^2) \, dm ; \quad I_y = \int_M (x^2 + z^2) \, dm ; \quad I_z = \int_M (x^2 + y^2) \, dm$$

Se recomienda comprobar gráficamente que las distancias del elemento dm a cada eje considerado son las correctas.

Los momentos de inercia respecto a los planos coordenados  $z = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$  son

$$I_{xy} = \int_M z^2 \, dm ; \quad I_{zx} = \int_M y^2 \, dm ; \quad I_{yz} = \int_M x^2 \, dm$$

donde aquí las distancias de dm a los planos respectivos son más evidentes.

Teniendo en cuenta todas las expresiones anteriores es fácil verificar las siguientes relaciones importantes entre momentos de inercia:

$$\begin{aligned} 2I_O &= I_x + I_y + I_z \\ I_x &= I_{xy} + I_{zx} \\ I_y &= I_{xy} + I_{yz} \\ I_z &= I_{yz} + I_{zx} \\ I_O &= I_{xy} + I_{yz} + I_{zx} \end{aligned} \tag{7.18}$$

La demostración se propone como ejercicio. Las ecuaciones (7.18) se utilizarán a menudo para obtener momentos de inercia respecto a ejes para sólidos que presenten simetrías.

Así, para el caso de una esfera maciza y homogénea de centro O, radio R y masa M, todos los ejes que pasan por su centro son equivalentes por simetría

$$I_x = I_y = I_z$$

y, en consecuencia,

$$2I_O = 3I_x \quad \text{Y} \quad I_x = 2I_O / 3$$

Para una esfera es mucho más fácil calcular  $I_O$  que  $I_x$ . En efecto,

$$I_O = \int r^2 dm$$

y con

$$dm = \rho dv ; \quad \rho = \frac{3M}{4\pi R^3} ; \quad dm = 4\pi \rho r^2 dr$$

resulta

$$I_O = \frac{3M}{R^3} \int_0^R r^4 dr = \frac{3}{5} MR^2$$

y en consecuencia

$$I_x = \frac{2}{3} I_O = \frac{2}{5} MR^2$$

Se recomienda como ejercicio realizar con detalle el desarrollo anterior, representando gráficamente la esfera y los elementos  $dm$  considerados. Analizar qué sucede para una superficie esférica de masa  $M$  y radio  $R$ .

## 7.4.2 RADIO DE GIRO

El momento de inercia de una partícula material de masa  $M$  respecto a un eje  $e$  viene dado por

$$I_e = M r^2$$

donde  $r$  representa la distancia, única en cada instante, de la partícula al eje.

Para un sólido rígido de masa  $M$ , cuyo momento de inercia respecto a un eje  $e$  valga  $I_e$ , se define el **radio de giro**  $R_g$  del sólido respecto a tal eje como

$$R_g = \sqrt{\frac{I_e}{M}} \quad (7.19)$$

que es equivalente a  $I_e = MR_g^2$ . El radio de giro representa la distancia al eje a la cual una partícula material que tuviese la misma masa que el sólido tendría también el mismo momento de inercia. Evidentemente, el radio de giro determina el momento de inercia y viceversa.

Para una superficie cilíndrica (o un aro) el radio de giro respecto a su eje de simetría coincide con su radio, pero en general los radios de giro de sólidos son menores que la distancia máxima de los puntos del sólido al eje considerado.

De la misma forma se pueden definir radios de giro respecto a puntos o planos, pero carecen de sentido físico en dinámica del sólido rígido.

### 7.4.3 PRODUCTOS DE INERCIA. TENSOR DE INERCIA

Se definen los productos de inercia relativos a un sistema de ejes OXYZ, para un sólido rígido mediante

$$\begin{aligned} P_{xy} &= \int_M xy \, dm = P_{yx} \\ P_{yz} &= \int_M yz \, dm = P_{zy} \\ P_{zx} &= \int_M zx \, dm = P_{xz} \end{aligned} \quad (7.20)$$

que tienen las mismas dimensiones que los momentos de inercia. Al cambiar de sistema de ejes los productos de inercia cambian. Si el sólido está en movimiento respecto a los ejes OXYZ entonces los productos de inercia son funciones del tiempo y serán constantes si el sistema de ejes está ligado al sólido.

En las definiciones (7.20) los términos  $x, y, z$  que aparecen en los integrandos son las coordenadas de los puntos  $dm$  del sólido en OXYZ.

Los productos de inercia determinan el grado de simetría de la distribución de masa  $D(x, y, z)$  del sólido respecto a los ejes considerados. Si el sólido es homogéneo, la simetría de la distribución de masas coincide con la simetría geométrica del volumen que ocupa, representada por centros, ejes o planos de simetría.

En el caso más general de movimiento del sólido, sus propiedades respecto a la rotación vienen dadas por el tensor de inercia  $\mathbf{I}$  que es un tensor de segundo orden cuya representación en un sistema de ejes OXYZ está determinada por nueve escalares, de la misma forma que un vector (tensor de primer orden) se representa mediante tres escalares (sus tres componentes en OXYZ). La justificación se verá más adelante, al estudiar el momento cinético de un sólido rígido en el caso general. Las nueve componentes del tensor de inercia son, en forma matricial,

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{yx} & I_y & -P_{yz} \\ -P_{zx} & -P_{zy} & I_z \end{pmatrix} \quad (7.21)$$

y, como se ve, es un tensor simétrico (la matriz que lo representa es simétrica).

Toda matriz simétrica como la (7.21) es diagonalizable, lo que quiere decir que siempre es posible elegir unos ejes ortogonales OX'Y'Z', rotados respecto a los OXYZ, en los que la representación del tensor de inercia toma la forma de matriz diagonal

$$\mathbf{I}_{EP} = \begin{pmatrix} I_{x'} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y'} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z'} \end{pmatrix} \quad (7.22)$$

A los ejes OX'Y'Z' que cumplen esta condición se les llama ejes principales de inercia en O y a los momentos de inercia  $I_{x'}$ ,  $I_{y'}$ ,  $I_{z'}$  respecto a ellos, momentos principales de inercia. Los planos coordenados OX'Y', OY'Z' y OZ'X' se denominan planos principales. Para cualquier punto O siempre existen ejes principales de inercia en cada instante de tiempo (o en todo instante si el sistema de ejes está ligado al sólido). Respecto a los ejes principales de inercia, los productos de inercia son nulos.

En general, los tres momentos principales de inercia son diferentes y decimos que el sólido es asimétrico. Si dos de ellos coinciden diremos que el sólido es simétrico y si coinciden los tres, que es esférico. En particular, el centro de masas C del sólido se utiliza a menudo como origen de sistemas de referencia en los que representar el tensor de inercia. Uno de ellos corresponde a ejes principales de inercia en C y su representación es

$$\mathbf{I}_{EP} = \begin{pmatrix} I_{Cx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Cy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Cz} \end{pmatrix}$$

Como se dijo, los productos de inercia y los ejes principales de inercia tienen que ver con las simetrías del sólido respecto a los ejes elegidos. Así:





- a) Un eje de simetría n-gonal es un eje principal de inercia respecto a cualquiera de sus puntos (decimos que un eje de simetría es n-gonal si al rotar el sólido en torno a él un ángulo  $2\pi/n$  no se altera su distribución de masa, con  $n > 1$ ).
- b) En cualquier punto de un eje de simetría trigonal o tetragonal dos de los momentos principales de inercia son iguales.
- c) La normal a un plano de simetría es un eje principal de inercia relativo al punto en que corta al plano de simetría.

Las propiedades anteriores no se demostrarán, pero se ilustrarán mediante aplicaciones prácticas. Si el sólido es homogéneo las propiedades de simetría respecto a la distribución de masas se reducen a simetrías geométricas.

Dos sólidos rígidos que tengan la misma masa total y los mismos momentos principales de inercia respecto al centro de masas se dice que son equimomentales. Dos cuerpos rígidos equimomentales tienen el mismo comportamiento dinámico.

#### 7.4.4 MOMENTOS DE INERCIA DE ÁREAS PLANAS

En muchos problemas de ingeniería y para un área plana como la representada en la figura 7.16, aparecen expresiones de la forma

$$\int_A y dA ; \quad \int_A y^2 dA$$

Se define el momento de primer orden o momento estático del área A respecto al eje OX mediante la expresión

$$M_x = \int_A y dA$$

y de la misma forma se puede definir el momento de primer orden respecto al eje OY.

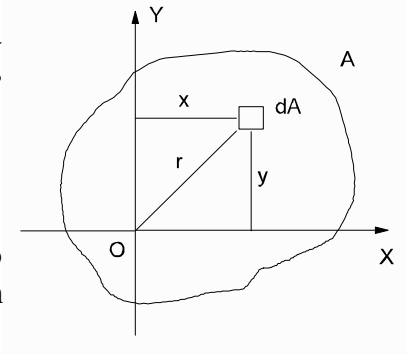


Figura 7.16

Se define el momento de segundo orden o momento de inercia del área A respecto al eje OX como

$$I_x = \int_A y^2 dA$$

La denominación de momento de inercia es inadecuada, ya que se debería reservar para la definición (7.17), pero es práctica común en ingeniería llamarlo así.

Análogamente, se define el momento de inercia respecto del eje OY mediante

$$I_y = \int_A x^2 dA$$

y el momento polar del área A respecto al punto O como

$$I_O = \int_A r^2 dA$$

siendo r la distancia entre el elemento dA y O.

La ecuación de dimensiones SI y la unidad de momentos de inercia de áreas son

$$[I_x] = [I_O] = L^4 ; \quad 1 \text{ m}^4$$

Ambos momentos están relacionados entre sí por

$$I_O = \int_A (x^2 + y^2) dA = I_x + I_y$$

Se define el producto de inercia del área plana A respecto a los ejes XY como

$$P_{xy} = \int_A xy dA$$

Los momentos de inercia son siempre mayores que cero, pero los productos de inercia pueden ser positivos o negativos.

Si rotamos el sistema OXYZ respecto a OZ, siempre existe un sistema de ejes OX'Y'Z' en el que  $P_{x'y'}=0$  y a tales ejes les llamamos ejes principales de inercia del área plana A en el punto O.  $I_x$  e  $I_y$  son los momentos principales de inercia. Si tomamos como origen del sistema de referencia el centroide C del área plana, entonces a los ejes principales de inercia Cxyz en C se les llama ejes principales centrales de inercia en C. Todas las propiedades de simetría relacionadas con los ejes principales de inercia y comentadas en el apartado anterior son aplicables al caso de un área plana. Sólo hay que tener en cuenta que ahora existe un plano de simetría trivial, que es el que contiene a la propia área A.

### 7.4.5 TEOREMA DE STEINER

El teorema de Steiner o de los ejes paralelos dice:

El momento de inercia de un sólido rígido respecto a un eje es igual a su momento de inercia respecto a otro eje paralelo al primero y que contenga al centro de masas del sólido más el producto de la masa  $M$  del sólido por el cuadrado de la distancia que separa ambos ejes.

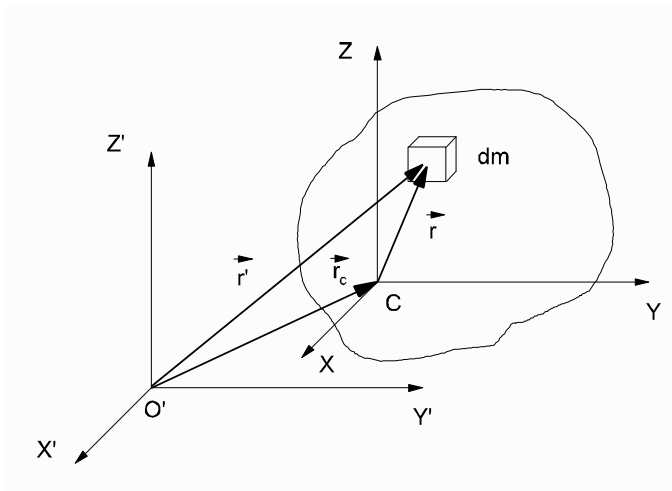


Figura 7.17

Es decir,

$$I_{z'} = I_{Cz} + M d^2 \quad (7.23)$$

para cualesquiera dos ejes  $O'Z'$  y  $CZ$  paralelos y distantes  $d$  entre sí.

La demostración es sencilla. Sean dos sistemas de ejes  $O'X'Y'Z'$  y  $CXYZ$  paralelos con el origen del segundo en el centro de masas del sólido. Elijamos dos ejes cualesquiera, como  $O'Z'$  y  $CZ$ . El momento de inercia respecto a  $O'Z'$  es

$$I_{z'} = \int_M (x'^2 + y'^2) dm$$

Los vectores de posición  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{r}'$  de un elemento de masa  $dm$  desde ambos sistemas de ejes y el vector de posición  $\mathbf{r}'_c$  del centro de masas desde el sistema  $O'X'Y'Z'$  se representan mediante

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k} \\ \mathbf{r}' &= x' \mathbf{i}' + y' \mathbf{j}' + z' \mathbf{k}' \\ \mathbf{r}'_c &= x'_c \mathbf{i}' + y'_c \mathbf{j}' + z'_c \mathbf{k}' \end{aligned}$$

y están relacionados entre sí por

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{r}'_c$$

lo que implica, en particular, que

$$\begin{aligned} x' &= x + x'_c \\ y' &= y + y'_c \end{aligned}$$

Sustituyendo estas ecuaciones en la expresión de  $I_{z'}$ , resulta

$$I_{z'} = \int_M (x^2 + y^2) dm + 2x'_c \int_M x dm + 2y'_c \int_M y dm + (x'^2_c + y'^2_c) \int_M dm$$

donde  $x'_c$  e  $y'_c$  salen fuera del integrando ya que no dependen de las variables de integración  $dm = Ddv$ . El primer término del segundo miembro es el momento de inercia del sólido respecto al eje CZ,  $I_{CZ}$ . El segundo y el tercero se anulan, ya que las integrales son proporcionales a las coordenadas  $x_{CC}$  e  $y_{CC}$  del centro de masas en el sistema CXYZ que tiene como origen el centro de masas (en él,  $x_{CC}=0$ ,  $y_{CC}=0$  y  $z_{CC}=0$ ). En efecto:

$$x_{CC} = \frac{1}{M} \int_M x dm = 0 ; \quad y_{CC} = \frac{1}{M} \int_M y dm = 0$$

El último término es igual a la masa total del sólido multiplicada por el cuadrado de la distancia  $d$  entre los ejes O'Z' y CZ (en efecto,  $d^2 = x_C'^2 + y_C'^2$  como es fácil ver). Resulta

$$I_{z'} = I_{Cz} + Md^2$$

Para dos ejes paralelos OX y O'X' tales que ninguno de ellos contenga al centro de masas, la relación entre momentos de inercia viene dada por

$$I_{x'} = I_x + M(d'^2 - d^2)$$

siendo  $d$  y  $d'$  las distancias entre los ejes OX y O'X' y el centro de masas, respectivamente.

Es claro que  $d'^2 - d^2$  no representa el cuadrado de la distancia entre los ejes OX y O'X', en general (¿en qué casos sí lo hace?).

El teorema de Steiner se refiere únicamente a momentos de inercia respecto a ejes, pero se puede generalizar al caso de puntos

$$I_O = I_C + M \overline{OC}^2$$

y de planos

$$I_{x'y'} = I_{Cxy} + Md^2$$

donde Cxy representa un plano que contiene al centro de masas, X'Y' otro plano paralelo al anterior y  $d$  la distancia entre ambos.

## 7.5 MOMENTO CINÉTICO DE UN SÓLIDO RÍGIDO

### 7.5.1 MOMENTO CINÉTICO EN EL MOVIMIENTO GENERAL

Como se ha visto, la velocidad de un punto de referencia de un sólido es la magnitud cinemática característica de su traslación instantánea, mientras que dinámicamente caracterizamos tal traslación mediante su cantidad de movimiento  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}_C$  (sección 7.2).

De forma análoga, para describir cinemáticamente la rotación instantánea del sólido rígido empleamos la velocidad angular  $\mathbf{T}$ . El momento cinético  $\mathbf{L}_{O'}$ , respecto a ciertos puntos de referencia  $O'$  caracteriza dinámicamente tal rotación instantánea.

Sea un sólido rígido de masa  $M$  y un sistema de referencia inercial  $S$ . Un punto del sólido,  $O'$ , nos sirve como referencia para describir la traslación instantánea respecto a  $S$ , mediante su velocidad  $\mathbf{v}_{O'}$  y su aceleración  $\mathbf{a}_{O'}$ . La rotación instantánea viene dada entonces por el vector velocidad angular  $\mathbf{T}$ . El eje instantáneo de rotación y deslizamiento está definido por  $O'$  y  $\mathbf{T}$ .

Sea  $S'(O'X'Y'Z')$  un sistema de referencia no inercial con centro en  $O'$  y en movimiento de traslación respecto a  $S$  (figura 7.18). El momento cinético de un elemento puntual  $dm$  del sólido rígido respecto a  $O'$  en el sistema de referencia  $S'$  es

$$d\mathbf{L}_{O'} = \mathbf{r}' \times \mathbf{v}' dm$$

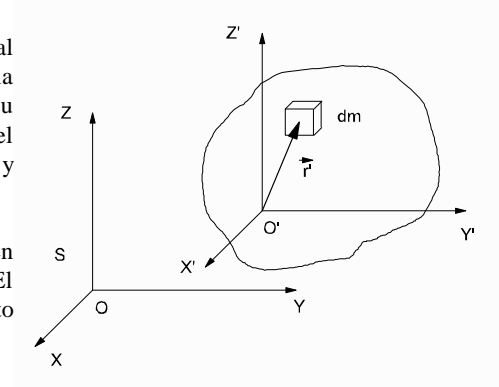


Figura 7.18

La velocidad absoluta, en el sistema inercial  $S$ , del elemento  $dm$  viene dada por

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{O'}$$

y la velocidad de  $dm$  en el sistema de referencia  $S'$ , por

$$\mathbf{v}' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$$

luego

$$d\mathbf{L}_{O'} = \mathbf{r}' \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') dm = [\mathbf{r}'^2 \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{r}'] dm$$

Los vectores  $\mathbf{T}$  y  $\mathbf{r}'$  se representan en componentes de la misma forma en  $S$  y en  $S'$ , ya que son dos sistemas de ejes paralelos en todo instante

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_{x'} \mathbf{i}' + \omega_{y'} \mathbf{j}' + \omega_{z'} \mathbf{k}'$$

$$\mathbf{r}' = x' \mathbf{i}' + y' \mathbf{j}' + z' \mathbf{k}'$$

con lo que las componentes de  $d\mathbf{L}_{O'}$  vienen dadas por

$$(d\mathbf{L}_{O'})_{x'} = (y'^2 + z'^2) \omega_{x'} dm - x'y' \omega_{y'} dm - x'z' \omega_{z'} dm$$

$$(d\mathbf{L}_{O'})_{y'} = -x'y' \omega_{x'} dm + (x'^2 + z'^2) \omega_{y'} dm - y'z' \omega_{z'} dm$$

$$(d\mathbf{L}_{O'})_{z'} = -x'z' \omega_{x'} dm - y'z' \omega_{y'} dm + (x'^2 + y'^2) \omega_{z'} dm$$

Integrando estas ecuaciones para todos los puntos del sólido rígido y teniendo en cuenta que  $T_x$ ,  $T_y$ , y  $T_z$  son independientes de las variables de integración, resulta

$$(\mathbf{L}_{O'})_{x'} = \omega_{x'} \int_M (y'^2 + z'^2) dm - \omega_{y'} \int_M x'y' dm - \omega_{z'} \int_M x'z' dm$$

$$(\mathbf{L}_{O'})_{y'} = -\omega_{x'} \int_M x'y' dm + \omega_{y'} \int_M (x'^2 + z'^2) dm - \omega_{z'} \int_M y'z' dm$$

$$(\mathbf{L}_{O'})_{z'} = -\omega_{x'} \int_M x'z' dm - \omega_{y'} \int_M y'z' dm + \omega_{z'} \int_M (x'^2 + y'^2) dm$$

y, recordando las definiciones de momentos de inercia respecto a un eje y de productos de inercia vistas en la sección (7.4), se obtiene

$$\begin{pmatrix} L_{O'x'} \\ L_{O'y'} \\ L_{O'z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{x'} & -P_{x'y'} & -P_{x'z'} \\ -P_{y'x'} & I_{y'} & -P_{y'z'} \\ -P_{z'x'} & -P_{z'y'} & I_{z'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{x'} \\ \omega_{y'} \\ \omega_{z'} \end{pmatrix} \quad (7.24)$$

es decir,

$$\mathbf{L}_{O'} = \bar{\mathbf{I}}_{O'} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (7.25)$$

que expresa la relación entre la velocidad angular instantánea de rotación  $\mathbf{T}$  y el momento cinético respecto a  $O'$  en el sistema no inercial  $S'$ .

Es importante tener en cuenta que al estar  $S'$  en movimiento de traslación, el sólido rígido tiene respecto a él un movimiento de rotación idéntico al que tiene respecto al sistema inercial  $S$ . En consecuencia, los momentos y productos de inercia que aparecen en las ecuaciones (7.24) son funciones del tiempo en  $S'$ , lo mismo que  $\mathbf{T}(t)$ . La representación matricial del tensor de inercia  $\mathbf{I}_{O'}$  cambia en  $S'$  en cada instante de tiempo. Esto puede hacer complicado el manejo de la expresión (7.24). Para evitarlo, definamos un sistema de referencia  $S_L$ , ligado al sólido, con origen en  $O'$  y, evidentemente, no inercial (figura 7.19).

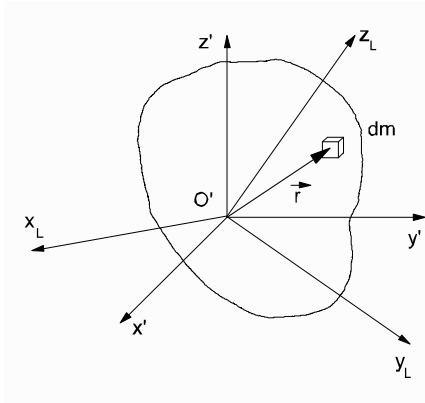


Figura 7.19

La distribución de masas del sólido rígido en el sistema  $S_L$  permanece constante a lo largo del movimiento. Los vectores  $\mathbf{T}$  y  $\mathbf{r}_L = \mathbf{r}'$  (posición de un elemento  $dm$  genérico del sólido) son idénticos en  $S'$  y en  $S_L$ , pero sus componentes son diferentes.

Para no arrastrar demasiados subíndices y simplificar la notación, a partir de ahora utilizaremos los versores  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ , y  $\mathbf{k}$  para el sistema de referencia  $S_L$  en el que los vectores  $\mathbf{T}$  y  $\mathbf{r}_L$  tendrán por componentes

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= T_x \mathbf{i} + T_y \mathbf{j} + T_z \mathbf{k} \\ \mathbf{r}_L / r &= x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k} \end{aligned}$$

y utilizaremos subíndices 1, 2 y 3 y versores  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$  y  $\mathbf{u}_3$  para el sistema de referencia inercial  $S$  cuando sea necesario.

Repetiendo el proceso que llevó a deducir la ecuación (7.24) obtenemos, en el sistema  $S_L$ ,

$$\begin{pmatrix} L_{O'x_L} \\ L_{O'y_L} \\ L_{O'z_L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{yx} & I_y & -P_{yz} \\ -P_{zx} & -P_{zy} & I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad (7.26)$$

con la diferencia que ahora tanto los momentos de inercia como los productos de inercia son constantes a lo largo del movimiento del sólido.

En forma resumida, la ecuación (7.26) se escribe

$$\mathbf{L}_{O'} = \bar{\mathbf{I}}_{O'} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (7.27)$$

donde  $\mathbf{I}_{O'}$  es el tensor de inercia en  $O'$ . La ecuación (7.25) es idéntica a la (7.27), sin embargo las ecuaciones (7.24) y (7.26) son diferentes, ya que expresan  $\mathbf{L}_{O'}$ ,  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{I}_{O'}$  en componentes. Las componentes cambian al cambiar de sistema de referencia, pero los vectores y el tensor de inercia no, siempre que este último esté referido al mismo origen  $O'$ .

Si el punto  $O'$  es el centro de masas  $C$  del sólido, entonces las ecuaciones (7.26) y (7.27) toman la forma

$$\begin{pmatrix} L_{Cx} \\ L_{Cy} \\ L_{Cz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{Cx} & -P_{Cxy} & -P_{Cxz} \\ -P_{Cyx} & I_{Cy} & -P_{Cyz} \\ -P_{Czx} & -P_{Czy} & I_{Cz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad (7.28)$$

$$\mathbf{L}_C = \bar{\mathbf{I}}_C \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (7.29)$$

donde  $\mathbf{I}_C$  representa el tensor de inercia en  $C$ . En este caso el sistema  $S'$  es el sistema centro de masas. El momento cinético respecto a un punto  $P$  fijo al sistema inercial  $S$  se puede expresar, como ya vimos en el capítulo 6,

$$\mathbf{L}_P = \mathbf{L}_C + \mathbf{PC} \times (M \mathbf{v}_C) = \bar{\mathbf{I}}_C \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{PC} \times (M \mathbf{v}_C)$$

En general  $\mathbf{L}_{O'}$  y  $\mathbf{T}$  son vectores no paralelos. Representando la ecuación (7.26) en ejes principales de inercia resulta

$$\begin{pmatrix} L_{O'x} \\ L_{O'y} \\ L_{O'z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad (7.30)$$

con  $I_x, I_y, I_z$ , lo que justifica el que  $\mathbf{L}_{O'}$  y  $\mathbf{T}$  tengan direcciones diferentes. Sin embargo, en el caso de que el sólido sea esférico los tres momentos de inercia son iguales,  $I_x=I_y=I_z=8$ , y (7.30) se reduce a

$$\mathbf{L}_{O'} = 8 \mathbf{T}$$

en cuyo caso ambos vectores son paralelos.

Si el sólido rígido sigue un movimiento plano siempre podemos situarnos en sistemas de referencia en los que sea simple representar el plano del movimiento y la dirección de  $\mathbf{T}$  haciendo, por ejemplo

$$\mathbf{T} = T_z \mathbf{k}$$

con lo que el plano del movimiento estará determinado por  $z=\text{cte}$ . En este caso la ecuación (7.26) se reduce a

$$L_{O'x} = -P_{xy} \omega_z; \quad L_{O'y} = -P_{yz} \omega_z; \quad L_{O'z} = I_z \omega_z \quad (7.31)$$

De nuevo se observa que  $\mathbf{L}_{O'}$  no es paralelo a  $\mathbf{T}$ , en general, incluso en el caso de movimiento plano. Sin embargo, aquí no es necesario exigir que el sólido sea esférico para que se cumpla esa condición. Basta imponer que el sistema  $S_L$  represente los ejes principales de inercia en  $O'$ , con lo que  $P_{xy}=P_{yz}=0$  y resulta, de la ecuación (7.31),

$$\mathbf{L}_{O'} = I_z \boldsymbol{\omega} \quad (7.32)$$

es decir,  $\mathbf{L}_{O'}$  es paralelo a  $\mathbf{T}$  en tal supuesto, que además será el que utilizaremos habitualmente en aplicaciones prácticas.

Puesto que la única ecuación dinámica de que disponemos para caracterizar la traslación de un sólido rígido es la del movimiento del centro de masas (7.8), es normal referir el momento cinético al centro de masas, aunque no siempre es necesario ni lo más simple. En tal supuesto, utilizaremos las ecuaciones (7.28) y (7.29) y, en el caso de movimiento plano en ejes principales de inercia, las (7.31) y (7.32) se representan de la siguiente forma,

$$L_{Cx} = -P_{cxy} \omega_z; \quad L_{Cy} = -P_{cyz} \omega_z; \quad L_{Cz} = I_{Cz} \omega_z \quad (7.33)$$

$$\mathbf{L}_C = I_{Cz} \boldsymbol{\omega} \quad (7.34)$$

## 7.5.2 TEOREMA DEL MOMENTO CINÉTICO PARA EL MOVIMIENTO PLANO DEL SÓLIDO RÍGIDO

En el caso general de movimiento de un sólido rígido se verifica el teorema del momento cinético que se vio para un sistema de partículas materiales, tanto respecto a un punto fijo en un sistema de referencia inercial (apartado 6.5.2, ecuación 6.33) como respecto a un punto fijo en un sistema no inercial en movimiento de traslación (apartado 6.5.3, ecuación 6.37). En particular, si el origen  $O'$  del sistema no inercial cumple las condiciones indicadas en este último apartado ( $O'/C$ ,  $\mathbf{a}_O=0$  ó  $\mathbf{r}'_C \times \mathbf{a}_O=0$ ) entonces el teorema del momento cinético adopta la expresión simplificada (6.38), que es

$$\mathbf{M}_{O'} = \frac{d\mathbf{L}_{O'}}{dt}$$

análoga a la que se cumple en un sistema inercial.

Para aplicar el teorema del momento cinético al estudio dinámico de la rotación instantánea de un sólido rígido, es más simple y útil situarse en un sistema de referencia no inercial en movimiento de traslación cuyo origen  $O'$  cumpla una de las tres condiciones mencionadas, que en un sistema inercial. En particular, si utilizamos el sistema centro de masas ( $O'/C$ ), obtenemos una expresión del teorema del momento cinético aplicable con gran generalidad y es lo que haremos para el caso particular simple de movimiento plano.

Sea un sólido rígido en movimiento plano. Definimos el sistema centro de masas  $S_C$ , como un sistema de referencia en movimiento de traslación con origen en  $C$  y tal que el plano del movimiento es  $z_C=0$  y  $\mathbf{T}=\mathbf{T} \mathbf{k}_C$  en todo instante. En este sistema se verifica que

$$\mathbf{M}_C = \left( \frac{d\mathbf{L}_C}{dt} \right)_{s_C} \quad (7.35)$$



y el momento cinético toma la forma dada por la expresión (7.33)

$$\mathbf{L}_C = -P_{Cxy}(t)\omega \mathbf{i}_C - P_{Cyz}(t)\omega \mathbf{j}_C + I_{Cz}(t)\omega \mathbf{k}_C$$

siendo  $\mathbf{i}_C, \mathbf{j}_C, \mathbf{k}_C$  los versores del sistema  $S_C$ .

Para evitar la dependencia con el tiempo de los productos y momentos de inercia, definamos un segundo sistema de referencia no inercial ligado al sólido,  $S_L$ , de ejes  $CXYZ$ , con origen en  $C$  y con vectores unitarios  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  y tal que  $CZ_C/CZ$ ,  $\mathbf{k}_C=\mathbf{k}$  en todo instante (figura 7.20).

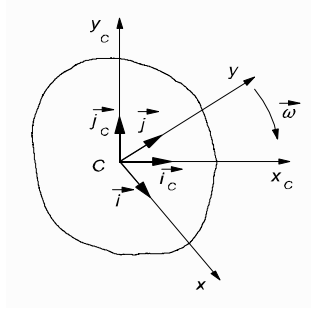


Figura 7.21

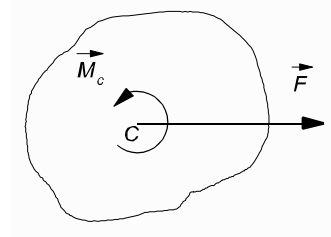


Figura 7.20

El momento cinético respecto a  $C$  en este nuevo sistema toma la forma

$$\mathbf{L}_C = -P_{Cxy}\omega \mathbf{i} - P_{Cyz}\omega \mathbf{j} + I_{Cz}\omega \mathbf{k} \quad (7.36)$$

con  $P_{Cxy}, P_{Cyz}, I_{Cz}$  independientes del tiempo. Nótese que el vector  $\mathbf{T}$  tiene la misma expresión en  $S_C$  que en  $S_L$  para movimiento plano.

Teniendo en cuenta que el sistema de referencia  $S_L$  tiene la misma velocidad angular de rotación  $\mathbf{T}$  que el sólido, se verifica que

$$\left(\frac{d\mathbf{L}_C}{dt}\right)_{S_C} = \left(\frac{d\mathbf{L}_C}{dt}\right)_{S_L} + \omega \times \mathbf{L}_C$$

donde

$$\left(\frac{d\mathbf{L}_C}{dt}\right)_{S_L} = -P_{Cxy}\frac{d\omega}{dt}\mathbf{i} - P_{Cyz}\frac{d\omega}{dt}\mathbf{j} + I_{Cz}\frac{d\omega}{dt}\mathbf{k}$$

y 
$$\omega \times \mathbf{L}_C = \omega \mathbf{k} \times \mathbf{L}_C = P_{Cyz}\omega^2\mathbf{i} - P_{Cxy}\omega^2\mathbf{j}$$

Recordando que la aceleración angular del sólido es

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\mathbf{k} = \alpha \mathbf{k}$$

idéntica en los dos sistemas, y sustituyendo en la ecuación (7.35), resulta

$$\mathbf{M}_C = (-P_{Cxy}\alpha + P_{Cyz}\omega^2)\mathbf{i} + (-P_{Cyz}\alpha - P_{Cxy}\omega^2)\mathbf{j} + I_{Cz}\alpha \mathbf{k} \quad (7.37)$$

válida en el sistema centro de masas  $S_C$  para cualquier instante en el que el sistema ligado al sólido,  $S_L$ , coincida con él, de forma que  $CX_C=CX$  y  $CY_C=CY$  siendo, en consecuencia,  $\mathbf{i}_C=\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}_C=\mathbf{j}$  para tal instante. En este supuesto la posición relativa del sólido respecto a los sistemas  $S_C$  y  $S_L$  es idéntica en el instante considerado y las componentes de  $\mathbf{M}_C$  son iguales en ambos:

$$\begin{aligned} M_{C_x} &= -P_{C_{xy}} \alpha + P_{C_{yz}} \omega^2 \\ M_{C_y} &= -P_{C_{yz}} \alpha - P_{C_{xy}} \omega^2 \\ M_{C_z} &= I_{C_z} \alpha \end{aligned} \quad (7.38)$$

En el caso general de movimiento plano es necesario que actúe sobre el sólido un sistema de fuerzas que en el centro de masas se reduzca a la resultante  $\mathbf{F}$  y a un momento dinámico  $\mathbf{M}_C$  cuyas componentes viene dadas por (7.38). En estas condiciones el movimiento plano puede mantenerse sólo si se comunican al sólido los pares  $M_{C_x}$  y  $M_{C_y}$  necesarios. En particular, si el eje de rotación es un eje real, interactuará con el sólido comunicándole esos pares de reacción.

Sin embargo, si el sistema de referencia  $S_C$  representa ejes principales de inercia en C en todo instante, entonces los productos de inercia son nulos en él, el momento cinético se expresa como

$$\mathbf{L}_C = I_{C_z} \mathbf{k}$$

y las ecuaciones (7.38) se reducen a

$$M_{C_x} = 0 ; \quad M_{C_y} = 0 ; \quad M_{C_z} = I_{C_z} \alpha \quad (7.39)$$

que serán las que utilizemos en la mayor parte de las aplicaciones prácticas. En este supuesto no son necesarios los pares  $M_{C_x}$  y  $M_{C_y}$  para que se mantenga el movimiento plano, cuya rotación viene dinámicamente determinada sólo por  $M_{C_z}$ .

Conviene insistir en que las expresiones (7.38) o (7.39), según sea el caso, son aplicables también para cualquier sistema de referencia ligado al sólido, centrado en un punto P distinto del centro de masas, siempre que se cumpla que  $\mathbf{a}_p = \mathbf{0}$  o  $\mathbf{PC} \times \mathbf{a}_p = \mathbf{0}$  respecto a cualquier sistema de referencia inercial, cambiando en ellas C por P.

### 7.5.3 ECUACIONES DE LA DINÁMICA DEL MOVIMIENTO PLANO

Para resolver un problema de movimiento plano del sólido rígido es necesario conocer todas las fuerzas y pares que actúan sobre él a lo largo del movimiento. Para ello, como se dijo, es muy útil representar el diagrama del sólido libre. El sistema de fuerzas aplicadas se reduce a la resultante  $\mathbf{F}$ , invariante, y al momento resultante respecto a un punto P,  $\mathbf{M}_P$ , que cambia al cambiar de punto, en cada instante de tiempo. En la figura 7.21 se representa la sección central de un sólido en movimiento plano y la reducción del sistema de fuerzas que actúan sobre él, al centro de masas.

El momento resultante respecto a C,  $\mathbf{M}_C$ , en el caso indicado es perpendicular a la sección central.

Para obtener la solución completa al movimiento del sólido es necesario conocer, además, las condiciones iniciales, dadas por

$$\mathbf{r}_{C0} = \mathbf{r}_C(t=0) = x_{C0} \mathbf{i} + y_{C0} \mathbf{j} ; \quad \mathbf{v}_C(t=0) = v_{Cx0} \mathbf{i} + v_{Cy0} \mathbf{j} \quad (7.40)$$

para el movimiento del centro de masas (aunque también pueden estar referidas a otro punto cualquiera del sólido) y por

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \boldsymbol{\omega}(t=0) = \omega_0 \mathbf{k} \quad \text{para la velocidad angular de rotación.} \quad (7.41)$$

A partir de estos datos podemos plantear y resolver, en principio, las ecuaciones dinámicas del movimiento plano. La resultante  $\mathbf{F}$  determina el movimiento del centro de masas (ecuación 7.8), que en este caso toma la forma

$$\begin{aligned} F_x &= M a_{C_x} \\ F_y &= M a_{C_y} \end{aligned} \quad (7.42)$$

y el momento dinámico respecto al eje de rotación que pase por cualquier punto P que cumpla las condiciones indicadas en el apartado anterior, determina el movimiento de rotación:

$$\begin{aligned} M_{P_x} &= -P_{P_{xy}} \alpha + P_{P_{yz}} \omega^2 \\ M_{P_y} &= -P_{P_{yz}} \alpha - P_{P_{xy}} \omega^2 \\ M_{P_z} &= I_{P_z} \alpha \end{aligned} \quad (7.43)$$

donde las componentes están referidas a unos ejes PXYZ en movimiento de traslación respecto al sistema inercial S, con origen en un punto P ligado al sólido y tal que permita la aplicación del teorema del momento cinético en su forma habitual. En particular siempre se puede elegir el centro de masas C.

El problema que se presenta al intentar resolver las ecuaciones anteriores es que necesitamos conocer la posición relativa del sólido en el sistema de referencia PXYZ, para así poder determinar cuáles son los productos de inercia en tales ejes, pero esa es precisamente la solución que buscamos en el estudio de la rotación del sólido. Existen, no obstante, dos casos simples que son los que consideraremos para aplicaciones prácticas:

- a) Cuando existe un eje de rotación real fijo al sistema de referencia inercial, o en movimiento rectilíneo y uniforme de traslación respecto a él. Nos encontramos entonces en el caso de movimiento de un sólido con un eje fijo, ya estudiado en la sección (7.3). Las componentes  $M_{Px}$  y  $M_{Py}$  que aparecen en las dos primeras ecuaciones (7.43) las proporciona la interacción del sólido con el eje mediante pares de reacción, lo que permite que el movimiento plano continúe.
- b) Cuando el sólido tiene la simetría necesaria para que el sistema PXYZ represente ejes principales de inercia en P para todo instante de tiempo, independientemente del movimiento del sólido. En este supuesto los productos de inercia son nulos en todo instante, sólo es necesario considerar la última ecuación (7.43) y el movimiento plano puede continuar indefinidamente como en el caso anterior.

Las tres ecuaciones diferenciales (7.42) y (7.43), junto con las condiciones (7.40) y (7.41) permiten determinar  $\mathbf{r}_C(t)$ ,  $\mathbf{v}_C(t)$  y  $\mathbf{T}(t)$  para todo instante de tiempo en el que no se modifiquen las fuerzas que actúan sobre el sólido, en los dos casos a) y b) considerados. Mediante las expresiones de los campos de velocidades y aceleraciones para distintos puntos del sólido se puede obtener, a partir de estas soluciones, la velocidad y la aceleración de cualquier punto en cada instante.

En los casos en los que las ligaduras que condicionan el movimiento del sólido se traduzcan en fuerzas de reacción aplicadas sobre él, éstas se introducen como incógnitas en las ecuaciones (7.42) y (7.43) como fuerzas de reacción y pares de reacción. En estas condiciones puede ser necesario utilizar las expresiones del campo de velocidades y del campo de aceleraciones incluyendo en ellas cinemáticamente tales ligaduras y sustituirlas en las ecuaciones (7.42) y (7.43) para eliminar estas incógnitas.

Si se desea utilizar un sistema de referencia no inercial,  $S'$ , porque sea más simple en algún caso, para estudiar el movimiento del centro de masas, entonces deberemos emplear la ecuación fundamental de la dinámica para sistemas no inerciales y sustituir las ecuaciones (7.42) por

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{x'} + \mathbf{F}'_{x'} &= \mathbf{M} \mathbf{a}'_{Cx'} \\ \mathbf{F}_{y'} + \mathbf{F}'_{y'} &= \mathbf{M} \mathbf{a}'_{Cy'} \end{aligned}$$

donde  $F_x$  y  $F_y$  representan las componentes según los ejes  $X'$  e  $Y'$  de  $S'$  de la resultante de las fuerzas reales que actúan sobre el sólido y  $F'_{x'}$  y  $F'_{y'}$ , las componentes de las fuerzas de inercia que actúan sobre el centro de masas en  $S'$ .

## 7.6 TRABAJO Y ENERGÍA MECÁNICA PARA UN SÓLIDO RÍGIDO

### 7.6.1 TRABAJO DE LAS FUERZAS QUE ACTÚAN SOBRE EL SÓLIDO

En el capítulo 5 se definió el trabajo realizado por una fuerza a lo largo de una trayectoria  $C$  como

$$W_F = \int_{1_C}^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

lo que representa una definición completa para su aplicación a una partícula material, cuyo

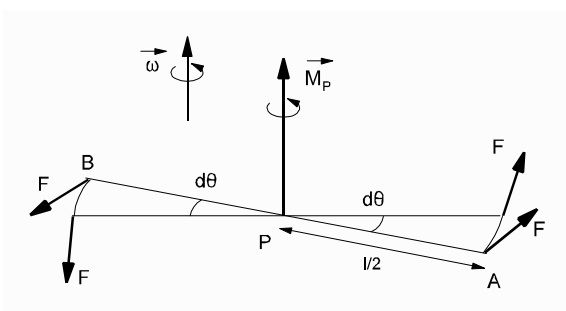


Figura 7.22

comportamiento dinámico está totalmente caracterizado por la resultante  $\mathbf{F}$  de las fuerzas aplicadas sobre ella.

Sin embargo, en el caso de un sólido rígido, el comportamiento dinámico no depende sólo de la resultante  $\mathbf{F}$ , sino también del momento resultante  $\mathbf{M}_P$  respecto a un

punto de referencia P. Para obtener una expresión completa del trabajo realizado por el sistema de fuerzas aplicadas al sólido necesitamos hallar la expresión del trabajo realizado por el momento resultante  $\mathbf{M}_P$ .

Como un momento dinámico equivale a un par de fuerzas, hallemos en primer lugar el trabajo infinitesimal realizado por un par de fuerzas cuyo momento es  $\mathbf{M}_P$  (figura 7.22), cuando las dos fuerzas  $\mathbf{F}$  y  $-\mathbf{F}$  se desplazan un ángulo  $d\theta$ . Su valor es

$$\delta W_{M_P} = F \frac{1}{2} d\theta + F \frac{1}{2} d\theta = F l d\theta = M_P d\theta \quad (7.44)$$

que también se puede poner como

$$\delta W_{M_P} = M_P \frac{d\theta}{dt} dt = M_P \omega dt = \mathbf{M}_P \cdot \boldsymbol{\omega} dt \quad (7.45)$$

siempre que la velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$  del sólido sea paralela a  $\mathbf{M}_P$ .

Si  $\mathbf{M}_P$  y  $\boldsymbol{\omega}$  son paralelos en todo instante, entonces el trabajo realizado por  $\mathbf{M}_P$  en el intervalo finito entre  $t_1$  y  $t_2$  viene dado por

$$W_{M_P} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_P \cdot \boldsymbol{\omega} dt \quad (7.46)$$

En el caso de que  $\mathbf{M}_P$  y  $\boldsymbol{\omega}$  no sean paralelos (figura 7.23) siempre podemos descomponer  $\mathbf{M}_P$  en dos términos

$$\mathbf{M}_P = \mathbf{M}_{P\omega} + \mathbf{M}_{P\perp}$$

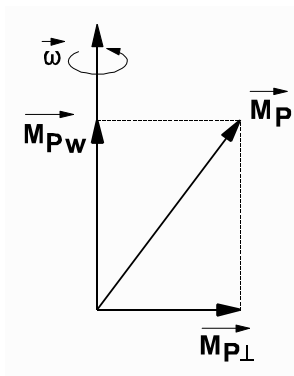


Figura 7.23

uno paralelo a  $\boldsymbol{\omega}$  y otro perpendicular.  $M_{P\perp}$  no realiza trabajo, pues equivale a un par de fuerzas cuyos puntos de aplicación no se desplazan por efecto de la rotación  $\boldsymbol{\omega}$ . Resulta

$$\delta W_{M_P} = \mathbf{M}_{P\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} dt = \mathbf{M}_P \cdot \boldsymbol{\omega} dt$$

luego en el caso general la expresión del trabajo en un intervalo finito entre  $t_1$  y  $t_2$  también se puede poner en la forma dada por (7.46).

Para obtener el trabajo total de las fuerzas aplicadas sobre el sólido se debe elegir un punto P de referencia cuya trayectoria respecto a un sistema de referencia inercial S venga dada por C y respecto al que el sistema de fuerzas se reduzca a la resultante  $\mathbf{F}$  y al momento resultante  $\mathbf{M}_P$ . El trabajo total en un desplazamiento finito del sólido entre dos instantes  $t_1$  y  $t_2$  es

$$W = \int_{1_C}^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_P + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_P \cdot \boldsymbol{\omega} dt \quad (7.47)$$

Si cambiamos de punto de referencia el trabajo toma el mismo valor, de ahí que en la notación de W no se haga referencia al punto. Si el punto de referencia es el centro de masas,

la ecuación anterior se expresa

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_C + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_C \cdot \boldsymbol{\omega} dt$$

y la potencia total desarrollada por el sistema de fuerzas que actúan sobre el sólido viene dada por

$$P = \frac{\delta W}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_C + \mathbf{M}_C \cdot \boldsymbol{\omega}$$

### 7.6.2 ENERGÍA CINÉTICA DE UN SÓLIDO RÍGIDO EN MOVIMIENTO PLANO

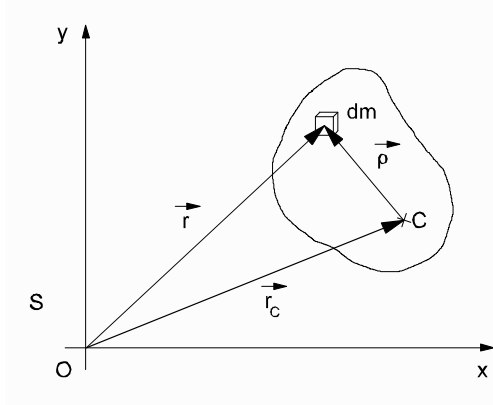


Figura 7.24

Dado un sólido rígido en movimiento plano, respecto a un sistema de referencia S la energía cinética de una partícula dm viene dada por (figura 7.24)

$$dE_C = \frac{1}{2} v^2 dm$$

y la energía cinética total es

$$E_C = \frac{1}{2} \int_M v^2 dm \quad (7.48)$$

Seleccionando como punto de referencia el centro de masas del sólido, la velocidad de dm se puede poner como

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$$

siendo  $\mathbf{v}_C$  la velocidad de C en S,  $\boldsymbol{\omega}$  la velocidad angular instantánea de rotación del sólido ( $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}$  en movimiento plano y según los ejes elegidos) y  $\boldsymbol{\rho}$  el vector de posición relativa de dm respecto a C.

Multiplicando escalarmente la expresión anterior de  $\mathbf{v}$  por sí misma, resulta

$$v^2 = v_C^2 + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})^2 + 2(\mathbf{v}_C \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{\rho}$$

y sustituyéndola en (7.48) se obtiene

$$E_C = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} \int_M (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})^2 dm + 2(\mathbf{v}_C \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \int_M \boldsymbol{\rho} dm$$

El último término de esta expresión es nulo ya que aparece en él la posición  $\mathbf{D}_C$  del centro de masas relativa al centro de masas, con lo que

$$\boldsymbol{\rho}_C = \frac{1}{M} \int_M \boldsymbol{\rho} dm = 0$$

evidentemente.

Teniendo en cuenta que  $(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})^2$  es un escalar que se ve lo mismo desde S que desde  $S_C$ , podemos calcular su valor desde el sistema  $S_C$  en el que los vectores  $\boldsymbol{\rho}$  y  $\boldsymbol{\omega}$  se representan por

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \omega \mathbf{k} \\ \boldsymbol{\rho} &= x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k} \end{aligned}$$

con lo que

$$(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})^2 = (-\omega y \mathbf{i} + \omega x \mathbf{j})^2 = \omega^2 (x^2 + y^2)$$

resulta

$$E_C = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} \omega^2 \int_M (x^2 + y^2) dm$$

que, recordando la definición de momento de inercia respecto a un eje, equivale a

$$E_C = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} I_{Cz} \omega^2 \quad (7.49)$$

La ecuación anterior no es sino la expresión del teorema de König adaptada al caso de un sólido rígido. El primer término del segundo miembro representa la energía cinética de traslación del sólido con referencia al centro de masas; el

segundo representa la energía cinética de rotación en torno a un eje perpendicular al plano del movimiento y que pase por el centro de masas.

Si referimos el movimiento del sólido al centro instantáneo de rotación, I, la expresión (7.49) se reduce a

$$E_C = \frac{1}{2} I_z \omega^2 \quad (7.50)$$

siendo  $I_z$  el momento de inercia respecto de un eje perpendicular al plano del movimiento que pasa por I.

Respecto a I el sólido sólo tiene movimiento de rotación. En el caso general de movimiento plano sólo es posible expresar la energía cinética de un sólido rígido mediante ecuaciones tan simples como (7.49) y (7.50) refiriéndola a C o a I, respectivamente.

Para un sólido rígido en movimiento general la energía cinética toma la forma

$$E_C = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} L_C \cdot \omega$$

que no demostraremos. Se propone como ejercicio comprobar que se reduce a (7.49) para el caso de movimiento plano.

### 7.6.3 TEOREMA DE LA ENERGÍA CINÉTICA PARA EL MOVIMIENTO PLANO DEL SÓLIDO RÍGIDO

Considérese un sólido rígido en movimiento plano respecto a un sistema de referencia inercial S y sean  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{M}_C$  la reducción al centro de masas del sistema de fuerzas aplicadas sobre el sólido. Para un intervalo de tiempo entre  $t_1$  y  $t_2$  durante el cual el centro de masas se desplaza a lo largo de una trayectoria C entre dos puntos 1 y 2, se verifica que el trabajo total de las fuerzas que actúan sobre el sólido es igual a

$$\begin{aligned} W &= \int_{1_c}^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_C + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_C \cdot \omega \, dt = \int_{1_c}^2 M \frac{d\mathbf{v}_C}{dt} \cdot d\mathbf{r}_C + \int_{t_1}^{t_2} I_{Cz} \omega \cdot \frac{d\omega}{dt} dt = \\ &= M \int_1^2 \mathbf{v}_C \cdot d\mathbf{v}_C + I_{Cz} \int_1^2 \omega \cdot d\omega = M \int_1^2 d\left(\frac{1}{2} v_C^2\right) + I_{Cz} \int_1^2 d\left(\frac{1}{2} \omega^2\right) = \\ &= \left( \frac{1}{2} M v_{C2}^2 + \frac{1}{2} I_{Cz} \omega_2^2 \right) - \left( \frac{1}{2} M v_{C1}^2 + \frac{1}{2} I_{Cz} \omega_1^2 \right) \end{aligned}$$

es decir

$$W = E_C(2) - E_C(1) \quad (7.51)$$

lo que significa que el trabajo total de las fuerzas que actúan sobre el sólido en un intervalo es igual a la variación de su energía cinética en ese intervalo, respecto a un sistema de referencia inercial.

Para la demostración se ha utilizado la reducción del sistema de fuerzas al centro de masas del sólido pero el trabajo así calculado vale lo mismo para la reducción a un sistema equivalente en cualquier otro punto del sólido.

### 7.6.4 ENERGÍA POTENCIAL DE UN SÓLIDO RÍGIDO EN EL CAMPO DE GRAVEDAD TERRESTRE

Para toda fuerza conservativa que actúe sobre un sólido rígido, el trabajo realizado por ella se puede expresar como la variación de la energía potencial asociada, cambiada de signo. En el caso habitual de que el sólido se mueva en las proximidades de la superficie de la tierra se encontrará sometido a la acción del campo de gravedad terrestre  $\mathbf{g}$ , que consideraremos uniforme en general y que se traduce en una resultante  $M\mathbf{g}$ , el peso, aplicada en el centro de gravedad. Como se vio, se puede considerar que el centro de gravedad y el centro de masas C coinciden para la gran mayoría de las aplicaciones prácticas y nos referiremos en lo sucesivo al centro de masas únicamente.

La energía potencial asociada al campo uniforme  $\mathbf{g}$  para un sólido rígido es fácil de calcular. Sea un elemento diferencial de masa  $dm$  (figura 7.25). Su energía potencial gravitatoria viene dada por

$$dE_p = g z dm$$

si adoptamos como nivel de referencia de energía potencial nula el plano horizontal  $z=0$  de un cierto sistema de ejes OXYZ. La energía potencial gravitatoria total del sólido con esta referencia se obtiene por integración

$$E_p = \int_M dE_p = g \int_M z dm$$

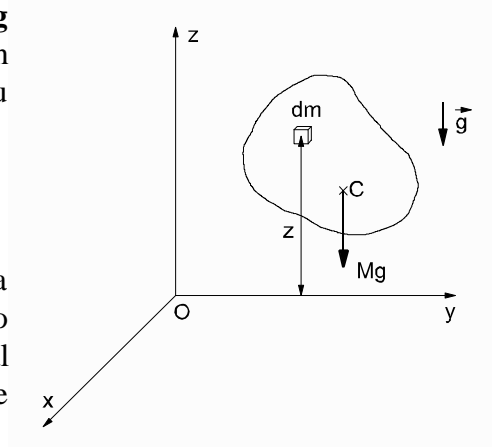


Figura 7.25

que, recordando las definiciones de centro de gravedad y de centro de masas, se puede escribir como

$$E_p = M g z_C \quad (7.52)$$

La energía potencial gravitatoria de un sólido rígido es igual a la que tendría toda la masa  $M$  del sólido si estuviera concentrada en el centro de masas.

### 7.6.5 TEOREMA DE LA ENERGÍA MECÁNICA PARA UN SÓLIDO RÍGIDO

Sea un sólido rígido cuyo movimiento está referido a un sistema inercial  $S$ . El sistema de fuerzas aplicado sobre él en un intervalo entre  $t_1$  y  $t_2$  equivale en un punto  $P$  cualquiera a la resultante  $\mathbf{F}$  y al momento resultante  $\mathbf{M}_p$ . En el caso general actuarán sobre el sólido tanto fuerzas de tipo conservativo como de tipo disipativo, de forma que

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_D \quad \mathbf{M}_p = \mathbf{M}_{pC} + \mathbf{M}_{pD}$$

y el trabajo total, en el intervalo considerado, se puede separar en dos términos

$$W = W_C + W_D$$

siendo

$$W_C = \int_1^2 \mathbf{F}_C \cdot d\mathbf{r}_P + \int_1^2 \mathbf{M}_{pC} \cdot \boldsymbol{\omega} dt = E_p(1) - E_p(2)$$

donde  $E_p$  representa la energía potencial total del sólido rígido, suma de las energías potenciales de las distintas fuerzas conservativas a que está sometido.

Teniendo en cuenta la expresión anterior y el teorema de la energía cinética (7.51) se obtiene

$$W_D = [E_C(2) + E_p(2)] - [E_C(1) + E_p(1)]$$

siendo  $E=E_c+E_p$  la energía mecánica del sólido. Es decir

$$W_D = E(2) - E(1) \quad (7.53)$$

que es la expresión del teorema de la energía mecánica para un sistema de partículas, aplicable, evidentemente, para el caso particular de un sólido rígido.

Si el trabajo debido a fuerzas disipativas es nulo ( $W_D=0$ ) se conserva constante la energía mecánica del sólido.