ÍNDICE

8.1 INTRODUCCIÓN

La estática se ocupa de estudiar las condiciones bajo las cuales los sistemas mecánicos están en equilibrio. En este capítulo nos referiremos únicamente a equilibrio de tipo mecánico, situación que indica que el estado de movimiento del sistema debe de permanecer invariable indefinidamente. Las condiciones de equilibrio podrán ser diferentes en algunos aspectos según el sistema que consideremos (partícula material, sistema de partículas o sólido rígido), si bien conviene recordar que los cuerpos reales tienen dimensiones y se amoldan en mayor medida al modelo de sólido rígido que al de partícula material. En consecuencia, es la estática del sólido rígido la que presenta un mayor interés para aplicaciones prácticas.

Decimos que **una partícula material está en equilibrio respecto a un sistema de referencia inercial cuando la resultante de las fuerzas que actúan sobre ella es igual a cero** (**F**=**0**). No se debe confundir el estado de equilibrio con el de reposo. Así, una partícula en equilibrio se comporta como una partícula libre y estará en movimiento rectilíneo uniforme respecto a un sistema inercial cualquiera, aunque siempre es posible elegir sistemas de referencia inerciales respecto a los cuales se encuentre en reposo.

Es posible generalizar la definición de equilibrio al caso de sistemas no inerciales. Diremos que **una partícula material se encuentra en equilibrio dinámico respecto a un sistema de referencia no inercial S' cuando la suma de la resultante de las fuerzas que actúan sobre ella y de la fuerza de inercia resultante se anula** (**F**+**F'**=**0**). Ello implica movimiento rectilíneo uniforme de la partícula relativo al sistema S' (o reposo relativo, como caso particular).

8.2 CONDICIONES DE EQUILIBRIO PARA UN SOLIDO RÍGIDO

Diremos que **un sólido rígido está en equilibrio respecto a un sistema de referencia inercial S cuando la resultante de las fuerzas $\mathbf{F}_i$ aplicadas sobre él es nula y cuando el momento resultante respecto a un punto cualquiera O de S -que es la suma de los momentos de las fuerzas aplicadas $\mathbf{F}_i$, respecto al punto O, más los momentos m_j de los pares directamente aplicados- es también nulo**, es decir:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \sum_i \mathbf{F_i} = \mathbf{0} \\ \mathbf{M_O} &= \sum_i \mathbf{OA_i} \times \mathbf{F_i} + \sum_j m_j = \mathbf{0} \end{aligned} \qquad (8.1)$$

siendo A_i un punto cualquiera de la recta soporte de $\mathbf{F_i}$. Las condiciones anteriores pueden generalizarse al caso de equilibrio dinámico de un sólido rígido en un sistema de referencia no inercial S' incluyendo las fuerzas de inercia, aplicadas en el centro de masas, y los momentos de las fuerzas de inercia respecto al punto O' del sistema S' que hayamos elegido.

Dado que el conjunto de las fuerzas aplicadas sobre un sólido rígido se comporta como un sistema de vectores deslizantes, las condiciones de equilibrio (8.1) implican que el sistema de fuerzas que actúan sobre el sólido debe equivaler a un sistema nulo.

El estado cinemático compatible con las condiciones de equilibrio para un sólido es más complejo de estudiar que el correspondiente a una partícula material. En particular, las condiciones (8.1) son compatibles con sólido rígido en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme de traslación, pero existen otras posibilidades, que entran dentro del estudio del movimiento general de un sólido libre y que escapan a los fines y al nivel de este curso. Por ello, en las aplicaciones prácticas entenderemos que un sólido en equilibrio se encontrará en reposo respecto a un sistema inercial, salvo que se especifique alguna otra posibilidad.

8.3 EL MÉTODO GENERAL DE LA ESTÁTICA

Para resolver un problema de equilibrio del sólido rígido según el método general de la estática es necesario tener en cuenta tres etapas sucesivas.

1) Representar gráficamente el diagrama de sólido libre.

Consiste en dibujar sobre el contorno del sólido el conjunto de las fuerzas y pares que actúan sobre él. Es conveniente proceder con orden, representando gráficamente:

a) el peso, aplicado en el centro de gravedad (salvo en el supuesto teórico de sólido de masa nula o en el de sólido no sometido a ningún campo gravitatorio)

b) las fuerzas y pares directamente aplicados, que en general serán datos del problema.

c) las fuerzas y pares de reacción, que representan la interacción del sólido con otros sólidos o sistemas con los que se encuentre en contacto y que constituyen las ligaduras. Generalmente son incógnitas del problema.

En el diagrama de sólido libre no deben dibujarse los otros sistemas que constituyen las ligaduras indicadas. Su efecto sobre el sólido queda representado por las reacciones. Sí se puede representar alguna cota o algún ángulo, siempre que contribuyan a una mayor claridad. Los módulos de las distintas fuerzas y de los distintos momentos deben de dibujarse de forma que guarden aproximadamente una misma escala respecto a sus valores estimados.

2) Plantear las ecuaciones de la estática.

Consiste en incluir todas las fuerzas y pares aplicados sobre el sólido y representados en el diagrama de sólido libre en las ecuaciones (8.1). Para ello es conveniente definir un sistema de ejes OXYZ y un sentido de rotaciones con claridad y de forma adecuada a la naturaleza de cada problema concreto. La segunda de las ecuaciones (8.1) sólo puede ser utilizada una vez para un punto P de libre elección. Si intentamos emplearla de nuevo para un punto diferente P' no nos proporcionará ninguna nueva ecuación independiente.

3) Resolver las ecuaciones de la estática.

Las ecuaciones (8.1) equivalen, en el caso más general, a seis ecuaciones escalares para cada sólido rígido en equilibrio y no permiten, por lo tanto, resolver más de seis incógnitas escalares. Si el número de incógnitas es igual al número de ecuaciones independientes el problema está resuelto (salvo dificultades matemáticas), pero si es mayor no tiene solución por el método indicado y decimos que es un problema estáticamente indeterminado (existen otros métodos que permiten resolver total o parcialmente un gran número de problemas estáticamente indeterminados, pero no los consideraremos aquí).

Cuando el sólido tiene un apoyo con rozamiento es posible en ocasiones resolver la situación límite de equilibrio aunque el problema sea estáticamente indeterminado para otras posiciones diferentes, incluyendo la condición de fuerza de rozamiento límite que nos proporciona una nueva ecuación

$$|\mathbf{F}_{RL}| = \mu_e N$$

donde F_{RL} es el valor, con signo implícito, de la fuerza de rozamiento límite y N la componente normal de la fuerza de reacción en el apoyo. Pueden existir incluso, como datos del problema, otros tipos de condiciones límite que nos proporcionen ecuaciones adicionales en ciertos casos, como, por ejemplo, la condición límite de vuelco para un sólido que apoye mediante una cierta área de contacto o la tensión máxima que puede soportar un hilo que sujeta al sólido.

8.4 LIGADURAS: REACCIONES EN APOYOS

Las ligaduras y apoyos comúnmente utilizados en mecánica aplicada se suelen modelizar y sustituir por fuerzas y pares de reacción de interpretación simple. En la figura 8.1 se representan algunos de los casos más habituales, correspondientes a los supuestos mono y bidimensional (fuerzas de reacción con dirección definida o contenidas en un plano definido y momentos perpendiculares a la dirección o al plano en cuestión) para el equilibrio de un sólido en un plano. En las figuras 8.2(a) y (b) se representan los casos habituales correspondientes a equilibrio del sólido en el espacio, en tres dimensiones.

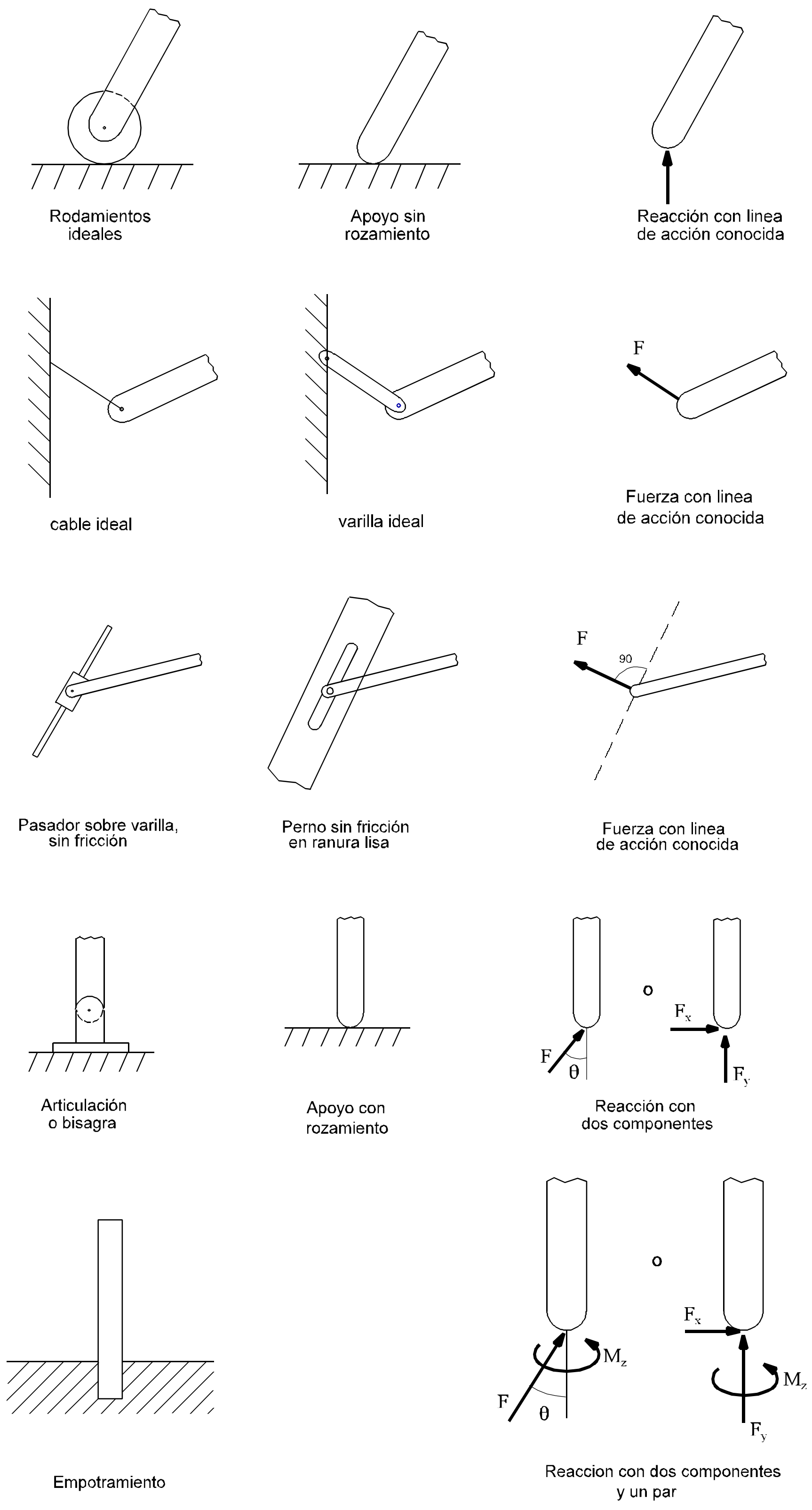
Rodamientos ideales
Apoyo sin rozamiento
Reacción con linea de acción conocida
cable ideal
varilla ideal
F
Fuerza con linea de acción conocida
Pasador sobre varilla, sin fricción
Perno sin fricción en ranura lisa
F
90
Fuerza con linea de acción conocida
Articulación o bisagra
Apoyo con rozamiento
F
θ
o
Fx
Fy
Reacción con dos componentes
Empotramiento
Mz
F
θ
o
Fx
Mz
Fy
Reaccion con dos componentes y un par

Figura 8.4

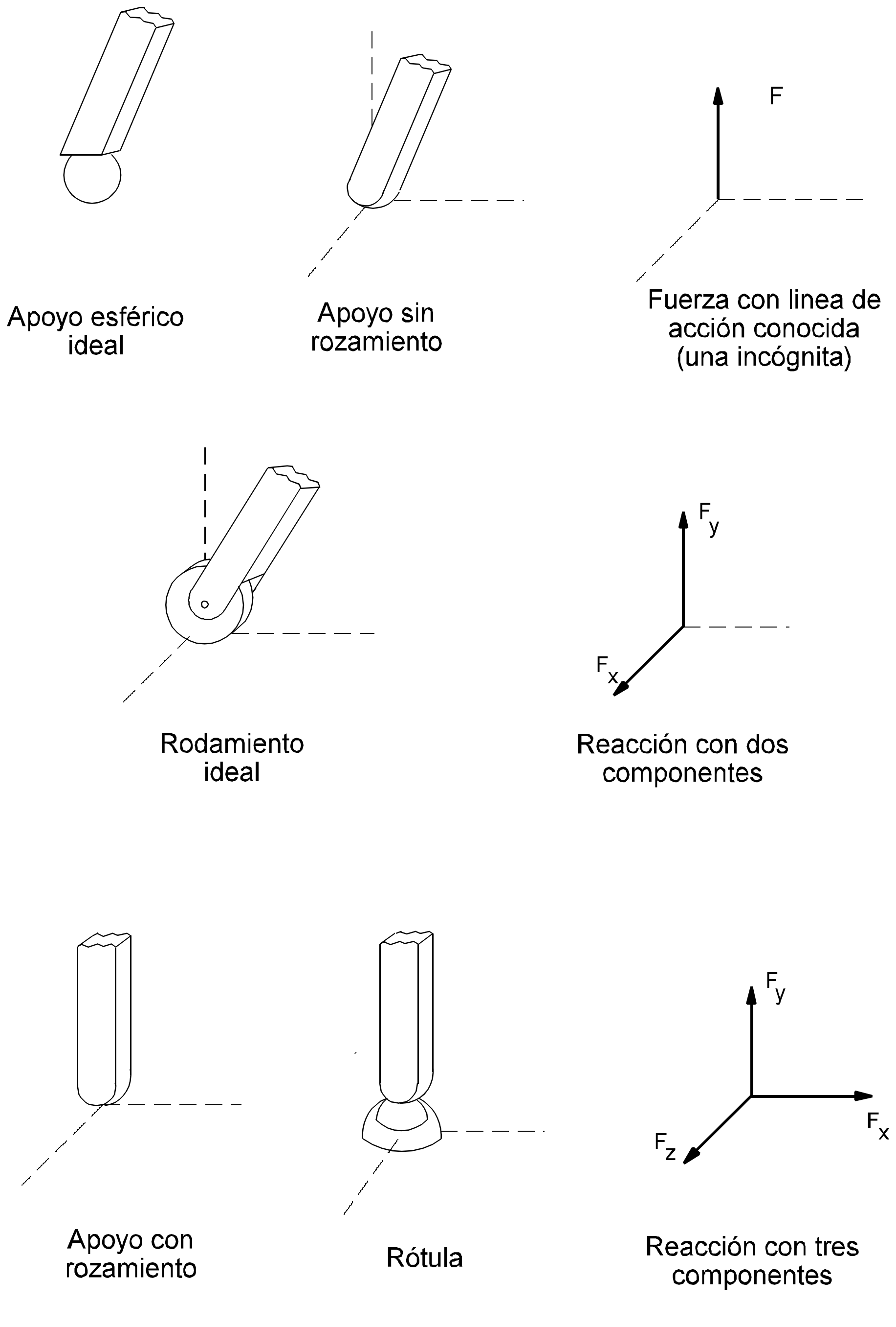
F
Apoyo esférico ideal
Apoyo sin rozamiento
Fuerza con linea de acción conocida (una incógnita)
Fy
Fx
Rodamiento ideal
Reacción con dos componentes
Fy
Fx
Fz
Apoyo con rozamiento
Rótula
Reacción con tres componentes

Figura 8.4 (a)

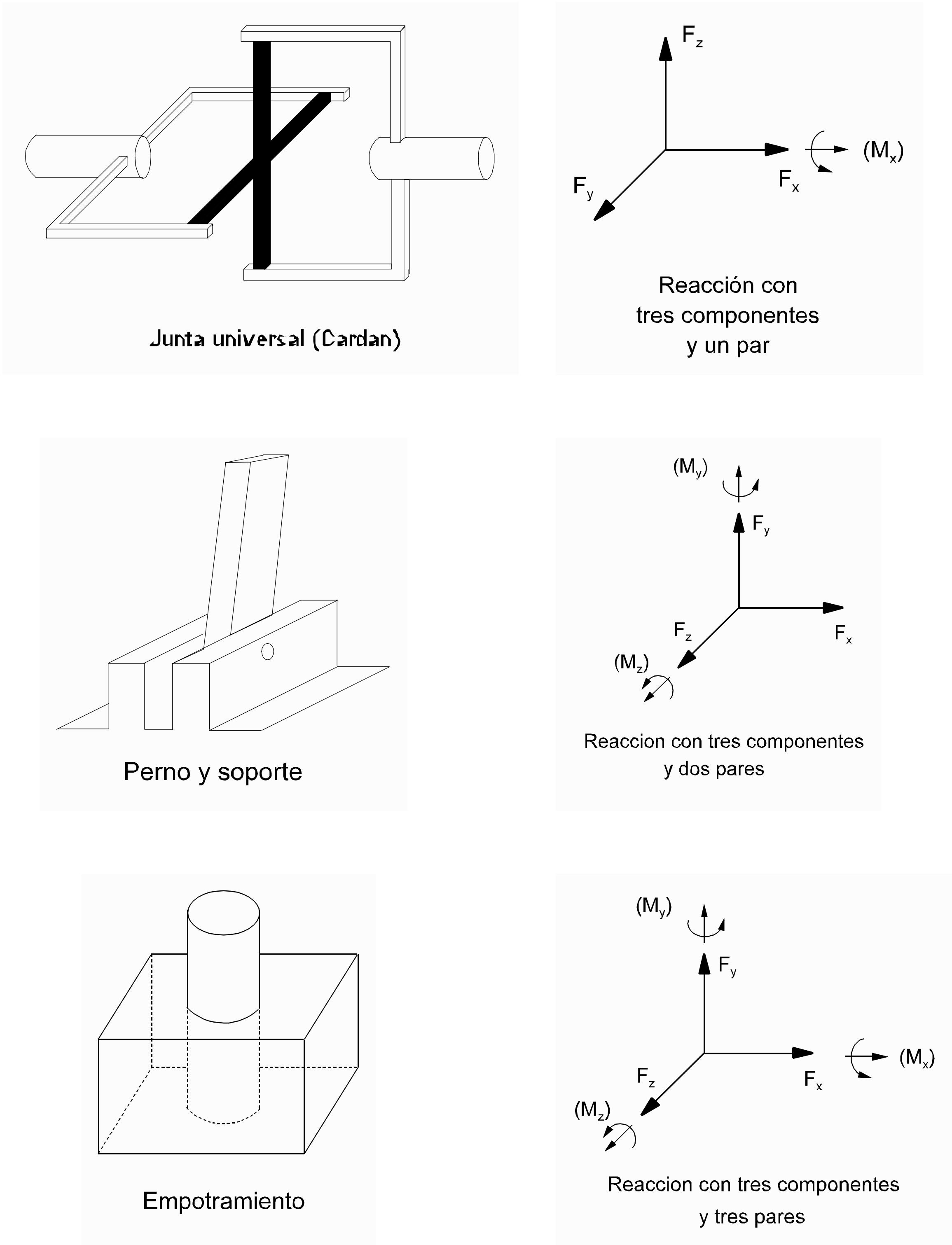
Junta universal (Cardan)
F_z
F_y
F_x
(M_x)
Reacción con
tres componentes
y un par
Perno y soporte
(M_y)
F_y
F_z
F_x
(M_z)
Reaccion con tres componentes
y dos pares
Empotramiento
(M_y)
F_y
(M_x)
F_z
F_x
(M_z)
Reaccion con tres componentes
y tres pares

Figura 8.2(b)

8.5 EQUILIBRIO DEL SOLIDO RÍGIDO EN UN PLANO

Consideraremos aquí el caso en el que todas las fuerzas aplicadas sobre el sólido están contenidas en el mismo plano (que habitualmente contiene al centro de masas) y todos los momentos tienen dirección perpendicular a dicho plano. En estas condiciones el diagrama de sólido libre es bidimensional en lo concerniente a las fuerzas aplicadas y las ecuaciones de la estática (8.1) equivalen a tres ecuaciones escalares

$$
\begin{aligned}
F_x &= \sum_i F_{ix} = 0 \\
F_y &= \sum_i F_{iy} = 0 \\
M_{Oz} &= \sum_i (\mathbf{OA_i} \times \mathbf{F_i}) \cdot \mathbf{k} + \sum_j \mathbf{m_j} \cdot \mathbf{k} = 0
\end{aligned}
\tag{8.2}
$$

donde se ha supuesto que todas las fuerzas están contenidas en un plano z=cte de un sistema de referencia inercial S y que todos los momentos tienen, en consecuencia, dirección paralela al eje Oz.

Este supuesto permite resolver un máximo de tres incógnitas escalares si no se imponen condiciones adicionales que puedan ser plasmadas en ecuaciones.

En el capítulo 7 se estudiaron las ecuaciones dinámicas del movimiento plano del sólido rígido, (7.42) y (7.43), que nos permitirán analizar, en este caso particular, el estado cinemático compatible con las condiciones (8.2).

Al ser **F**=**0** la aceleración del centro de masas debe de ser nula también ($\mathbf{a}_C=\mathbf{0}$) y su movimiento será rectilíneo y uniforme, o bien estará en reposo, respecto al sistema inercial S.

De $M_{Oz}=0$ se deduce que la aceleración angular del sólido ha de ser nula ($\boldsymbol{\alpha}=\alpha\mathbf{k}=\mathbf{0}$) y su velocidad angular constante ($\boldsymbol{\omega}=\omega\mathbf{k}=\mathbf{cte}$).

Las dos primeras ecuaciones (7.43) se reducen en este caso a las siguientes

$$
\begin{aligned}
M_{Cx} &= P_{Cyz}\,\omega^2 \\
M_{Cy} &= -P_{Cxz}\,\omega^2
\end{aligned}
$$

referidas aquí al centro de masas C, pero como las condiciones de equilibrio imponen que $M_{Cx}=M_{Cy}=0$, entonces la velocidad angular ha de ser nula ($\omega=0$) si los productos de inercia son distintos de cero, es decir, si el sistema de referencia CM con ejes paralelos a los del sistema inercial S no representa los ejes principales de inercia en C.

Existen, no obstante, ciertos casos de sólidos simétricos en los que el sistema centro de masas paralelo al sistema inercial S representa ejes principales de inercia en C para todo instante a lo largo del movimiento del sólido. En este supuesto el tensor de inercia se representa mediante una matriz diagonal (los productos de inercia son nulos) respecto al sistema centro de masas, con momentos de inercia I_{Cx}, I_{Cy} e I_{Cz}, constantes en todo instante. El momento cinético respecto al centro de masas C en este sistema se expresa en tal caso, recordando que **T**=T**k**,

$$\mathbf{L_C} = \bar{\mathrm{I}}_\mathbf{C}\, \boldsymbol{\omega} = \mathrm{I}_{\mathbf{Cz}}\, \omega\, \mathbf{k}$$

y el teorema del momento cinético conduce a

$$\mathbf{M_C} = \frac{d\mathbf{L_C}}{dt} = \mathrm{I}_{Cz} \frac{d\omega}{dt}\, \mathbf{k}$$

siendo las componentes de $\mathbf{M}_C$ según los ejes Cx y Cy nulas en todo instante para el caso de movimiento plano que estamos considerando.

En el supuesto de sólido rígido en equilibrio $\mathbf{M}_C=\mathbf{0}$ lo que implica que

$$\frac{d\omega}{dt} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \text{cte}$$

y el sólido simétrico se mantendrá con un movimiento de rotación uniforme al mismo tiempo que su centro de masas sigue un movimiento rectilíneo uniforme respecto al sistema inercial S. El caso particular de reposo corresponde a $v_C=0$ y **T**=0 para el sólido en equilibrio.

En resumen, las condiciones de equilibrio (8.2) implican que la cantidad de movimiento del sólido $\mathbf{p}=M\mathbf{v}_C$ sea constante y que el momento cinético del sólido sea también constante respecto a cualquier punto fijo, respecto a cualquier punto con aceleración nula o cuya aceleración pase por el centro de masas o respecto al propio centro de masas, en el sistema inercial S y en el caso de sólido simétrico en el sentido indicado. Si el sólido no es simétrico, entonces las condiciones de equilibrio implican que su cantidad de movimiento ha de ser también constante respecto a S, pero su momento cinético y su velocidad angular han de ser nulos, salvo, quizá, para algún instante de tiempo particular.

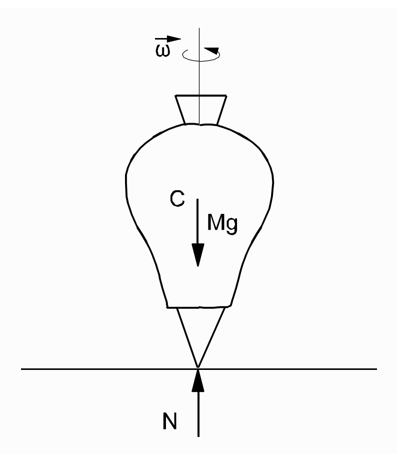

Figura 8.3

Un ejemplo de lo anterior lo constituye el movimiento de rodadura pura de un sólido de sección circular que apoya sobre una superficie horizontal sometido únicamente a su peso y a la reacción en el apoyo, analizado ya en el apartado (7.7.3). Otro ejemplo es el de una peonza simétrica, como la mostrada en la figura (8.3).

Teniendo en cuenta el diagrama de fuerzas representado, se verifican las condiciones de equilibrio (8.1) y el centro de masas se mantendrá en reposo al mismo tiempo que el sólido gira en torno a un eje vertical con velocidad angular constante, indefinidamente.

El caso general de estudio del movimiento en tres dimensiones de un sólido simétrico en equilibrio es bastante más complejo que el analizado aquí para el caso de movimiento plano.

8.6 CASOS PARTICULARES SIMPLES EN ESTÁTICA DEL SOLIDO RIGIDO

8.6.1 SÓLIDO SOMETIDO A DOS FUERZAS

En este caso la primera ecuación (8.1) implica que las dos fuerzas han de tener el mismo módulo, la misma dirección y sentido opuesto. Si el sólido tiene masa y está sometido al campo de gravedad terrestre una de las fuerzas ha de ser el peso y en consecuencia la dirección de la otra fuerza aplicada ha de ser vertical, contener al centro de masas y de sentido opuesto al del peso.

8.6.2 SÓLIDO SOMETIDO A TRES FUERZAS

La primera ecuación (8.1), **F**=**0**, exige aquí que las tres fuerzas sean coplanarias, luego estamos en el caso contemplado por las ecuaciones (8.2). La última de ellas se escribe, en este caso, como

$$M_{Oz} = \sum_{i=1}^{3} (\mathbf{OA_i} \cdot \mathbf{F_i}) \cdot \mathbf{k} = 0 \qquad (8.3)$$

ya que el sólido está sometido sólo a las tres fuerzas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$ y no hay que considerar pares directamente aplicados.

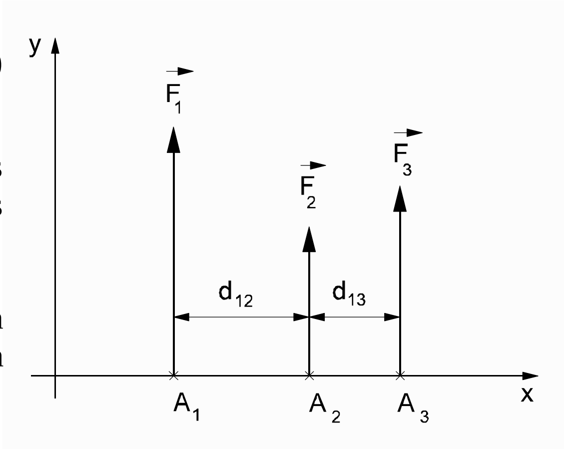

Figura 8.4

Para que el sólido esté en equilibrio existen únicamente dos posibilidades: las tres fuerzas son paralelas o las tres fuerzas son concurrentes.

En efecto. Supongamos que las fuerzas son paralelas y veamos si tal situación es compatible con el equilibrio. Elijamos un sistema de referencia OXYZ adecuado y situemos el punto de aplicación de cada una de ellas (A_1, A_2 y A_3) en el eje OX, según se indica en la figura 8.4 (recordemos que las fuerzas aplicadas sobre un sólido son vectores deslizantes).

Aplicando la ecuación (8.3) al punto A_1 se obtiene que

$$\mathbf{A_1A_2} \times \mathbf{F_2} + \mathbf{A_1A_3} \times \mathbf{F_3} = \mathbf{0}$$

que equivale a

$$d_{12}\,|\mathbf{F_2}| = d_{13}\,|\mathbf{F_3}|$$

independientemente del valor de $\mathbf{F}_1$ (que sólo ha de verificar que $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = \mathbf{0}$). Existen infinitos valores de F_1, F_3, d_{12} y d_{13} que verifican la ecuación anterior y, por lo tanto, las condiciones de equilibrio se pueden cumplir si las tres fuerzas son paralelas.

Supongamos ahora que las tres fuerzas no son paralelas. En este caso, al ser coplanarias, dos de ellas, por ejemplo $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$, serán concurrentes en un punto que llamaremos P.

Apliquemos la ecuación (8.3) respecto al punto P. Resulta

$$\mathbf{PA_1} \times \mathbf{F_1} + \mathbf{PA_2} \times \mathbf{F_2} + \mathbf{PA_3} \times \mathbf{F_3} = \mathbf{0}$$

pero como $\mathbf{PA}_1 2 \mathbf{F}_1$ y $\mathbf{PA}_2 2 \mathbf{F}_2$ se verifica que

$$\mathbf{PA_1} \times \mathbf{F_1} = \mathbf{PA_2} \times \mathbf{F_2} = \mathbf{0}$$

con lo que se ha de cumplir

$$\mathbf{PA_3} \times \mathbf{F_3} = \mathbf{0}$$

lo que implica, en el caso general, que $\mathbf{PA}_3 2 \mathbf{F}_3$, es decir, que la recta soporte de $\mathbf{F}_3$ también contiene al punto P. Luego las tres fuerzas han de ser concurrentes en el punto P.