Dinámica de la Partícula

Tema 3

Índice

Índice

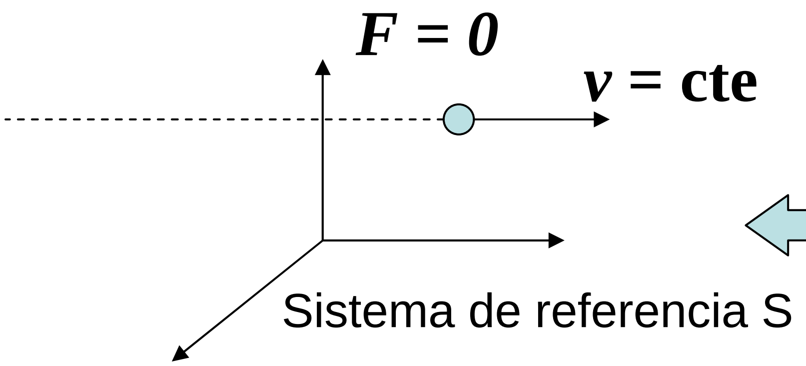
- Trabajo. Fuerzas Conservativas.
- Energía Potencial
- Teorema de la Energía Cinética. Conservación.
- Teorema de la Energía Mecánica. Conservación.

1ª Ley de Newton: Principio de Inercia

Todos los cuerpos perseveran en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo y uniforme salvo que se vean forzados a cambiar ese estado por fuerzas impresas.

$$\Updownarrow$$

Toda partícula libre permanece en reposo o en movimiento rectilíneo y uniforme.



$\Longleftrightarrow$ S es inercial

2ª Ley de Newton:
Principio de Proporcionalidad

El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza impresa y se hace en la dirección de ésta.

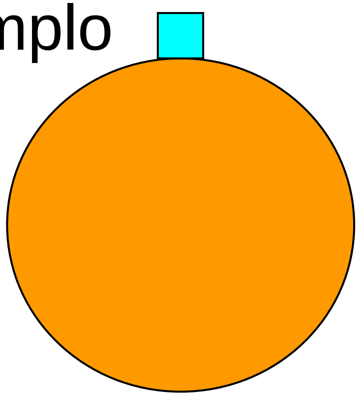
$$\vec{F} = \frac{d\,\vec{p}}{d\,t} = m\,\vec{a}$$

p es la cantidad de movimiento o momento lineal de una partícula
m es la masa inercial
a es la aceleración
F es la resultante de fuerzas y depende en el caso más general de la posición y velocidad de la partícula y del tiempo

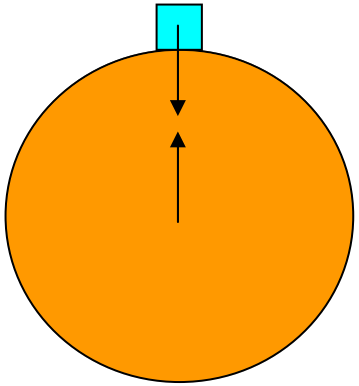
3ª Ley de Newton: Principio de Acción y Reacción

Para toda fuerza de acción ejercida sobre un cuerpo hay siempre una fuerza de reacción (ejercida sobre otro cuerpo causante de la acción) igual pero de sentido opuesto.

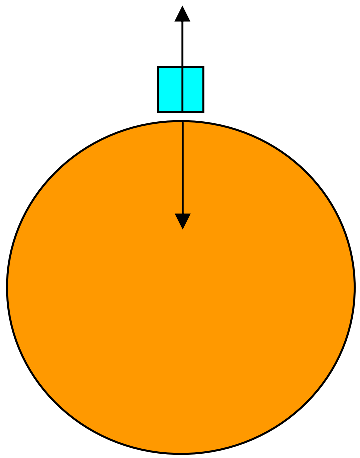
Ejemplo



Tierra



Fuerzas de Atracción Gravitatoria



Fuerzas de Repulsión en el Apoyo Electromagnéticas

Nota: las fuerzas de acción y reacción pueden ser (p. fuerte) o no colineales (p. débil)

Interacciones Básicas de la Naturaleza

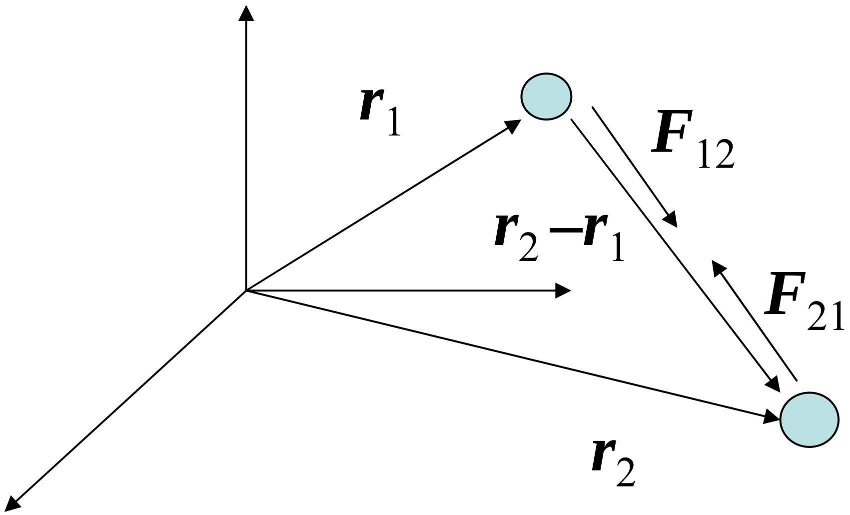
La fuerza es la cuantificación numérica que modela el concepto físico de interacción.

Interacción	Intensidad	Alcance	Sentido	Fuente
Fuerte	Fuerte	Corto	Atractivo (repulsivo a cortas distancias)	Estabilidad del núcleo
Electromagnética	Fuerte	Largo	Atractivo o repulsivo	Carga eléctrica
Débil	Débil	Corto	No aplicable	Reacciones entre partículas
Gravitatoria	Débil	Largo	Atractivo	Masa

Interacción Gravitatoria

Ley de Gravitación Universal

Todos los cuerpos se atraen entre sí mediante fuerzas directamente proporcionales al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.

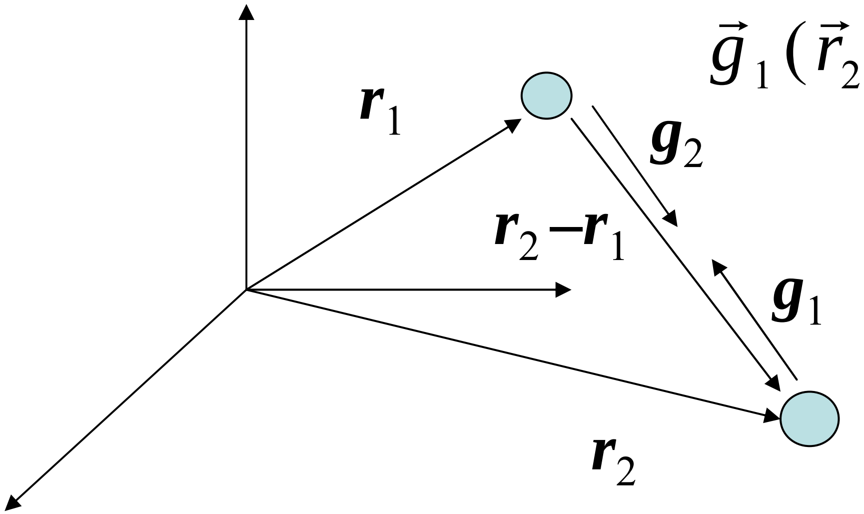


$$\vec{F}_{1\to 2} = -G\,\frac{m_1 m_2}{\left|\vec{r}_2-\vec{r}_1\right|^3}(\vec{r}_2-\vec{r}_1) =$$

$$-G\,\frac{m_1 m_2}{\left|\vec{r}_2-\vec{r}_1\right|^2}\frac{(\vec{r}_2-\vec{r}_1)}{\left|\vec{r}_2-\vec{r}_1\right|} =$$

$$-G\,\frac{m_1 m_2}{\left|\vec{r}_2-\vec{r}_1\right|^2}\vec{u}_{12}$$

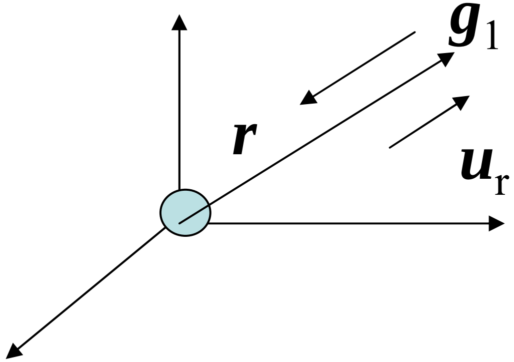
Campo Gravitatorio: mide como el cuerpo modifica el espacio



$$\vec{g}_1(\vec{r}_2) = -G\,\frac{m_1}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

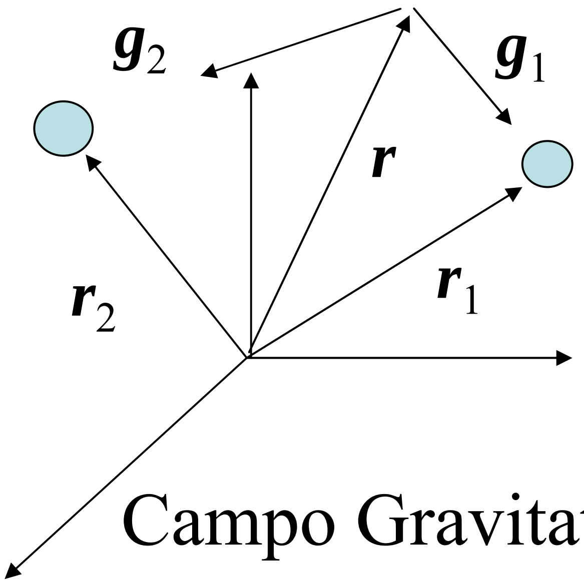
$$\vec{g}_2(\vec{r}_1) = -G\,\frac{m_1}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

Es central, radial y conservativo. Para $\boldsymbol{r}_1 = \mathbf{0}$ en un $\boldsymbol{r}$ genérico:



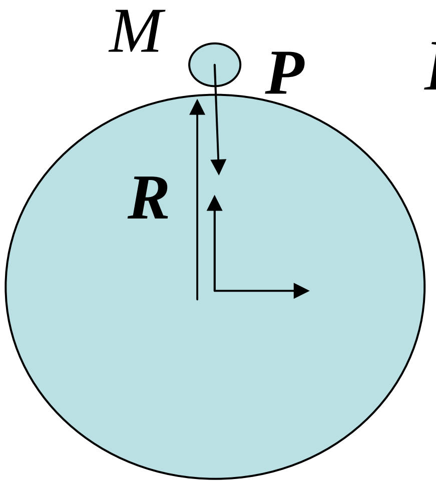
$$\vec{g}_1(\vec{r}) = g_1(r)\vec{u}_r = -\frac{dV}{dr}\frac{\vec{r}}{\left|\vec{r}\right|},, \quad V = -G\,\frac{m_1}{r}$$

Principio de Superposición:



$$\vec{g}(\vec{r}) = \vec{g}_1(\vec{r}) + \vec{g}_2(\vec{r})$$

Campo Gravitatorio Terrestre: Peso y Energía Potencial



$$\vec{P} = M\vec{g}_T(\vec{R}) = M\left(-G\frac{m_T}{R^2}\right)\frac{\vec{R}}{\left|\vec{R}\right|} \approx -9.81\frac{\vec{R}}{\left|\vec{R}\right|}ms^{-2}$$

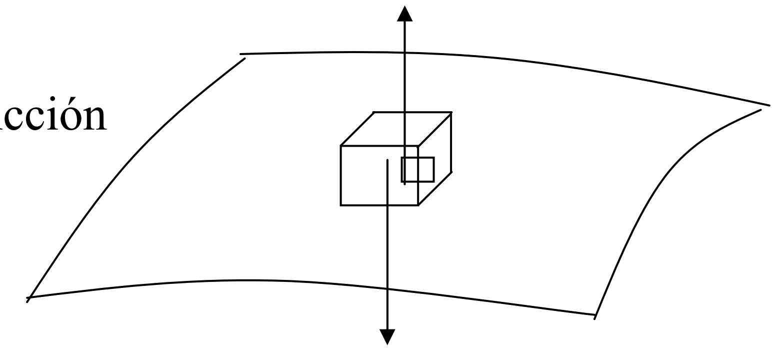
$$E_P = MV(R) = M\left(-G\frac{m_T}{R}\right) = Mg_T(R)R$$

$$\approx M\,9.81R \quad (SI)$$

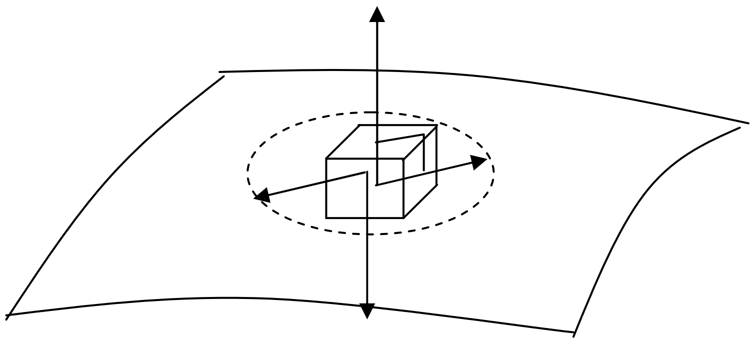
Reacción en Apoyos

Partícula sobre Superficie:

Fuerzas de Acción
y Reacción

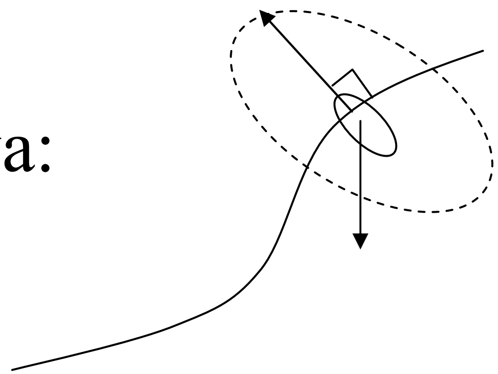


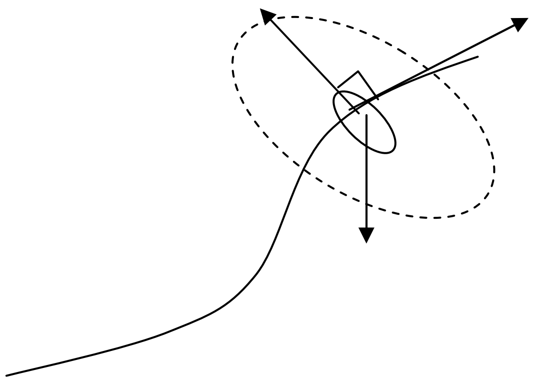
Sin rozamiento



Con rozamiento

Partícula sobre Curva:

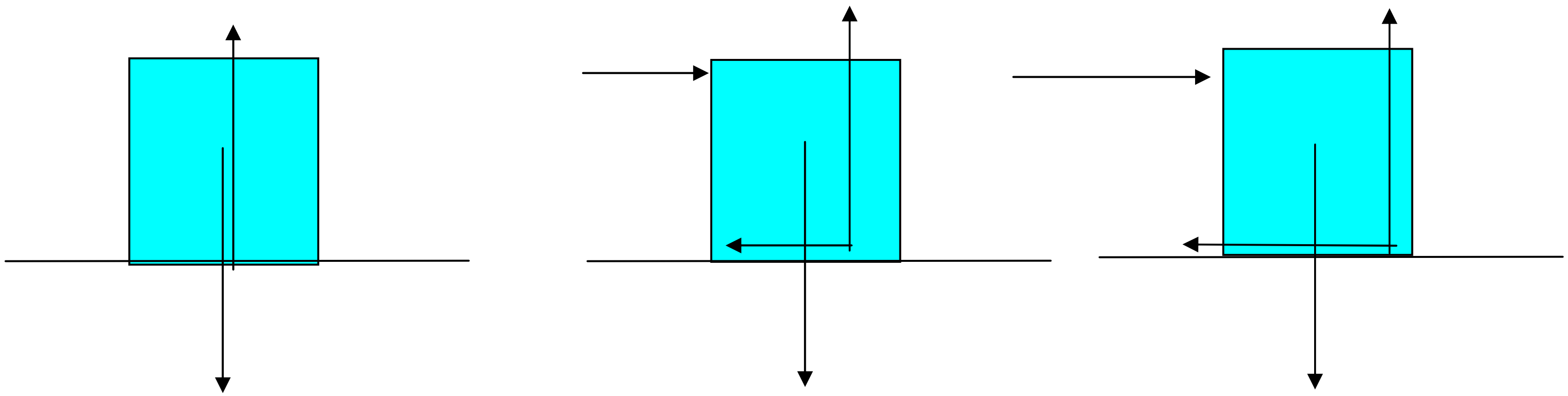




Fuerzas de Acción
y Peso

Leyes del Rozamiento Seco

Rozamiento Estático: Velocidad relativa entre objetos nula



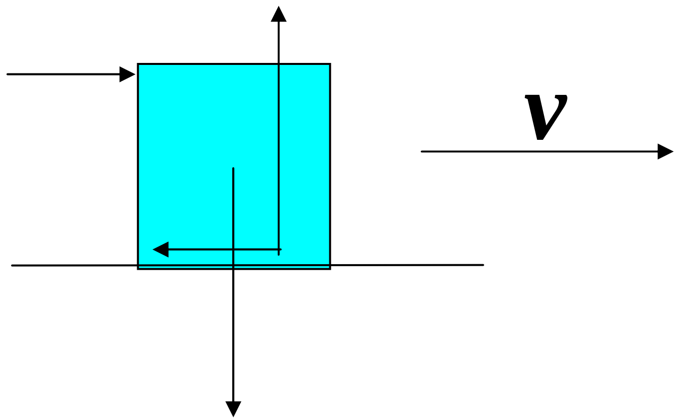
1º) $\left|F_{Re}\right| \leq \mu_e N \;,,\; \mu_e \equiv coeficiente\ de\ rozamiento\ estático$

2º) $F_{Re\,Límite} = \mu_e N$

Sólo en el caso límite se conoce el sentido de la fuerza, que es opuesto al posible sentido de movimiento

Leyes del Rozamiento Seco

Rozamiento Dinámico: Existe velocidad relativa

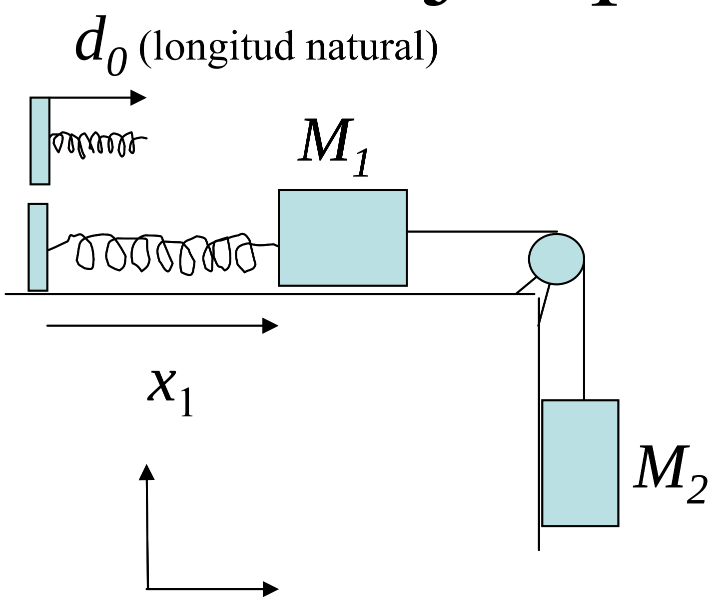


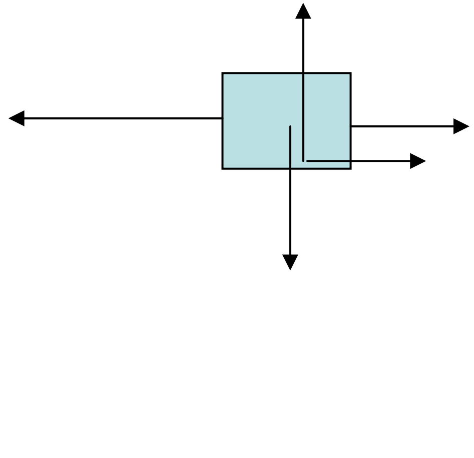
3º) $F_{Rd} = \mu_d N$,, $\mu_d \equiv$ *coeficiente de rozamiento dinámico*

F_{Rd} tiene sentido opuesto a $\boldsymbol{v}$

En general, $\mu_e \geq \mu_d$ no dependen del área de contacto y sí de la naturaleza y forma microscópica del área de contacto.

Ejemplo: Caso Estático





$$T + F_{Re1} - K(x_1 - d_0) = 0 \qquad T - M_2 g = 0$$

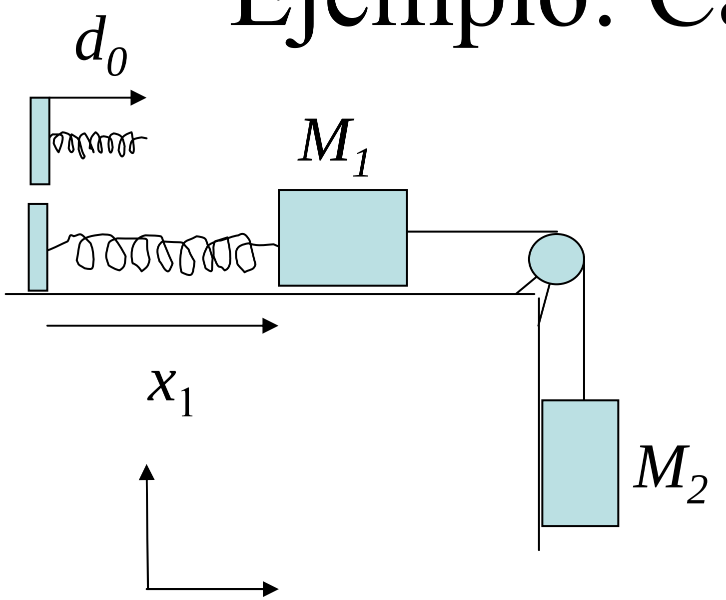
$$N_1 - M_1 g = 0$$

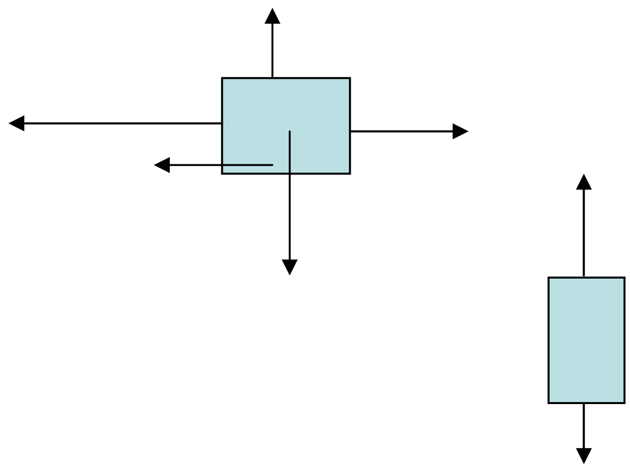
F_{Re} debe verificar: $\left|F_{Re1}\right| \leq \mu_{e1} N_1$

Si el sistema está apunto de moverse: $F_{Re1} = \pm \mu_{e1} N_1$

Valor mínimo del coef. de rozamiento: $\mu_{e1} = \dfrac{\left|F_{Re1}\right|}{N_1}$

Ejemplo: Caso Dinámico





Condiciones iniciales:

$x_1(0) = x_0$

$y_2(0) = y_0$

$v_1(0) = V > 0$

$v_1(0) = -v_2(0)$

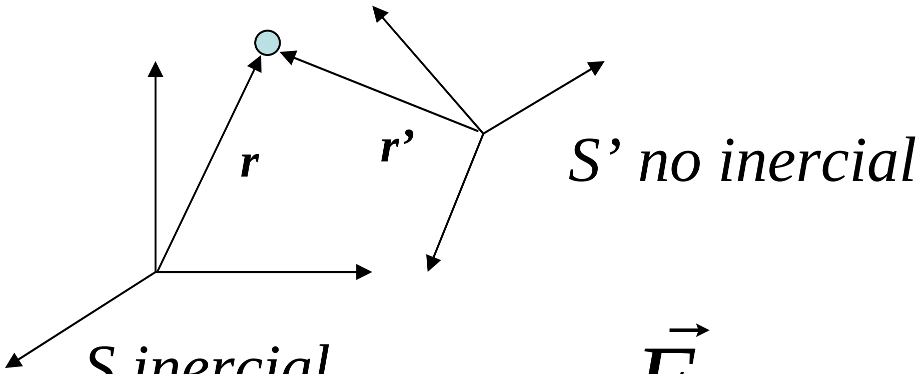
$$T - \mu_d N_1 - K(x_1 - d_0) = M_1 a_1 \qquad T - M_2 g = M_2 a_2$$

$$N_1 - M_1 g = 0 \qquad \text{Ligadura:} \quad a_1 = -a_2$$

El sentido del rozamiento se debe a la velocidad inicial.

En el caso de $V = 0$ y que no se halle estático se debe suponer un sentido para el rozamiento y probar que la aceleración se opone a éste.

Leyes de la Dinámica en SRNI



$$\vec{F} = m\ \vec{a}$$

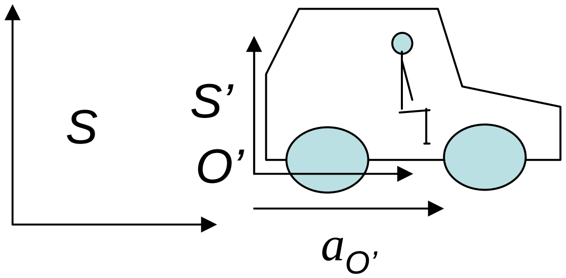
$$\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{a}_{o'} + \alpha \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') + 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,'$$

$$\vec{F} - m\vec{a}_{o'} - m\vec{\alpha} \times \vec{r}\,' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}\,' = m\vec{a}\,'$$

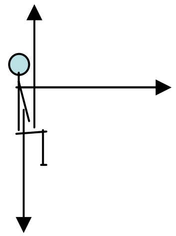
$$\vec{F} + \vec{F}_{inercia} = m\vec{a}\,'$$

$\boldsymbol{F}_{\text{inercia}}$ esta compuesta por la fuerza de traslación del origen, tangencial y centrífuga (todas forman el arrastre) y de Coriolis.

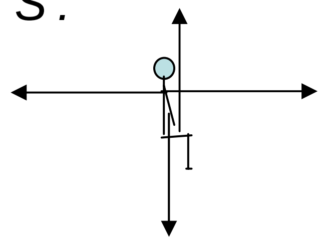
Ejemplos



En S:

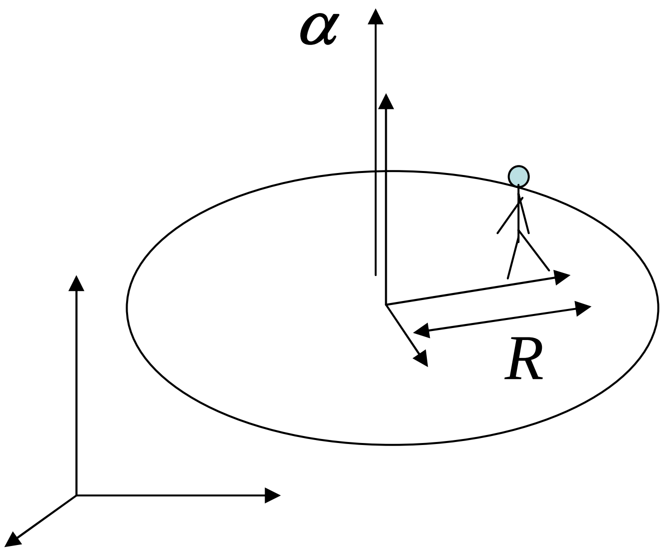


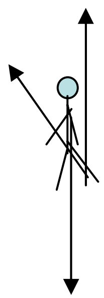
En S':

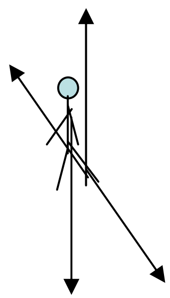


$$N - Mg = 0$$

$$R = Ma_{\text{coche}} \qquad\qquad R - Ma_{o'} = 0$$

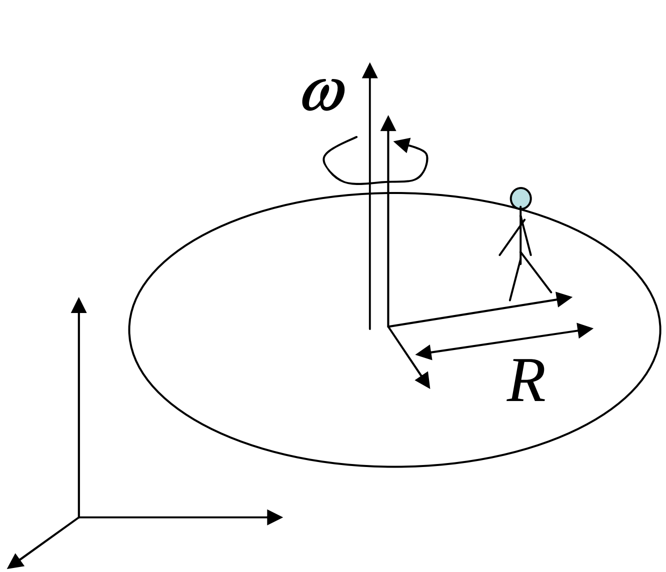


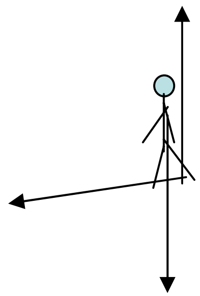


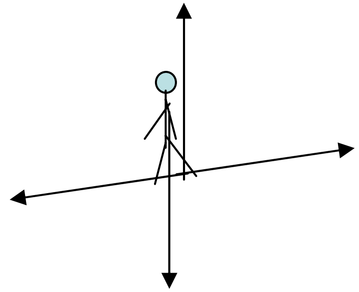


$$-F_{Re} = Ma_{\text{tangencial}} \qquad\qquad -F_{Re} + M\alpha R = 0$$

Ejemplos

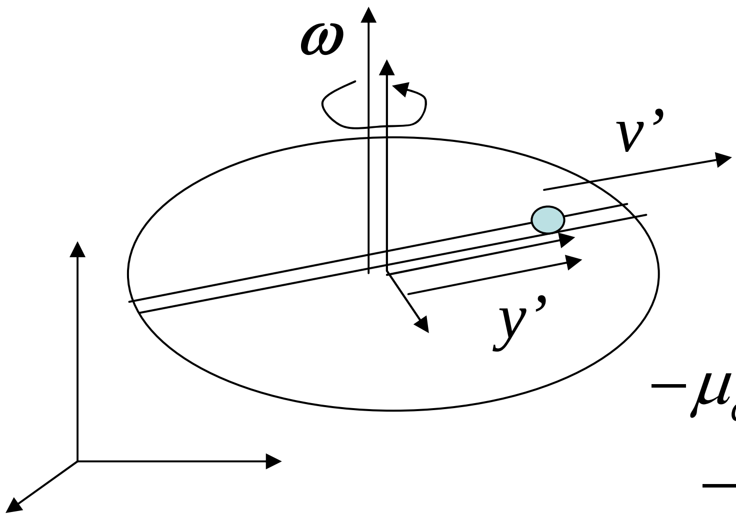


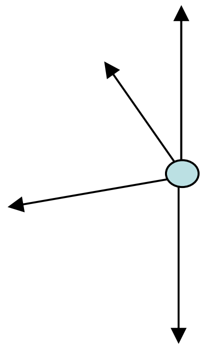


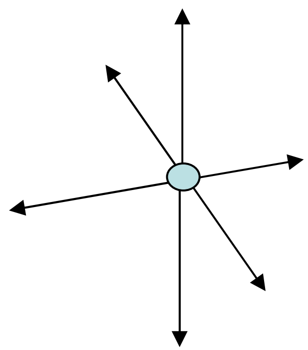


$$F_{Re} = Ma_{\text{normal}}$$

$$F_{Re} - M\omega^2 R = 0$$







$$-\mu_d N = Ma_{y'}$$
$$-R = Ma_{x'}$$

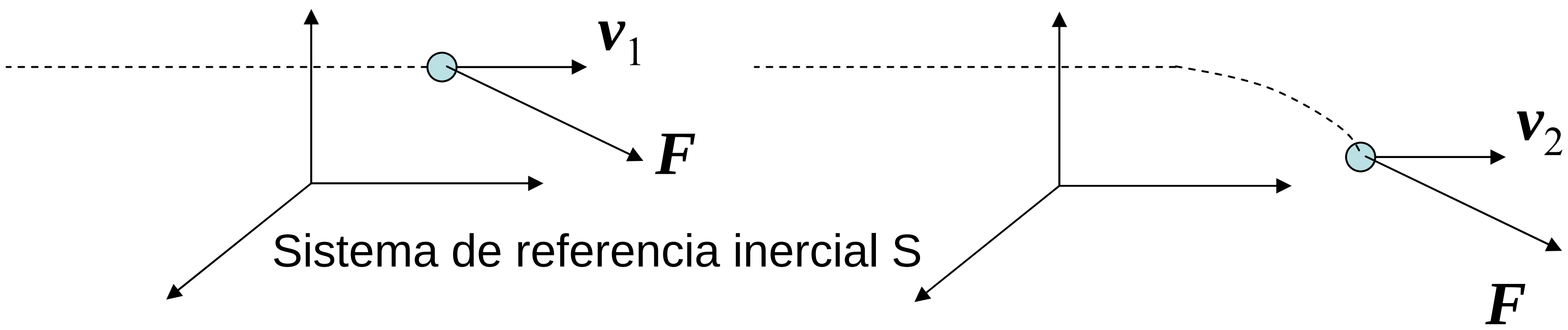
$$-\mu_d N + M\omega^2 y' = Ma'$$
$$-R + 2M\omega v' = 0$$

Impulso Mecánico de una Fuerza

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt$$

Teorema de la Cantidad de Movimiento

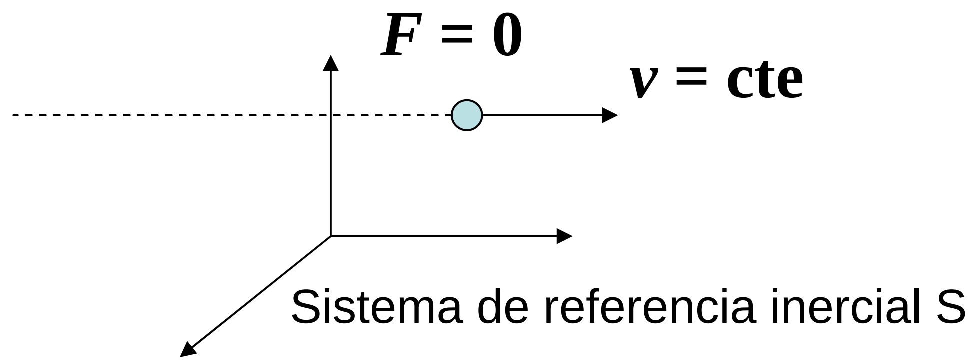
$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$



Principio de Conservación de la Cantidad de Movimiento

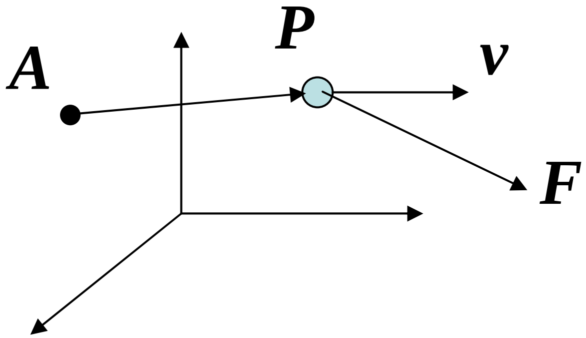
La cantidad de movimiento de una partícula se mantiene constante si la resultante de las fuerzas exteriores es nula.

$$Si \quad \vec{F} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p}(t) = \vec{p}(0) = \boldsymbol{cte}$$

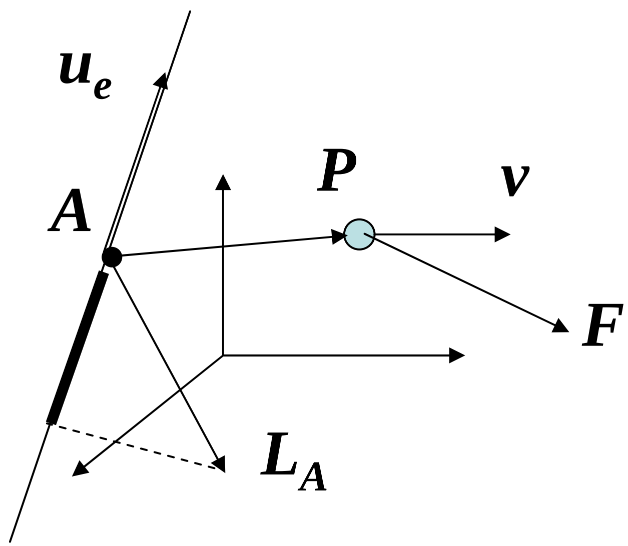


Momento Angular o Cinético en un Punto

$$\vec{L}_A = \vec{AP} \times \vec{p} = \vec{AP} \times m\vec{v}$$



Momento Angular o Cinético respecto a un Eje



$$L_e = \vec{L}_A \cdot \vec{u}_e = (\vec{AP} \times \vec{p}) \cdot \vec{u}_e$$

Teorema del Momento Cinético en un Punto Fijo

$$\vec{M}_A = A\vec{P} \times \vec{F} = \frac{d\vec{L}_A}{dt}$$

Teorema del Momento Cinético en un Eje Fijo

$$M_e = \vec{M}_A \cdot \vec{u}_e = \frac{dL_e}{dt} = \frac{d(\vec{L}_A \cdot \vec{u}_e)}{dt}$$

Conservación del Momento Cinético en un Punto

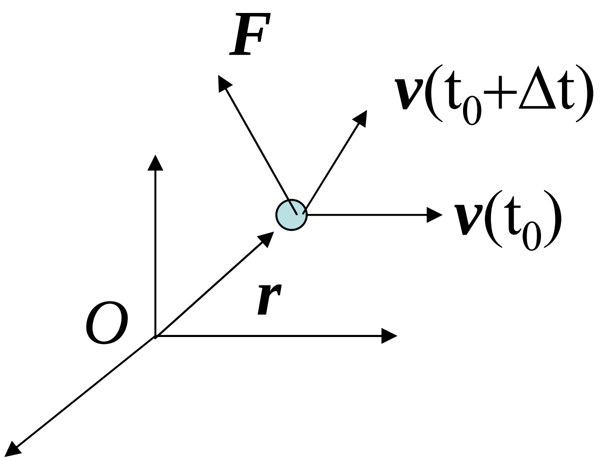
$$Si \quad \vec{M}_A = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_A(t) = \vec{L}_A(t=0) = \boldsymbol{cte}$$

Percusión

Impulso Mecánico producido por una fuerza instantánea

$$\vec{P} = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \vec{F}\, dt,, \quad \Delta t \to 0$$

Una percusión supone una discontinuidad en el momento lineal y cinético pero no en la posición.

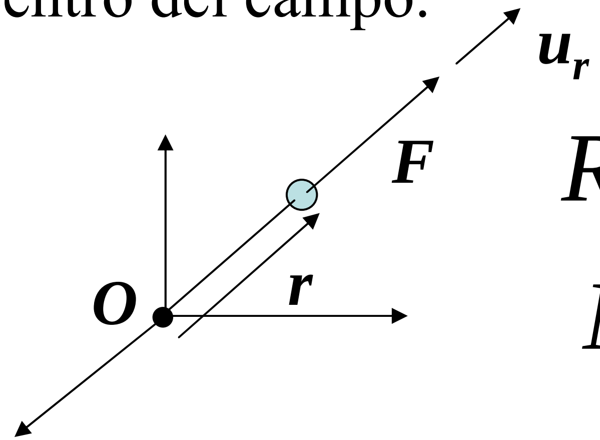


$$\vec{p}(t_0 + \Delta t) - \vec{p}(t_0) = \vec{P}(t_0)$$

$$\vec{L}_O(t_0 + \Delta t) - \vec{L}_O(t_0) = \vec{r} \times \vec{P}$$

Fuerzas Centrales

La recta soporte de la fuerza pasa por un punto fijo llamado centro del campo.



$$\vec{F} = F(\vec{r})\,\vec{u}_r$$

$$Radial: \vec{F} = F(r)\,\vec{u}_r$$

$$\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_o = \boldsymbol{cte}$$

Ejemplo: Fuerza Gravitatoria del Sol

$$\vec{F} = -G\frac{m_{Sol}m_{Planeta}}{r^2}\vec{u}_r$$

Leyes de Kepler

1ª) Las órbitas de los planetas son elipses en uno de cuyos focos está el Sol.

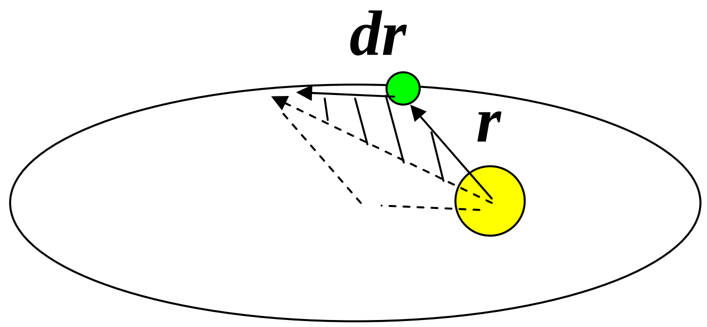
$\boldsymbol{L_{Sol}}=\boldsymbol{cte}$, por tanto, $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{v}$ están siempre en un plano perpendicular en el que se mueven los planetas.

$$\vec{L}_{Sol} = \boldsymbol{cte} \Leftrightarrow Trayectoria\ Plana$$

2ª) El vector de posición o radiovector de cualquier planeta con respecto al Sol barre áreas iguales en tiempo iguales.

$$dA = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times d\vec{r}\right|$$

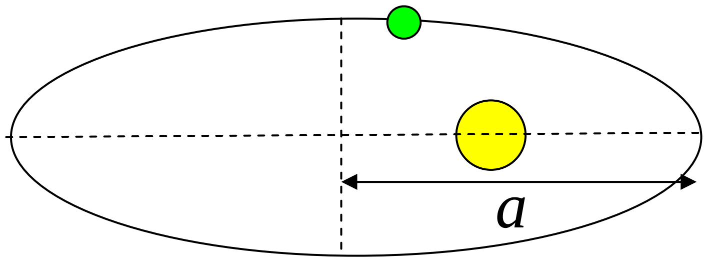
$$\frac{dA}{dt} = \frac{\left|\vec{L}_o\right|}{2m_{Sol}} = cte$$



Leyes de Kepler

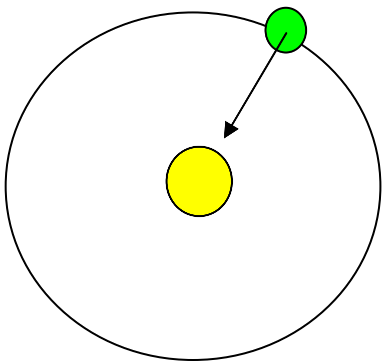
3ª) Los cuadrados de los periodos de revolución son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de las elipses que describen los planetas.

$$\frac{T^2}{a^3} = cte$$

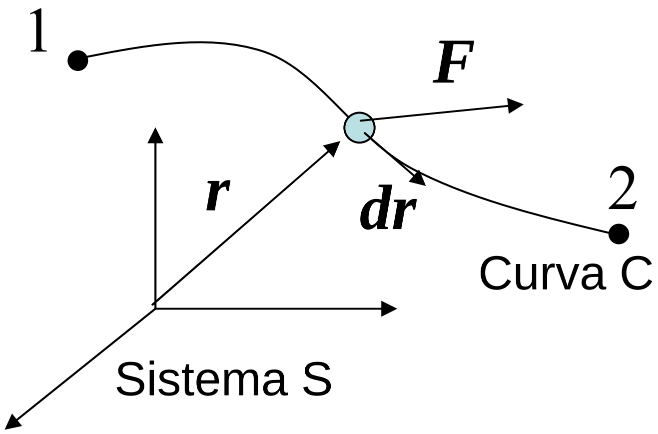


Para una órbita circular se demuestra usando que:

$$G\frac{m_{Sol}m_{plan.}}{R^2} = m_{plan.}a_{normal} = m_{plan.}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R$$



Trabajo de una Fuerza



$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dr} dr$$

Mide la efectividad de la fuerza: componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento por el desplazamiento

$$W_{1\to 2}^{C} = \int_{1\,C}^{2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Propiedades: $W_{1\to 2}^{C} = -W_{2\to 1}^{C}$

$$En\ general: W_{1\to 2}^{C} \neq W_{1\to 2}^{C'} \quad y \quad W_{1\to 1}^{C\ cerrada} \neq 0$$

Fuerzas Conservativas

El trabajo no depende del camino:

$$W_{1\to 2}^{C} = W_{1\to 2}^{C'} \ \forall \ curvas \ C \ y \ C' entre \ 1 \ y \ 2$$

El trabajo a lo largo de cualquier curva cerrada es cero:

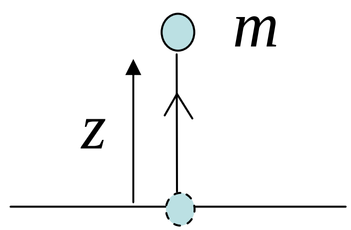
$$W^{C\ cerrada} = \oint_{C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Existe una función energía potencial tal que:

$$W_{1\to 2}^{C} = W_{1\to 2} = -(E_p(2) - E_p(1)) = -\Delta E_p$$

$$Cálculo: \quad E_p(\vec{r}) = E_p(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

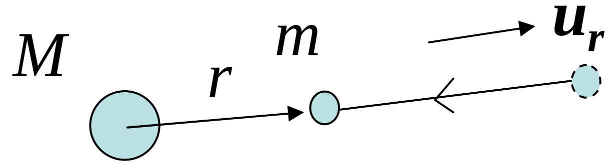
Energía Potencial



a) Fuerza Gravitatoria Constante

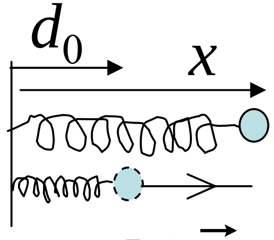
$$E_p(z) = E_p(z=0) - \int_{z=0}^{z} (-mg)\vec{k} \cdot dz\vec{k} = m\,g\,z$$

b) Fuerza Gravitatoria



$$E_p(r) = E_p(r=\infty) - \int_{\infty}^{r} \left(-G\frac{Mm}{r^2}\right)\vec{u}_r \cdot dr\vec{u}_r = -G\frac{Mm}{r}$$

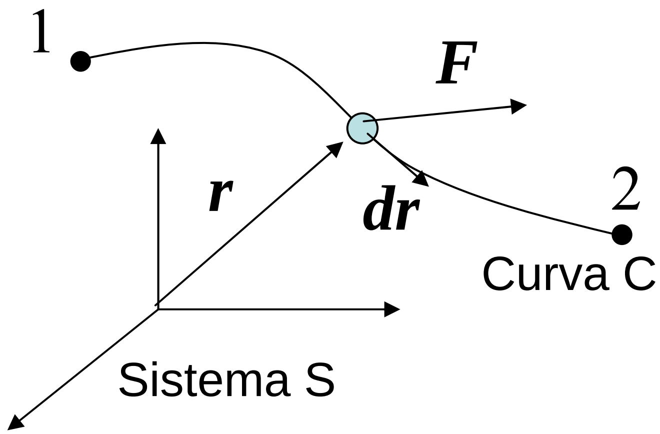
c) Fuerza Elástica



$$E_p(x) = E_p(x=d_0) - \int_{d_0}^{x} -K(x-d_0)\vec{i} \cdot dx\vec{i} = \frac{1}{2}K(x-d_0)^2$$

Teorema de la Energía Cinética

$$W_{1\to 2}^{C} = \int_{1C}^{2} \vec{F}\cdot d\vec{r} =$$



$$\int_{1C}^{2} m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}dt =$$

$$\int_{1C}^{2} md\vec{v}\cdot\vec{v} = \int_{1C}^{2} \frac{1}{2}md(\vec{v}\cdot\vec{v}) =$$

$$\frac{1}{2}mv^2(2) - \frac{1}{2}mv^2(1)$$

Conservación de la Energía Cinética

Si el trabajo realizado por la resultante de fuerzas es nulo se conserva la energía cinética.

$$Si \quad W_{1\to 2}^{C} = 0 \Rightarrow E_c = cte$$

Teorema de la Energía Mecánica

El trabajo realizado por la resultante de fuerzas disipativas es igual a la energía mecánica del sistema.

$$\vec{F} = \vec{F}_{conservativas} + \vec{F}_{disipativas}$$

$$W_{1\to 2\,disipativas}^{C} - \Delta E_p = \Delta E_c$$

$$W_{1\to 2\,disipativas}^{C} = \Delta E_c + \Delta E_p = E_m(2) - E_m(1) = \Delta E_m$$

Conservación de la Energía Mecánica

Si el trabajo realizado por la resultante de fuerzas disipativas es nulo se conserva la energía mecánica.

$$Si \quad W^{C}_{1\rightarrow 2\ disipativas} = 0 \Rightarrow E_m = cte$$

Para el rozamiento dinámico $W_{\text{disipativas}} < 0$, por tanto, se pierde energía.

Ejemplo: Fuerza elástica $F = - k\,x$

$$x = a\cos(\omega t - \varphi)$$

$$v = -a\omega sen(\frac{2\pi}{T}t - \varphi) \qquad E_c = \frac{1}{2}m\,v^2, \qquad E_p = \frac{1}{2}k\,x^2$$

El valor medio en un periodo de la energía cinética es igual al de la potencial

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} E_c\,dt = \langle E_p \rangle$$