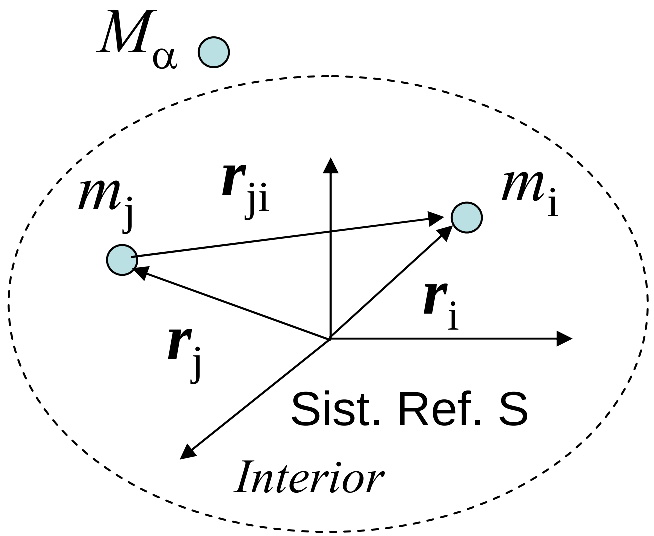
Sistemas de Partículas

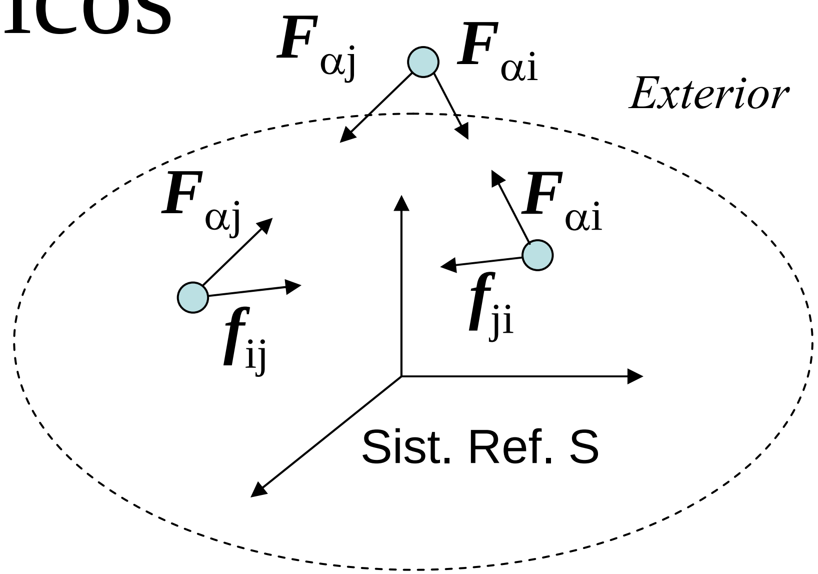
Tema 4

Índice

- Conceptos Básicos
- Teorema de la Cantidad de Movimiento. Conservación.
- Teorema del Movimiento del Centro de Masas
- Teorema del Momento Cinético respecto de un Punto Fijo y respecto del CM. Conservación.
- Teorema de la Energía Cinética. Teorema de Koenig.
- Teorema de la Energía Mecánica. Conservación.
- Teorema de la Cantidad de Movimiento. Conservación.
- Colisiones. Definiciones.
- Línea de Choque: Cálculo.
- Coeficiente de Restitución
- Resolución de Choques

Conceptos Básicos



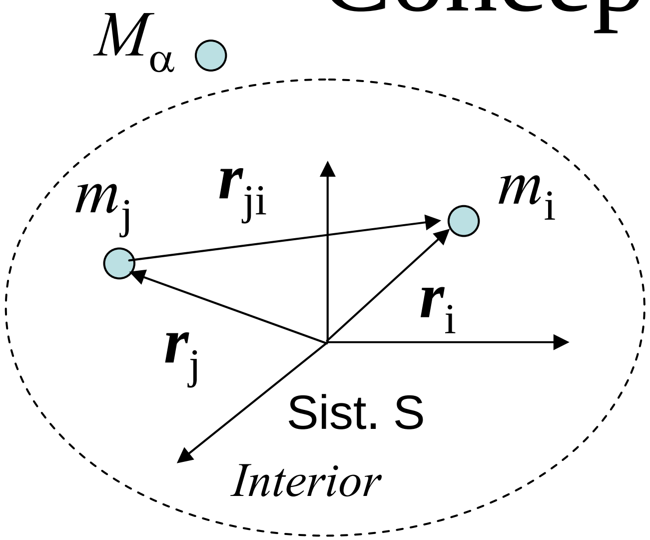


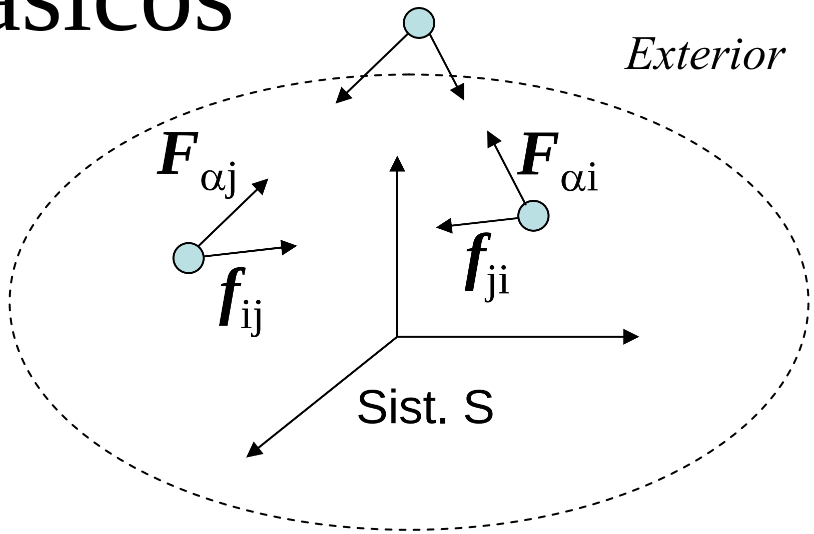
$$Fuerza\ total\ sobre\ i: \quad \vec{F}_i^{\,total} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha i} + \sum_{j=1}^{N} \vec{f}_{ji} = \vec{F}_i + \vec{f}_i$$

$$Cantidad\ de\ Movimiento: \quad \vec{p} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i$$

$$Centro\ de\ Masas: \quad \vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$$

Conceptos Básicos





$$x_C = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i; \quad y_C = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i; \quad z_C = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i z_i$$

$$M\vec{v}_C = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = \vec{p}; \quad M\vec{a}_C = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Teorema de la Cantidad de Movimiento

$$\vec{F}^{\,ext} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Demostración.

$$Para \quad i : \vec{F}_i + \vec{f}_i = \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

$$Para\ todas : \sum_{i=1}^{N} \quad ; pero \quad \sum_{i}^{N} \vec{f}_i = \sum_{i}^{N} \sum_{j}^{N} \vec{f}_{ji} = \vec{0}$$

El impulso mecánico de las fuerzas exteriores es igual al cambio en la cantidad de movimiento.

$$\vec{I}^{\,ext} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}^{\,ext} dt = \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1)$$

Conservación: Si el impulso mecánico de las fuerzas exteriores es cero la cantidad de movimiento se conserva.

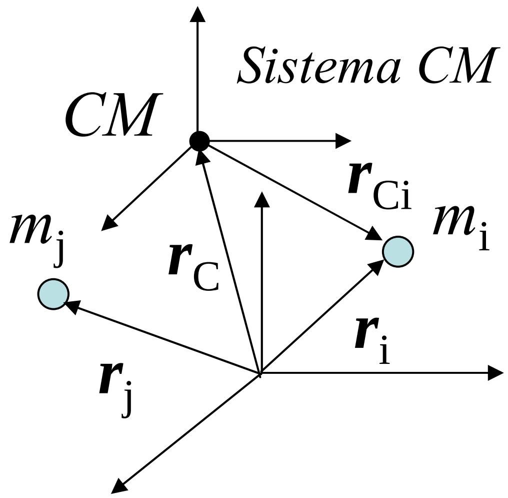
Teorema del Movimiento del Centro de Masas

$$\vec{F}^{\,ext} = M\,\vec{a}_C$$

Demostración.

$$\vec{F}^{\,ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\,(M\,\vec{v}_C\,)}{dt} = M\,\vec{a}_C$$

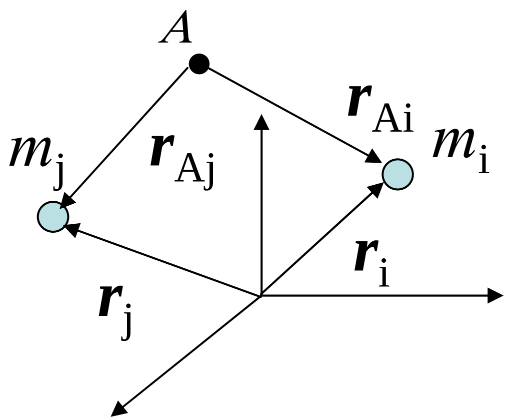
El centro de masas se mueve como una partícula con la masa total sometida a la resultante de las fuerzas exteriores.



$$0 = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_{Ci}; \quad 0 = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_{Ci}$$

Teorema del Momento Cinético respecto de un Punto Fijo

$$Momento\ Cinético\ en\ A: \quad \vec{L}_A = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_{Ai} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{Ai} \times \vec{p}_i$$



$$\vec{M}_A^{ext} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{Ai} \times \vec{F}_i = \frac{d\vec{L}_A}{dt}$$

El momento de las fuerzas exteriores en un punto fijo A es igual a la derivada del momento cinético en A.

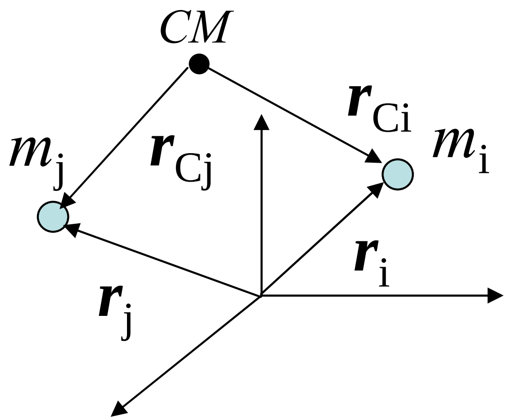
Demostración.

$$Para \quad i: \vec{r}_{Ai} \times (\vec{F}_i + \vec{f}_i) = \frac{d\vec{L}_{Ai}}{dt}; \ Para\ N: \sum_{i=1}^{N}$$

El momento de las fuerzas interiores se anula.

Teorema del Momento Cinético respecto del Centro de Masas

$$Momento\ Cinético\ en\ el\ CM: \quad \vec{L}_C = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_{Ci} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{Ci} \times \vec{p}_i$$



$$\vec{M}_C^{\,ext} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{Ci} \times \vec{F}_i = \frac{d\vec{L}_C}{dt}$$

El momento de las fuerzas exteriores en el centro de masas es igual a la derivada del momento cinético en el centro de masas.

Conservación. Si el momento de las fuerzas exteriores es cero respecto al CM (o un punto fijo) el momento cinético en el centro de masas (o en un punto fijo) se conserva.

Teorema de la Energía Cinética

$$Energía\ Cinética: \quad E_C = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

El trabajo de las fuerzas exteriores e interiores es el incremento de la energía cinética.

$$W^{ext} + W^{\text{int}} = \sum_{i=1}^{N} W_i^{ext} + \sum_{i=1}^{N} W_i^{\text{int}} = E_c(2) - E_c(1)$$

Demostración.

$$Para \quad i: \int_1^2 \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i + \int_1^2 \vec{f}_i \cdot d\vec{r}_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2(2) - \frac{1}{2} m_i v_i^2(1); \quad Para\ N: \sum_{i=1}^{N}$$

En el sistema CM, teorema de Koenig (ejercicio):

$$E_C = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_{Ci} + \vec{v}_C)^2 = \frac{1}{2} M v_C{}^2 + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_{Ci}^2$$

Teorema de la Energía Mecánica

Hipótesis: Suponemos fuerzas interiores conservativas.

$$W^{\text{int}} = -(E_p^{\text{int}}(2) - E_p^{\text{int}}(1)) \quad y \quad W_{cons.}^{ext} = -(E_p^{ext}(2) - E_p^{ext}(1))$$

$$E_p^{\text{int}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} E_p^{ij} = \sum_{\substack{\forall pares \\ ij}} \frac{1}{2}(E_p^{ij} + E_p^{ji}) = \sum_{\substack{\forall pares \\ ij}} E_p^{ij}$$

$$E_p^{ext} = \sum_{i=1}^{N} E_{p\,i}$$

El trabajo de las fuerzas exteriores disipativas es igual a la variación de la energía mecánica.

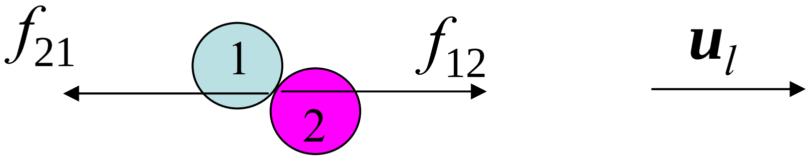
$$W_{disip.}^{ext} - \Delta E_p^{ext} - \Delta E_p^{\text{int}} = E_c(2) - E_c(1)$$

$$W_{disip.}^{ext} = (E_c + E_p^{ext} + E_p^{\text{int}})(2) - E_m(1)$$

Conservación: Si el trabajo de las fuerzas exteriores disipativas es cero la energía mecánica se conserva.

Colisiones: Definiciones

Colisión: Interacción entre dos cuerpos en un $\Delta t \to 0$.

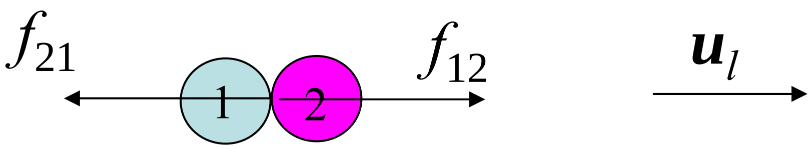


$$\text{Percusión sobre 2}: \vec{P}_{12} = \int_0^{\Delta t} \vec{f}_{12}\, dt; \qquad \vec{P}_{21} = -\vec{P}_{12}$$

Línea de Choque: Recta soporte de las percusiones. $\boldsymbol{u}_l$ es el unitario.

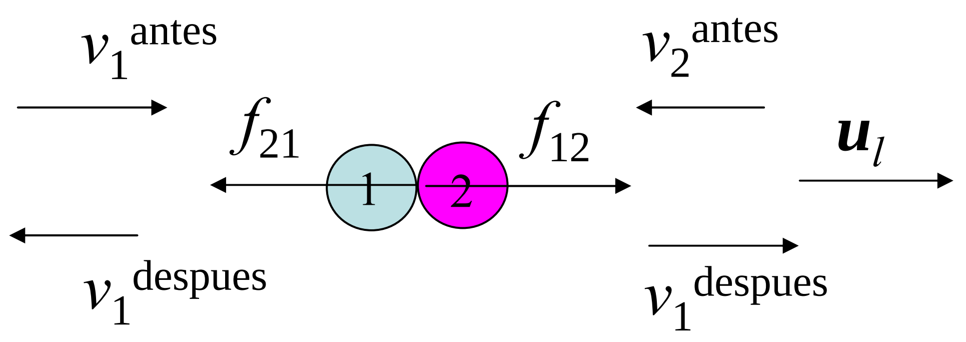
Choque Excéntrico: La línea de choque no pasa por los centros de masas de las partículas. No se estudia. Véase dibujo previo.

Choque Central: La línea de choque pasa por los centros de masas de las partículas.

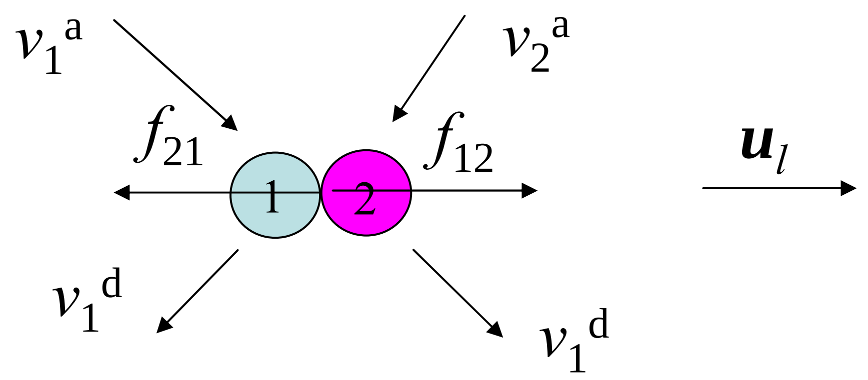


Colisiones: Definiciones

Choque Central Directo: Las velocidades antes y después de la colisión son paralelas a la línea de choque.

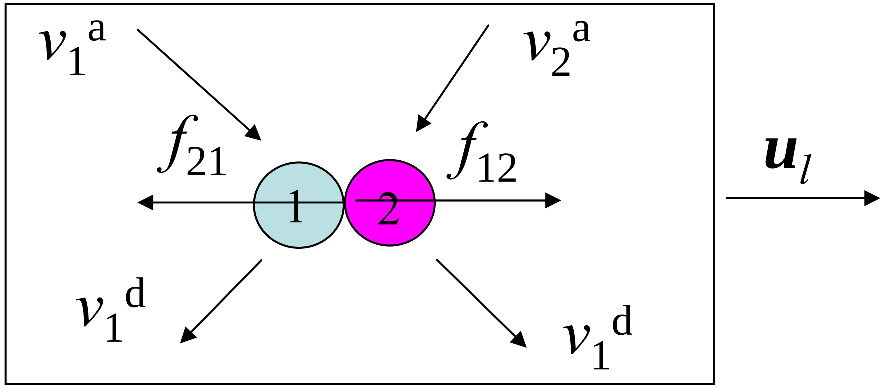


Choque Central Oblicuo: Las velocidades antes y después de la colisión no son paralelas a la línea de choque.

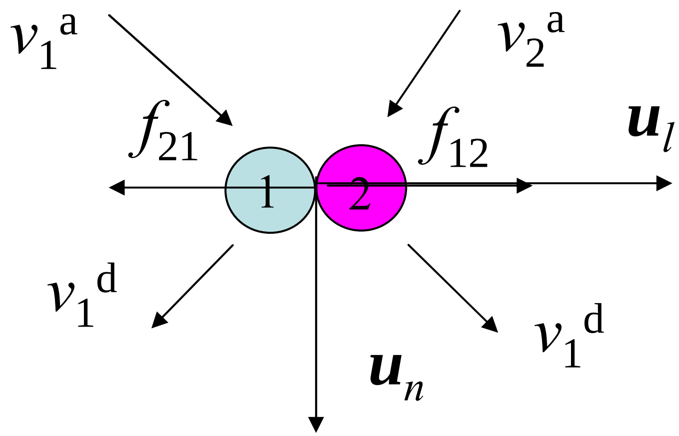


Colisiones: Definiciones

Plano de Choque (Partículas puntuales): Plano que contiene a la línea de choque y que definen las velocidades antes de la colisión.



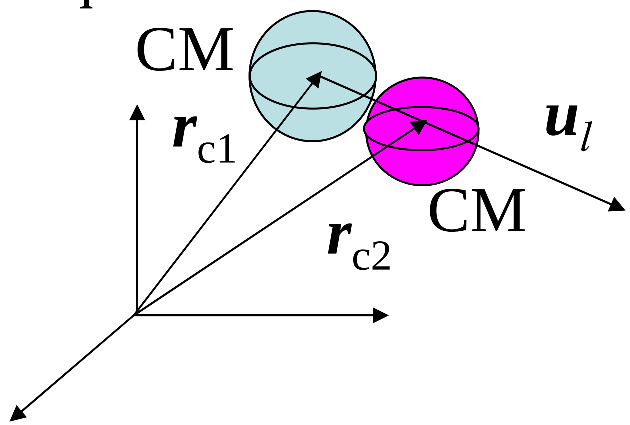
Línea Normal: Línea perpendicular a la de choque contenida en el plano de choque. $\boldsymbol{u}_n$ es el vector unitario.



Línea de Choque: Cálculo

Cuerpos con dimensiones: Línea que une los centros de masas.

$$\vec{u}_l = \frac{\vec{r}_{c2}^{\,a} - \vec{r}_{c1}^{\,a}}{\left|\vec{r}_{c2}^{\,a} - \vec{r}_{c1}^{\,a}\right|}$$

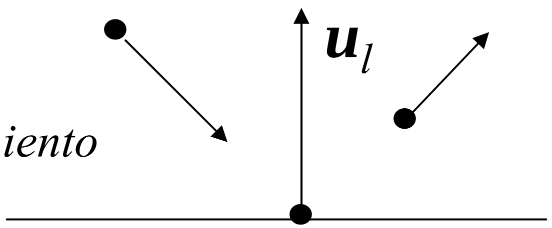


Partículas:

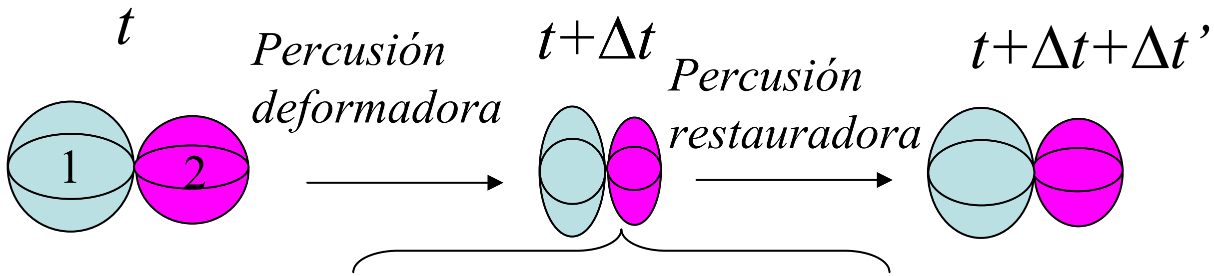
$$\vec{u}_l = \frac{\vec{v}_2^{\,a} - \vec{v}_1^{\,a}}{\left|\vec{v}_2^{\,a} - \vec{v}_1^{\,a}\right|}$$

Partícula contra Superficie: Dirección de la Reacción en el Apoyo

Ejemplo: Apoyo sin rozamiento



Coeficiente de Restitución



Máxima deformación:

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2$$

$$Percusión\ sobre\ 2: \vec{P}_{12} = \vec{P}_{12}^{\,deformadora} + \vec{P}_{12}^{\,restauradora}$$

Coeficiente de Restitución: Cociente entre la percusión restauradora y deformadora.

$$e = \frac{\left|\vec{P}_{21}^{\,rest}\right|}{\left|\vec{P}_{21}^{\,def}\right|}$$

Central directo:

$$e = -\frac{v_2^d - v_1^d}{v_2^a - v_1^a}$$

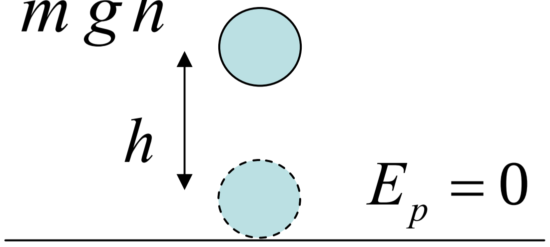
Central oblicuo:

$$e = -\frac{(\vec{v}_2^{\,d} - \vec{v}_1^{\,d})\cdot \vec{u}_l}{(\vec{v}_2^{\,a} - \vec{v}_1^{\,a})\cdot \vec{u}_l}$$

Ejemplo: Medida del Coeficiente de Restitución

Caída libre

$$E_p = mgh$$



$$E_p = 0$$

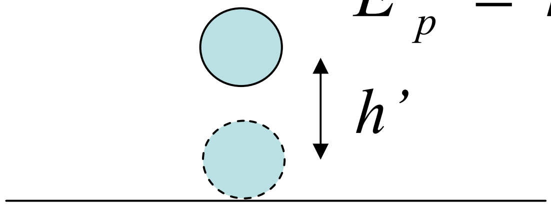
$$E_c = \frac{1}{2} m {v_1^a}^2$$

$\boldsymbol{u}_l$ *(dirección de la normal)*

$$Conservación: v_1^a = \sqrt{2gh}$$

Ascenso libre

$$E_p = mgh'$$



$$E_c = \frac{1}{2} m {v_1^d}^2$$

$$Conservación: v_1^d = -\sqrt{2gh'}$$

$$e = -\frac{v_2^d - v_1^d}{v_2^a - v_1^a} = -\frac{0 - v_1^d}{0 - v_1^a} = \sqrt{\frac{h'}{h}}$$

Resolución de Choques

Choque Central Directo:

$$m_1 v_1^a + m_2 v_2^a = m_1 v_1^d + m_2 v_2^d \qquad (\vec{F}^{\,ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0})$$

$$e = -\frac{v_2^d - v_1^d}{v_2^a - v_1^a}$$

Choque Central Oblicuo: $\vec{v}_i = v_{il}\vec{u}_l + v_{in}\vec{u}_n,, \qquad i = 1, 2$

$$m_1 v_{1l}^a + m_2 v_{2l}^a = m_1 v_{1l}^d + m_2 v_{2l}^d \qquad (\vec{F}^{\,ext}\cdot\vec{u}_l = \frac{d\vec{p}}{dt}\cdot\vec{u}_l = 0,\ \vec{F}^{\,ext} = 0)$$

$$(\mathit{También}\ \vec{F}^{ext}\cdot\vec{u}_n = \frac{d\vec{p}}{dt}\cdot\vec{u}_n = 0)$$

$$e = -\frac{v_{2l}^d - v_{1l}^d}{v_{2l}^a - v_{1l}^a}$$

$$v_{1n}^a = v_{1n}^d \qquad (\vec{f}_{21}\cdot\vec{u}_n = \frac{d\vec{p}_1}{dt}\cdot\vec{u}_n = 0)$$

$$v_{2n}^a = v_{2n}^d \qquad (\vec{f}_{12}\cdot\vec{u}_n = \frac{d\vec{p}_2}{dt}\cdot\vec{u}_n = 0)$$