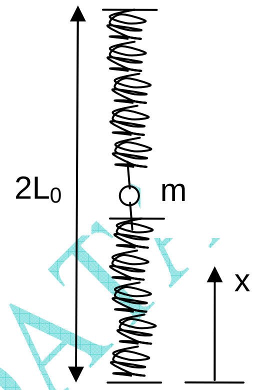
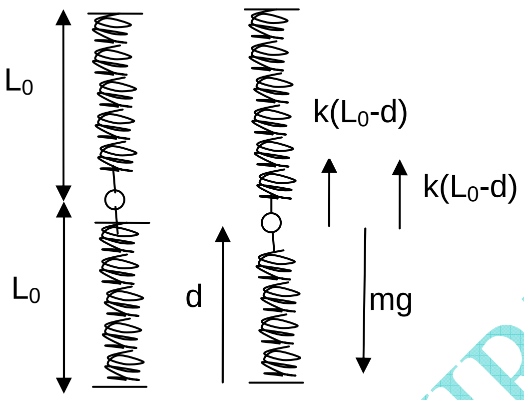
Una partícula de masa *m* se halla unida a dos muelles ideales iguales, de longitud natural L_0 y constante elástica *k* cada uno. El conjunto se sitúa sobre la vertical a la superficie terrestre según se indica en la figura. Se pide:

1) Calcular la distancia *d* en la cual el sistema se encuentra en su posición de equilibrio.
2) Hallar las ecuaciones diferenciales de movimiento.
3) Obtener las ecuaciones de movimiento en los dos casos siguientes:
    1. A partir de la posición de equilibrio se desplaza la masa una distancia vertical L_0+d hacia arriba y se suelta.
    2. En la posición de equilibrio se la comunica una percusión de valor $\boldsymbol{P} = -P\,\boldsymbol{i}$.



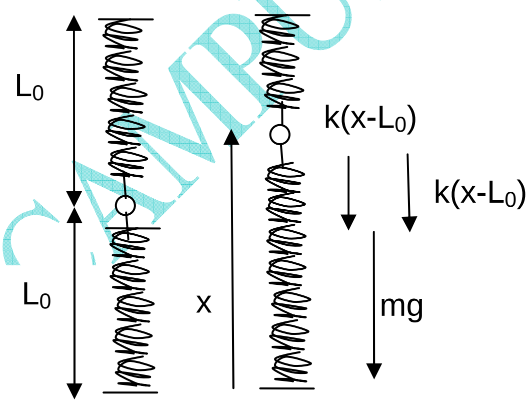


Dibujamos el diagrama de fuerzas en equilibrio. Para dibujar la fuerza de los muelles tenemos que comparar la posición del sistema en equilibrio con la posición del sistema con los muelles sin estirar.

$$2k(L_0 - d) - mg = 0$$

$$d = L_0 - \frac{mg}{2k}$$

En la situación dinámica suponemos que la masa se encuentra en una posición genérica x que comparamos con la situación de los muelles sin estirar:



$$-2k(x - L_0) - mg = m\ddot{x}$$

$$\frac{2k}{m}L_0 - g - \frac{2k}{m}x = \ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{2k}{m}x = \frac{2k}{m}L_0 - g$$

$$\ddot{x} + \frac{2k}{m}x = \frac{2kd}{m}\ (Ecuación\ diferencial\ del\ M.A.S.)$$

La solución se escribe directamente: una función armónica en la que la frecuencia angular es $\omega = \sqrt{2k/m}$ más un termino constante C que verifique la ecuación no homogénea.

$$x = A\cos(\omega t + B) + C$$
$$v = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t + B)$$

Si sustituimos en la ecuación y despejamos obtenemos que C=d.

Nota: La ecuación homogénea $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ tiene de solución $x = A\cos(\omega t + B)$.

Falta calcular A y C a partir de las condiciones iniciales del movimiento.

Caso 3.1

En este caso se tiene que $x(0)=L_0+d$ y $v(0)=0$. Sustituyendo:

$$L_0 + d = A\cos(B) + d$$
$$0 = -A\omega \operatorname{sen}(B)$$

Resolviendo queda que: B=0 y $A=L_0$.

Caso 3.2

En este caso se tiene que x(0)=d y v(0)=-P/m. Sustituyendo:

$$d = A\cos(B) + d$$
$$-\frac{P}{m} = -A\omega \operatorname{sen}(B)$$

Resolviendo queda que: $B=\pi/2$ y $A=P/(m\omega)$.