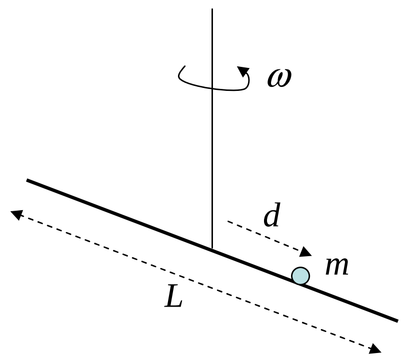
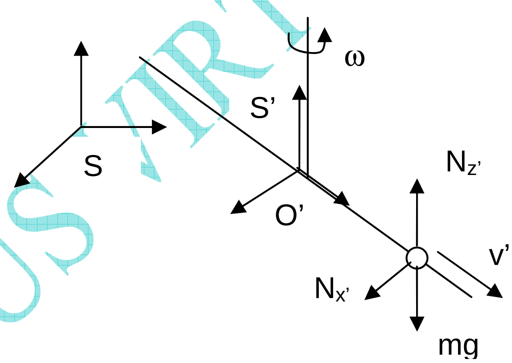
Un insecto de masa m=1g se mueve sobre una barra de longitud L=2m. La barra se halla suspendida del techo por un mecanismo que la sujeta en el centro y la mantiene horizontal. Este mecanismo la permite girar en torno a un eje que pasa por su centro y es perpendicular al plano horizontal con velocidad angular constante ω=10rad·s^{-1}. En el instante inicial el insecto se halla en el centro de la barra con velocidad v_0 =10m·s^{-1} relativa a la barra. Se pide integrando las ecuaciones dinámicas en sistemas no inerciales:

(Ayuda: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(\sqrt{x^2+a^2}+x\right)+C$)

1) Velocidad del insecto relativa a la barra en función de la distancia que se ha alejado del centro de la barra.
2) Reacción que sufre en función de dicha distancia.
3) Ecuaciones paramétricas del movimiento en un sistema ligado a la barra.
4) Tiempo que tarda en llegar al extremo de la barra y velocidad con que lo hace relativa a la barra.



Ponemos un sistema de referencia no inercial S' fijo a la barra, por tanto, girando con ella y con origen 0' en su eje de giro. Dibujamos el diagrama de fuerzas reales:



Aplicamos la ecuación fundamental de la dinámica:

$$\vec{F}_{\text{Reales}} - m\vec{a}_{O'} - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times O'\vec{P}) - m\vec{\alpha}\times O'\vec{P} - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}\,' = m\vec{a}\,'$$

En este caso no existe aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}=0$ y $\omega = \omega\,$**k'** constante (recuérdese que al ser el giro antihorario entorno al eje **k',** el giro es positivo). Además al colocar S' en el eje de giro $\mathbf{a}_{O'}$=**0**. La posición de la partícula viene dada por **O'P**= y' **j'**, y por tanto sólo existe velocidad en el eje **j**': **v** = v'**j**'. Las fuerzas reales son la normal y el peso.

Operamos para obtener las ecuaciones según los tres ejes coordenados de S':

$$m\omega^2 y' = m\frac{dv'}{dt} = m\ddot{y}'$$

$$2m\omega v' + N_{x'} = 0$$

$$N_{z'} - mg = 0$$

El sistema S' sólo ve aceleración de la partícula en en eje y'. Resolvemos la primera de las ecuaciones (que no es un M.A.S.) aplicando la regla de la cadena:

$$\omega^2 y' = \frac{dv'}{dy'}\frac{dy'}{dt} \to \omega^2 y' = \frac{dv'}{dy'}v'$$

$$\int_0^{y'} \omega^2 y' dy' = \int_{v_0}^{v'} dv' v' \to v'^2 = \omega^2 y'^2 + v_0{}^2$$

$$\frac{dy'}{dt} = \sqrt{v_0{}^2 + \omega^2 y'^2} \to \int_0^{y'} \frac{dy'}{\sqrt{v_0{}^2 + \omega^2 y'^2}} = \int_0^t dt \to \int_0^{y'} \frac{dy'}{\sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 + y'^2}} = \int_0^t \omega dt$$

$$\ln\left(\sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 + y'^2} + y'^2\right) - \ln\left(\frac{v_0}{\omega}\right) = \omega t$$

Se sustituye el valor de y'=L/2 para el cual la partícula llega al final de la barra para hacer los cálculos que nos piden.