Una partícula que está, en el instante inicial, en el origen de coordenadas con velocidad nula sigue la trayectoria $y = 4x^{3/2}$.
El espacio medido sobre ésta, en función del tiempo, es $s=3t^2$ en el SI.
Se pide, en el instante t=5s,

1) Vector de posición
2) Aceleración tangencial y normal

Los datos que nos proporciona el enunciado del problema son:
La trayectoria es plana
Condiciones iniciales:

$$t=0 \rightarrow \begin{cases} \text{Posición} \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \\ \text{Velocidad} \rightarrow \begin{cases} v_x=0 \\ v_y=0 \end{cases} \end{cases}$$

Trayectoria: $y = 4x^{3/2}$

Ley horaria: $s(t)=3t^2$

Solución

Tenemos que relacionar las componentes del vector de posición con el tiempo y para ello hay que encontrar la relación entre esas componentes y el espacio recorrido sobre la trayectoria. Es decir buscamos funciones del tipo s(x) o s(y).

Siempre utilizamos la misma relación: $ds^2 = dx^2 + dy^2$

Dividiendo por dx: $\left(\dfrac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$

Y la relación $\dfrac{dy}{dx}$ la obtenemos de la ecuación de la trayectoria: $\dfrac{dy}{dx} = 6x^{1/2}$

Es decir $\left(\dfrac{ds}{dx}\right)^2 = 1+36x \quad \rightarrow ds = \sqrt{1+36x}\,dx$

Ahora podemos integrar para buscar la función s(x):

$$\int_0^s ds = \int_0^x \sqrt{1+36x}\,dx \quad \rightarrow s = \frac{(1+36x)^{3/2}}{54} - \frac{1}{54}$$

Y utilizando la ley horaria podemos encontrar x(t) que es una de las cosas que buscamos:

$$s=\frac{(1+36x)^{3/2}}{54}-\frac{1}{54}=3t^2 \quad \rightarrow x(t)=\frac{(1+162t^2)^{2/3}-1}{36}$$

Que para t=5s nos da el valor de la componente x del vector de posición en el instante de interés: x(t=5)=7,03

Sustituyendo x(t) en la ecuación de la trayectoria podemos encontrar y(t).

En este caso basta con sustituir el valor numérico ya que sólo nos lo piden en ese instante.

$$y(t=5)=4\cdot 7{,}03^{3/2}=74{,}5$$

Tanto la x como la y estarán expresadas en unidades fundamentales SI para una longitud.

En definitiva, $\vec{r}(t=5)=7{,}03\,\vec{i}+74{,}5\,\vec{j}$

Una vez que tenemos el vector de posición en función del tiempo, también tenemos el vector velocidad y el vector aceleración sin más que derivar dos veces.

En general a partir de aquí toda la complicación es simplemente matemática.

Hay varias formas de abordar el problema. El vector unitario tangente se puede obtener a partir del vector velocidad o a partir de la ecuación de la trayectoria encontrando la pendiente en el punto considerado.

También podemos encontrar los valores escalares de las componentes tangencial y normal utilizando sus expresiones a partir de las derivadas con el tiempo del espacio recorrido sobre la trayectoria y del radio de curvatura de la trayectoria.

NOTA: Todos los resultados en unidades fundamentales SI.