Un avión en vuelo horizontal, rectilíneo y uniforme a velocidad v_A y altura H dispara un misil con velocidad v_M relativa al avión y según su misma dirección y sentido contar un barco que navega en ese instante con velocidad v_{0B} y tiene una aceleración dada por la expresión $a_B=a_0-kv_B$ en la misma dirección y sentido que el avión, siendo a_0 y k constantes y v_B la velocidad del barco en cualquier instante.

1) Calcular en función de los datos del problema (v_A, v_M, v_{0B}, k, H) la distancia del barco a la que el avión debe efectuar el disparo para acertar en el blanco.

2) Determinar en función de los datos del problema el ángulo α de picado del avión en el momento del disparo para que el tiempo de vuelo del misil se reduzca a la mitad del calculado en el apartado anterior. Calcular en este caso la nueva distancia a la que ha de efectuarse el disparo para que se produzca impacto. (Supóngase que el movimiento de picado del avión es rectilíneo con velocidad v_A y altura H en el momento del disparo y que el movimiento del barco es el definido anteriormente).

Hágase aplicación numérica para los siguientes datos:
H=1 000m v_{0B}=36km/h k=0,06s^{-1} a_0=,6km/(h.s) v_A=720km/h v_M=150m/s

<u>Solución</u> 1):

Movimiento del misil

Condiciones iniciales: $$t=0 \rightarrow \begin{cases} \text{Posición} \rightarrow \begin{cases} x_M=0 \\ y_M=H \end{cases} \\ \text{Velocidad} \rightarrow \begin{cases} v_{Mx}=v_A \\ v_{My}=0 \end{cases} \end{cases}$$

Ecuaciones del movimiento

$$a_{Mx}(t)=0 \quad \rightarrow v_{Mx}(t)=\int_0^t a_{Mx}(t)dt=cte=v_A+v_M \quad \rightarrow x_M(t)=\int_0^t v_{Mx}(t)dt=(v_A+v_M)t$$

$$a_{My}(t)=-g \quad \rightarrow v_{My}(t)=\int_0^t a_{My}(t)dt=-gt \rightarrow y_M(t)-H=\int_0^t v_{My}(t)dt=-\frac{1}{2}gt^2$$

Movimiento del barco

$$a_B(t)=a_0-kv_B(t) \quad \rightarrow \int_{v_{0B}}^{v_B}\frac{dv_B}{a_0-kv_B}=\int_0^t dt \quad \rightarrow -\frac{1}{k}Ln\frac{a_0-kv_B}{a_0-kv_{0B}}=t \quad \rightarrow a_0-kv_B=(a_0-kv_{0B})e^{-kt}$$

Despejando

$$v_B(t)=\frac{a_0}{k}\left(1-e^{-kt}\right)+v_{0B}e^{-kt}$$

Integrando otra vez

$$\int_{x_0}^{x_B}dx_B=\frac{a_0}{k}\int_0^t\left(1-e^{-kt}\right)dt+v_{0B}\int_0^t e^{-kt}dt$$

Despejando

$$x_B(t)=x_0+\frac{a_0}{k}t+\frac{a_0}{k^2}\left(e^{-kt}-1\right)+\frac{v_{0B}}{k}\left(1-e^{-kt}\right)$$

Llamando t_i al instante del impacto, necesariamente $y_M(t_i)=0$ y de esta condición se obtiene $t_i=\sqrt{\frac{2H}{g}}$

Además para que el impacto exista, en ese instante $x_M=x_B$.
Así

$$(v_A+v_M)\sqrt{\frac{2H}{g}}=x_0+\frac{a_0}{k}\sqrt{\frac{2H}{g}}+\frac{a_0}{k^2}\left(e^{-\sqrt{\frac{2H}{g}}t}-1\right)+\frac{v_{0B}}{k}\left(1-e^{-k\sqrt{\frac{2H}{g}}}\right)$$

es decir

$$x_0=(v_A+v_M)\sqrt{\frac{2H}{g}}-\frac{a_0}{k}\sqrt{\frac{2H}{g}}+\frac{a_0}{k^2}\left(1-e^{-\sqrt{\frac{2H}{g}}t}\right)-\frac{v_{0B}}{k}\left(1-e^{-k\sqrt{\frac{2H}{g}}}\right)$$

y sustituyendo los datos del problema se obtiene x_0=4 826m

Solución 2):

El movimiento del barco es el mismo y para el misil cambian las condiciones iniciales de velocidad

$$t=0\rightarrow\begin{cases}\text{Posición}\rightarrow\begin{cases}x_M=0\\ y_M=H\end{cases}\\ \text{Velocidad}\rightarrow\begin{cases}v_{Mx}=v_A\cos\alpha\\ v_{My}=-v_A\,\text{sen}\alpha\end{cases}\end{cases}$$

Y las ecuaciones del movimiento se obtienen integrando como en el caso anterior:

$$a_{Mx}(t)=0\quad\rightarrow v_{Mx}(t)=\int_0^t a_{Mx}(t)dt=cte=(v_A+v_M)\cos\alpha\quad\rightarrow x_M(t)=\int_0^t v_{Mx}(t)dt=(v_A+v_M)\cos\alpha\, t$$

$$a_{My}(t)=-g\quad\rightarrow v_{My}(t)+(v_A+v_M)\text{sen}\alpha=\int_0^t a_{My}(t)dt=-gt\quad\rightarrow$$

$$\rightarrow y_M(t)-H=\int_0^t v_{My}(t)dt=-(v_A+v_M)\text{sen}\alpha\, t-\frac{1}{2}gt^2\quad\rightarrow y_M(t)=H-(v_A+v_M)\text{sen}\alpha\, t-\frac{1}{2}gt^2$$

Con las nuevas condiciones el instante del impacto será $t_i=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2H}{g}}=\sqrt{\frac{H}{2g}}$

Y aplicando las condiciones del apartado anterior, es decir, $y_M(t_i)=0$ y $x_M(t_i)=x_B(t_i)$, se obtiene:

$$\text{sen}\alpha=0,3\quad\rightarrow\alpha=\arcsin 0,3=17,46^\circ=0,305\,\text{rad}$$

Y la distancia entre barco y avión en el instante del disparo x_0=2 304m