Dinámica de Sistemas de Partículas Resuelto-2

Dos masas, M_1 y M_2, apoyan sobre una superficie horizontal sin rozamiento y están y están unidas entre sí por un muelle de rigidez k y longitud natural l_0.

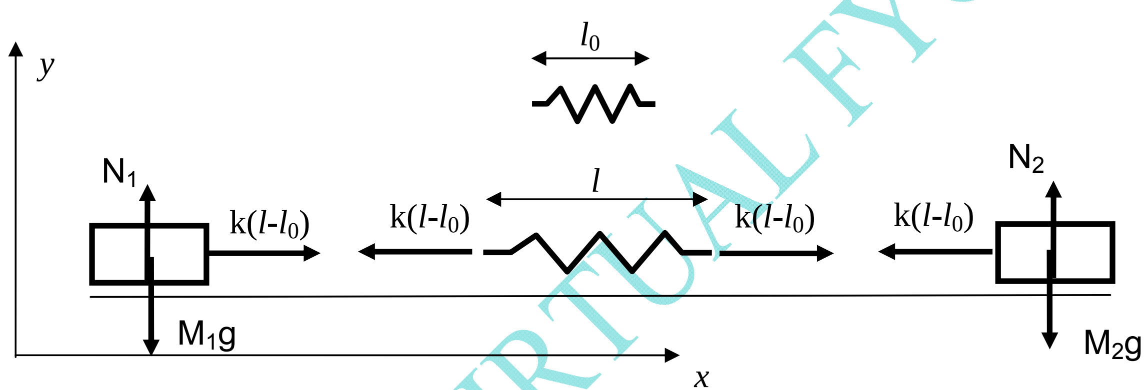
Abandonamos el sistema desde el reposo y con el muelle deformado, con una longitud total $l \neq l_0$.

Determinar:

1) El diagrama de fuerzas que actúan sobre cada masa y sobre el muelle en el instante inicial.
2) La ecuación de la trayectoria de la masa M_2 relativa a la masa M_1 y su representación gráfica en función del tiempo.

SOLUCIÓN:

1) Si consideramos como nuestro sistema a las dos masas y al muelle no hay



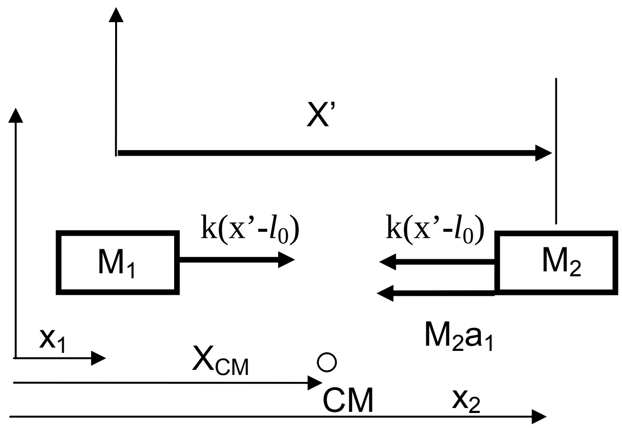
fuerzas exteriores en el eje x. Si el sistema son las dos masas las fuerzas del muelle son exteriores sin embargo se anulan entre sí. Es decir, la situación dinámica es idéntica en los dos casos. Supondremos que estamos en el último caso.

2) Para plantear las ecuaciones dinámicas debemos colocar un sistema de referencia para medir las coordenadas de las partículas.

$\Sigma \vec{F}^{\,ext} = 0 \quad \Rightarrow$ El CM permanece en reposo. Por tanto, si se sabe la posición de una partícula en un sistema de referencia inmediatamente se sabe la de la otra, ya que, la x_{CM} permanece constante. Es decir:

$$x_{CM} = \frac{x_1 M_1 + x_2 M_2}{M_1 + M_2} = cte \qquad (0)$$

Idéntica ecuación verifican las velocidades y las aceleraciones. No obstante, vamos a poner un sistema de referencia en una de las dos partículas dado que nos piden la posición relativa de una partícula respecto de la otra:



M_1 no tiene aceleración relativa: $k(x'-l_0)-M_1a_1=0$ (1)

Movimiento de M_2 referido al sistema S’ ligado a M_1:

$$-k(x'-l_0)-M_2a_1=M_2a_2'=M_2\frac{d^2x'}{dt^2} \quad (2)$$

Sustituimos a_1 obtenida de (1) en la ecuación (2), y operando llamando masa reducida a $\mu=\frac{M_1M_2}{M_1+M_2}$ y teniendo en cuenta que

$\frac{d^2}{dt^2}(x'-l_0)=\frac{d^2x'}{dt^2}$ obtenemos:

$\frac{d^2(x'-l_0)}{dt^2}+\frac{k}{\mu}(x'-l_0)=0$ cuya solución es :

$$x'-l_0=A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{\mu}}\,t-\varphi\right)$$

Las constantes A y φ se obtienen a partir de las condiciones iniciales:

$t=0;\quad x'(0)=l;\qquad \left(\frac{dx'}{dt}\right)_{t=0}=0$ de donde resulta:

$$\boxed{x'=l_0+(l-l_0)\cos\sqrt{\frac{k}{\mu}}\,t}$$

En variables del sistema inercial tendríamos que:

$x'=x_2-x_1$ (3)

Usando las ecuaciones (0) y (3) se podía obtener x_1 y x_2.