Dinámica de Sistemas de Partículas Resuelto-5

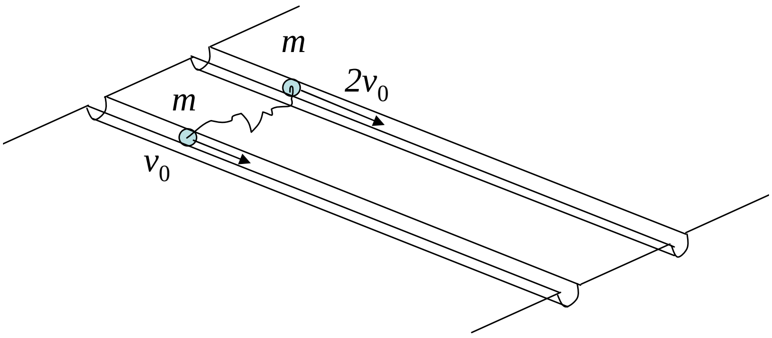
Dos partículas de masa *m* unidas por un hilo sin masa de longitud *L* se mueven sin rozamiento a lo largo de dos canales situados en el mismo plano horizontal y separados por una distancia mayor que la longitud de la cuerda, tal y como muestra la figura. Inicialmente, antes de que el hilo se tense, las velocidades de las bolas son $2v_0$ y v_0.

1) Obtener la velocidad del conjunto después de que el hilo se tense.

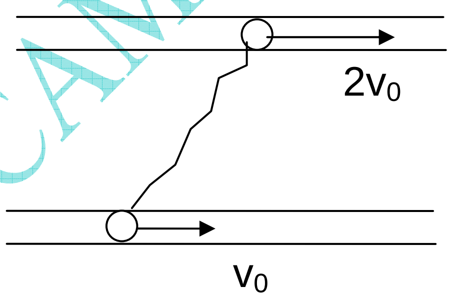
2) Obtener el momento cinético respecto del centro de masas justo antes de que el hilo se estire e indicar si se conserva.

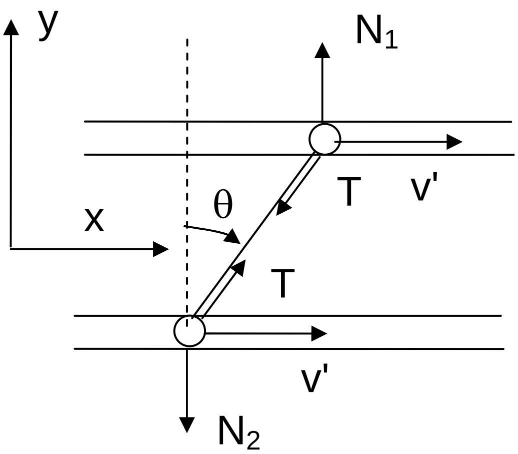
3) Obtener la energía cinética justo antes de que el hilo se estire e indicar si se conserva.

Al cabo de un cierto tiempo de que el hilo se tensó, una de las partículas decide aumentar su velocidad y se impulsa mediante una fuerza F que realiza un trabajo *W*. ¿Cuál es la nueva velocidad de las partículas después de realizar ese trabajo? Probar que la fuerza del hilo sobre las partículas no realiza trabajo sobre el sistema.



SOLUCIÓN





Si consideramos como nuestro sistema el hilo, y las dos masas tendríamos que N_1 y N_2 son fuerzas externas, T_1 y T_2 son fuerzas internas. Si consideramos como nuestro sistema sólo las dos masas tendríamos que N_1, N_2, T_1 y T_2 son fuerzas externas. Nos pondremos en el segundo caso aunque los resultados deben ser idénticos.

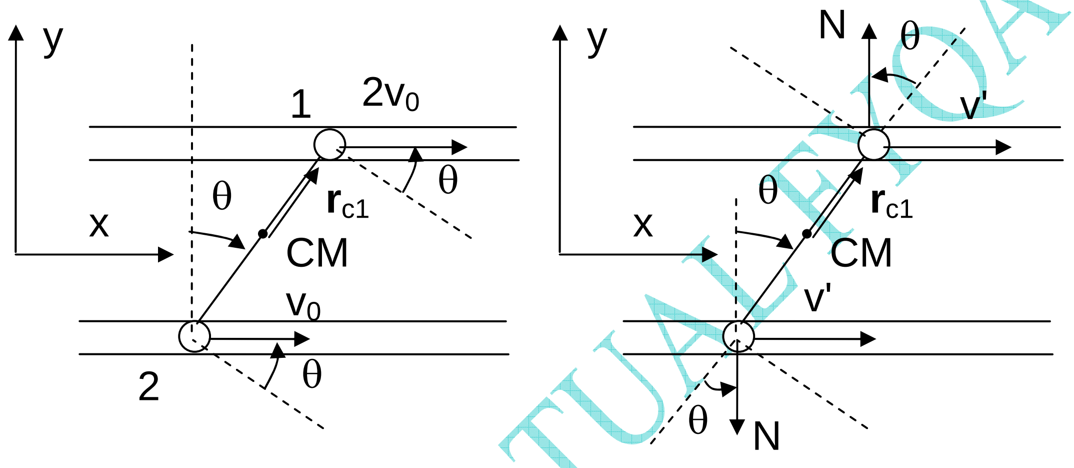
En el eje y se verifica: $\begin{cases} N_1 - T\cos\theta = 0 \\ -N_2 + T\cos\theta = 0 \end{cases}$ de donde se concluye que $N_1 = N_2$.

En el eje x se conserva la cantidad de movimiento del sistema dado que se anulan las fuerzas externas.

$$mv_{CM} = m2v_0 + mv_0 = mv' + mv'$$

De donde se deduce que $v' = 3/2 v_0$.

En la ecuación anterior se ha usado la ligadura del hilo que supone que después de que este se estira obliga a las dos partículas a ir a la misma velocidad v'.



El CM del sistema se encuentra en el medio del hilo por simetría. (Eligiendo un eje con origen en la masa 2 y dirección y sentido el del hilo hacia la masa 1 se tendría:

$$d_{CM} = \frac{1}{2m}(Lm + 0m) = \frac{L}{2})$$

El momento cinético respecto del CM se obtiene de la expresión:

$$\vec{L}_{CM} = \vec{r}_{c1} \times m\vec{v}_1 + \vec{r}_{c2} \times m\vec{v}_2 = (-\frac{L}{2}2v_0\cos\theta + \frac{L}{2}v_0\cos\theta)\vec{k}$$

Después de estirarse el hilo:

$$\vec{L}_{CM} = \vec{r}_{c1} \times m\vec{v}_1 + \vec{r}_{c2} \times m\vec{v}_2 = (-\frac{L}{2}v'\cos\theta + \frac{L}{2}v'\cos\theta)\vec{k}$$ Si

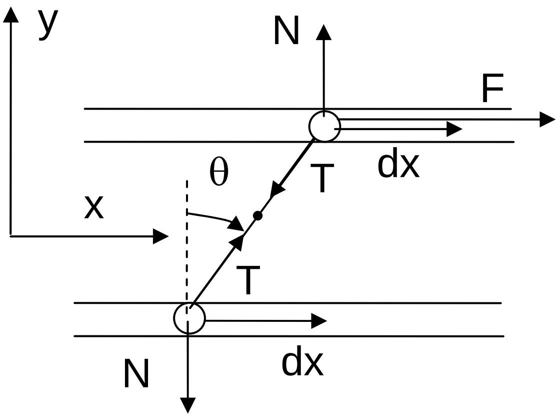
Sin embargo no se conserva puesto que las normales producen momento, no así las tensiones:

$$\vec{M}_{CM} = \vec{r}_{c1} \times \vec{N}_1 + \vec{r}_{c2} \times \vec{N}_2 = (\frac{L}{2}N\mathrm{sen}\,\theta + \frac{L}{2}N\mathrm{sen}\,\theta)\vec{k}$$

La energía cinética antes y después de que el hilo se estire es:

$$E_c = \frac{1}{2}m(2v_0)^2 + \frac{1}{2}mv_0^2; \quad E_c = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}mv'^2$$

Y no se conserva debido a la disipación en forma de calor debido a la elongación instantánea del hilo.



Una de las partículas empieza a impulsarse. Nos encontramos que durante ese tiempo las normales no realizan trabajo puesto que el desplazamiento es perpendicular a la fuerza. Tal y como suele ocurrir en los problemas en los que las partículas se hallan unidas por un hilo o una varilla, las fuerzas debidas a estos elementos no realizan trabajo, en concreto, el trabajo del hilo en este problema es 0:

$$\delta W = \vec{T}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{T}_2 \cdot d\vec{r}_2 = -T\mathrm{sen}\,\theta dx + T\mathrm{sen}\,\theta dx = 0$$

Sólo realiza trabajo F y conocemos su valor W. Llamemos v'' a la velocidad que buscamos.

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F dx = 2\left(\frac{1}{2}mv''^2\right) - 2\left(\frac{1}{2}mv'^2\right)$$

Despejamos la velocidad:

$$v'' = \sqrt{\frac{W}{m} + v'^2}$$