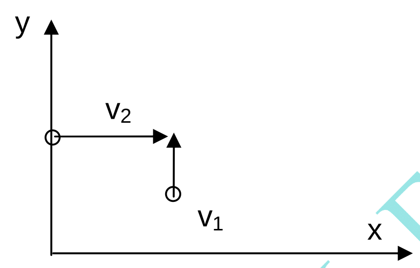
Dinámica de Sistemas de Partículas Resuelto-6

Dos partículas puntuales, 1 y 2, de masa *M* se mueven sin rozamiento sobre una superficie horizontal. La bola 2 se mueve con velocidad 4***i*** ms^{-1} y la bola 1 con velocidad 2***j*** ms^{-1} de manera que su colisión es inminente. Suponiendo una colisión central con coeficiente de restitución *e*=0,5, obténganse:

1) Los vectores unitarios de la línea de choque y de la línea normal.

2) Velocidades de las bolas después de la colisión.



SOLUCIÓN:

Obtenemos la línea de choque:

$$\vec{u}_l = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{|\vec{v}_2 - \vec{v}_1|} = \frac{4\vec{i} - 2\vec{j}}{|4\vec{i} - 2\vec{j}|} = \frac{4\vec{i} - 2\vec{j}}{\sqrt{16+4}} = \frac{1}{\sqrt{20}}(4\vec{i} - 2\vec{j}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\vec{i} - \vec{j})$$

La línea normal debe ser perpendicular **u$_n$.u$_l$=0**:

$$\vec{u}_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{i} + 2\vec{j})$$

Proyectamos las velocidades en la línea normal. Estas se conservan en la colisión, ya que así lo hace el momento lineal de cada partícula.

$$v_{1n} = \vec{v}_1 \cdot \vec{u}_n = 2\vec{j} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{i} + 2\vec{j}) = \frac{1}{\sqrt{5}} 4 = v'_{1n}$$

$$v_{2n} = \vec{v}_2 \cdot \vec{u}_n = 4\vec{i} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{i} + 2\vec{j}) = \frac{1}{\sqrt{5}} 4 = v'_{2n}$$

Proyectamos las velocidades en la línea de choque.

$$v_{1l} = \vec{v}_1 \cdot \vec{u}_l = 2\vec{j} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(2\vec{i} - \vec{j}) = -\frac{1}{\sqrt{5}} 2$$

$$v_{2l} = \vec{v}_2 \cdot \vec{u}_l = 4\vec{i} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(2\vec{i} - \vec{j}) = \frac{1}{\sqrt{5}} 8$$

El momento lineal del sistema se conserva en esta dirección.

$$Mv_{1l} + Mv_{2l} = Mv'_{1l} + Mv'_{2l}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}2 + \frac{1}{\sqrt{5}}8 = v'_{1l} + v'_{2l}$$

$$v'_{1l} + v'_{2l} = \frac{1}{\sqrt{5}}6$$

Aplicamos la ecuación del coeficiente de restitución:

$$e = -\frac{v'_{1l} - v'_{2l}}{v_{1l} - v_{2l}} = -\frac{v'_{1l} - v'_{2l}}{-2\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}8} = -\frac{v'_{1l} - v'_{2l}}{-\frac{10}{\sqrt{5}}} = \frac{v'_{1l} - v'_{2l}}{\frac{10}{\sqrt{5}}} = \frac{1}{2}$$

$$v'_{1l} - v'_{2l} = \frac{5}{\sqrt{5}}$$

Resolvemos el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas para obtener v'_{1l} y v'_{2l}:

$$v'_{1l} = \frac{11}{2\sqrt{5}}$$

$$v'_{2l} = \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

Obtenemos las velocidades vectoriales después de la colisión:

$$\vec{v}_1 = v'_{1l}\,\vec{u}_l + v'_{1n}\,\vec{u}_n = \frac{11}{2\sqrt{5}}\vec{u}_l + \frac{4}{\sqrt{5}}\vec{u}_n = \frac{11}{2\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{5}}(2\vec{i} - \vec{j}) + \frac{4}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{i} + 2\vec{j})$$

$$\vec{v}_2 = v'_{2l}\,\vec{u}_l + v'_{2n}\,\vec{u}_n = \frac{1}{2\sqrt{5}}\vec{u}_l + \frac{4}{\sqrt{5}}\vec{u}_n = \frac{1}{2\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{5}}(2\vec{i} - \vec{j}) + \frac{4}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{i} + 2\vec{j})$$

Finalmente:

$$\vec{v}_1 = \frac{11}{10}(2\vec{i} - \vec{j}) + \frac{8}{10}(\vec{i} + 2\vec{j}) = \frac{30}{10}\vec{i} + \frac{5}{10}\vec{j} = 3\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$$

$$\vec{v}_2 = \frac{1}{10}(2\vec{i} - \vec{j}) + \frac{8}{10}(\vec{i} + 2\vec{j}) = \frac{10}{10}\vec{i} + \frac{15}{10}\vec{j} = \vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j}$$