



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID



ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA AERONÁUTICA

Dibujo Geométrico

**CONSTRUCCIÓN GRÁFICA
DE FORMAS POLIGONALES**

Prof.: V. González García

(Enero 1.986)

TRIANGULOS

CONSTRUCCION DE TRIANGULOS

1.- ELEMENTOS NOTABLES.

El tema que a continuación se expone tiene por objetivo la representación gráfica de formas planas triangulares, en particular, y poligonales, en general, así como su correcta determinación dimensional, - es decir, conocer las cotas o medidas que, en cada caso, deben consignarse en el dibujo.

Los elementos notables del triángulo se designan de acuerdo con la norma UNE 5.028, Símbolos geométricos, cuando éstos son contemplados en ella.

1.1.- Vértices, lados y ángulos. Fig. 1.

Los vértices se ordenan en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj y se designan por las letras A, B y C.

Cuando el triángulo es isósceles o rectángulo, el vértice A se corresponde con el de intersección de los lados iguales o de los catetos, respectivamente.

Los lados se designan por a, b y c, de forma que son los opuestos respectivos a los vértices A, B, y C. El perímetro se designa por $2p$, es decir, $2p = a + b + c$.

Los ángulos interiores se designan por las mismas letras que sus vértices, es decir, que $A+B+C = 180^\circ$.

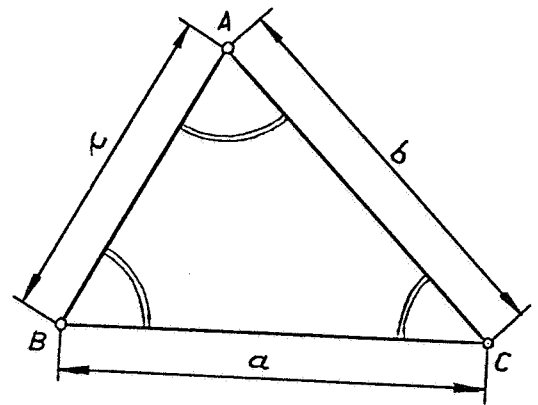


Fig. 1

1.2.- Medianas. Baricentro. Fig. 2.

Como es sabido, las medianas son los segmentos que unen los vértices con los respectivos puntos medios de los lados opuestos. Se designan por : $AM_a = m_a$; $BM_b = m_b$ y $CM_c = m_c$.

Si se consideran trazadas, en la figura, las medianas m_a y m_b solamente, el segmento $M_a M_b$ es la paralela media respecto del lado AB y los triángulos ABC y $M_a M_b C$ son semejantes con razón de semejanza $K=2$. Asimismo, son semejantes los triángulos ABB_a y $M_a M_b B_a$, por lo que la mediana CM_c del triángulo $M_a M_b C$, - lo es también respecto del ABC, es decir,

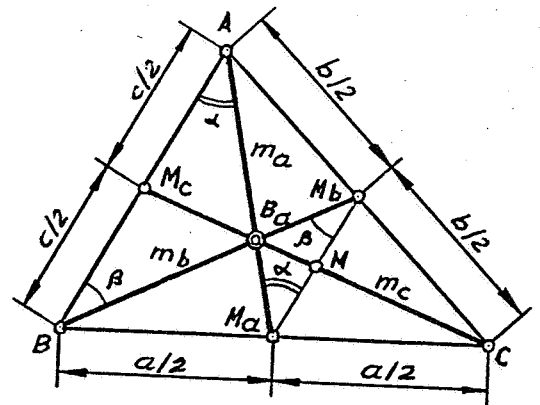


Fig. 2

La tres medianas de un triángulo se cortan en un punto B_a , que se denomina baricentro.

Las propiedades de este punto notable y las de todos los demás elementos del mismo carácter, serán expuestas posteriormente con la intensidad requerida por el objetivo pretendido.

El punto de intersección C_c de las mediatrices de dos lados del triángulo, equidista de los tres vértices A, B, y C, por lo cual la tercera mediatriz también concurre con las dos anteriores en dicho punto.

Las tres mediatrices de los lados de un triángulo se cortan en un punto, que se llama circuncentro.

Recibe el nombre de circuncentro por ser el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo, cuyo radio se designa por R. En los triángulos rectángulos la circunferencia circunscrita tiene por centro el punto medio M_a de la hipotenusa, es decir, $a = 2R$.

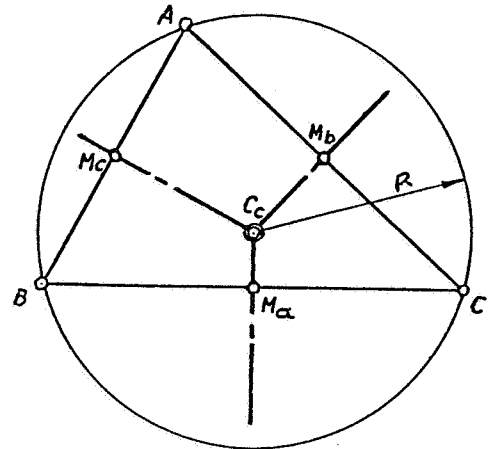


Fig. 3

1.4.- Alturas. Ortocentro. Fig. 4.

Los segmentos de las perpendiculares comprendidos entre los vértices y los respectivos lados opuestos, se denominan alturas del triángulo, las cuales se designan por :

$$AH_a = h_a, BH_b = h_b \text{ y } CH_c = h_c.$$

Si por los vértices se trazan las paralelas respectivas a sus lados opuestos, se forma un nuevo triángulo $A'B'C'$ de lados dobles que el primero, cuyos puntos medios son los vértices A, B y C.

En efecto, por construcción $ABCB'$ es un paralelogramo, de donde $AB = B'C$. De igual forma, del paralelogramo $ABA'C$ se obtiene que $AB = CA'$. De ambas expresiones se deduce -- primeramente que $B'C = CA'$ y, después, que $B'C + CA' = 2AB$. Análogamente se demuestra para los otros lados. En consecuencia, las alturas del triángulo ABC son mediatrices del $A'B'C'$

por lo que : Las tres alturas de un triángulo se cortan en un punto, llamado ortocentro.

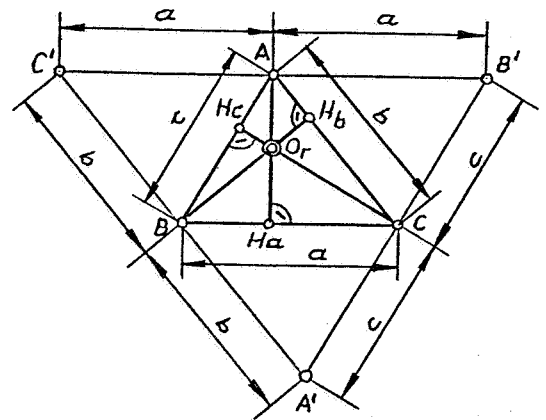


Fig. 4

1.5.- Bisectrices. Incentro. Fig. 5.

Las bisectrices de los ángulos interiores A, B y C se designan por $AV_a = v_a$, $BV_b = v_b$ y $CV_c = v_c$.

Como el punto de intersección I_n , de dos de estas bisectrices, equidista de los tres lados, la tercera bisectriz concurre en el mismo punto con las otras dos. Por ello,

Las tres bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo se cortan en un punto, denominado incentro.

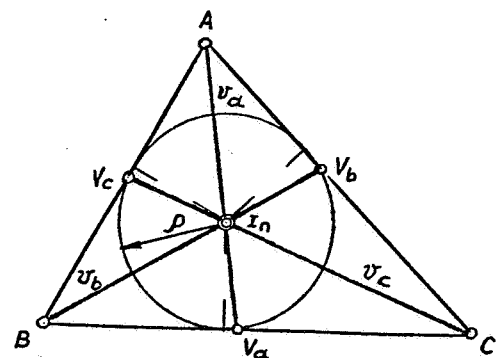


Fig. 5

Esta denominación se deriva de que el citado punto es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo, cuyo radio se designa por p .

Al unir los pies de las tres alturas se forma el triángulo $H_a H_b H_c$, que se denomina órtico del ABC.

Como H_c y H_b son vértices de los respectivos ángulos rectos de los triángulos rectángulos $BH_c C$ y $BH_b C$, la circunferencia de diámetro BC es circunscrita a ambos y $\alpha = \beta$ (1), pues, ambos ángulos son inscritos y abarcan el arco $H_c H_b$. Por otra parte, la circunferencia de diámetro $O_r C$ es circunscrita a los triángulos rectángulos $O_r H_c C$ y $O_r H_b C$, por lo cual $\beta = \gamma$ (2), pues, son inscritos y abarcan el arco $O_r H_b$. Finalmente, por iguales razones, la circunferencia de diámetro $O_r B$ pasa por H_a y H_c , y se deduce que :

$\alpha = \delta$ (3), por abarcar ambos el arco $O_r H_c$. De las expresiones (1) y (2) se deduce que $\alpha = \gamma$, y de ésta y de la (3)

se obtiene que $\gamma = \delta$. De forma análoga se demuestra que las otras dos alturas h_b y h_c del triángulo ABC, son bisectrices respectivas de los ángulos interiores H_b y H_c del triángulo órtico. Por lo anterior :

Las alturas de un triángulo son bisectrices de los ángulos interiores de su triángulo órtico, por lo que el ortocentro del primero es incentro del segundo.

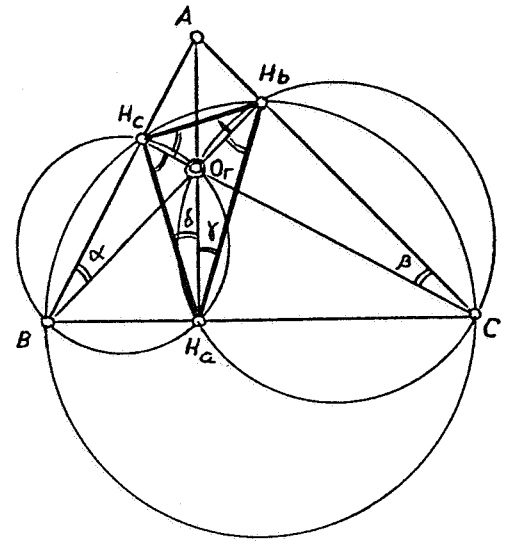


Fig. 6

1.7.- Exincentros. Fig. 7

Las bisectrices exteriores de un triángulo son perpendiculares a las correspondientes bisectrices interiores y se cortan dos a dos en un punto en el que concurre, también, la bisectriz interior a la que pertenece el tercer vértice. En la figura se observa como en I_a , por ejemplo, concurren v'_b , v'_c y la prolongación de v_a .

Los puntos I_a , I_b e I_c se denominan exincentros del triángulo ABC y, por equidistar cada uno de ellos de los tres lados, son centros de las denominadas circunferencias exinscritas (tangentes a uno de los lados y a la prolongación de los otros dos). Los radios de estas circunferencias se designan por ρ_a , ρ_b , y ρ_c , respectivamente.

De la ortogonalidad de cada bisectriz interior y la correspondientes bisectriz exterior, se deduce :

Un triángulo es órtico del que determinan sus exincentros

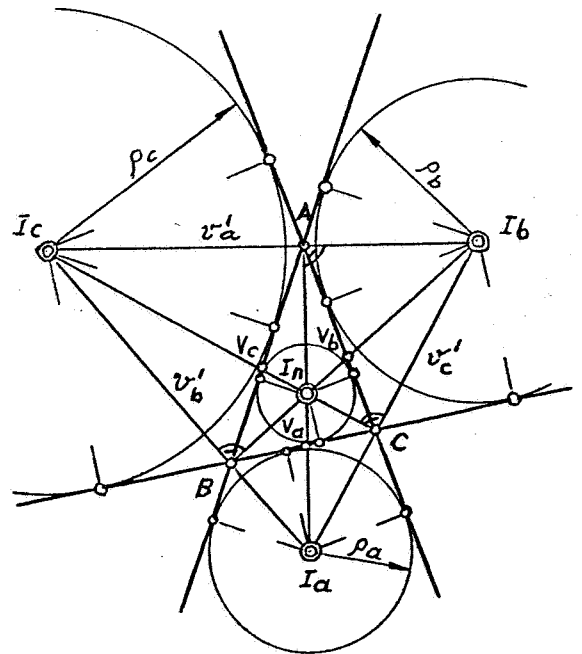


Fig. 7

De conformidad con lo expuesto en homotecia, las circunferencias inscrita y cada exinscrita, por ser coplanarias, son homotéticas con centros de homotecia, directa e inversa, los puntos de intersección de las tangentes comunes exteriores e interiores, respectivamente. Así las parejas de puntos $A-V_a$, $B-V_b$ y $C-V_c$, son centros de homotecia que transforman la circunferencia I_n en las I_a , I_b e I_c , respectivamente.

1.8.- Transversales.

La recta que corta a los lados de un triángulo, o a sus prolongaciones, y no pasa por sus vértices es llamada transversal del mismo.

En la representación a) de la Fig. 8, la transversal *r* atraviesa el triángulo y los puntos de intersección con los lados *a*, *b* y *c* se denominan *A'*, *B'* y *C'*, respectivamente. En la representación b), es exterior al triángulo y los tres puntos *A'*, *B'* y *C'* están sobre las prolongaciones respectivas de los lados.

Se dice que dos puntos de una recta son isotómicos, respecto de un segmento de ella, cuando tienen por punto medio el del segmento; esto es, los puntos de la recta soporte de un segmento que equidistan de su punto medio, son isotómicos.

Finalmente, se denominan transversales recíprocas al par de transversales que cortan a los lados del triángulo en puntos isotómicos respecto de ellos. En la Fig. 9, *r* y *s* son transversales recíprocas, pues, $M_a A' = M_a A''$, $M_b B' = M_b B''$ y $M_c C' = M_c C''$, o lo que es igual, en valor absoluto $BA' = CA''$, $CB' = AB''$ y $BC' = AC''$.

1.9.- Cevianas. Fig. 10.

Las rectas que unen un punto del plano del triángulo con sus vértices, se denominan cevianas del triángulo.

En la representación a), el punto considerado *P* es interior al triángulo, mientras que en la representación b) se ha considerado exterior a él.

1.10.- Rectas y puntos isogonales. Fig. 11.

Respecto de dos lados de un triángulo, se llaman isogonales las dos semirrectas que forman ángulos iguales y de sentido contrario con ellos, y pasan por ese vértice.

En la figura se han trazado las cevianas c_a , c_b y c_c correspondientes al punto *P*, las cuales forman los ángulos α , β y γ con los lados *AB* y *BC*. Sus isogonales c'_a , c'_b y c'_c forman con los lados *AC* y *CB* los ángulos $-\alpha' = \alpha$, $-\beta' = \beta$ y $-\gamma' = \gamma$ que, como se demostrará en su momento, se cortan también en un punto, *P'* en la figura, que se denomina punto isogonal del *P*. Es fácil deducir que las bisectrices del triángulo son, también, bisectrices de los pares de rectas isogonales correspondientes.

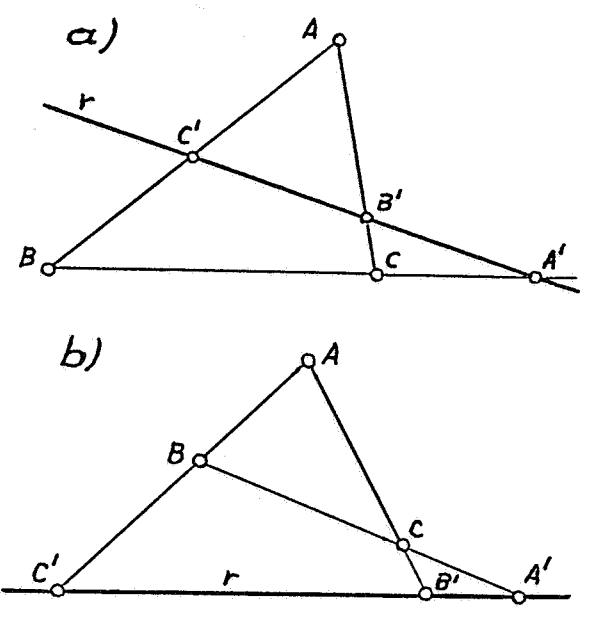


Fig. 8

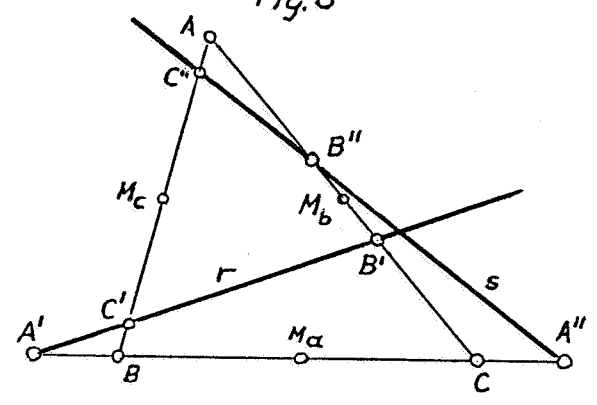


Fig. 9

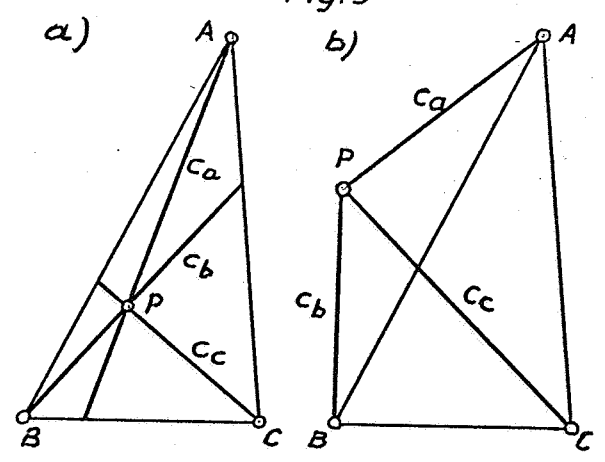


Fig. 10

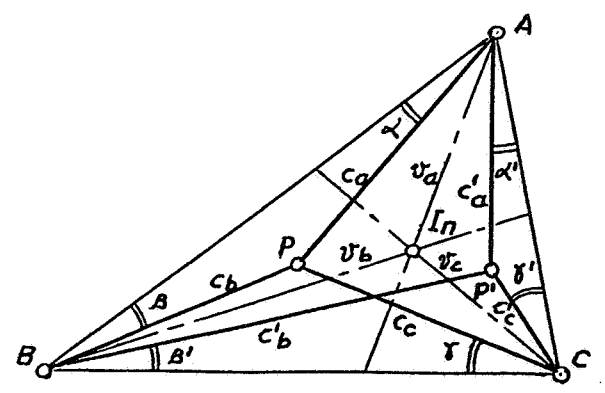


Fig. 11

2.- PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LOS ELEMENTOS NOTABLES.

2.1.- Baricentro. Fig. 12.

P y Q son puntos medios de los segmentos BB_a y CB_a , respectivamente, por lo cual $M_c M_b = BC/2 = PQ$; por ser ambos segmentos paralelos medias, respecto BC, en los triángulos ABC y $B_a BC$. Análogamente, $M_c P = AB_a/2 = M_b Q$, pues, también son paralelos medias en los triángulos $AB_a B$ y $AB_a C$, respecto de AB_a .

Por lo anterior, $M_c M_b QP$ es un paralelogramo y, como es sabido, sus diagonales se cortan en el punto medio, por lo cual $M_b B_a = B_a P = 1/3 m_b$ y $M_c B_a = B_a Q = 1/3 m_c$.

Con cualquiera de los otros dos paralelogramos que pueden trazarse sobre los segmentos $M_a M_b$ y $M_a M_c$, se demuestra la misma relación respecto de m_a . Por tanto,

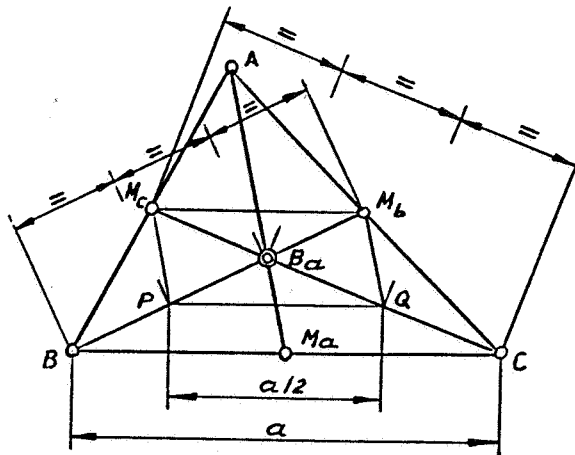


Fig. 12

El baricentro de un triángulo dista de sus vértices doble que de los respectivos pies de las medianas

2.2.- Circunferencia inscrita. Fig. 13.

Se han denominado I_a, I_b y I_c a los puntos de contacto de esta circunferencia con los lados del triángulo y como $AT_b = AT_c, BT_a = BT_c$ y $CT_a = CT_b$, se tiene que $2p = 2CT_a + 2BT_a + 2AT_b$, o lo que es igual $p = CT_a + BT_a + AT_b$. Ahora bien, como $CT_a + BT_a = a$, $p = a + AT_b$ o $AT_b = p - a$. De forma análoga se demuestra que $BT_a = p - b$ y $CT_a = p - c$ por lo que se puede enunciar:

Los segmentos de tangente desde los vértices de un triángulo hasta los puntos de contacto con su circunferencia inscrita, tienen por valor la diferencia entre el semiperímetro y el lado opuesto.

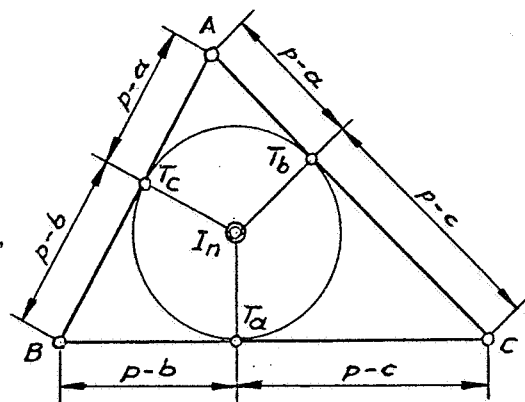


Fig. 13

2.3.- Circunferencias exinscritas. Fig. 14.

De la figura se deduce que $BT'_a + BT'_c = a + CT'_a + c + AT'_c$ (1), pero como $CT'_a = CT'_b$ y $AT'_c = AT'_b$, se tiene que $CT'_a + AT'_c = CT'_b + AT'_b = b$. Sustituyendo este valor en (1), se obtiene la relación:

$$BT'_a + BT'_c = a + c + (CT'_b + AT'_b) = a + b + c = 2p, \text{ es decir,}$$

Los segmentos de tangente desde los vértices hasta los puntos de contacto con las circunferencias exinscritas opuestas a ellos, tienen por valor el semiperímetro.

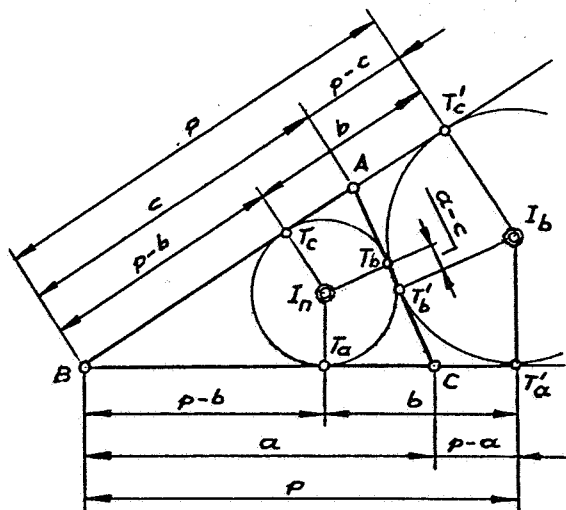


Fig. 14

De lo anterior, se deduce que $CT'_a = p - a$ y $AT'_c = p - c$

Hay que destacar que $I_a I'_a = I_c I'_c = p - (p - b) = b$ (2) y, por otra parte, como $AT'_c = AT'_b = p - c$ y $AT_b = p - a$, se deduce que $AT'_b - AT_b = (p - c) - (p - a) = a - c = I_b I'_b$ (3). Las expresiones (2) y (3) indican las distancias entre los puntos de contacto con la circunferencia inscrita y cada exinscrita de sus tangentes comunes, es decir :

- 1.- La distancia entre los puntos de contacto con las tangentes comunes exteriores a la circunferencia inscrita y una exinscrita, es igual al lado del triángulo que es tangente interior a ambas.
- 2.- La distancia entre los puntos de contacto con el lado que es tangente común interior, es igual a la diferencia entre los otros dos lados del triángulo.

2.4.- Circunferencia circunscrita.

Este elemento notable tiene varias propiedades fundamentales que es necesario conocer:

1ª Propiedad .- En la Fig. 15 se ha hallado el ortocentro O_r del triángulo ABC y se ha trazado la circunferencia circunscrita, sobre la que se encuentran los puntos O_r^I , O_r^{II} y O_r^{III} , intersección con las perpendiculares trazadas por O_r a los lados a, b y c, respectivamente.

Ahora bien, como $\alpha = \alpha_1$ (por ser ángulos inscritos que abarcan el arco CO_r^I) y $\alpha = \alpha_2$ (por tener sus lados perpendiculares), se deduce que $\alpha_1 = \alpha_2$, por lo cual O_r^I y O_r son simétricos, respecto de BC.

Análogamente, como $\beta = \beta_1$ y $\beta = \gamma$, por las mismas razones anteriores, se deduce que $\beta_1 = \gamma$, es decir, O_r^{II} es simétrico del ortocentro, respecto del lado b. Finalmente, como en los dos casos anteriores, $\delta = \delta_1$ y $\beta = \gamma$, por lo cual $\beta = \gamma_1$, es decir, $O_r^{III} = H_c$. Por lo anterior,

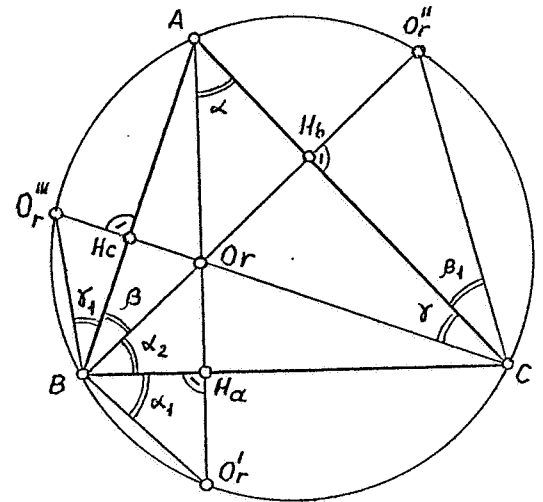


Fig. 15

Los puntos simétricos del ortocentro de un triángulo, respecto de sus lados, pertenecen a su circunferencia circunscrita.

2ª Propiedad .- En la Fig. 16, las bisectrices interiores del triángulo ABC cortan a su circunferencia circunscrita en los puntos W_a , W_b y W_c , los cuales dividen en partes iguales los arcos BC, CA y AB, respectivamente, por estar inscritos en ella los semiángulos interiores. Por otra parte, las mediatrices de a, b y c dividen, también, en partes iguales a los arcos que subtienden, es decir, los citados anteriormente.

Además, al ser $v_a \perp v'_a$, $v_b \perp v'_b$ y $v_c \perp v'_c$, por los puntos W'_a , W'_b y W'_c pasan las respectivas bisectrices exteriores. Por ello:

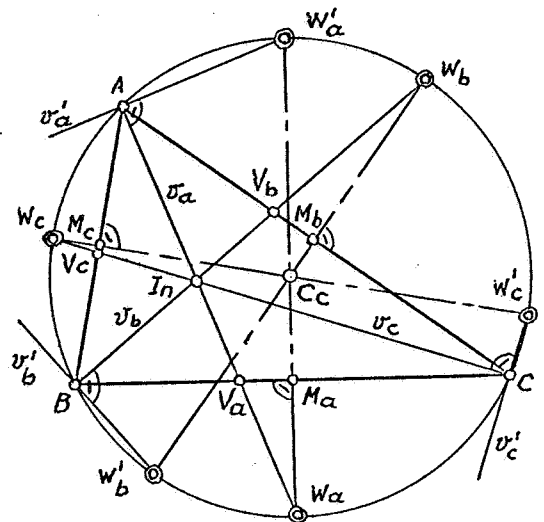


Fig. 16

La bisectriz interior y exterior de cada ángulo de un triángulo, cortan a la mediatriz del lado opuesto en puntos diametrales de la circunferencia circunscrita.

3ª Propiedad.— en la Fig. 17, se ha trazado el triángulo $I_a I_b I_c$, formado por los exicentros del triángulo ABC. — Como $v_a \perp v'_a$ y $v_c \perp v'_c$, la circunferencia de diámetro $I_a I_c$ pasa por A y C, y su centro W'_b , además de ser punto medio de $I_a I_c$, pertenece a la mediatriz de AC; esto es, según la 2ª propiedad pertenece a la circunferencia circunscrita a ABC. Análogamente, se demuestra que W'_a y W'_c son los respectivos puntos medios de $I_b I_c$ e $I_a I_b$.

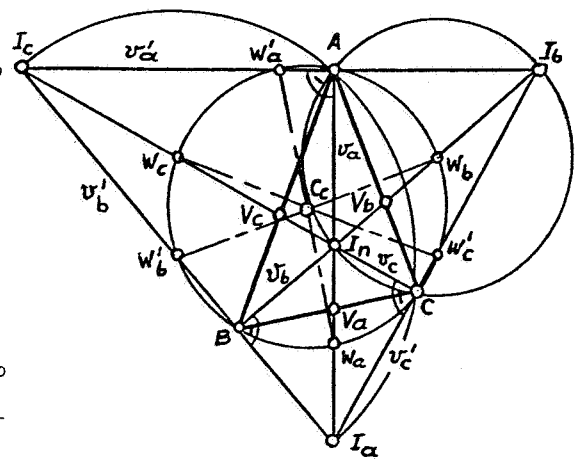


Fig. 17

Por las mismas razones, la circunferencia de diámetro $I_n I_b$ también pasa por los puntos A y C, por lo cual su centro W_b — punto medio del $I_n I_b$ —, pertenece a la circunferencia circunscrita. Análogamente, se demuestra que W_a y W_c son puntos medios de $I_n I_a$ e $I_n I_c$ y pertenecen a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC. Por tanto,

La circunferencia circunscrita a un triángulo pasa por los puntos medios de los lados del triángulo de exicentros, así como por los puntos medios de los segmentos que unen éstos con el incentro.

2.5.- Circunferencia de Feuerbach. Fig. 18

Como es sabido, un triángulo ABC es órtico del $I_a I_b I_c$ que forman sus exicentros, Figs 7 y 17. Por ello, las propiedades de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, — también le corresponden a la circunscrita a su triángulo órtico $H_a H_b H_c$, la cual recibe el nombre de circunferencia de los nueve puntos o de Feuerbach, Fig. 18 (el triángulo trazado puede superponerse al de la Fig. 17, para una mejor comprensión).

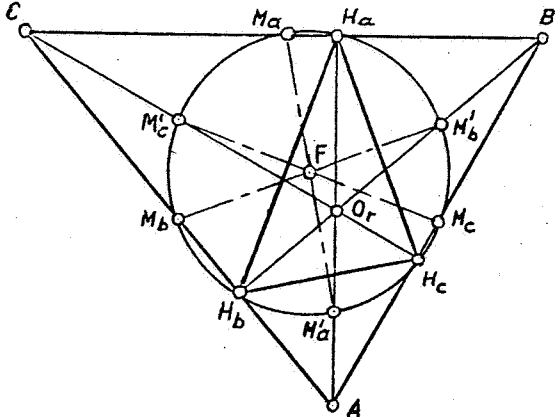


Fig. 18

En la Fig. 18, se observa que los puntos medios M_a , M_b y M_c , de los lados del triángulo ABC, pertenecen a dicha circunferencia, así como los puntos M'_a , M'_b y M'_c , que son puntos medios de los segmentos $O_r A$, $O_r B$ y $O_r C$, respectivamente,

La circunferencia que pasa por los pies de las alturas de un triángulo — circunscrita al órtico —, pasa por los puntos medios de sus lados, así como por los puntos medios de los segmentos que determina cada vértice y el ortocentro.

2.6.- Recta de Euler. Fig. 19.

El circuncentro, baricentro y ortocentro de un triángulo, están alineados en una recta, denominada de Euler.

En efecto, los triángulos BO_rC y $M_bM_cM_c$ son semejantes, por tener los lados respectivos paralelos. Además, como M_bM_c es paralela media respecto a BC , se cumple que

$$\frac{M_bM_c}{BC} = \frac{1}{2} = \frac{M_bC}{BO_r} = \frac{M_cC}{CO_r} \quad (1)$$

Por la misma razón, también son semejantes los triángulos BB_aC y $M_bM_aM_c$, y como el baricentro B_a dista doble del vértice B que de M_b , se tiene que

$$\frac{B_aM_b}{B_aB} = \frac{B_aM_c}{B_aC} = \frac{M_bM_c}{BC} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

De las expresiones (1) y (2) se deduce que los puntos B, C y O_r son homólogos de los M_b, M_c y C_c , respectivamente, en una homotecia de centro B_a y razón $-1/2$, por tanto

El baricentro de un triángulo está alineado con su ortocentro y circuncentro, y a doble distancia del primero que del segundo.

2.7.- Relación entre la circunferencia circunscrita y la de Feuerbach. Fig. 20.

Por la propiedad del baricentro, los pares de puntos M_a-A, M_b-B y M_c-C son homotéticos, con centro en B_a y razón $K=-1/2$. Ahora bien, como los puntos A, B y C pertenecen a la circunferencia circunscrita y a la de Feuerbach los M_a, M_b y M_c , ambas circunferencias son homólogas en la citada homotecia. En consecuencia, el radio de la circunscrita es doble de la otra y el centro F de ésta pertenece a la recta de Euler, de forma que $\overline{B_aC} = -2\overline{B_aF}$; pero como $\overline{B_aO_r} = -2\overline{B_aC}$, resulta que $B_aF = O_rC/6$ y, por tanto, F es punto medio de O_rC .

Por otra parte, como son paralelas las tangentes a dos circunferencias homotéticas en los puntos homólogos, las tangentes a la circunferencia circunscrita en A, B y C son paralelas respectivas a las tangentes a la de Feuerbach en M_a, M_b y M_c . En resumen:

La circunferencia circunscrita a un triángulo y la de Feuerbach son homólogas, en una homotecia de razón $-1/2$ y de centro el baricentro del triángulo.

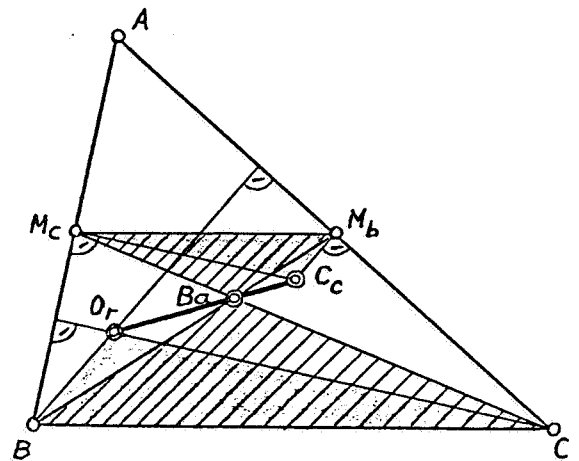


Fig.19

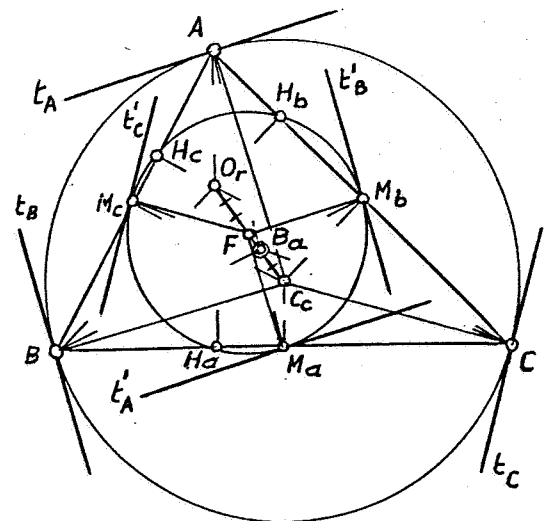


Fig.20

En la figura se ha trazado un triángulo ABC, su circunferencia circunscrita y desde un punto cualquiera D, de ella, las perpendiculares a los lados del triángulo. Los pies A', B' y C', de estas perpendiculares, están sobre una transversal del triángulo, denominada recta de Simson.

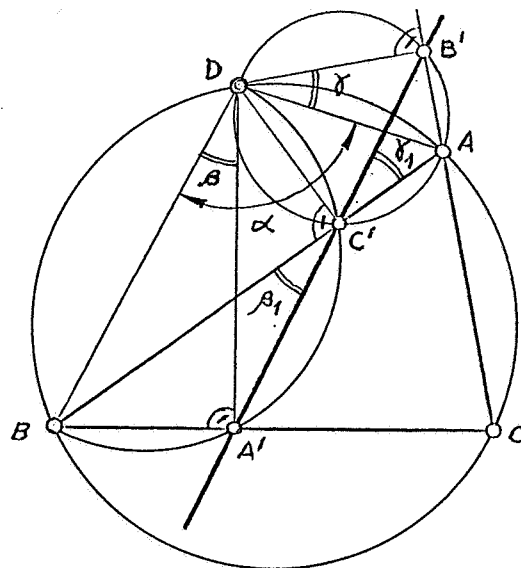


Fig. 21

Efectivamente, por construcción, el cuadrilátero ADBC está inscrito en la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, por lo que $\alpha + C = 180^\circ$ (1). El cuadrilátero DA'CB' está inscrito en la circunferencia de diámetro CD (no dibujada), pues, los ángulos interiores de vértices A' y B' son rectos, de ahí que también sean suplementarios los de vértices C y D, es decir, $C + (\alpha + \delta - \beta) = 180^\circ$ (2). Igualando las expresiones -- (1) y (2) se obtiene que $\beta = \delta$ (3).

Por otro lado, el cuadrilátero AB'DC' está inscrito en la circunferencia de diámetro AD, por ser rectos los ángulos interiores de vértices B' y C'. De lo anterior, se deduce que $\delta = \delta_1$ (4), pues, son ángulos inscritos que abarcan el arco AB'. A su vez, los triángulos rectángulos BA'D y BC'D tienen común la hipotenusa BD, la cual es diámetro de la circunferencia circunscrita a ambos, por lo que $\beta = \beta_1$ (5), al ser ambos inscritos y abarcar el arco BA'. Sustituyendo en la expresión (3) los valores de las (4) y (5), se cumple que $\beta_1 = \delta_1$, lo que demuestra que A', C' y B' están alineados.

Todo lo anterior proporciona una nueva propiedad de la circunferencia circunscrita:

La circunferencia circunscrita a un triángulo es lugar geométrico de puntos tales que al trazar, desde ellos, perpendiculares a los lados, los pies de las mismas están alineados, es decir, están sobre transversales del triángulo.

2.9.- Transversales. Teorema de Menelao.

"Cada transversal de un triángulo determina seis segmentos sobre los lados de éste, de forma que el producto de tres no consecutivos es igual al producto de los otros tres".

En efecto, en la Fig. 22 se proyectan paralelamente, sobre la transversal A'B'C', los tres vértices del triángulo, formándose los triángulos semejantes siguientes: $AMC' \sim BNC'$, $BNA' \sim CPA'$ y $AMB' \sim CPB'$. De estas semejanzas se deducen las relaciones:

$$\frac{AC'}{BC'} = \frac{AM}{BN}, \quad \frac{BA'}{CA'} = \frac{BN}{CP} \quad \text{y} \quad \frac{CB'}{AB'} = \frac{CP}{AM}$$

Si se multiplican las tres, miembro a miembro, y como el producto de las segundas es $\frac{AM}{BN} \cdot \frac{BN}{CP} \cdot \frac{CP}{AM} = 1$,

resulta $\frac{AC'}{BC'} \cdot \frac{BA'}{CA'} \cdot \frac{CB'}{AB'} = 1$, o lo que es lo mismo, expresado según las razones simples contenidas en ella:

$(C'AB) \cdot (A'BC) \cdot (B'CA) = 1$. Por ello, se puede enunciar :

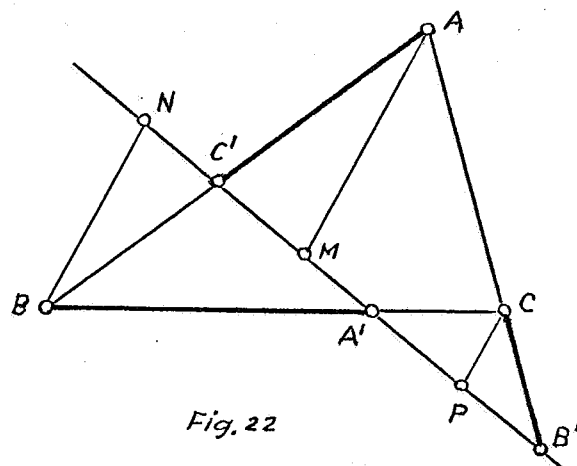


Fig. 22

La condición necesaria y suficiente para que tres puntos situados, respectivamente, sobre los lados de un triángulo, estén alineados, es que el producto de las tres razones simples que determinan sobre los lados, tengan la unidad por valor.

"Si un punto de cada lado de un triángulo están en línea recta, es decir, pertenecen a una de sus transversales, sus tres puntos isotómicos están sobre otra recta que es -- transversal recíproca de la primera".

En efecto, en la Fig. 23, los puntos A'', B'' y C'' son isotómicos, respecto de los lados del triángulo, de los A', B' y C', respectivamente, cumpliéndose que: AC' = -BC'' y -- BC' = -AC''; BA' = -CA'' y CA' = -BA''; finalmente, CB' = -AB'' y -- AB' = -CB''. Además, como A', B' y C' están alineados :

$$\frac{AC'}{BC'} \cdot \frac{BA'}{CA'} \cdot \frac{CB'}{AB'} = 1$$

Sustituyendo en esta expresión los valores iguales respecto de A'', B'' y C'', se obtiene :

$$\frac{BC''}{AC''} \cdot \frac{CA''}{BA''} \cdot \frac{AB''}{CB''} = 1$$

, o expresado según sus razones simples, $(C''BA) \cdot (A''CB) \cdot (B''AC) = 1$ lo que demuestra que A'', B'' y C'' están en línea recta.

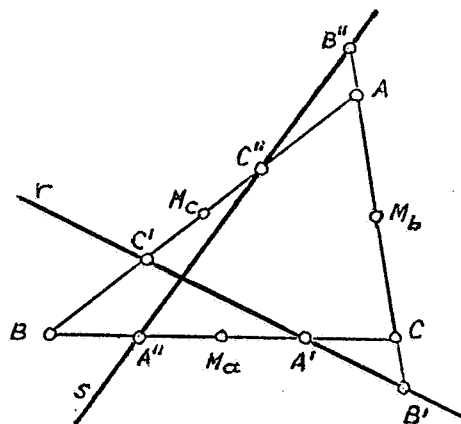


Fig. 23

2.10.- Cevianas. Teorema de Ceva.

"Tres cevianas determinan seis segmentos sobre los lados del triángulo, de forma que el producto de tres de ellos no consecutivos es igual y de sentido contrario al producto -- de los otros tres".

En las representaciones a) y b) de la Fig. 24, se han trazado las cevianas que concurren en P, interior del triángulo ABC en la primera y exterior a él en la segunda.

Considerando la recta BB' como transversal del triángulo AC'C, se cumple: $\frac{AB'}{CB'} \cdot \frac{CP}{C'P} \cdot \frac{BC'}{BA} = 1$ (1)

Análogamente, si se considera AA' como transversal del triángulo CC'B, se cumple: $\frac{C'P}{CP} \cdot \frac{CA'}{BA'} \cdot \frac{AB}{AC'} = 1$ (2)

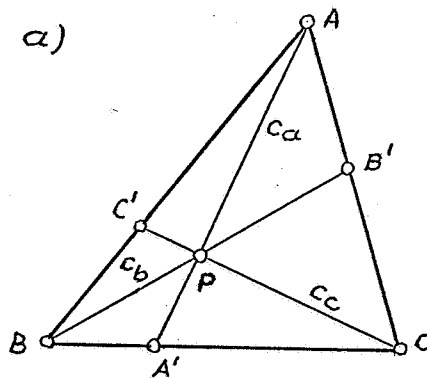
Al multiplicar y simplificar las expresiones (1) y (2) se obtiene: $\frac{AB' \cdot BC' \cdot CA' \cdot AB}{CB' \cdot BA \cdot BA' \cdot AC'} = 1$, pero como $\frac{AB}{BA} = -1$, resulta

$$\frac{A'C}{A'B} \cdot \frac{B'A}{B'C} \cdot \frac{C'B}{C'A} = -1$$

o lo que es lo mismo, expresado según

las razones simples : $(A'CB) \cdot (B'AC) \cdot (C'BA) = -1$

a)



b)

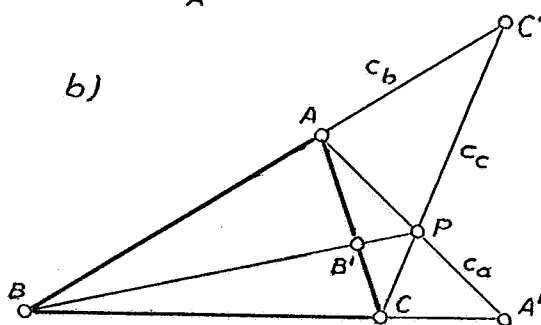


Fig. 24

Según lo anterior, que también puede observarse en la figura, las tres razones simples han de ser negativas --representación a)-- o dos de ellas positivas y la otra negativa --representación b-- , según que el -- punto P sea interior al triángulo o exterior a él, respectivamente.

Por todo ello, puede enunciarse :

La condición necesaria y suficiente para que las rectas que unen los respectivos vértices de un triángulo con un punto situado en cada lado opuesto, concurran en un mismo punto, es que el producto de las tres razones simples que determinan dichos puntos y los vértices sea la unidad con valor negativo.

2.14.- Rectas isogonales.

a).- En general.- En las representaciones a) y b) de la Fig. 25, se han trazado las rectas isogonales $r-r'$, respecto de las $a-b$, y se han considerado los puntos M y N de cada una de ellas.

En la representación a) se han trazado las distancias de M y N a las rectas a y b , medidas en dirección ortogonal a éstas. Sin embargo, en la representación b) éstas distancias se han tomado en una dirección cualquiera -formando un ángulo β con las rectas de referencia-, antiparalelas respecto de a y b .

Como la bisectriz v del ángulo que forman a y b , también lo es del que forman las isogonales $r-r'$ en ambos casos se han representado los simétricos de M y N , respecto de ella, por lo cual se cumple que $MD=M'D'$ y $ME=M'E'$, así como $NF=N'F'$ y $NG=N'G'$. Además, son también simétricos los pares de puntos $D-D'$, $E-E'$, $F-F'$ y $G-G'$.

Al ser semejantes los triángulos $VFN \sim VE'M'$ y $VGN \sim VD'M'$ se cumple, respectivamente, que

$$\frac{NF}{M'E'} = \frac{VN}{VM'} \text{ y } \frac{NG}{M'D'} = \frac{VN}{VM'}, \text{ de donde, } \frac{NF}{ME'} = \frac{NG}{MD'}$$

mismo, $\frac{NF}{ME} = \frac{NG}{MD}$, de donde $\frac{NF}{NG} = \frac{ME}{MD}$, por lo cual se puede enun-

ciar esta primera propiedad general:

Las distancias a dos rectas, medidas en una misma dirección, desde un par de puntos pertenecientes, respectivamente, a dos rectas isogonales de aquéllas, son inversamente proporcionales.

Por otro lado, de la semejanza existente entre las dos parejas de triángulos citados se desprende que:

$$\frac{VF}{VE'} = \frac{VN}{VM'} \text{ y } \frac{VG}{VD'} = \frac{VN}{VM'}, \text{ de donde } \frac{VF}{VE'} = \frac{VG}{VD'}, \text{ o lo que es igual } \frac{VF}{VE} = \frac{VG}{VD}, \text{ es decir, } \boxed{VF \cdot VD = VG \cdot VE}$$

Expresión de la potencia de V respecto de la circunferencia O , a la que pertenecen los cuatro puntos F, D, E y G , lo cual permite enunciar la segunda propiedad general:

Los pies de las distancias a dos rectas, medidas en una misma dirección, desde un par de puntos pertenecientes, respectivamente, a dos rectas isogonales de aquéllas, son concíclicos.

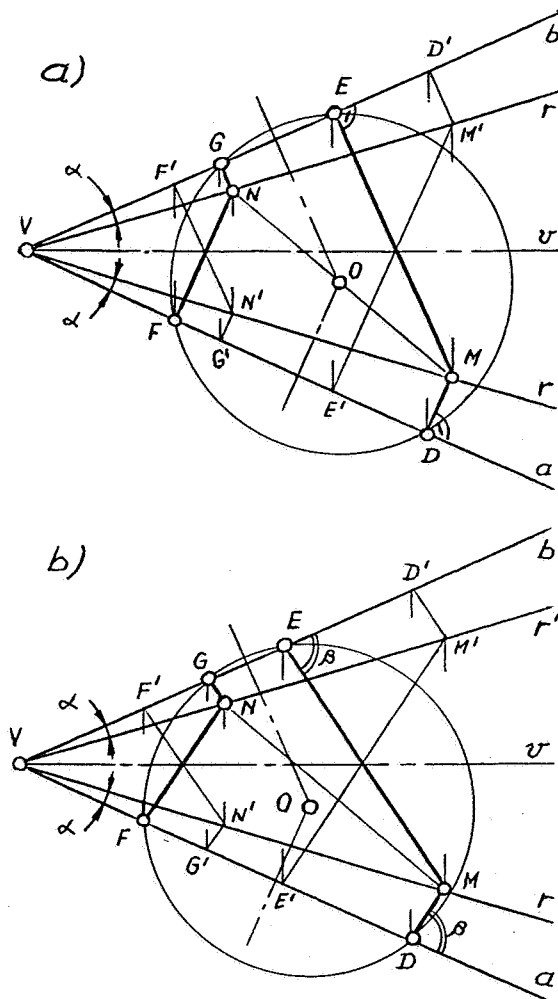


Fig.25

Esta circunferencia que contiene los cuatro pies de las distancias indicadas, tiene por centro el punto medio O del segmento MN, cuando son medidas ortogonalmente a las rectas a y b, representación a) - de la figura.

b).- En los triángulos.- En la Fig. 26 las rectas AQ y BQ son isogonales respectivas de las cevianas AP y BP, -- respecto de los lados que concurren en los vértices A y B, respectivamente. Aplicando la primera propiedad general a -- las dos isogonales citadas, respecto de los puntos P y Q, -- se obtiene que:

$$\frac{PD}{PF} = \frac{QJ}{QG} \text{ y } \frac{PD}{PE} = \frac{QH}{QG}$$

Si se dividen miembro a miembro y se simplifica, se obtiene:

$$\frac{PE}{PF} = \frac{QJ}{QH}$$

Expresión que demuestra que, según la reiterada primera propiedad general, el punto Q también pertenece a la -- isogonal, respecto de los lados del ángulo C, de la tercera ceviana CP. Por ello se puede enunciar:

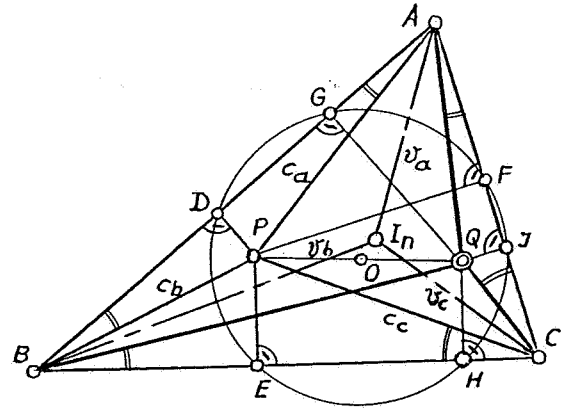


Fig. 26

Las rectas isogonales, respecto de los correspondientes lados de un triángulo, de tres cevianas del mismo, también se cortan en un punto, que se denomina isogonal del de concurrencia de estas últimas.

Se adelanta al estudio de las cónicas, que dos puntos isogonales son focos de una cónica, tangente a los tres lados del triángulo de referencia y, en consecuencia, los pies de -- las distancias ortogonales a éstas, pertenecen a la circunferencia principal de la cónica.

En la Fig. 27 se ha trazado el triángulo ABC, su altura h_a , la circunferencia circunscrita y el diámetro que pasa por A. De la figura se desprende que es recto el ángulo F, -- por estar inscrito en la semicircunferencia ACE, de donde EF es perpendicular a la mediatriz de BC. y, por ello, son iguales los arcos ED y DF; por tanto, la bisectriz v_a lo es también del ángulo formado por h_a y AC_c , por lo que:

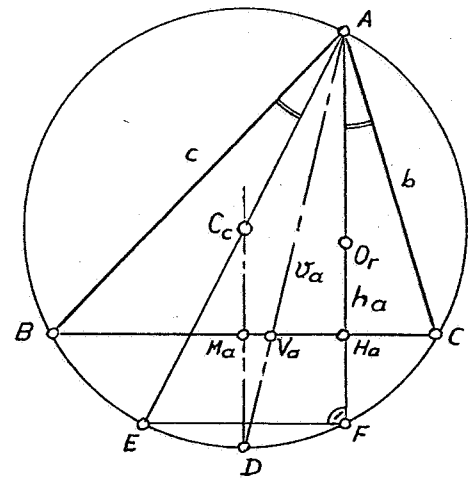


Fig. 27

Las alturas de un triángulo y las rectas que unen el circuncentro con los respectivos vértices, -- son isogonales respecto de los correspondientes lados.

Es consecuencia que circuncentro y otrocentro son puntos isogonales, por lo cual los pies de las -- alturas y de las medianas son concíclicos en la circunferencia de Feuerbach; esto último, se deduce también en 2.6.

En la Fig. 28 se han trazado dos isogonales cualesquiera AD y AE, respecto de los lados del triángulo que concurren en el vértice A. Como también son iguales los ángulos de vértices D y C, por ser inscritos y abarcar el arco AB de la circunferencia circunscrita, los triángulos ABD y AEC son semejantes, por lo que:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC}, \text{ es decir, } \boxed{b \cdot c = AD \cdot AE}$$

El producto de dos lados de un triángulo es igual al producto de los segmentos de dos isogonales concurrentes con ellos e interceptados por el lado opuesto y la circunferencia circunscrita.

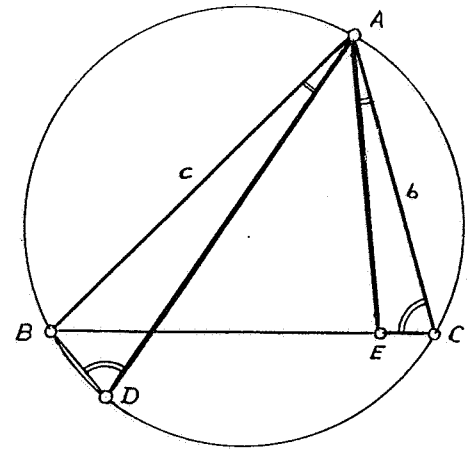


Fig.28

Aplicando lo anterior a las isogonales representadas en la Fig. 27, se tiene que $\boxed{b \cdot c = h_a \cdot 2R}$; esto es:

El producto de dos lados de un triángulo es igual al producto de la altura que concurre con ellos y el diámetro de la circunferencia circunscrita.

3.- RELACIONES METRICAS FUNDAMENTALES.

De la extensa geometría del triángulo, se exponen solamente las relaciones métricas necesarias para obtener tres lugares geométricos que son indispensables.

3.1.- Generalización del teorema de Pitágoras.

Al aplicar las relaciones métricas del triángulo rectángulo, en la representación a) de la Fig. 29 se deduce:

$$b^2 = e^2 + h_a^2 = (a-d)^2 + c^2 - d^2 = a^2 + d^2 - 2ad + c^2 - d^2, \text{ que simplificada se obtiene: } \boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ad}$$

Sin embargo, en la representación b), por ser obtusángulo el ángulo B, se tiene que:

$$b^2 = e^2 + h_a^2 = (a+d)^2 + c^2 - d^2 = a^2 + d^2 + 2ad + c^2 - d^2, \text{ y simplificado se deduce que: } \boxed{b^2 = a^2 + c^2 + 2ad}$$

Al generalizar se puede escribir: $\boxed{b^2 = a^2 + c^2 \pm 2ad}$, lo cual permite enunciar:

El cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo u obtuso de un triángulo, es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos o más, respectivamente, el doble de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

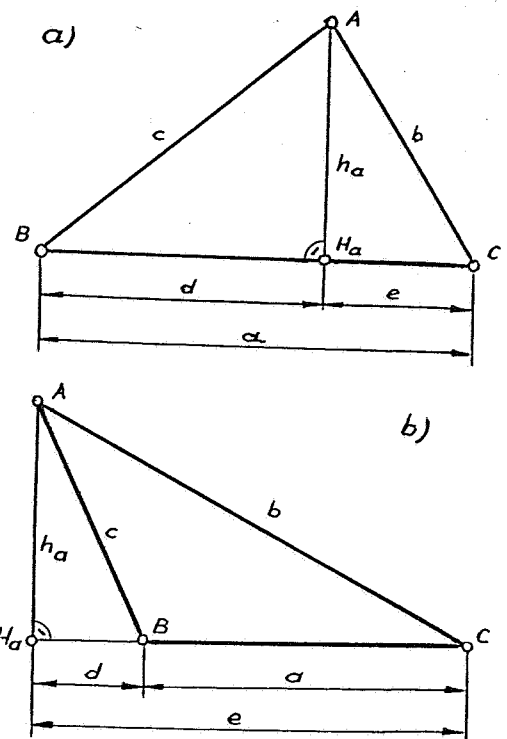


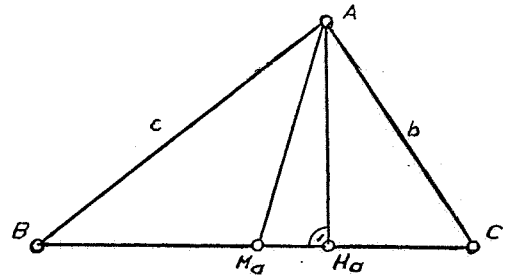
Fig.29

Si se aplica lo anterior al triángulo ABM_a de la Fig. 30, se tiene que: $c^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + m_a^2 + 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \overline{M_a H_a}$ (1).

De forma análoga, al aplicarse al triángulo ACM_a de la misma figura: $b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + m_a^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \overline{M_a H_a}$ (2).

Al sumar las expresiones (1) y (2) se obtiene:

$$b^2 + c^2 = 2 \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2m_a^2 \quad (3), \text{ es decir:}$$



La suma de los cuadrados de dos lados de un triángulo es igual al doble de la suma de los cuadrados de la mitad del tercer lado y de su mediana.

Sin embargo, si se halla la diferencia de las expresiones (1) y (2), resulta que $c^2 - b^2 = 2a \cdot \overline{M_a H_a}$ (4), la cual indica que:

La diferencia de los cuadrados de dos lados de un triángulo es igual al duplo del producto del tercer lado por el segmento que determinan los pies de su mediana y altura.

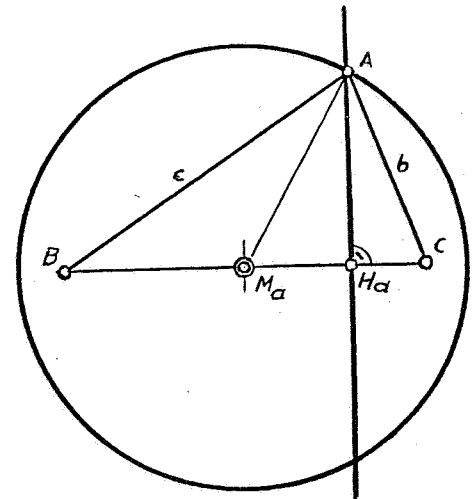
Estas dos últimas relaciones métricas permiten obtener dos importantes lugares geométricos que conviene conocer.

1.- "El lugar geométrico de los puntos de un plano cuya suma de cuadrados de distancias a dos puntos fijos es constante, es una circunferencia de centro el punto medio del segmento de extremos el par de puntos fijos dado y de radio la magnitud que a continuación se expone".

En efecto, en la Fig. 31 el punto A cumple la condición, respecto de B y C, por lo que $b^2 + c^2 = K^2$ y como $K^2 = 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2m_a^2$, se deduce que m_a es un valor constante que se deduce de la expresión (3)

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2} \quad \text{o} \quad m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2K^2 - a^2}$$

que es el radio de la circunferencia de centro M_a y lugar geométrico de las posiciones del punto A.



2.- "El lugar geométrico de los puntos de un plano cuya diferencia de cuadrados de distancias a dos puntos fijos es constante, es una recta perpendicular a la que determina el citado par de puntos, a una distancia de su punto medio que se expresa a continuación".

Como en el lugar geométrico anterior, en la Fig. 31 el punto A cumple la última condición, respecto de A y B, es decir, $c^2 - b^2 = K_1^2$, por lo cual el segmento $\overline{M_a H_a}$ tiene un valor fijo que se obtiene de la expresión (4) $\overline{M_a H_a} = \frac{c^2 - b^2}{2a}$, o lo que es igual $\overline{M_a H_a} = \frac{K_1^2}{2a}$

Expresión que indica que la recta AH_a es el lugar geométrico de las distintas posiciones que puede ocupar el punto A. Cuando $K_1^2 = 0$, $H_a \equiv M_a$ y la recta pasaría por este punto, es decir, es la mediatriz de BC.

3.3.- Lugar geométrico de los puntos cuya razón de distancias a dos puntos fijos es constante.

Según se expone en el estudio de cuaternas de puntos, dos vértices de un triángulo y los pies de las bisectrices, interior y exterior, que pasan por el tercer vértice, determinan una cuaterna armónica.

En la fig. 32 se ha representado el triángulo ABC y las bisectrices v_a y v'_a , que según lo anterior $(V_a V'_a BC) = -1$ pues,

$$\frac{V_a B}{V_a C} = -\frac{c}{b} \quad \text{y} \quad \frac{V'_a B}{V'_a C} = \frac{c}{b}$$

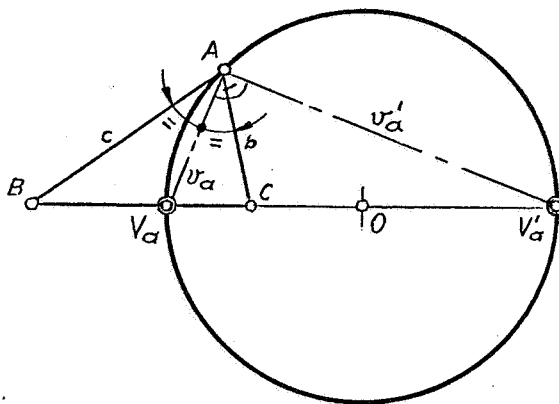


Fig. 32

Por esto último, si se consideran fijos los puntos B y C, y constante la relación c/b , también serán fijos los puntos V_a y V'_a , pies de las bisectrices interior y exterior respectivamente. Además, como las citadas bisectrices han de mantenerse perpendiculares entre sí, cualquiera que sea la posición de A para dicha relación, éstas han de pertenecer a la circunferencia de diámetro el segmento $V_a V'_a$, que se obtiene según se expone en "Ternas y Cuaternas de Elementos". Por ello,

El lugar geométrico de los puntos de un plano cuya razón de distancias a dos puntos fijos es constante, es una circunferencia de diámetro el par de puntos que separa armónicamente a los primeros, según razones simples de valor absoluto el de las citadas distancias.

Cuando el valor de la relación sea la unidad, el lugar geométrico es la mediatriz del par de puntos fijos, en la figura es la mediatriz de BC.

4.- METODOS DE CONSTRUCCION DE TRIANGULOS.

Para que esté determinado un triángulo es necesario conocer tres de sus elementos, por lo que al combinar de tres en tres todos los posibles datos: lados, ángulos, medianas, mediatrices, alturas, bisectrices, circunferencias inscrita, circunscrita, exinscritas y de los nueve puntos, así como lugares geométricos aplicables y la compleja geometría del triángulo, aparecen innumerables problemas de construcción de triángulos; algunos de ellos de tal dificultad que aún están por resolver.

Con objeto de hacer posible la resolución de la construcción de triángulos de dificultad media, se han sistematizado los siguientes métodos:

CASOS GENERALES

Lo constituyen aquellos problemas que tienen por datos, únicamente, los lados y ángulos del triángulo, dados directamente, es decir, no mediante relaciones entre ellos.

REDUCCION A CASOS GENERALES

Cuando los datos no son exclusivamente lados y ángulos, mediante el procedimiento de suponer conocida la respuesta, se reduce el problema a algunos de los casos generales.

RELACIONES GEOMETRICAS

Si no se obtiene solución por el método anterior, hay que pensar que es necesario relacionar los datos mediante algún lugar geométrico o propiedad geométrica, para así obtener la construcción del triángulo solución.

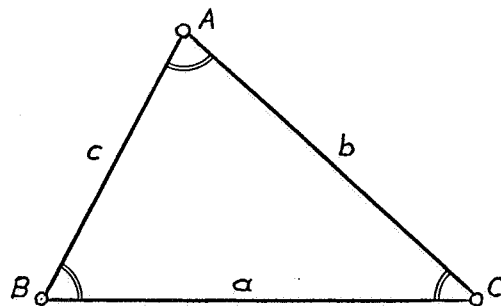
A continuación, se van a exponer estos tres métodos y se soluciona el número suficiente de aplicaciones de cada uno de ellos, para su comprensión.

5.- METODO DE CASOS GENERALES.

5.1.- Triángulos oblicuángulos y escalenos.

Como se ha indicado anteriormente, sólo pueden ser datos, en este caso, los lados a , b , c y los ángulos A , B y C .

Combinando de tres en tres estos elementos, se obtienen $\binom{6}{3}=20$ combinaciones, que dan lugar a sólo cinco problemas geométricos.



COMBINACIONES

PROBLEMAS

1.- a , b y c	I.-	Los tres lados.
2.- a , b y C	II.-	Dos lados y el ángulo que ellos forman.
3.- b , c y A		
4.- c , a y B		
5.- a , b y A	III.-	Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.
6.- a , b y B		
7.- b , c y B		
8.- b , c y C		
9.- c , a y C		
10.- c , a y A		
11.- a , B y C	IV.-	Un lado y los dos ángulos que con él se forman.
12.- b , A y C		
13.- c , A y B		
14.- a , B y A	V.-	Un lado, un ángulo de los que con él se forman y el ángulo opuesto a dicho lado.
15.- a , C y A		
16.- b , C y B		
17.- b , A y B		
18.- c , A y C		
19.- c , B y C		
20.- A , B y C	Constituye un problema indeterminado, pues, uno de los ángulos se puede obtener en función de los otros dos; esto es, sólo se conocen dos datos.	

A continuación, se realizan las construcciones gráficas necesarias para la resolución de estos cinco problemas elementales, aplicados a triángulos oblicuángulos y escalenos.

PROBLEMA I. Datos: a, b y c. Fig. 33.

Se traza uno de los lados, en la figura el lado a, con lo que se obtienen dos vértices, los B y C. El tercer vértice A dista de B y C los lados c y b, respectivamente.

Existen dos soluciones, pues, los arcos trazados, de radio c y b, se cortan en dos puntos. En la figura sólo se ha representado la solución correspondientes al semiplano superior.

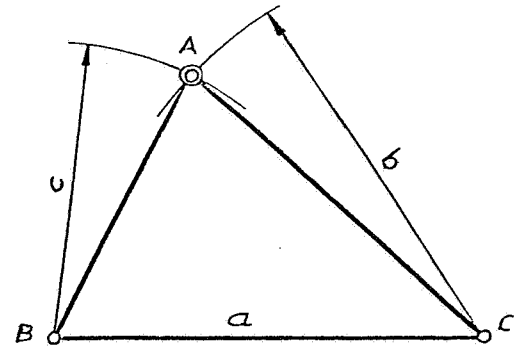


Fig. 33

PROBLEMA II. Datos : b, c y A. Fig. 34.

Se construye el ángulo A dado y sobre sus lados se sitúan las magnitudes b y c; así se determinan los otros vértices C y B, respectivamente.

En este caso, también hay una solución en cada semiplano.

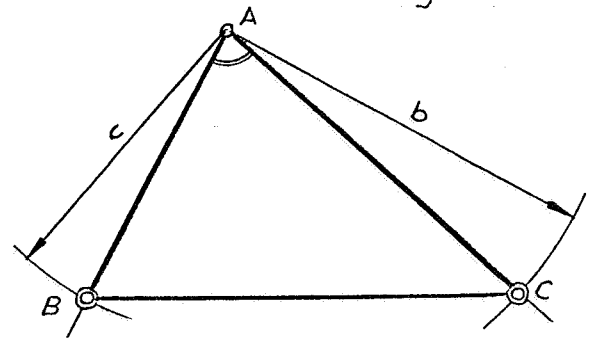


Fig. 34

PROBLEMA III. Datos : a, c y A. Fig. 35.

En la representación a) se ha trazado el ángulo A y con centro en este vértice y radio c se determina el vértice B. El tercer vértice C dista del B la magnitud a; en la figura, se ha trazado también la segunda solución ABC_1 , que existe siempre que $C \neq 90^\circ$, o lo que es igual que $a > h_b$, pues, si $a < h_b$, no habrá solución posible.

Siempre que se conozca un lado y el ángulo opuesto, como en este caso, también se puede resolver el problema al trazar el arco capaz de dicho ángulo visto bajo ese segmento, representación b).

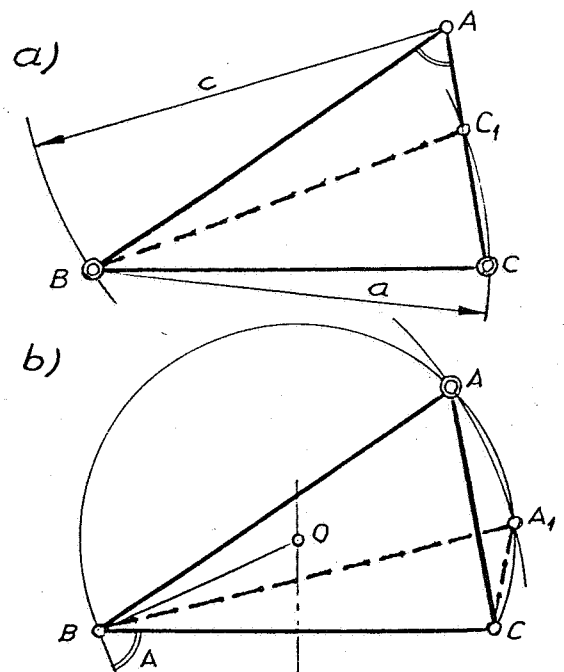


Fig. 35

PROBLEMA IV. Datos: a, B y C. Fig. 36.

Se traza el lado dado a y sobre él se construyen los ángulos B y C, conocidos también. El tercer vértice A es la intersección de las rectas soportes de los lados b y c, desconocidos.

Hay una solución sólomente, pues, dos rectas se cortan en un sólo punto.

En este caso, como puede determinarse el tercer ángulo A, podría considerarse incluido en el problema V; mejor dicho, pueden refundirse el IV y V, en un sólo problema. No obstante, por la simplicidad de sus trazados gráficos, en ambos casos, no es interesante prescindir de ninguno de ellos.

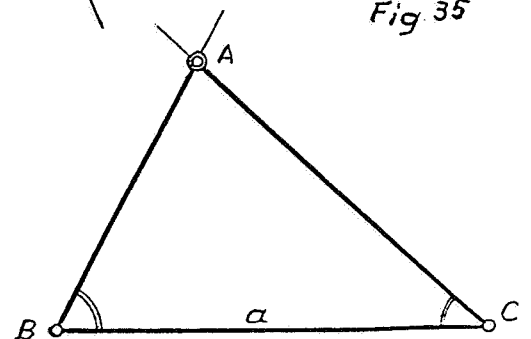


Fig. 36

PROBLEMA V. Datos: a , B y A . Fig. 37.

Como en el problema III, se conocen un lado y su ángulo opuesto por lo cual se puede resolver mediante el arco capaz del ángulo A visto bajo el segmento a . Sin embargo, es más simple la construcción realizada en la figura.

Trazado el lado a se construye sobre él el ángulo B y se toma un punto cualquiera P de la recta soporte del lado c , con lo cual se construye el ángulo A . Para obtener el vértice A , se traza por C la paralela a r .

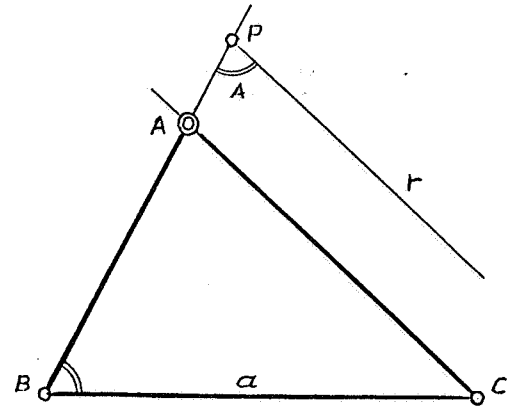
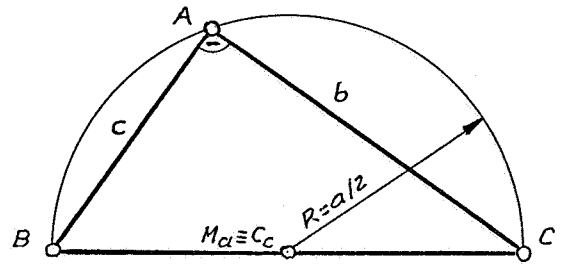


Fig. 37

5.2.- Triángulos rectángulos.

Para determinar un triángulo rectángulo es necesario conocer dos datos, pues siempre se conoce $A=90^\circ$.

También en estos triángulos hay cinco problemas geométricos, que agrupan a las $\binom{5}{2} = 10$ combinaciones de sus cinco elementos, tomados dos a dos.



COMBINACIONES.

PROBLEMAS.

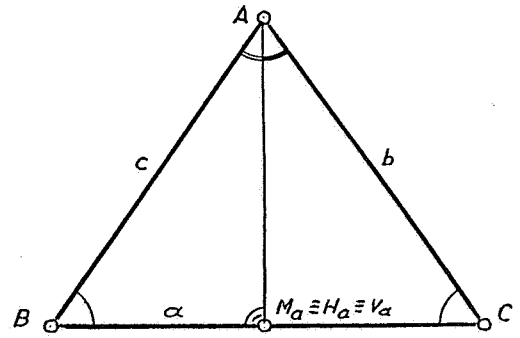
1.- b y c	I'.-	Los dos catetos.
2.- a y b	II'.-	La hipotenusa y un cateto.
3.- a y c		
4.- a y B	III'.-	La hipotenusa y uno de los ángulos que se forman con ella
5.- a y C		
6.- b y C	IV'.-	Un cateto y el ángulo agudo que se forma con él.
7.- c y B		
8.- b y B	V'.-	Un cateto y el ángulo opuesto a él.
9.- c y C		
10.- B y C	Constituye un problema <u>indeterminado</u> , pues, ambos ángulos son complementarios, por lo que sólo se conoce un dato.	

Sin embargo, estos cinco problemas enunciados son análogos a cuatro casos generales de triángulos oblicuángulos y escalenos, como se deduce del cuadro comparativo que se inserta a continuación. Se omiten las construcciones gráficas de los cinco problemas de triángulos rectángulos, por la analogía anteriormente indicada y por la elementalidad de los mismos.

OBLICUANGULOS Y ESCALENOS			RECTANGULOS		
Problemas	Datos.	Figs.	Problemas	Datos.	Figs.
II	3.- b, c y A	34	I'	1.- b y c A=90°	No se realizan por ser análogos
III	5.- a, b y A	35	II'	2.- a y b A=90°	
V	14.- a, B y A	37	III'	4.- a y B A=90°	
IV	12.- b, C y A	36	IV'	6.- b y C A=90°	
V	17.- b, B y A	37	V'	8.- b y B A=90°	

5.3.- Triángulos isósceles.

Como en los rectángulos, para determinar un triángulo isósceles es preciso conocer dos datos, pues, siempre se conocen las relaciones $b=c$ y $B=C$. Por ello, el número de combinaciones de sus elementos es $\binom{4}{2} = 6$, que se agrupan en los tres problemas siguientes



COMBINACIONES

PROBLEMAS

- 1.- a y $b=c$ | I".- Los lados.
- 2.- a y $B=C$
- 3.- $b=c$ y A | II".- Un lado y uno de los ángulos que con él se forman
- 4.- $b=c$ y $B=C$
- 5.- a y A | III".- La base y su ángulo opuesto.
- 6.- A y $B=C$ | Al igual que en los triángulos anteriores, este problema es indeterminado, pues sólo se conoce un dato.

Estos tres problemas son análogos a otros tres de triángulos oblicuángulos y escalenos, como puede observarse en el cuadro comparativo siguiente:

OBLICUANGULOS Y ESCALENOS			ISOSCELES		
Problemas	Datos	Figs	Problemas	Datos	Deducidos
I	1.- a, b y c	33	I"	1.- a y $b=c$	---
IV	11.- a, B y C	36	II"	2.- a y $B=C$	$A = 180° - 2B.$
V	14.- a, B y A	37	III"	5.- a y A	$B = C = \frac{180° - A}{2}$

Por lo anterior, se omiten las construcciones de los problemas I" y II" y, sin embargo, por la simplificación que representa su trazado, se ha resuelto el III", en la Fig. 38.

En primer lugar, se traza el ángulo A y su bisectriz, después se toma un punto cualquiera P en uno de sus lados. Por este punto se traza, perpendicular a la bisectriz, un segmento $PQ=a$, que se traslada hasta ocupar su posición en el triángulo solución.

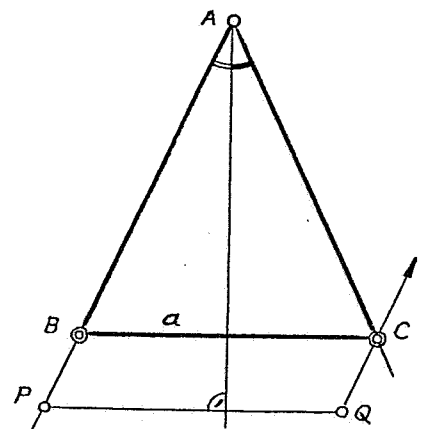


Fig. 38

Como indica su denominación, este método tiene por objeto reducir el problema planteado a la construcción de uno o más triángulos auxiliares de sencilla resolución, en general a algunos de los triángulos de casos generales. Para resolver la construcción de triángulos por este método, se realizan las siguientes operaciones:

- 1.- Se dibuja un triángulo cualquiera de su misma naturaleza que, en principio, se supone la respuesta.
- 2.- En el triángulo anterior, se trazan los elementos homólogos de los datos facilitados.
- 3.- Se localizan los triángulos auxiliares que permiten la obtención del triángulo solución.
- 4.- Finalmente, se dibujan con las magnitudes de los datos facilitados los triángulos auxiliares anteriormente localizados, para así poder realizar los trazados necesarios para obtener el triángulo solución.

En primer lugar, como práctica de este método, se resuelven los casos más sencillos: aquellos que necesitan un sólo triángulo auxiliar, que es determinado directamente por los datos del triángulo solución. Por ejemplo:

a).- Datos: a , h_a y m_a . Fig. 39.

Es claro que la construcción de este triángulo no constituye ninguno de los problemas de casos generales, por lo cual se debe tratar de resolver por el método de referencia.

Supuesta conocida la respuesta, triángulo $A'B'C'$, y trazados los elementos homólogos de los datos: a' , h'_a y m'_a , se deduce que el triángulo rectángulo auxiliar $A'H'_aM'_a$ es de fácil construcción, pues, se conoce la hipotenusa m'_a y el cateto h'_a , problema II' de casos generales.

Construido el triángulo rectángulo AH_aM_a con la magnitud de los datos dados, se obtienen los vértices B y C, pues, $\overline{M_aB} = \overline{M_aC} = a/2$.

b).- Datos: b , v_a y A . Fig. 40.

También, en este caso, el triángulo auxiliar $A'V'_aC'$ está determinado por los elementos homólogos de los datos facilitados, es decir, b' , v'_a y $A'/2$, que constituyen el problema II de casos generales.

Construidos el triángulo AV_aC , el tercer vértice se obtiene al trazar el ángulo $A/2$ sobre v_a .

A continuación, se resuelven, por este método, aquellos triángulos que necesitan de un sólo triángulo auxiliar pero que no es determinado directamente por los datos facilitados. A título de ejemplo se resuelven los siguientes:

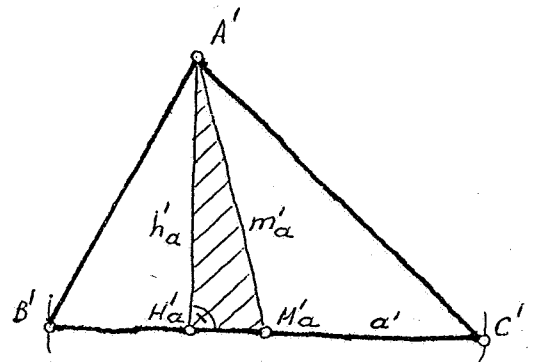


Fig. 39

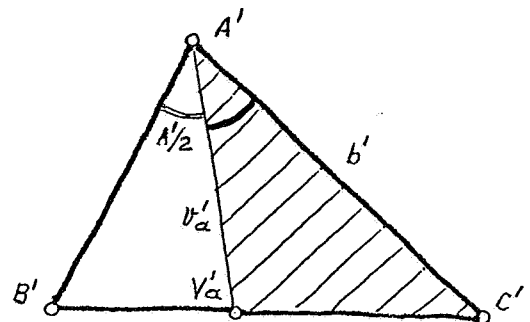


Fig. 40

c).- Datos: b, c y m_a . fig. 41.

Como en los ejemplos anteriores, se supone conocida la respuesta : triángulo $A'B'C'$.

El triángulo auxiliar $A'B'D'$ está determinado por sus tres lados: b', c' y $2m'_a$, por lo que es de fácil construcción.

Trazado con sus verdaderas dimensiones el triángulo ABD , se obtiene el tercer vértice C al ser $a/2 = BM_a = M_aC$.

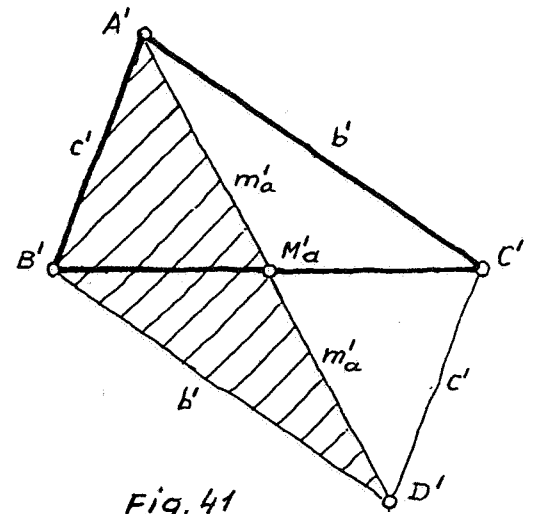


Fig. 41

d).- Datos: $A=90^\circ$, a y $(b+c)$. Fig. 42.

Se supone el triángulo $A'B'C'$ como respuesta al problema, se lleva un cateto sobre el otro -en la figura b' sobre c' - para obtener el segmento $b'+c'$. El triángulo $C'D'B'$ es válido como auxiliar, pues, se puede construir, al conocerse el ángulo $D'=45^\circ$, $B'D'=b'+c'$ y $B'C'=a'$; a partir de él, se construye fácilmente el triángulo $A'B'C'$.

Al delinear el triángulo CDB se pueden obtener dos soluciones -en realidad, un sólo triángulo apoyado en uno u otro cateto-, excepto si la solución es un triángulo rectángulo isósceles.

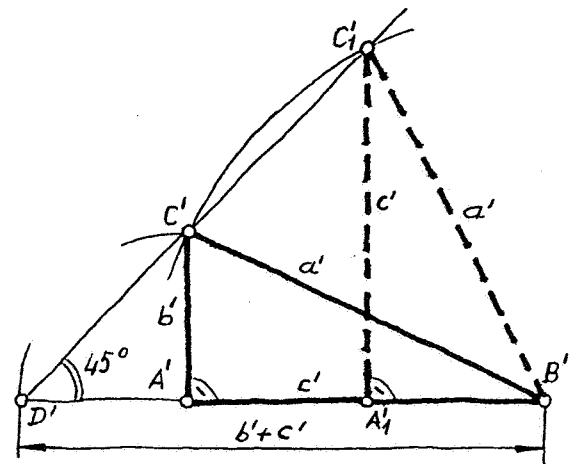


Fig. 42

e).- Datos: $a, (b+c)$ y A . Fig. 43.

Suponiendo que la respuesta es un triángulo conocido $A'B'C'$, se lleva aditivamente un lado sobre el otro para obtener el dato $(b'+c')$, en la figura se ha llevado b' sobre c' . El triángulo $B'C'D'$ es el auxiliar en este caso, del que se conocen $B'C'=a'$, $B'D'=c'+b'$ y el ángulo $D'=A'/2$ (problema III de casos generales). El triángulo $A'C'D'$ es isósceles y el ángulo opuesto a la base $C'D'$ es suplementario del A' , por lo cual $C'D'=A'/2$; la base $C'D'$ es paralela a la bisectriz v'_a .

Delineado el triángulo BCD , se traza la mediatriz de CD para obtener el tercer vértice A del triángulo solución.

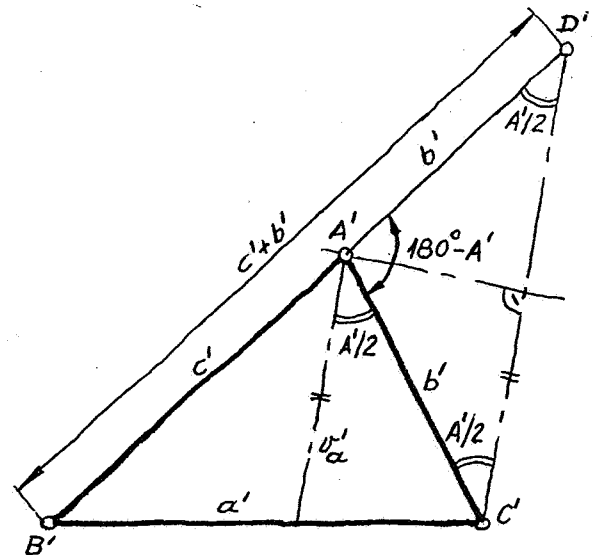


Fig. 43

Finalmente, existen otros casos en los que es preciso resolver más de un triángulo auxiliar y, a veces, de difícil localización. Como ejemplos de este grupo de problemas se exponen los siguientes:

f).- Datos: h_a, m_a y R . Fig. 44

Se supone que el triángulo $A'B'C'$ es la solución y se trazan sobre él los datos facilitados. En este caso, es fácil localizar los dos triángulos auxiliares $A'H_aM'_a$ y $A'M'_aC'$, que proporcionan la solución.

En efecto, primero se delinea el triángulo AH_aM_a , que no ofrece dificultad alguna, y por M_a se traza la perpendicular a H_aM_a que es, a su vez, mediatriz del aún desconocido lado BC . Como es sabido, en la mediatriz se halla el circuncentro C_c , a una distancia R del vértice A , es decir, se traza el segundo triángulo auxiliar AM'_aC' . Al trazar la circunferencia circunscrita se hallan los vértices B y C .

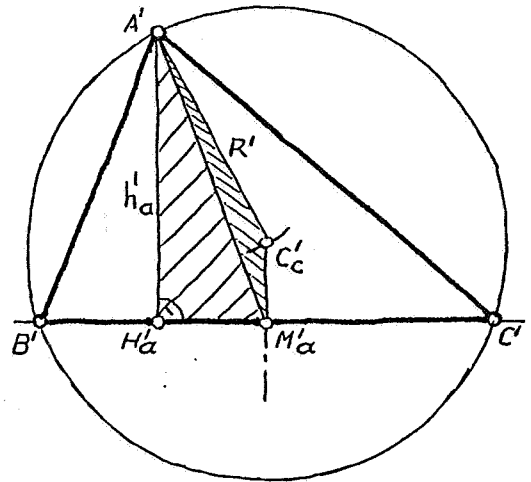


Fig. 44

g).- Datos: a, h_a y $B-C$. Fig. 45

Sobre el triángulo $A'B'C'$, que se supone es la solución, se traza el segmento $C'D'=2h'_a$ paralelo a esta altura. El triángulo rectángulo $B'C'D'$ se puede construir fácilmente, pues, se conocen sus dos catetos.

El segundo triángulo auxiliar es el $A'B'D'$, también de fácil construcción, pues el vértice A' está en el arco capaz del ángulo γ , visto bajo el segmento $B'D'$, y en la mediatriz de $C'D'$, por ser isósceles el triángulo $A'C'D'$. La única dificultad estriba en denotar que $\gamma = 180^\circ - (B-C)$.

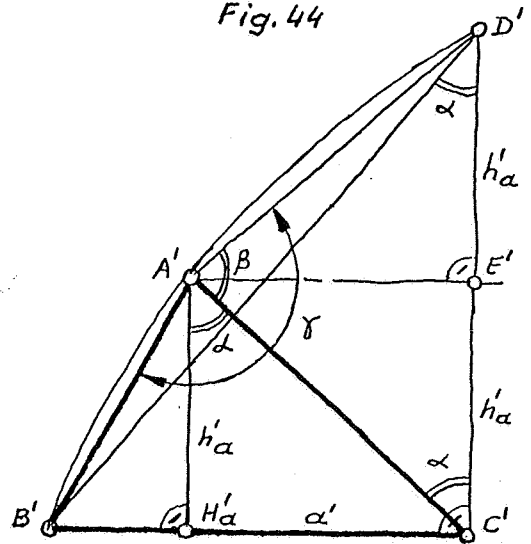


Fig. 45

En efecto, $\alpha = 90^\circ - C$ y $\beta = 2(90^\circ - \alpha)$, pues, $A'H'_a$ y $A'E'$ son perpendiculares. De lo anterior, se deduce que $\beta = 2C$. Por otra parte, $\gamma = A + \beta = A + 2C = 180^\circ - (B+C) + 2C = 180^\circ - (B-C)$; por tanto, γ es un ángulo conocido.

h).- Datos: h_a, m_a y A . Fig. 46.

Se supone que el triángulo $A'B'C'$ es la solución y se observa que el triángulo $A'H_aM'_a$ es de fácil construcción, como se ha visto en alguno de los casos anteriormente expuestos. Por otra parte, si se traza el paralelogramo $A'B'D'C'$ se obtiene el segundo triángulo auxiliar $A'D'C'$ del que se conoce $A'D'=2m'_a$ y que el vértice C' está en el arco capaz del ángulo α , visto bajo el segmento anterior, y en la recta $H'_aM'_a$.

La posible dificultad, nuevamente, puede estar en denotar que $\alpha = B+C = 180^\circ - A$. Para hallar el triángulo solución ABC , basta delinear las construcciones antes citadas, con las magnitudes de los datos.

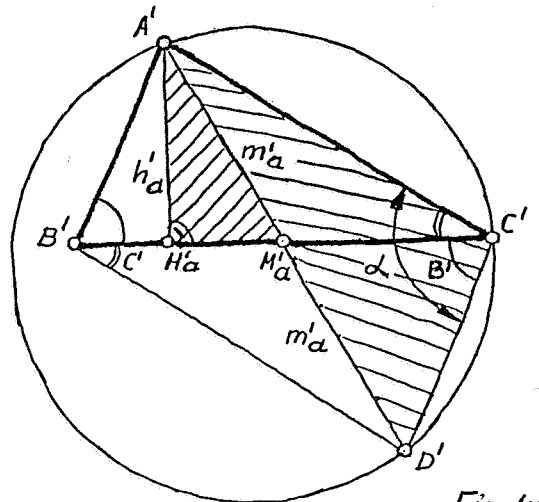


Fig. 46

7.- METODO DE LAS RELACIONES GEOMETRICAS.

Después de una suficiente práctica en el método anterior, se presentan problemas para los que no existen triángulos auxiliares o que, aun existiendo, éstos no proporcionan el triángulo solución. En estos casos, se debe pensar que existen lugares geométricos o propiedades geométricas que relacionan los datos y proporcionan la solución.

7.1.- Aplicaciones de las propiedades fundamentales de los elementos notables.

A continuación, se resuelve la construcción de un triángulo, al menos, mediante la aplicación de cada una de las propiedades de los elementos notables, expuestas en este estudio. A título de ejemplo, se solucionan los siguientes problemas:

a).- Datos: M_a , M_b y M_c . Fig. 47.

Los pies de las medianas del triángulo solución, se facilitan mediante los datos suficientes para definir el triángulo $M_a M_b M_c$. Como es sabido, los lados del triángulo solución ABC pasan por los respectivos pies de las medianas, son paralelos y de doble magnitud que los lados que determinan los otros dos puntos medios.

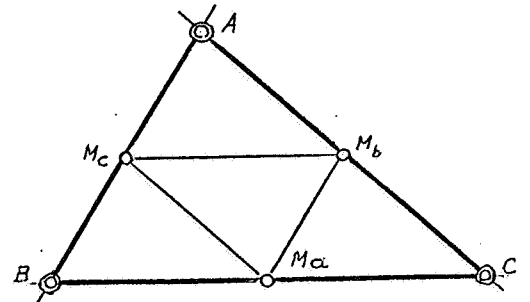


Fig. 47

b).- Datos: H_a , H_b y H_c . Fig. 48.

El triángulo dado $H_a H_b H_c$ es órtico del triángulo solución ABC. Por ello, los lados de este último son perpendiculares a las correspondientes bisectrices interiores del primero, pues, como es sabido, "las alturas de un triángulo son bisectrices interiores de su triángulo órtico".

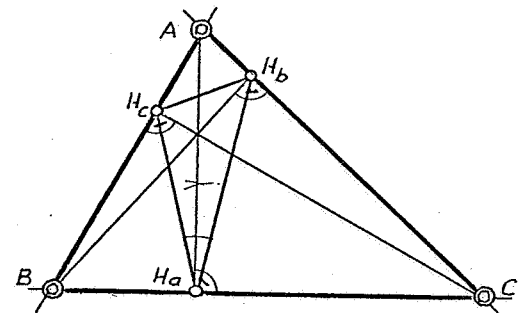


Fig. 48

c).- Datos: I_a , I_b e I_c . Fig. 49.

Este problema es inverso del anterior, es decir, los vértices del triángulo solución son los pies de las alturas del primero, pues, "un triángulo es órtico del que determinan su excentros".

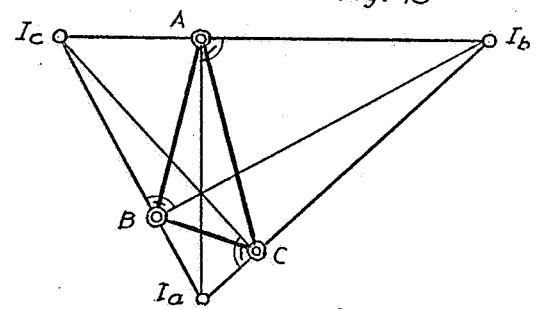


Fig. 49

d).- Datos: m_a , m_b y m_c . Fig. 50.

Se construye el paralelogramo $B_a B_c D C$, del que se conoce $B_a B_c = D C = 2m_b/3$, $B D = C B_a = 2m_c/3$ y la diagonal $B_a D = 2m_a/3$. Después, se prolongan los lados $B B_a$ y $C B_a$ en las magnitudes $B_a M_b = m_b/3$ y $B_a M_c = m_c/3$, respectivamente. Finalmente, el vértice A es el punto de intersección de las rectas $B M_c$ y $C M_b$.

Estas construcciones se fundamentan en que "el baricentro de un triángulo dista de sus vértices doble que de los respectivos pies de las medianas".

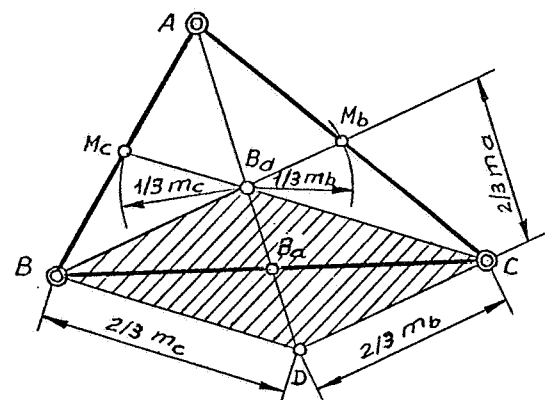


Fig. 50

e).- Datos: b, B y $2p$. Fig. 51.

Como "los segmentos de tangencia desde los vértices a las circunferencias exinscritas, a los respectivos lados opuestos, -- tienen por valor el semiperímetro", se traza el ángulo B y $BT'_a = BT'_c = p$. Además $BT'_a = BT'_c = p - b$, pues, "los segmentos de tangencia desde los vértices a la circunferencia inscrita, tienen por valor -- la diferencia entre el semiperímetro y el lado opuesto".

Una vez trazadas las circunferencias I_n e I_b , el tercer lado es la tangente común interior a ambas, por lo que existen dos soluciones, cuando no son tangentes entre sí.

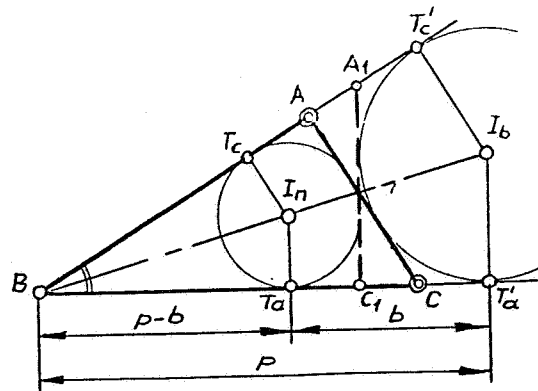


Fig. 51

e₁).- Datos: B, ρ y $2p$. Fig. 52.

Es una pequeña variación del caso anterior, pues, una vez trazado el ángulo B y la circunferencia exinscrita I_b ($BT'_a = BT'_c = p$), se halla la bisectriz del ángulo B para trazar la circunferencia -- inscrita. El resto del trazado es idéntico al realizado en el ejercicio anterior.

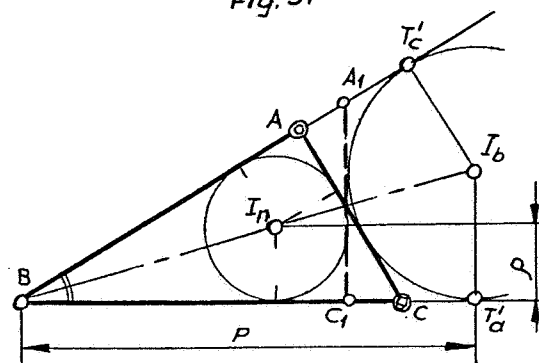


Fig. 52

e₂).- Datos: $b-c, \rho$ y ρ_a . Fig. 53.

Sobre una recta cualquiera se sitúa el segmento $T'_a T'_c = b-c$, pues, "la distancia entre los puntos de tangencia de las circunferencias inscrita y exinscrita con el correspondiente lado del -- triángulo, es igual a la diferencia entre los otros dos".

Mediante los radios ρ y ρ_a se trazan ambas circunferencias y sus tangentes comunes exteriores proporcionan el triángulo solución ABC .

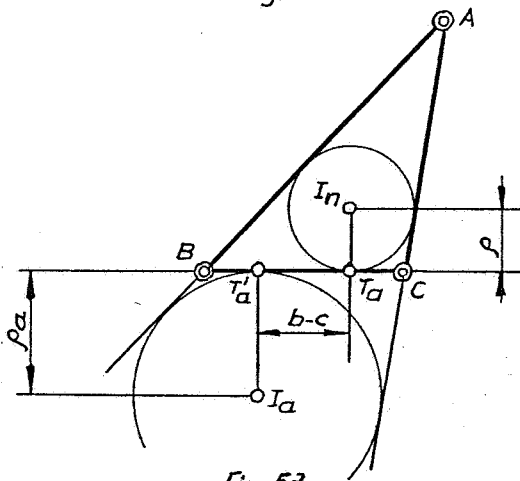


Fig. 53

f).- Datos : Vértice B, O_r y C_c . Fig. 54.

Los puntos dados pueden ser determinados por los datos necesarios para construir el triángulo $O_r B C_c$.

Situados los datos, se traza la circunferencia circunscrita al triángulo solución, pues $BC_c = R$. Por otra parte, la recta BO_r es soporte de la altura h_b y como "los simétricos del ortocentro, respecto de los lados del triángulo, pertenecen a la circunscrita", se obtiene directamente O'' . El lado b , es mediatriz del segmento $O_r O''$, lo que permite obtener los vértices A y C .

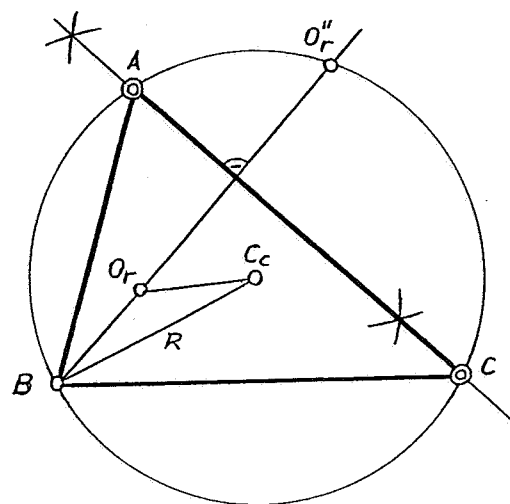


Fig. 54

f₁).- Datos: h_a , m_a y v_a . Fig. 55.

Se construye, como en otros casos en los que son datos h_a y m_a , el triángulo rectángulo AH_aM_a y con centro en A y radio v_a se sitúa esta bisectriz AV_a . Por otro lado, el circuncentro C_c está en la mediatriz que pasa por M_a y en la del segmento AD. El punto D es intersección de la primera de las mediatrices citadas y de la prolongación de v_a , pues, como es sabido, "las bisectrices de los ángulos de un triángulo se cortan con las mediatrices de los lados opuestos en puntos de la circunferencia circunscrita (2ª propiedad).

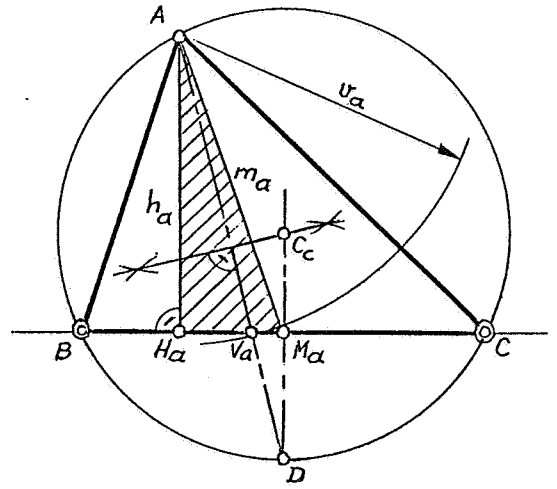


Fig.55

El trazado de la circunferencia circunscrita proporciona los otros dos vértices B y C.

f₂).- Datos: C_c , I_n e I_a . Fig. 56.

Construido el triángulo $I_n C_c I_a$, cuyos vértices son los datos, el punto medio W_a del segmento $I_n I_a$ pertenece a la circunferencia circunscrita, pues, como es conocido, "la circunferencia circunscrita a un triángulo pasa por los puntos medios de los segmentos que unen sus exincentros con el incentro" (3ª propiedad).

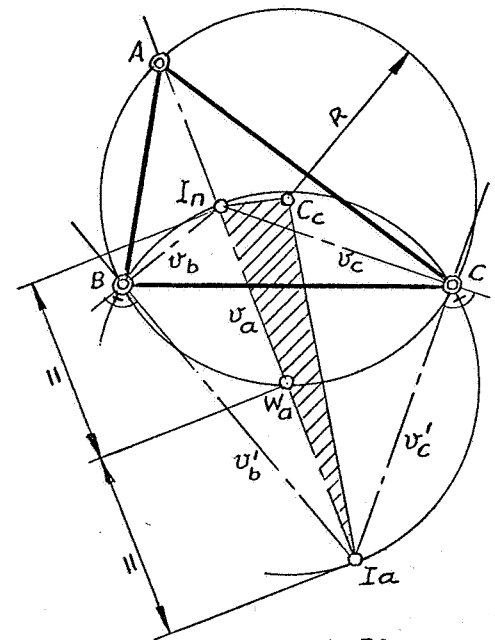


Fig.56

Por otra parte, como los segmentos $BI_n - BI_a$ y $CI_n - CI_a$, de las bisectrices interiores y exteriores de los ángulos B y C, son catetos de dos triángulos rectángulos de hipotenusa el segmento $I_n I_a$, se traza la circunferencia de diámetro este segmento y los puntos de intersección con la circunscrita son los vértices B y C; el vértice A se obtiene muy fácilmente

g).- Datos: O_r , B_a y H_a . Fig. 57.

Como el "baricentro de un triángulo está alineado con su ortocentro y circuncentro, a doble distancia del primero que del segundo" (Recta de Euler), se determina C_c . La recta soporte del lado $BC=a$ pasa por H_a y es ortogonal a $O_r H_a$. En ella está M_a y se tiene que $\overline{B_a A} = 2 \overline{B_a M_a}$, con lo cual se obtiene el vértice A. Los vértices B y C se obtienen al trazar la circunferencia circunscrita con radio $R = \overline{C_c A}$.

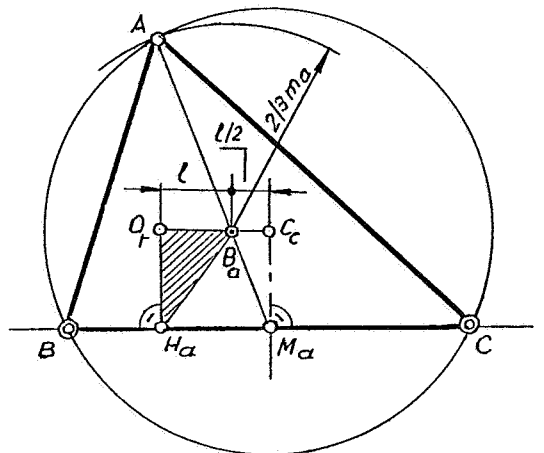


Fig.57

h).- Datos: Vértices B-C y F (centro de la circunferencia de Feuerbach). Fig. 58.

El punto medio M_a del lado $BC=a$ pertenece a la circunferencia de Feuerbach, por lo cual FM_a es su radio ρ_f . Por otra parte, el centro de la circunferencia circunscrita está en la mediatriz del lado BC y como ambas circunferencias son homólogas, en una homotecia de razón $K=-1/2$, el circuncentro dista de B y C el radio $R=2\rho_f$.

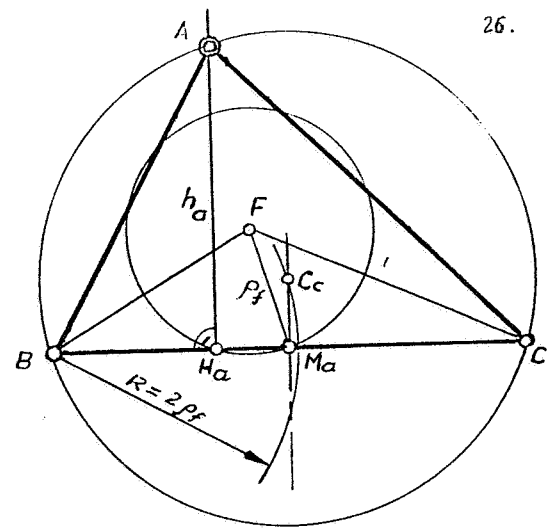


Fig. 58

Asimismo, pertenecen a la circunferencia de Feuerbach - los pies de las alturas del triángulo solución, por lo que por H_a - intersección de la circunferencia de los nueve puntos con BC- se traza la recta soporte de h_a , la cual corta a la circunscrita - en el vértice A, que completa la solución.

i).- Circunferencia circunscrita, cuerda BD, recta r, (en la que se hallan los pies de las perpendiculares desde D a los lados).

Fig. 59.

Como r es una recta de Simson, es decir, en ella están - los puntos de A' , B' y C' , pies de las perpendiculares trazadas desde D a los lados del triángulo solución. En la circunferencia de diámetro BD están los puntos A' y C' , pues, por el vértice B pasan los lados a y c .

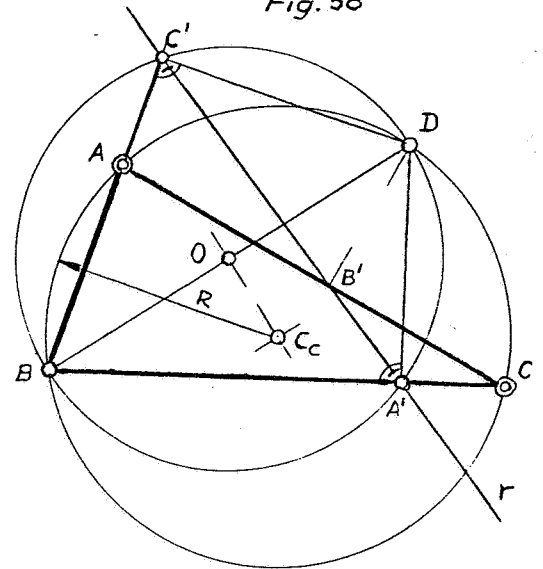


Fig. 59

Hallados estos dos puntos, directamente se obtienen los vértices A y C, puntos de intersección de las rectas BA' y BC' con la circunferencia circunscrita.

j).- Vértice C, V_a y V'_b . Fig. 60.

Supuesta conocida la respuesta y trazada la bisectriz v_c , se deduce que

$$\frac{V'_b A}{V'_b C} = \frac{c}{a}, \frac{V_a C}{V_a B} = \frac{-b}{c} \text{ y } \frac{V_c B}{V_c A} = \frac{-a}{b}, \text{ cuyo producto es :}$$

$$\frac{V'_b A}{V'_b C} \cdot \frac{V_a C}{V_a B} \cdot \frac{V_c B}{V_c A} = 1, \text{ pues, } \frac{c}{a} \cdot \frac{-b}{c} \cdot \frac{-a}{b} = 1$$

Por lo anterior y según el teorema de Menelao, la recta $V_a V'_b$ es una transversal del triángulo, que corta al lado c en V_c . Generalizando se tiene:

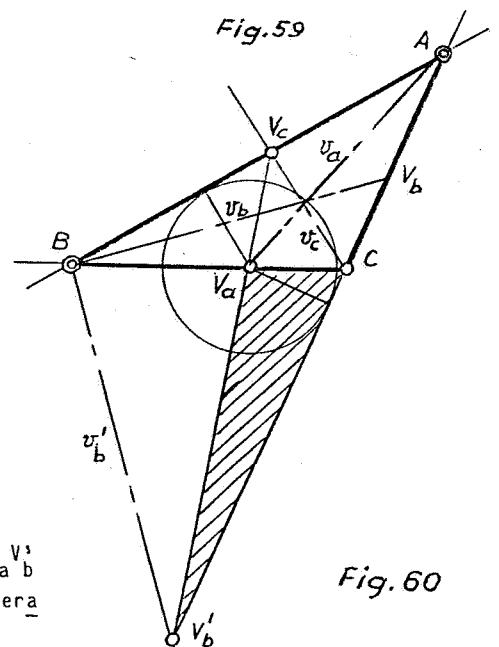


Fig. 60

El pie de la bisectriz interior de un ángulo del triángulo y el pie de la bisectriz exterior correspondiente a otro, determina una transversal en la que se encuentra el pie de la bisectriz interior del tercer ángulo.

Por todo ello, construido el triángulo $V_a V_b C$ se traza v_c y se determina V_c , desde el que se traza la tangente a la circunferencia de centro V_a y tangente a la recta $V_b C$, con lo que queda resuelto el problema planteado.

K).- Datos: a , c y que v_b pasa por P (punto de intersección de h_a y m_c). Fig. 61.

Se supone conocida la respuesta y como v_b , h_a y m_c , deben concurrir en el punto P , se debe cumplir el teorema de Ceva, es decir,

$$\frac{H_a B}{H_a C} \cdot \frac{V_b C}{V_b A} \cdot \frac{M_c A}{M_c B} = -1, \text{ pero, en este caso, } \frac{M_c A}{M_c B} = -1 \text{ y } \frac{V_b C}{V_b A} = \frac{-a}{c}$$

por lo que $\frac{H_a B}{H_a C} = \frac{-c}{a}$ o $(H_a B C) = \frac{-c}{a}$

Por lo anterior, se determina H_a y, trazada la recta soporte de h_a , se determina en ella el vértice A , que dista de B - el lado c conocido.

1).- m_a , m'_a (isogonal de la anterior y que se denomina simediana) y $M_a M'_a$ (segmento que determinan los pies de las dos primeras). Fig. 62

Como las bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo lo son también de los pares de rectas isogonales, respecto de los correspondientes lados, la bisectriz v_a tiene esa misma cualidad respecto de la mediana m_a y su simediana m'_a .

Construido el triángulo $A M_a M'_a$, se traza la recta soporte de v_a como bisectriz del ángulo que forman m_a y m'_a .

El resto del trazado es el mismo que se utiliza para solucionar el problema f_1).

1₁).- h_a , v_a y $b \cdot c = K^2$. Fig. 63.

Se construye el triángulo $A H_a V_a$ y, como es sabido, "el producto de dos lados de un triángulo es igual al producto de la altura que concurre con ellos y el diámetro de la circunferencia circunscrita", de donde $b \cdot c = 2R \cdot h_a$, por lo cual se determina R , - radio de la circunferencia circunscrita, como tercero proporcional de $(b \cdot c) = K^2$ y h_a .

Además, las alturas de un triángulo y las rectas que unen al circuncentro con los respectivos vértices, son isogonales respecto de los correspondientes lados". Por ello, se traza fácilmente la recta AF , que permite situar C_c y resolver el problema.

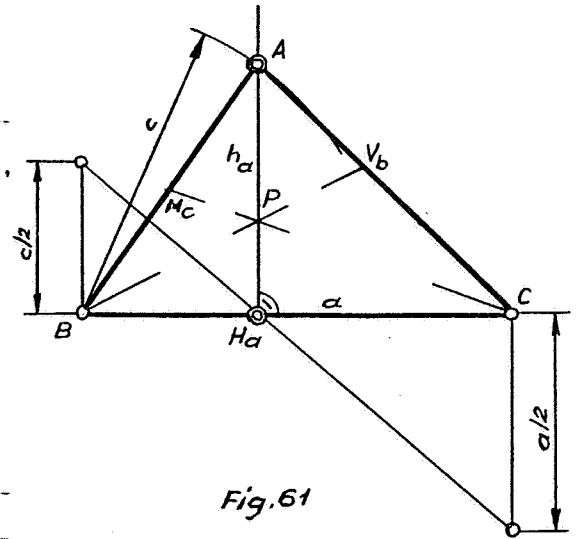


Fig. 61

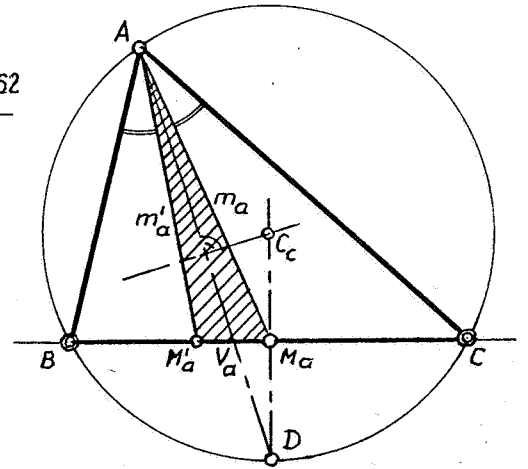


Fig. 62

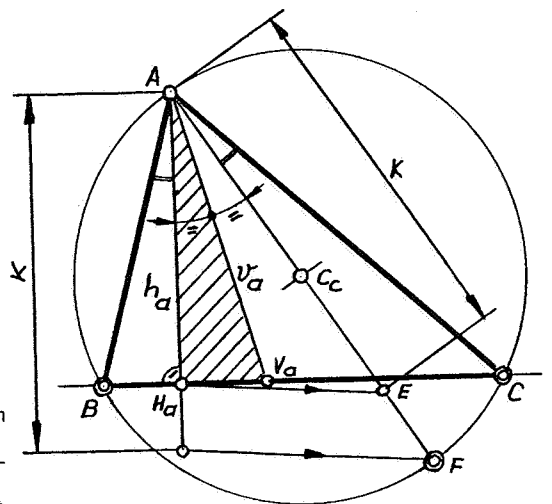


Fig. 63

7.2.- Aplicaciones de lugares geométricos y de las relaciones métricas.

Al igual que en el apartado anterior, a continuación se resuelve la construcción de triángulos mediante la aplicación de lugares geométricos o de relaciones métricas fundamentales que, a su vez, relacionan los elementos facilitados como datos. A título de ejemplo, se resuelven los siguientes problemas:

a).- Datos: m_b , m_c y A. Fig. 64.

En primer lugar se traza el arco capaz del ángulo A, visto bajo una de las medianas dato; en la figura se ha trazado sobre la m_c .

Como es sabido, el baricentro B_a dista del vértice C, la distancia $B_a C = 2m_c/3$. Además, M_b pertenece al lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas del arco capaz, que pasan por C. El citado lugar geométrico es la circunferencia de diámetro $O_1 C$, pues, cualquier punto de ella, como el M_b , determina un triángulo rectángulo $O_1 M_b C$ y, por tanto, $O_1 M_b$ es mediatriz de la cuerda CA, en este caso. El resto de la construcción no ofrece dificultad.

b).- Trazar por los puntos P, Q y R los lados a, b y c de un triángulo ABC. Fig. 65.

Mediante una figura auxiliar -no representada- se traza un triángulo de lados a, b y c, para obtener sus ángulos interiores.

Sobre dos de los segmentos PQ, QR y RP, en la figura sobre RP y PQ, se trazan los arcos capaces de los ángulos interiores B y C del triángulo, vistos, respectivamente, desde estos segmentos; en la figura, los arcos capaces tienen por centros O_1 y O_2 , respectivamente.

Por el punto P, se traza el lado a, comprendido entre los dos arcos capaces. Para ello, se traza el triángulo rectángulo $O_1 M O_2$, de forma que el cateto $O_1 M = a/2$, y es paralelo al lado $BC = a$.

c).- Datos: a, b+c y B-C. Fig. 66.

En el ejercicio e), de los resueltos por el método de "reducción a casos generales", se razona que al situar el segmento suma de dos lados se forma un triángulo isósceles, en la figura el $A'BA$, cuya base es paralela a la bisectriz del ángulo exterior opuesto a ella, es decir, $A'B$ es paralela a AV_a .

Por otro lado, α y β son ángulos exteriores de los triángulos $AV_a B$ y $AV_a C$, por lo cual $\alpha = A/2 + B$ y $\beta = A/2 + C$, de donde $\alpha - \beta = B - C$ y como $\alpha + \beta = 180^\circ$, se obtiene que: $\alpha = 90^\circ + \frac{B-C}{2}$ y $\beta = 90^\circ - \frac{B-C}{2}$.

Por lo anterior, se construye el triángulo $A'BC$ y se traza la mediatriz de $A'B$, para así obtener el triángulo solución ABC.

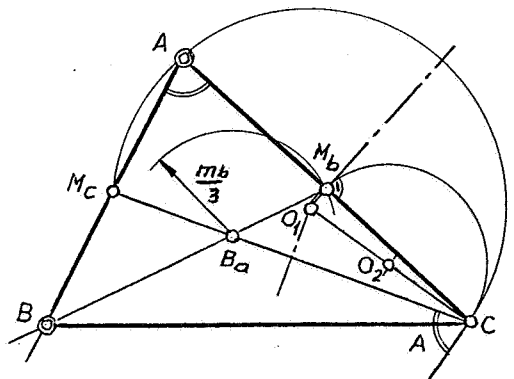


Fig. 64

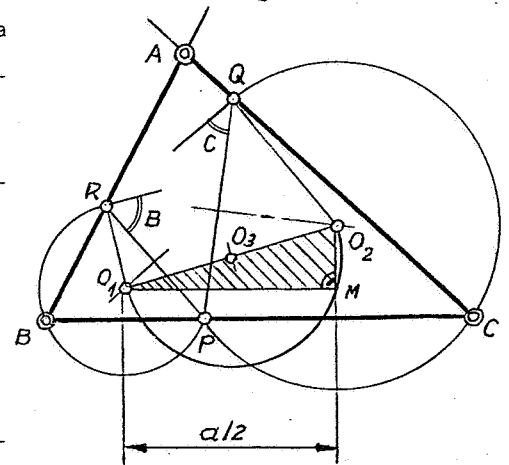


Fig. 65

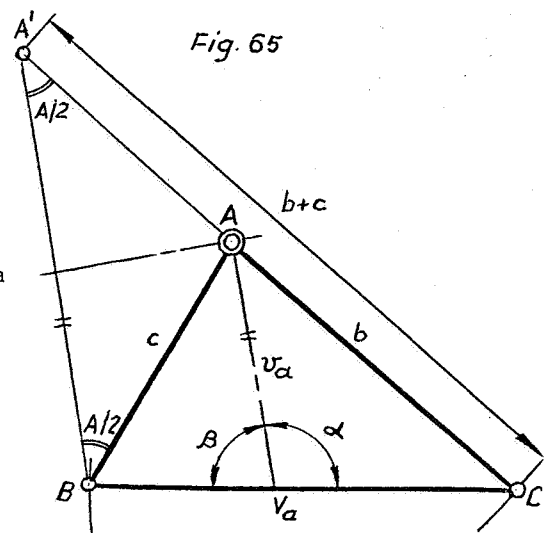


Fig. 66

También se puede resolver la construcción de triángulos al relacionar los datos mediante transformaciones geométricas (traslación, giros, simetría, homotecia...), potencia respecto de la circunferencia, -- etc. Como ejemplo se resuelven los siguientes casos:

d).- Datos: b , c y v_a . Fig. 67.

Si se supone conocida la respuesta, se deduce que $\frac{BV_a}{V_aC} = \frac{c}{b}$
 o lo que es igual $\frac{BV_a}{c} = \frac{V_aC}{b} = \frac{BV_a + V_aC}{c+b}$, de donde $\frac{V_aC}{BV_a + V_aC} = \frac{b}{b+c}$,
 es decir, $\frac{V_aC}{a} = \frac{b}{b+c}$.

De lo anterior, se deduce que los pares de puntos V_a-B y $A-A'$ son homotéticos, con centro de homotecia el vértice C .

Por ello, en la representación a), se traza el segmento $CA'=b+c$ y la circunferencia de centro A y radio c . Se halla un par de puntos homólogos $M-M'$ y el punto A'' , homotético del centro A de la primera circunferencia. Trazada la circunferencia homotética, de radio $A''A$, con centro en A y radio v_a se determina en ella V_a . El resto del trazado no ofrece dificultad.

Otra forma de resolver esta construcción se deduce de la relación: $\frac{AC}{A'C} = \frac{v_a}{A'B}$, o lo que es igual, $\frac{b}{b+c} = \frac{v_a}{A'B}$, de donde se deduce que puede hallarse $A'B$ como cuarto proporcional. De ahí que pueda construirse el triángulo $A'BA$, representación b), y la prolongación de $A'A$ en la magnitud b proporciona el tercer vértice C .

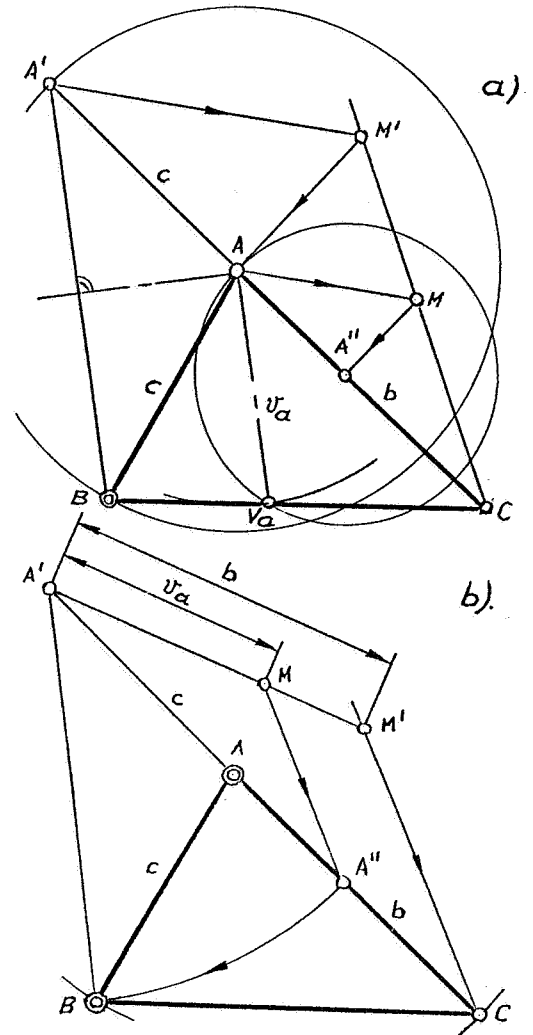


Fig. 67

e).- Datos: h_a , h_b y h_c . Fig. 68

Desde un punto P se trazan tres rectas r , s y t , en cualquier dirección, de longitudes $PL=h_a$, $PN=h_b$ y $PM=h_c$, así como la circunferencia O que determinan los puntos L , M y N . La potencia de P , respecto de la circunferencia, se expresa en las tres direcciones por: $h_a \cdot PQ = h_b \cdot PS = h_c \cdot PR$ (1).

Por otra parte, el doble de la superficie del triángulo solución ABC se expresa por: $h_a \cdot a = h_b \cdot b = h_c \cdot c$ (2).

Al dividir miembro a miembro las expresiones (1) y (2) se obtiene que: $\frac{PQ}{a} = \frac{PS}{b} = \frac{PR}{c}$, deduciéndose que los tres segmentos son los lados a' , b' y c' de un triángulo $A'B'C'$, semejante al de la solución.

Finalmente, se construye el triángulo $A'B'C'$ y sobre una de sus alturas, en la figura h'_a , se lleva la correspondiente altura del triángulo solución ABC .

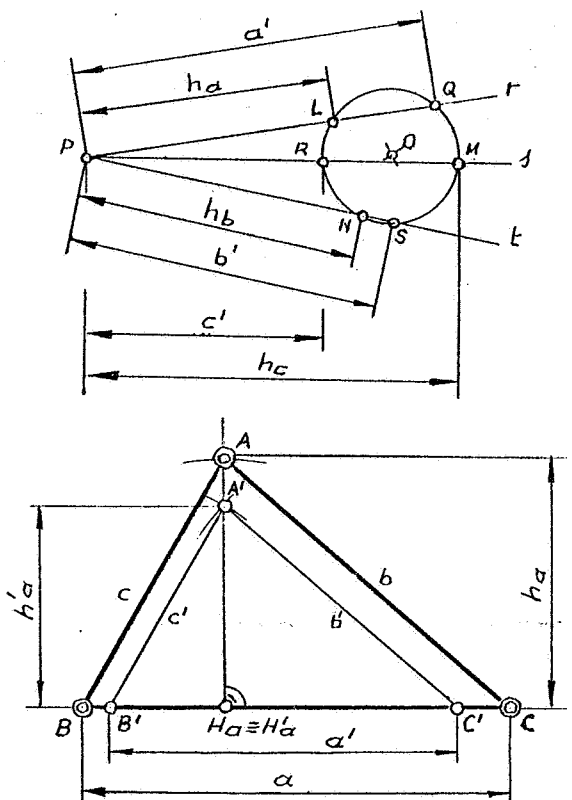


Fig. 68

Otra forma de obtener el triángulo solución, para la cual no se ha trazado figura, consiste en construir el triángulo de lados h_a, h_b y h_c . Si a las alturas de éste triángulo se las denomina h'_a, h'_b y h'_c , - el doble de su superficie se expresa por $h'_a \cdot h'_b \cdot h'_c = K^2$ (3).

El dividir las expresiones (2) y (3) se obtiene que $a/h'_a = b/h'_b = c/h'_c$, por lo cual se deduce que el triángulo de lados h'_a, h'_b y h'_c es semejante al de la solución. A continuación, se procede como en la solución anterior.

Finalmente, se resuelve la construcción de un triángulo, al menos, mediante la aplicación de los lugares geométricos consecuencia de las relaciones métricas fundamentales expuestas en el punto 3.

f).- Datos: a, A y $b^2 + c^2 = K^2$. Fig. 69.

En primer lugar, se traza el arco capaz del ángulo A , visto bajo el segmento $BC=a$. El vértice A pertenece al arco - capaz trazado y a la circunferencia lugar geométrico de los - puntos cuya suma de cuadrados de distancias a dos puntos fi- - jos, los vértices B y C , es una cantidad constante K^2 . Esta - última circunferencia tiene por centro el punto M_a y por radio m_a , según se expone en el punto 3.2.

El valor m_a se obtiene mediante la construcción del - triángulo rectángulo BM_aP , pues, se cumple $M_aP^2 = m_a^2 = K^2/2 - (a/2)^2$ ($\sqrt{K^2/2}$ es lado del cuadrado de superficie $K^2/2$). Los -- puntos de intersección de ambas circunferencias, de existir, dan lugar a las dos soluciones del problema.

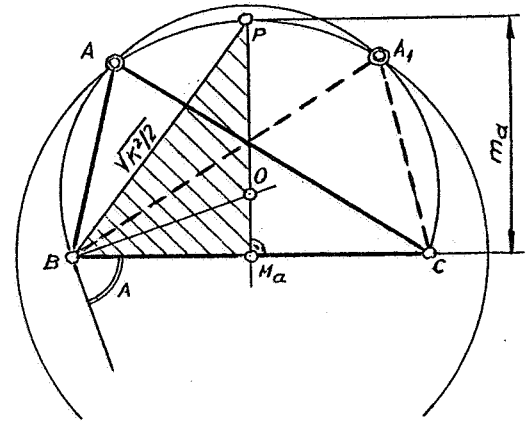


Fig. 69

g).- Datos: a, A y $b^2 - c^2 = k^2$. Fig. 70

Al igual que en el ejercicio anterior, se traza el ar - co capaz del ángulo A visto bajo el segmento $BC=a$. En este ca - so, el vértice A pertenece, además, a la recta lugar geométri - co de los puntos cuya diferencia de cuadrados de distancias a los puntos fijos B y C es un valor constante K^2 .

Esta recta es soporte de h_a , según se expone en el -- punto 3.2. Por lo anterior, en una figura auxiliar se constru - ye uno de los triángulos rectángulos MNP_1 , de cateto $MN=K$, -- del cual se deduce que $K^2 = MP_1^2 - NP_1^2$. Por esto, en la figura prin - cipal, se obtiene un punto A_1 al tomar $BA_1 = NP_1$ y $CA_1 = MP_1$, cum - pliéndose que $BA_1^2 = BH_a^2 + HA_1^2$ y $CA_1^2 = CH_a^2 + HA_1^2$, cuya diferencia es $CA_1^2 - BA_1^2 = CH_a^2 - BH_a^2 = K^2$.

Lo anterior, demuestra la pertenencia de A_1 a la rec - ta lugar geométrico.

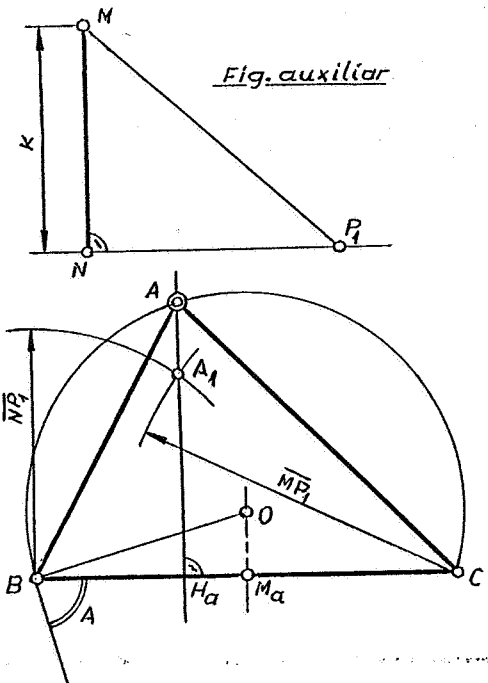


Fig. 70

h).- Datos: a, A y $\frac{b}{c} = K$. Fig. 71.

Como en los dos casos anteriores, se traza el arco capaz del ángulo A , visto bajo el segmento $BC=a$. En este caso, el vértice A pertenece, además, al lugar geométrico de los puntos cuya razón de distancias a dos puntos fijos, B y C , es un valor constante.

Según se expone en 3.3, este lugar geométrico es -- una circunferencia de diámetro $V_a V'_a$, pies de las bisectrices interior y exterior del vértice A . Como $(V_a V'_a BC) = -1$, mediante dos segmentos m y n , de razón $m/n=K$, se obtienen los dos puntos V_a y V'_a , de conformidad con lo expuesto en el estudio de cuaternas armónicas.

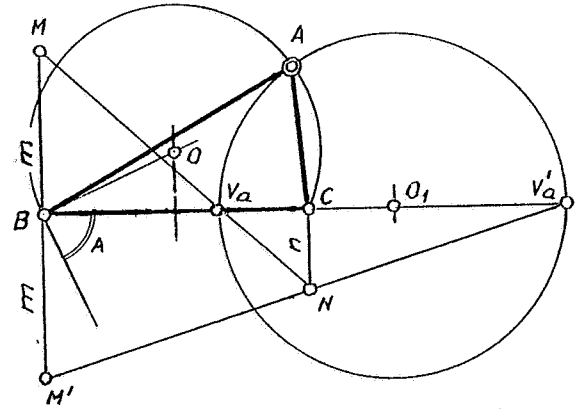


Fig.71

La intersección del arco capaz y de la circunferencia, es el tercer vértice A del triángulo solución.

En ocasiones, la aplicación de estos lugares geométricos no se deduce directamente de los lados, sino del análisis de las relaciones de los mismos, como en el ejemplo siguiente:

h₁).- Datos: c, A y $a/m_a = K$. Fig. 72.

Supuesta conocida la respuesta, se deduce que :

$$\frac{a}{m_a} = \frac{BC}{AM_a} = \frac{2BM_a}{AM_a} = K, \text{ de donde } \frac{BM_a}{AM_a} = \frac{K}{2} = \frac{m}{n} \text{ (1).}$$

Por tanto, el lugar geométrico de los puntos que -- cumplen esta relación se obtiene como en el ejercicio anterior, pues, $(PP'AB) = -1$. Por ello, se obtienen P y P' como puntos de una cuaterna armónica, de la que se conoce el valor absoluto de sus razones simples.

A continuación, por M_c se traza el ángulo A y el -- punto común con la circunferencia lugar geométrico de los -- puntos que cumplen la relación (1), es el pie de la mediana m_a , que permite completar el triángulo solución $\triangle ABC$.

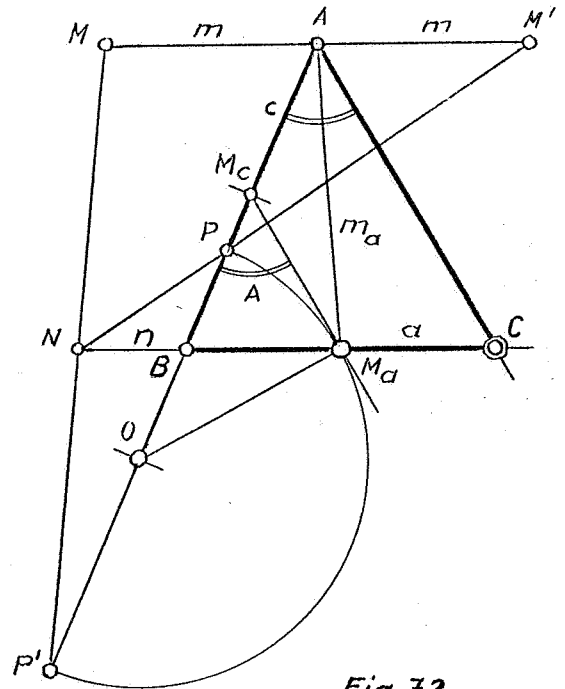


Fig.72

Para finalizar, se debe insistir en que por la sólo resolución de, aproximadamente, cincuenta triángulos, como en este estudio, o aún con un número mayor, no permite asegurar la posibilidad de resolución de otros ejercicios diferentes, sólomente el conocimiento de los métodos de construcción triángulos y de su -- geometría puede hacer realidad la posibilidad citada.

CUADRILATEROS

1.- CLASIFICACION DE LOS CUADRILATEROS.

Atendiendo a sus diferentes elementos, los cuadriláteros pueden clasificarse de distintas formas, - pero pueden considerarse fundamentales las tres siguientes:

1.1.- Convexos, cóncavos y cruzados.

a). Convexos.- En la Fig. 1, el cuadrilátero ABCD está en uno de los semiplanos que determina la recta soporte de cualquiera de sus lados. En este caso, se dice que el cuadrilátero es convexo.

Un cuadrilátero es convexo cuando pertenece a uno sólo - de los semiplanos que determina la recta soporte de cual - quiera de sus lados.

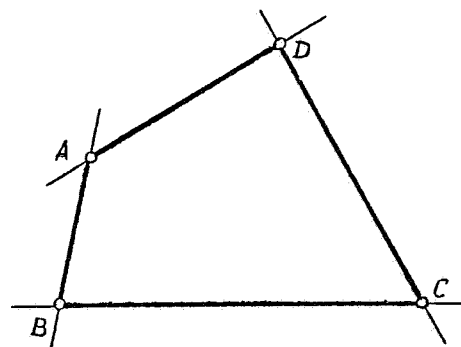


Fig. 1

b). Cóncavos.- En la Fig. 2, el cuadrilátero ABCD se denomina cóncavo, pues, al prolongar el lado AD o CD, el - cuadrilátero pertenece a los dos semiplanos determinados por cada una de estas rectas.

Se dice que un cuadrilátero es cóncavo cuando la recta - soporte de, al menos, uno de sus lados le divide en dos - partes.

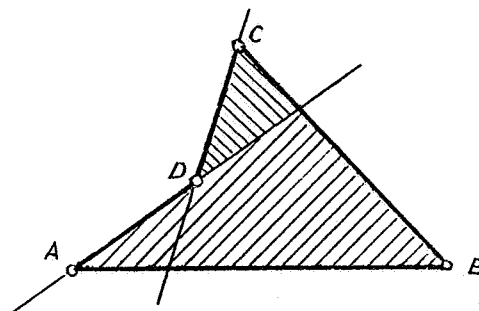


Fig. 2

c).- Cruzados.- En la Fig. 3, los lados no contiguos AB y CD se cortan, descomponiendo al cuadrilátero en dos -- triángulos. En estos casos, el cuadrilátero se denomina cru- - zado.

Un cuadrilátero se denomina cruzado cuando, al menos, un par de lados no contiguos se cortan, o bien, es cóncavo y se descompone en dos polígonos de inferior clase, es de-- cir, en dos triángulos.

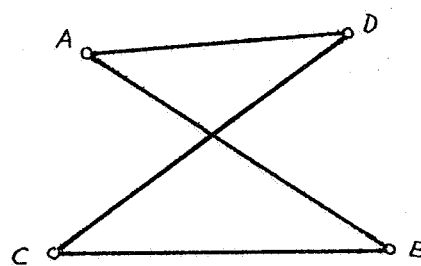


Fig. 3

1.2.- Inscriptibles y circunscriptibles.

Se dice que un cuadrilátero es inscriptible cuando por sus cuatro vértices pasa una circunferencia y sus ángulos interiores están inscritos en ella. Circunstancia que, como es sabido, no se da en todos los -- cuadriláteros, sino solamente en aquellos que cumplen las condiciones de inscriptibilidad.

Análogamente, sólo aquellos que reúnen ciertas condiciones son circunscritos a una circunferencia, - es decir, los lados son rectas tangentes a ella.

A continuación, se exponen las condiciones de inscriptibilidad y circunscriptibilidad de los cuadri- lateros.

a).- Inscriptibles.- Una condición necesaria y suficiente de inscriptibilidad de un cuadrilátero, puede obtenerse de las distintas relaciones de los elementos geométricos. Las principales son las siguientes:

Primera: En función de los ángulos interiores.- Como es sabido, la suma de los cuatro ángulos interiores es de 360° . Además, si el cuadrilátero ABCD está inscrito en una circunferencia, Fig.4, por ser inscritos sus ángulos interiores, se deduce que:

$$A+C = \beta/2 + \gamma/2 = 180^\circ, \text{ y}$$

$$B+D = \delta/2 + \xi/2 = 180^\circ, \text{ por lo cual}$$

Un cuadrilátero convexo es inscriptible, en una circunferencia, cuando son suplementarios sus ángulos interiores opuestos.

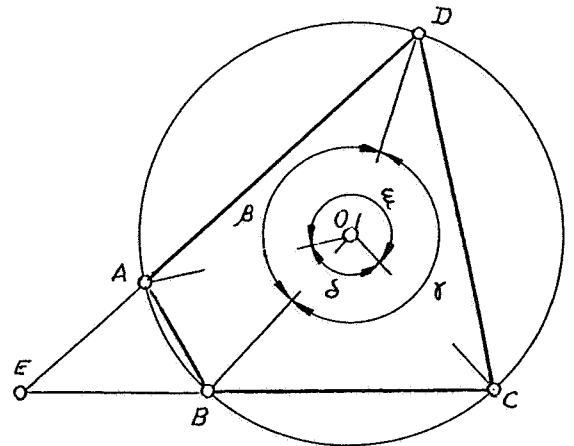


Fig. 4

Segunda: Potencia respecto de la circunferencia .- En la Fig. 4, se han prolongado los lados opuestos BC y AD hasta su punto de intersección E. La potencia de este punto respecto de la circunferencia es $EB \cdot EC = EA \cdot ED$, de lo cual se deduce:

Un cuadrilátero convexo es inscriptible, en una circunferencia, cuando el producto de distancias desde el punto de intersección de un par de lados opuestos a los vértices de uno de ellos es igual al producto de distancias a los vértices del otro.

Tercera: Relación de los lados y las diagonales. Teorema de Ptolomeo.

En la fig.5, se han construido el triángulo BCE, semejante al ABD y, por tanto,

$$\frac{BC}{BD} = \frac{EC}{AD} = \frac{EB}{AB} \text{ o lo que es igual } \frac{l_2}{d_2} = \frac{EC}{l_4} = \frac{EB}{l_1} \quad (1)$$

deduciéndose que $l_2 \cdot l_4 = EC \cdot d_2 \quad (2).$

Ahora bien, son iguales los ángulos $\angle ABE = \angle DBC = \beta - \gamma$ y los segmentos que los forman son proporcionales, pues, como se ha expuesto en (1): $l_2/d_2 = EB/l_1$. Por lo anterior, -- los triángulos ABE y DBC son semejantes, de donde

$$\frac{l_1}{d_2} = \frac{AE}{l_3}, \text{ es decir, } l_1 \cdot l_3 = AE \cdot d_2 \quad (3)$$

Sumando las expresiones (2) y (3) se tiene que $l_1 \cdot l_3 + l_2 \cdot l_4 = d_2 (AE + EC)$, pero $AE + EC \geq d_1$, por lo cual

$$l_1 \cdot l_3 + l_2 \cdot l_4 \geq d_1 \cdot d_2 \quad (4)$$

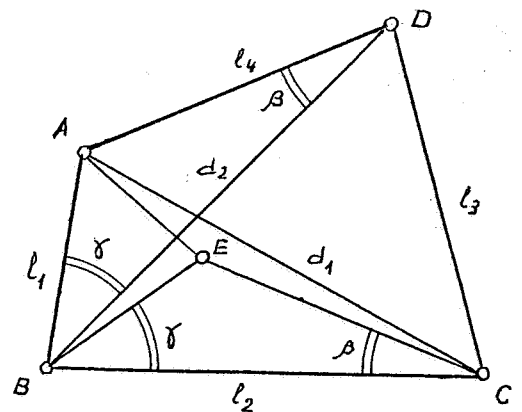


Fig. 5

En todo cuadrilátero, el producto de sus diagonales es igual o menor que la suma de los productos de los pares de lados opuestos.

Cuando el cuadrilátero es convexo e inscriptible, como el ABCD de la Fig. 6, el punto E está sobre la diagonal AC=d₁, pues, son iguales los ángulos ADB = BCE = β, por ser inscritos y abarcar el arco AB. En este caso, AE+EC = d₁, por lo que la expresión (4) se transforma en

$$l_1 \cdot l_3 + l_2 \cdot l_4 = d_1 \cdot d_2$$

Expresión de la que se deduce la siguiente condición de inscriptibilidad de los cuadriláteros:

Un cuadrilátero convexo es inscriptible a una circunferencia, cuando el producto de sus diagonales es igual a la suma de los productos de los pares de lados opuestos

b).- Circunscriptibles.- Como son iguales, en magnitud, los dos segmentos de tangencia a un circunferencia, trazados desde un punto, en la Fig. 7 se deduce que AB+CD=BC+DA, pues, AB=a+b, CD=c+d, BC=b+c y DA=a+d.

Esta evidencia permite enunciar la siguiente condición necesaria y suficiente:

Un cuadrilátero convexo es circunscriptible, a una circunferencia, cuando son iguales las sumas de los pares de lados opuestos.

1.3.- Trapezoides, Trapecios y Paralelogramos.

Atendiendo al paralelismo de sus lados, los cuadriláteros convexos se clasifican en los siguientes grupos:

Trapezoides: No tienen ningún par de lados paralelos.

Trapecios: Un par de lados son paralelos.

Paralelogramos: Los pares de lados opuestos son paralelos.

En el siguiente cuadro se señalan las clases que hay en cada uno de los tres grupos anteriores.

CUADRILATEROS	Trapezoides.	<u>General</u> (Posible inscriptibilidad) <u>Bi-isósceles</u> (Posible inscriptibilidad)
	Trapecios.	<u>General</u> (No inscriptibles) <u>Rectángulo</u> (No inscriptibles) <u>Isósceles</u> (Son inscriptibles)
	Paralelogramos.	<u>Romboide</u> (No inscriptibles) <u>Rectángulo</u> (Son inscriptibles) <u>Cuadrado</u> (Son inscriptibles) <u>Rombo</u> (No inscriptibles).

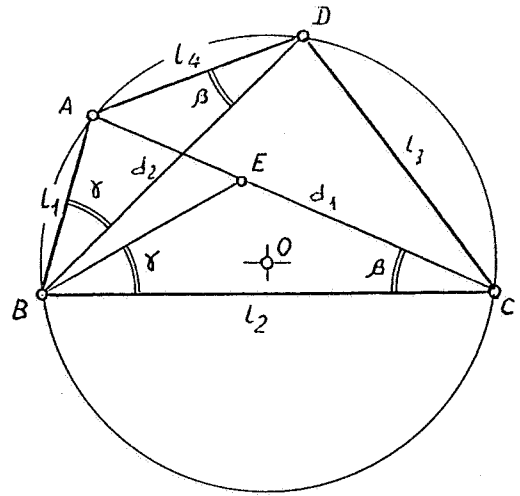


Fig. 6

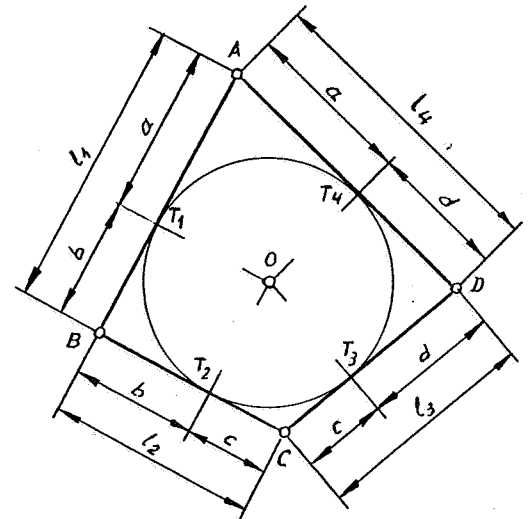


Fig. 7

2.- NOTACIONES Y PROPIEDADES GENERALES MAS IMPORTANTES.

2.1.- Notaciones utilizadas. Fig. 8

Los lados del cuadrilátero se denominan de la forma siguiente : $AB=l_1$, $BC=l_2$, $CD=l_3$ y $DA=l_4$. El perímetro $2p=l_1+l_2+l_3+l_4$. Las diagonales $AC=d_1$ y $BD=d_2$; el ángulo que forman se designa por α .

Los ángulos interiores se denominan por los correspondientes vértices y los ángulos exteriores por $180^\circ-A$, $180^\circ-B$, $180^\circ-C$ y $180^\circ-D$, respectivamente.

Cuando el cuadrilátero está inscrito en una circunferencia, el radio de ésta se denomina R. Y cuando sea circunscrito a una circunferencia, su radio se designa por ρ .

Estas son las notaciones que, en adelante, van a ser utilizadas.

2.2.- Primera propiedad. Fig. 9.

Si se señalan los puntos medios M, N, P y Q, de los lados del cuadrilátero, Fig. 9, y se observan los triángulos ABD y BCD, se deduce que MQ y NP son las paralelas respecto del lado común BD; por tanto, $MQ=NP=d_2/2$ (1). Análogamente, de los triángulos ACD y ABC se desprende que $PQ=MN=d_1/2$ (2). De las expresiones (1) y (2) se deduce:

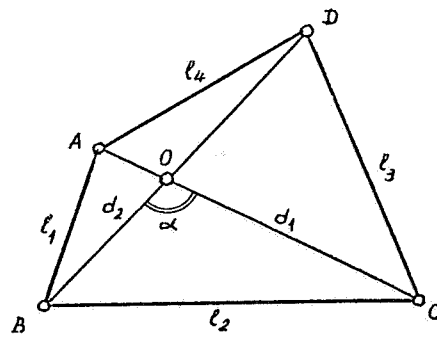


Fig. 8

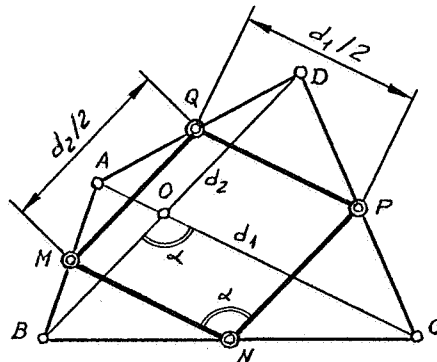


Fig. 9

Los puntos medios de los lados de un cuadrilátero convexo, son vértices de un paralelogramo de lados la mitad de las diagonales respectivas y forman el mismo ángulo que éstas.

Si en la fig. 9 se supone trasladada la diagonal $AC=d_1$, en la dirección y magnitud de $BD=d_2$, se forma un nuevo paralelogramo $AA'C'C$, de lados la magnitud de las diagonales y, por tanto, semejante al $QMPN$, en la relación 1/2. Consecuencia de la posición de ambos paralelogramos y de su semejanza es su relación de homotecia, con centro de la transformación el vértice D.

En efecto, en la fig. 10 se ha realizado la citada traslación, cumpliéndose que $BD=AA'=CC'$ y que $BC=CD$ es un paralelogramo, por lo que $BC=DC$. Asimismo, $AA'BD$ es otro paralelogramo y, por tanto, $BA'=DA$.

Es fácil deducir que A' , M y D están alineados, así como los C' , N y D; es decir, que Q-A, M-A', N-C' y P-C son pares de puntos homólogos, en la homotecia de centro D y razón 1/2.

Hay que señalar que la traslación indicada y, por tanto, la construcción de los paralelogramos iguales o análogos al $AA'C'C$, es muy utilizada en la construcción de cuadriláteros, cuando entre los datos se hallan las diagonales y el ángulo que forman.

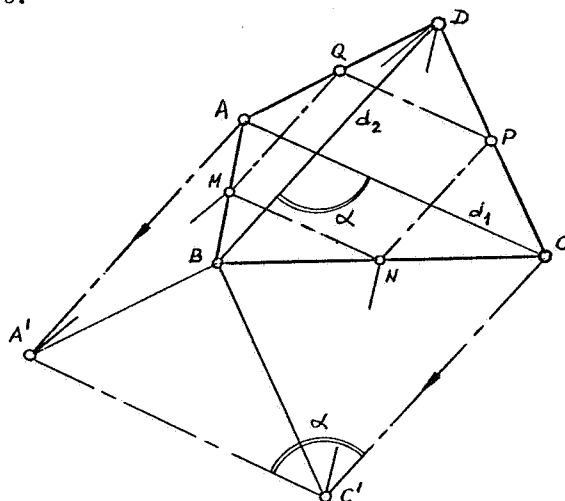


Fig. 10

2.3.- Segunda propiedad. Fig. 11.

Los puntos E y F, puntos medios de las diagonales AC y BD, son vértices opuestos de un paralelogramo, cuya otra diagonal es MP.

Efectivamente, $MF=EP=AD/2$ por ser paralelas medias respecto de AD en los triángulos ABD y ACD, respectivamente. De forma análoga, al analizar los triángulos ABC y BCD se deduce que $ME=FP=BC/2$.

De otra parte, se demuestra de igual forma que EQFN es, también, un paralelogramo, pues, $EQ=FN=CD/2$ y $QF=EN=AB/2$. Por todo ello se puede enunciar:

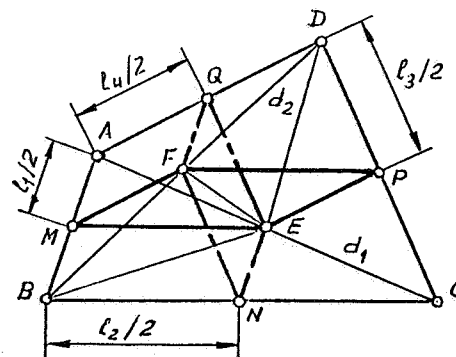


Fig. 11

En todo cuadrilátero, convexo ^{y cóncavo,} los puntos medios de las diagonales son vértices opuestos y comunes de dos paralelogramos, formados con los respectivos pares de puntos medios de los lados del primero. -- Los lados de estos paralelogramos tienen por valor la mitad de los respectivos lados del cuadrilátero.

2.4.- Tercera propiedad.- Teorema de Euler.

Según las relaciones métricas de los triángulos, en los ACD y ABC de la Fig. 11 se cumple:

$\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{DE}^2$ y $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{BE}^2$, respectivamente. Sumando ambas expresiones se tiene que: $l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 = 2(\overline{DE}^2 + \overline{BE}^2) + 4\overline{AE}^2$. Análogamente, en el triángulo BED se cumple que $\overline{BE}^2 + \overline{DE}^2 = 2\overline{BF}^2 + 2\overline{EF}^2$, valores que sustituidos en la expresión anterior se obtiene: $l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 = 4\overline{BF}^2 + 4\overline{EF}^2 + 4\overline{AE}^2$, es decir,

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 = d_1^2 + d_2^2 + 4\overline{EF}^2. \text{ Por ello,}$$

En todo cuadrilátero convexo, la suma ^{de los cuadrados} de los cuatro lados es igual a la suma de los cuadrados de las diagonales más el cuádruplo del cuadrado del segmento que une sus puntos medios.

2.5.- Cuarta propiedad.

De conformidad con las relaciones métricas de los triángulos rectángulos, en los oblicuángulos ACD y ABC de la Fig. 12 se cumple, respectivamente, que:

$$\overline{AD}^2 - \overline{CD}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{OC}^2 \text{ y } \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{OC}^2.$$

Igualando ambas expresiones, $\overline{AD}^2 - \overline{CD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2$, es decir, $\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{DA}^2$, o lo que es lo mismo,

$$l_1^2 + l_3^2 = l_2^2 + l_4^2$$

Expresión que permite enunciar la siguiente propiedad general de los cuadriláteros:

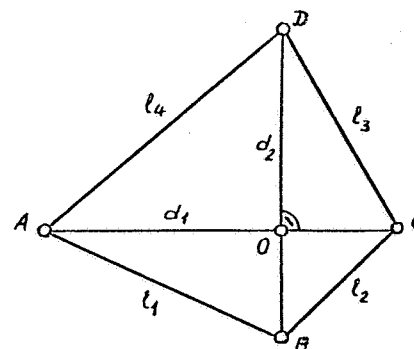


Fig. 12

En los cuadriláteros convexos ^{y cóncavos,} de diagonales perpendiculares, la suma de los cuadrados de dos lados opuestos es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos.

3.- PROPIEDADES PARTICULARES.

3.1.- Trapezoide bi-isósceles. Fig. 13.

a).- Los lados consecutivos son iguales dos a dos: -

$$l_1 = l_4 \text{ y } l_2 = l_3$$

b).- Las diagonales son perpendiculares: $d_1 \perp d_2$

c).- El punto de intersección O de las diagonales divide a una de ellas en dos partes iguales: $OB = OD = d_2/2$.

d).- La otra diagonal es eje de simetría y, además, - bisectriz de los ángulos interiores cuyos vértices une.

e).- En este caso, los puntos medios M, N, P y Q de los lados son vértices de un rectángulo.

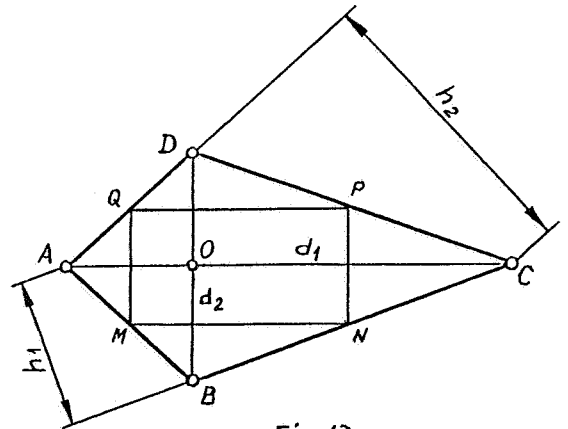


Fig. 13

3.2.- Trapecios.

1.- General. Fig. 14.

a).- Los dos ángulos interiores contiguos A-B y C-D, que se forman con cada lado no paralelo, son suplementarios.

b).- El segmento MP, que determinan los puntos medios de los lados no paralelos, representación a) de la figura, es paralelo a las bases y de magnitud igual a la semisuma de éstas, denominándose "base media".

c).- Las intersecciones de las diagonales de un trapecio con su base media, determina un segmento igual a la semidiferencia de las bases.

En la representación a) de la figura, ABED es paralelogramo, por lo que $AG=GE$. Los triángulos AGH y AEC son semejantes, con razón de semejanza $1/2$; por tanto, $GH=1/2(l_2-l_4)$

d).- En todo trapecio son semejantes los triángulos OBC y ODA, verificándose que:

$$\frac{OB}{OC} = \frac{OD}{OA} \text{ y, por tanto, } \frac{OB+OD}{OC+OA} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{OB}{OC}$$

De lo anterior, se deduce: "El punto O de intersección de las diagonales, pertenece a la circunferencia lugar geométrico de los puntos cuya razón de distancias a dos puntos fijos, B y C en la representación b) de la figura, es una cantidad constante".

A su vez, el punto O pertenece a la mediana EN del triángulo EBC, la cual corta a las bases del trapecio en sus puntos medios N y Q.

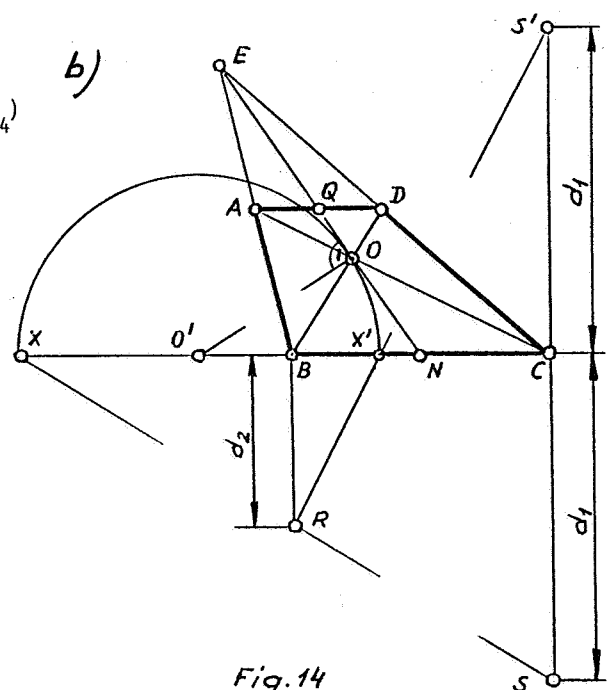
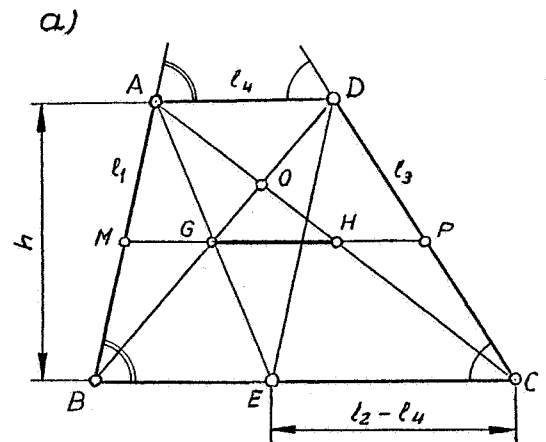


Fig. 14

2.- Rectángulo. Fig. 15.

Además de las propiedades de los trapecios en general, hay que destacar las siguientes:

- a).- Dos ángulos interiores consecutivos, formados por uno de los lados no paralelos, son rectos.
- b).- Los dos ángulos no rectos son suplementarios, pues, como es sabido $A+B+C+D = 360^\circ$.

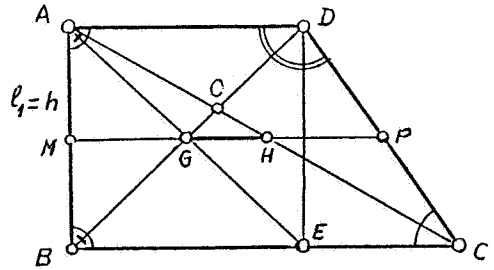


Fig.15

3.- Isósceles. Fig. 16.

- a).- Dos a dos, los dos ángulos interiores son iguales, pues, son inscritos y abarcan arcos iguales; en la figura, $B=C$ y $A=D$.
- b).- Los lados no paralelos son iguales $l_1=l_3$.
- c).- Las dos diagonales son iguales $d_1=d_2$.
- d).- La mediatriz de las bases es eje de simetría.

Todas estas propiedades son específicas de los trapecios isósceles, además de poseer las de los trapecios en general.

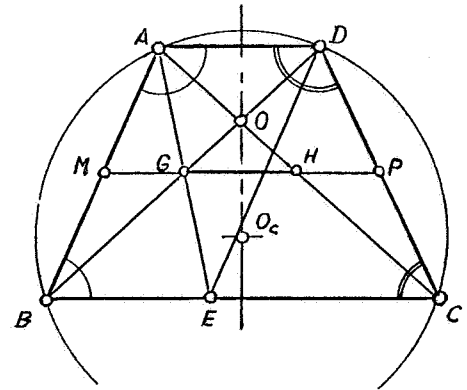


Fig.16

3.3.- Paralelogramos.

1.- Romboides. Fig. 17

- a).- Los pares de lados opuestos son paralelos e iguales: $l_1=l_3$ y $l_2=l_4$.
- b).- Los ángulos opuestos son iguales, $A=C$ y $B=D$, y los consecutivos suplementarios.
- c).- Las diagonales se cortan en su punto medio O, es decir, $AO=OC=d_1/2$ y $BO=OD=d_2/2$.
- d).- Las rectas que pasan por O y son paralelas a los lados, MP y NQ, se denominan "paralelas medias".
- e).- La suma de cuadrados de los cuatro lados es igual a la suma de los cuadrados de las diagonales; $2(l_1^2+l_2^2)=d_1^2+d_2^2$.

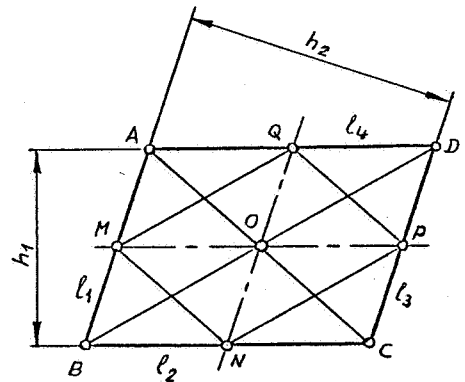


Fig.17

En efecto, el teorema de Euler, expuesto en 2.4, se transforma en lo anterior, pues, en este caso, el segmento EF, que une los centros de las diagonales, es de valor cero.

2.- Rectángulo. Fig. 18.

Además de las propiedades generales de los paralelogramos, tiene como específicas las siguientes:

- a).- Los cuatro ángulos interiores son rectos.
- b).- Las dos diagonales son iguales $d_1=d_2$.
- c).- Las dos paralelas medias, respecto de los lados, son ejes de simetría y mediatrices de los lados.
- d).- El paralelogramo MNPQ, en este caso, es un rombo.

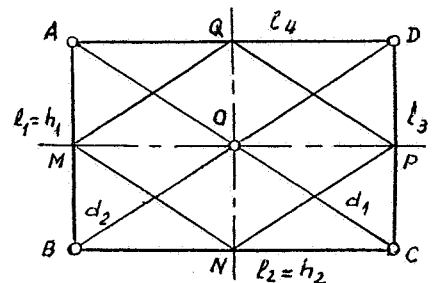


Fig.18

3.- Cuadrado. Fig.19.

Las específicas de este paralelogramo especial son -- las siguientes:

- a).- Los cuatro lados son iguales.
- b).- Las dos diagonales son iguales y perpendiculares entre sí.
- c).- Las diagonales son bisectrices de los ángulos interiores.
- d).- Las paralelas medias y las diagonales son ejes de simetría.
- e).- Los cuatro puntos medios de los lados son vértices de otro cuadrado.

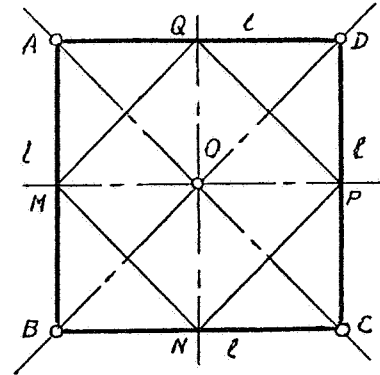


Fig.19

4.- Rombo. Fig. 20.

Sus propiedades particulares son:

- a).- Los cuatro lados son también iguales.
- b).- Las diagonales son, asimismo, perpendiculares entre sí, ejes de simetría del cuadrilátero y bisectrices de los ángulos interiores correspondientes.
- c).- Las distancias h , entre cada par de lados paralelos, son iguales.
- d).- Los puntos medios de los lados son vértices de un rectángulo.

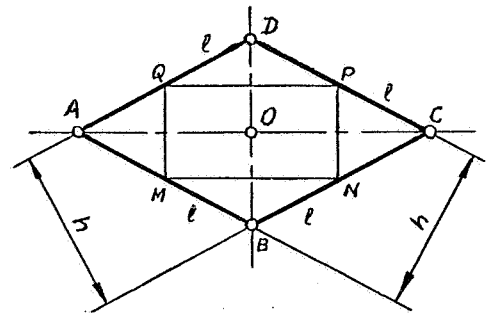


Fig.20

4.- METODOS DE CONSTRUCCION DE CUADRILATEROS.

Como una diagonal divide al cuadrilátero en dos triángulos que, como es sabido, requieren tres datos para su determinación, en principio se necesitan seis para la construcción del cuadrilátero que forman. No obstante, su determinación se reduce a cinco datos, pues, ambos triángulos tienen un lado común: la diagonal antes citada.

Estos cinco datos pueden reducirse a un número inferior, cuando se conocen algunas otras características del cuadrilátero: en los trapecios son necesarios cuatro datos y en los paralelogramos solamente tres. En el cuadro siguiente se detallan los datos necesarios que, en cada caso, son necesarios para determinarlos.

CUADRILATEROS (5)	TRAPEZOIDES (5)	GENERAL (5)
		BI-ISOSCELES (3)
	TRAPECIOS (4)	GENERAL (4)
		RECTANGULO (3)
		ISOSCELES (3)
	PARALELOGRAMOS (3)	ROMBOIDE (3)
		RECTANGULO (2)
		CUADRADO (1)
		ROMBO (2)

Por el número de datos que son necesarios para estas construcciones, el número de problemas que puedan plantearse es muy grande, resultado de combinar sus elementos, lugares geométricos y propiedades geométricas que son de aplicación. Con objeto de resolver los problemas más fundamentales, se han sistematizado los siguientes métodos de construcción:

CASOS GENERALES

Lo constituyen aquellos problemas que tienen por datos, únicamente, los lados y ángulos del cuadrilátero, dados directamente y no mediante relaciones entre ellos.

REDUCCION A LA CONSTRUCCION DE TRIANGULOS.

Cuando los datos no son exclusivamente lados y ángulos del cuadrilátero, se supone conocida la respuesta y, en general, con los datos dados se podrá construir uno o más triángulos, que proporcionarán la construcción del cuadrilátero solución.

RELACIONES GEOMETRICAS

Cuando no se obtiene directamente la solución por el método anterior, es necesario relacionar los datos mediante algún lugar geométrico o propiedad geométrica. Después, se procede como en el caso anterior o directamente se construye el cuadrilátero.

A continuación, se va a exponer cada uno de los tres métodos y se soluciona el número suficiente de aplicaciones para su comprensión.

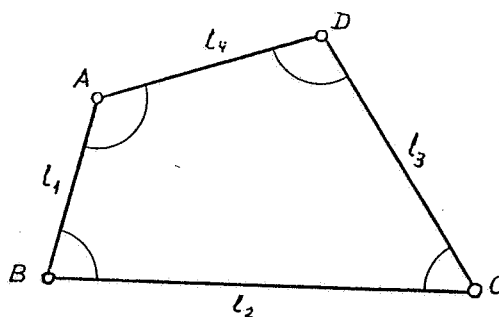
5.- METODO DE CASOS GENERALES.

5.1.- Trapezoides.

Como se ha indicado anteriormente, los cinco datos necesarios para determinar el cuadrilátero son lados y ángulos, por lo cual el número de combinaciones posibles son $\binom{8}{5} = 56$. De éstas, sólo constituyen problemas geométricos diferentes - seis grupos, que son los siguientes:

COMBINACIONES.

- 1.- l_1, l_2, l_3, l_4 y A.
- 2.- l_1, l_2, l_3, l_4 y B.
- 3.- l_1, l_2, l_3, l_4 y C.
- 4.- l_1, l_2, l_3, l_4 y D.
- 5.- l_1, l_2, l_3, B y C
- 6.- l_2, l_3, l_4, C y D
- 7.- l_3, l_4, l_1, D y A
- 8.- l_4, l_1, l_2, A y B



PROBLEMAS

I.-

Los cuatro lados y un ángulo.

II.-

Tres lados y los dos ángulos formados por ellos.

- 9.- l_1, l_2, l_3 , B y A
 10.- l_1, l_2, l_3 , C y D
 11.- l_2, l_3, l_4 , C y B
 12.- l_2, l_3, l_4 , D y A
 13.- l_3, l_4, l_1 , D y C
 14.- l_3, l_4, l_1 , A y B
 15.- l_4, l_1, l_2 , A y D
 16.- l_4, l_1, l_2 , B y C

- 17.- l_1, l_2, l_3 , B y D
 18.- l_1, l_2, l_3 , C y A
 19.- l_2, l_3, l_4 , C y A
 20.- l_2, l_3, l_4 , D y B
 21.- l_3, l_4, l_1 , D y B
 22.- l_3, l_4, l_1 , A y C
 23.- l_4, l_1, l_2 , A y C
 24.- l_4, l_1, l_2 , B y D

- 25.- l_1, l_2, l_3 , A y D
 26.- l_2, l_3, l_4 , A y B
 27.- l_3, l_4, l_1 , B y C
 28.- l_4, l_1, l_2 , C y D

- 29.- l_1, l_2 , A, B y C
 30.- l_1, l_2 , B, C y D
 31.- l_1, l_2 , C, D y A
 32.- l_1, l_2 , D, A y B
 33.- l_2, l_3 , A, B y C
 34.- l_2, l_3 , B, C y D
 35.- l_2, l_3 , C, D y A
 36.- l_2, l_3 , D, A y B

III.- Tres lados, un ángulo formado por dos de ellos y el ángulo contiguo formado con el lado desconocido.

IV.- Tres lados, un ángulo formado por dos de ellos y el ángulo opuesto a éste.

V.- Tres lados y los dos ángulos formados con el lado desconocido.

- 37.- l_3, l_4 , A, B y C
 38.- l_3, l_4 , B, C y D
 39.- l_3, l_4 , C, D y A
 40.- l_3, l_4 , D, A y B
 41.- l_4, l_1 , A, B y C
 42.- l_4, l_1 , B, C y D
 43.- l_4, l_1 , C, D y A
 44.- l_4, l_1 , D, A y B

- 45.- l_1, l_3 , A, B y C
 46.- l_1, l_3 , B, C y D
 47.- l_1, l_3 , C, D y A
 48.- l_1, l_3 , D, A y B
 49.- l_2, l_4 , A, B y C
 50.- l_2, l_4 , B, C y D
 51.- l_2, l_4 , C, D y A
 52.- l_2, l_4 , D, A y B

VI.

Dos lados y tres ángulos.

- 53.- l_1 , A, B, C y D
 54.- l_2 , A, B, C y D
 55.- l_3 , A, B, C y D
 56.- l_4 , A, B, C y D

-Un lado y cuatro ángulos.
 Estas cuatro combinaciones constituyen un problema indeterminado, pues, realmente sólo se conocen cuatro datos, ya que un ángulo se halla mediante los otros tres.

A continuación, se trazan las construcciones gráficas necesarias para la solución de estos seis problemas de casos generales.

Problema I.- Datos: l_1, l_2, l_3, l_4 y B. Fig. 21.

En primer lugar, se puede construir el triángulo ABC, del que se conocen dos lados l_1 y l_2 y el ángulo B que forman (problema II de casos generales en triángulos oblicuángulos).

Después, sobre AC se construye el triángulo ACD, del que se conocen los tres lados (problema I de casos generales de triángulos oblicuángulos).

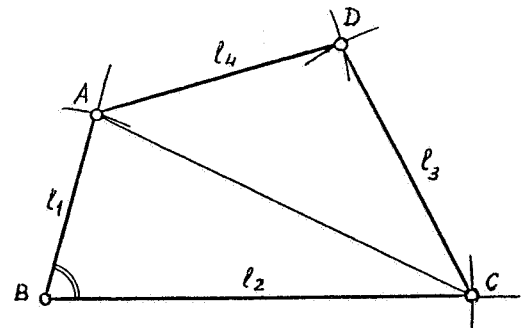


Fig. 21

Problema II.- Datos: l_1, l_2, l_3, B y C. Fig. 22.

Sobre el lado $BC = l_2$ se construyen los dos ángulos - dados. Los otros dos vértices, A y D, distan l_1 y l_3 de B y C, respectivamente.

En resumen, se realizan las construcciones de los triángulos ABC y BCD, de los que se conocen dos lados y el ángulo comprendido por ellos.

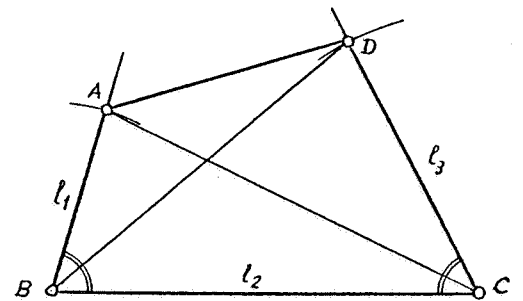


Fig. 22

Problema III.- Datos: l_1, l_2, l_3, B y A. Fig. 23.

Como en los casos anteriores, se construye el triángulo ABC y se traza el ángulo A sobre l_1 . El vértice D dista del C el lado l_3 , por lo que puede haber hasta dos soluciones; en la figura, los vértices D o D_1 , pertenecen a una u otra de las soluciones.

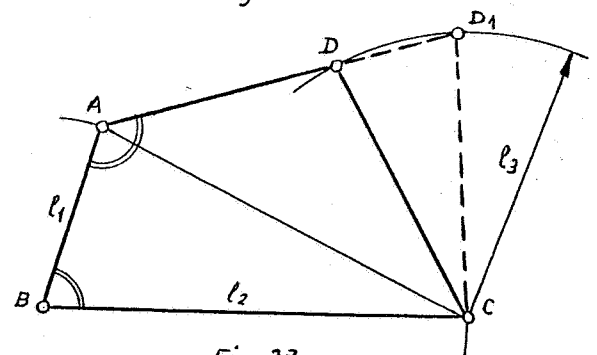


Fig. 23

Problema IV.- Datos: l_1, l_2, l_3, B y D. Fig. 24.

Como en los casos anteriores, se puede construir, de igual forma, el triángulo ABC.

El cuarto vértice D se obtiene al construir el triángulo ACD, del que se conocen los lados AC y $CD = l_3$, y el ángulo D opuesto al primero de los lados, es decir, es el problema III de casos generales de los triángulos oblicuángulos.

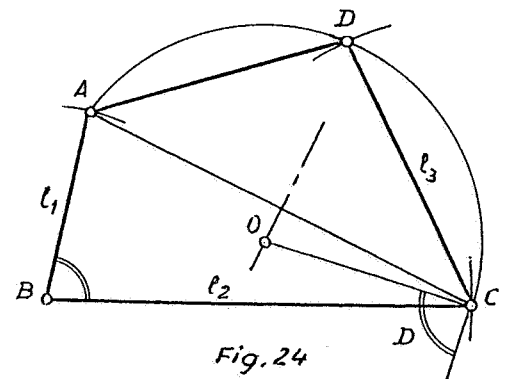


Fig. 24

Problema V.- Datos: l_1, l_2, l_3, A y D . Fig. 25.

Se traza uno de los ángulos dados y se lleva sobre uno de sus lados el correspondiente lado conocido del cuadrilátero. En la figura, se ha trazado el ángulo A y el lado l_1 , para obtener los vértices A y B .

Mediante el ángulo D , se coloca $C'D'$ paralelo -en una de sus infinitas posiciones-, a la situación que ha de ocupar CD , y se traslada en la dirección AD' hasta que C' se encuentre en el arco de circunferencia de centro B y radio l_2 , es decir, hasta ocupar su correcta posición CD .

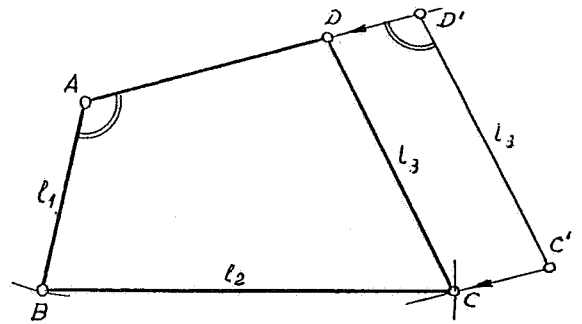


Fig. 25

Problema VI.- Datos: l_1, l_2, A, B y C . Fig. 26

Al igual que en el problema IV y anteriores, se traza el triángulo ABC .

El cuarto vértice D se obtiene por intersección de -- los correspondientes lados de los ángulos A y C , trazados sobre l_1 y l_2 , respectivamente.

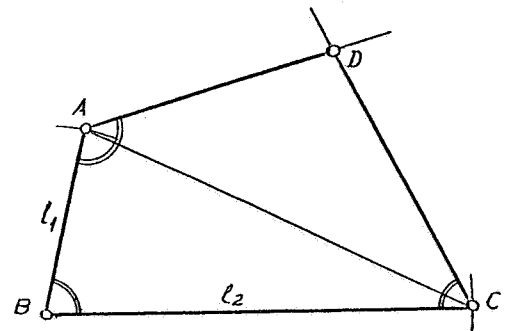


Fig. 26

Trapezoide bi-isósceles.

En este caso particular, como $l_1 = l_2, l_3 = l_4$ y $B = D$, las magnitudes diferentes de ángulos y lados se reducen a cinco, por lo que el número de combinaciones de los tres datos necesarios para su determinación, a su vez, se reducen a $\binom{5}{3} = 10$, las cuales dan lugar a los problemas geométricos siguientes:

COMBINACIONES	PROBLEMAS
1.- $l_1 = l_4, l_2 = l_3$ y A	I ₁ .- Los lados y un ángulo.
2.- $l_1 = l_4, l_2 = l_3$ y $B = D$	
3.- $l_1 = l_4, l_2 = l_3$ y C	
4.- $l_1 = l_4, A$ y $B = D$	II ₁ .- Dos lados iguales, el ángulo que forman y el consecutivo.
5.- $l_2 = l_3, C$ y $B = D$	
6.- $l_1 = l_4, C$ y $B = D$	III ₁ .- Dos lados iguales, el ángulo opuesto y el consecutivo.
7.- $l_2 = l_3, A$ y $B = D$	
8.- $l_1 = l_4, A$ y C	IV ₁ .- Dos lados iguales, el ángulo que forman y el opuesto a éste.
9.- $l_2 = l_3, C$ y A	
10.- $A, B = D$ y C	Los cuatro ángulos constituyen un problema <u>indeterminado</u> , como se deduce fácilmente.

Sin embargo, sólo los problemas III₁ y IV₁, requieren trazados gráficos diferenciados de los que precisa el análogo de trapezoides, mientras que los trazados de los I₁ y II₁ son iguales a los empleados en I y VI, como se deduce fácilmente:

GENERAL.		BI - ISOSCELES.			
Problemas.	Datos Facilitados.	Problemas.	Datos		Observaciones.
			Facilitados	Deducibles	
I	1.- l ₁ , l ₂ , l ₃ , l ₄ y A	I ₁	1.- l ₁ =l ₄ , l ₂ =l ₃ y A.	---	---
VI	44.- l ₄ , l ₁ , D, A y B	II ₁	4.- l ₁ =l ₄ , A y B=D	C= 360° - (A+2B)	---
	42.- l ₄ , l ₁ , B, C y D	III ₁	6.- l ₁ =l ₄ , C y B=D	A= 360° - (C+2B)	Trazados diferentes
	41.- l ₄ , l ₁ , A, B y C	IV ₁	8.- l ₁ =l ₄ , A y C	B=D= 180° - $\frac{A+C}{2}$	

A continuación, se resuelven los dos últimos problemas relativos al trapecoide bi-isósceles.

Problema III₁. Datos: l₁=l₄, C y B=D. Fig. 27.

Se construye el triángulo ABC o el ADC, en la figura se ha trazado este último, del que se conoce el lado l₄, su ángulo opuesto C/2 y el contiguo D. (problema V de casos generales de triángulos oblicuángulos).

El cuarto vértice B, se obtiene al construir el triángulo ABC, del que ahora se conocen sus tres lados.

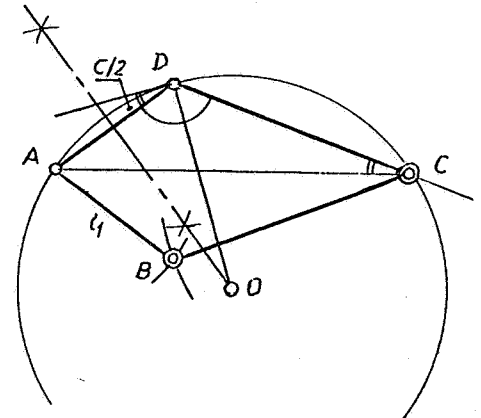


Fig. 27

Problema IV₁. Datos : l₁=l₄, A y C. Fig. 28.

En primer lugar, se construye el triángulo isósceles ABD (problema II" de casos generales de estos triángulos).

Después se construye el triángulo BCD, también isósceles, del que se conoce la base BD y el ángulo opuesto C. (problema III" de casos generales).

También se puede obtener el vértice D de la siguiente forma: construido el triángulo isósceles ABD, se trazan los ángulos B=D=360°-(A+C), sobre los lados l₁ y l₄, respectivamente; el vértice C es intersección de los correspondientes lados.

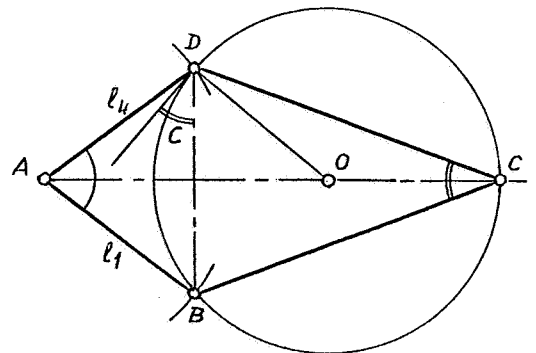


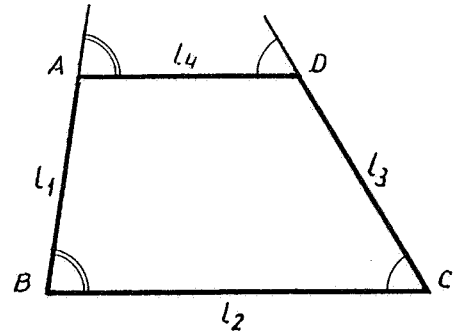
Fig. 28

Tanto este problema como el anterior, pueden construirse como su análogo VI de trapezoides en general, sin más que hallar el tercer ángulo.

5.2.- Trapecios.

En estos cuadriláteros los lados paralelos se denominan bases y, como se ha indicado, se designan por l_2 y l_4 .

Los ángulos consecutivos formados por las bases son suplementarios: $A+B = 180^\circ = C+D$; por esto, en los trapecios el número de datos en los problemas de "casos generales" son los cuatro lados y dos ángulos, pues, los otros dos pueden deducirse.



Teniendo en cuenta que, en los trapecios, el número de datos necesarios para determinarlos es de cuatro el número de combinaciones teóricas que podrían hacerse con los lados y los ángulos serían de $\binom{8}{4} = 70$. Ahora bien, como se ha indicado, sólo existen dos ángulos que son datos, por lo que el número de combinaciones geoméricamente diferentes son $\binom{6}{4} = 15$, que realmente constituyen sólo cuatro problemas de construcción de trapecios generales, que son los siguientes :

COMBINACIONES	PROBLEMAS
1.- l_1, l_2, l_3 y l_4	I'.- Los cuatro lados.
2.- l_1, l_2, l_3 y A o B	II'.- Tres lados y un ángulo.
3.- l_1, l_2, l_3 y C o D	
4.- l_2, l_3, l_4 y A o B	
5.- l_2, l_3, l_4 y C o D	
6.- l_3, l_4, l_1 y A o B	
7.- l_3, l_4, l_1 y C o D	
8.- l_4, l_1, l_2 y A o B	
9.- l_4, l_1, l_2 y C o D	
10.- l_1, l_2 y los dos \sphericalangle	
11.- l_2, l_3 y "	
12.- l_3, l_4 y "	
13.- l_4, l_1 y "	
14.- l_2, l_4 y los dos \sphericalangle	IV'.- Las bases y dos ángulos no suplementarios.
15.- l_2, l_3 y los dos \sphericalangle	Constituye un problema <u>indeterminado</u> , pues, aquí uno de los lados viene definido por los ángulos.

Sin embargo, sólo los problemas I' y IV' constituyen trazados gráficos diferentes de los seis problemas de casos generales de los trapecios, ya que los problemas II' y III' coinciden, respectivamente, con los problemas III y VI, como se desprende del siguiente cuadro :

TRAPECIO.			TRAPEZOIDE.		
Problemas.	datos		Problemas.	Datos	Observaciones
	Dados	Deducidos			
I'	1.- l_1, l_2, l_3 y l_4	---	--	---	----
II'	2.- l_1, l_2, l_3 y A	$B = 180^\circ - A$	III	9.- l_1, l_2, l_3, A y B	Fig. 23
III'	10.- l_1, l_2, B y C	$A = 180^\circ - B$ $D = 180^\circ - C$	VI	29.- l_1, l_2, A, B y C	Fig. 26
IV'	14.- l_2, l_4, B y C	$A = 180^\circ - B$ $D = 180^\circ - C$	VI	49.- l_2, l_4, A, B y C	Trazados diferentes

Por lo anterior, se omiten las construcciones relativas de los problemas II' y III', y se realizan las correspondientes al I' y al IV'; este último por dos trazados, ambos diferentes al contenido en la Fig. 20.

Problema I'.- Datos: l_1, l_2, l_3 y l_4 . Fig. 29.

Se construye el triángulo ABC', del que se conocen los tres lados, después se traslada AC' en la dirección de las bases y en una magnitud igual a la base menor l_4 .

Problema IV'.- Datos: l_2, l_4, B y C. Figs. 30 y 31.

En la fig. 30 se ha resuelto el problema de forma similar al anterior. La diferencia estriba, en este caso, en la construcción del triángulo ABC', del que ahora se conoce el lado BC' y los dos ángulos que con él se forman.

También puede resolverse el problema mediante el trazado de la Fig. 31, en la que sobre $BC=l_2$ se han construido los ángulos B y C. Después se sitúa en posición A'D', es decir, desde un punto cualquiera de AB, en la figura el A', se lleva $l_4=A'D'$ paralela a BC. Finalmente, se traslada en la dirección de AB hasta D. También puede situarse A'D' de forma que D' pertenezca a CD; en este caso, la traslación sería en la dirección de éste último lado.

Este último traslado es el que ha de realizarse también en la construcción de un trapezoide correspondiente al problema VI, cuando los datos sean la combinación l_2, l_4, A, B y C.

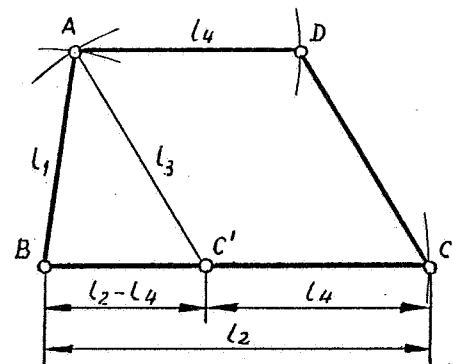


Fig. 29

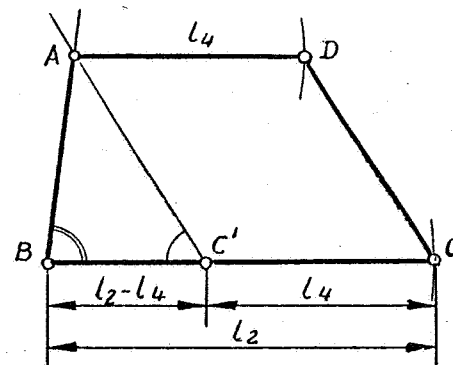


Fig. 30

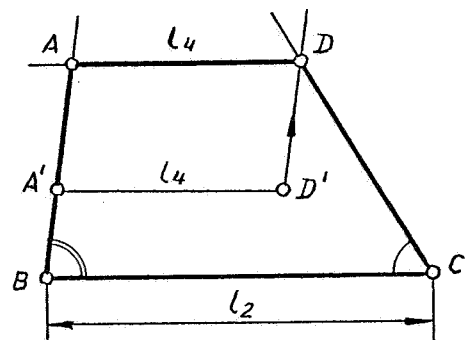
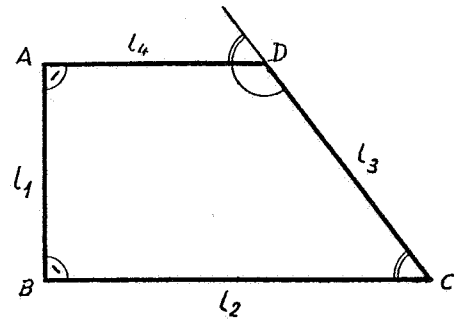


Fig. 31

Trapezios rectángulos e isósceles.

En los trapezios rectángulos dos ángulos son rectos y los otros dos suplementarios, como ya es sabido. Por lo anterior, los datos de los problemas de casos generales serán los cuatro lados y uno de los ángulos no rectos. El número de combinaciones geoméricamente diferentes son : $\binom{5}{3} = 10$, que forman los siguientes problemas diferentes :

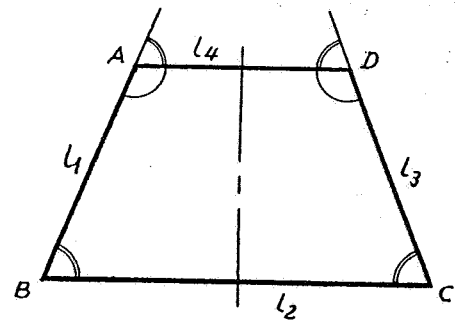


COMBINACIONES

PROBLEMAS

<p>1.- l_1, l_2 y l_3 2.- l_2, l_3 y l_4 3.- l_3, l_4 y l_1 4.- l_4, l_1 y l_2</p>		<p>I₁'</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">Tres lados.</div>
<p>5.- l_1, l_2 y C o D 6.- l_2, l_3 y C o D 7.- l_3, l_4 y C o D 8.- l_4, l_1 y C o D</p>		<p>II₁'.-</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">Dos lados consecutivos y un ángulo no recto.</div>
<p>9.- l_2, l_4 y C o D</p>		<p>III₁'.-</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">Las bases y un ángulo no recto.</div>
<p>10.- l_1, l_3 y C o D</p>		<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">Constituye un problema <u>indeterminado</u>, pues uno de los lados dato se define por los ángulos.</div>

En los trapezios isósceles, además de ser suplementarios los ángulos consecutivos que se forman con las bases, como es ya sabido, son iguales los dos ángulos que se forman con cada base, en la figura $A=D$ y $B=C$, por lo que al igual que en los trapezios rectángulos sólo un ángulo es dato. Por otro lado, como $l_1=l_3$, sóloamente tres lados pueden ser datos.



Por lo anterior, el número de datos puede ser de cuatro, con los cuales se pueden formar $\binom{4}{3} = 4$ combinaciones geoméricamente diferentes, puesto que también en la construcción de trapezios isósceles es necesario conocer tres datos (como es fácilmente deducible mediante la descomposición del trapezoido en dos triángulos por medio de una diagonal), para que el cuadrilátero quede definido.

Los problemas diferentes de "casos generales" en la construcción de los trapezios isósceles son los siguientes:

COMBINACIONES

PROBLEMAS

1.- $l_1=l_3, l_2$ y l_4	I' ₂ .-	Los lados.
2.- $l_1=l_3, l_2$ y un \sphericalangle	II' ₂ .-	Una base, el lado desigual y un ángulo.
3.- $l_1=l_3, l_4$ y un \sphericalangle		
4.- l_2, l_4 y un \sphericalangle	III' ₂ .-	Las dos bases y un ángulo.

Sin embargo, los trazados de los problemas de casos generales de los trapecios rectángulos e isósceles, no difieren prácticamente de los problemas análogos de los trapecios generales. Efectivamente, en el cuadro siguiente puede observarse la identidad entre ellos.

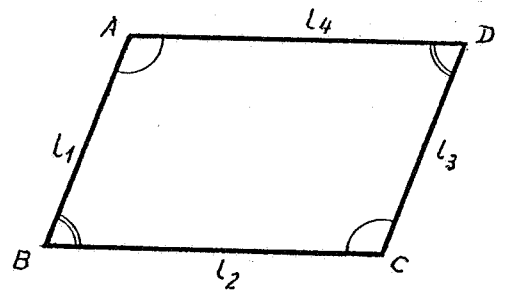
TRAPECIOS GENERALES		TRAPECIOS RECTANGULOS			TRAPECIOS ISOSCELES.		
Problemas	Datos	Problemas	Datos		Problemas	Datos	
			Dados	Deducidos		Dados	Deducidos
I'	1.- l_1, l_2, l_3 y l_4	--	---	---	I' ₂	1.- $l_1=l_3, l_2$ y l_4	-----
II'	2.- l_1, l_2, l_3 y A	I' ₁	1.- l_1, l_2 y l_3	A = 90° = B	--	-----	-----
III'	10.- l_1, l_2, B y C	II' ₁	5.- l_1, l_2 y C	B = 90°	II' ₂	2.- $l_1=l_3, l_2$ y B	B=C
IV'	14.- l_2, l_4, B y C	III' ₁	9.- l_2, l_4 y C	B = 90°	III' ₂	4.- l_2, l_4 y B	B=C

5.3.- Paralelogramos.

Como ya se indicaba en las propiedades específicas de los paralelogramos: $l_1=l_3, l_2=l_4, A=C, B=D$ y $A+B=180^\circ=C+D$; de donde se deduce que sólo existen tres datos diferentes geoméricamente: dos lados y un ángulo.

Para la determinación de un paralelogramo son necesarios tres datos, por lo que el número de combinaciones será $\binom{3}{3} = 1$, que constituye el único problema de "casos generales" en este caso:

1.- $l_1=l_3, l_2=l_4$ y A=C o B=D	I'.	Dos lados desiguales y un ángulo.
------------------------------------	-----	-----------------------------------



El problema enunciado es de trazado análogo al I de los trapecios: l_1, l_2, l_3, l_4 y A; pues, queda reducido a la construcción de un triángulo del que se conocen dos lados y el ángulo que forman, es decir, el problema II de triángulos oblicuángulos.

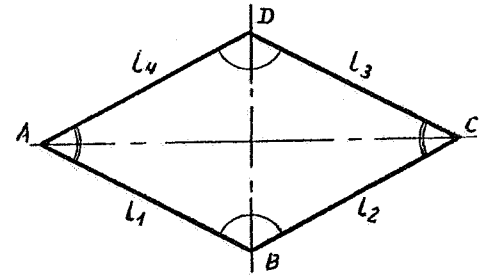
Rombos.

Como en este paralelogramo especial sabemos que $l_1=l_2=l_3=l_4$, sólo se disponen de dos datos: el lado y un ángulo.

Para definirle son necesarios los dos datos, luego, sólo hay un problema de "casos generales" en su construcción

$$1.- l_1=l_2=l_3=l_4 \text{ y un } \sphericalangle \quad \left| \quad I''_1.- \quad \boxed{\text{El lado y un ángulo.}}$$

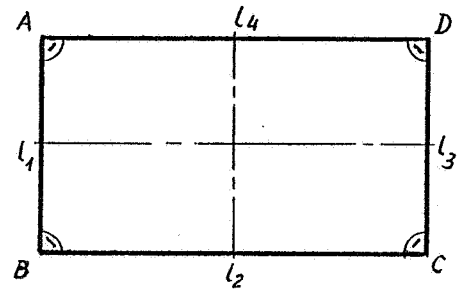
La construcción no ofrece ninguna dificultad y se puede decir lo mismo que en el problema anterior de paralelogramo general.

Rectángulo.

En este caso, $l_1=l_3$, $l_2=l_4$ y $A=B=C=D=90^\circ$, por lo que también existen dos datos diferentes, que son los necesarios para determinar el único problema del tipo de referencia:

$$1.- l_1=l_3 \text{ y } l_2=l_4 \quad \left| \quad II''_2.- \quad \boxed{\text{Los lados.}}$$

Tampoco en este caso los trazados necesarios para su construcción ofrece dificultad alguna y se puede remitir a lo dicho anteriormente a este respecto.

Cuadrado.

Es evidente que en este cuadrilátero sólo hay un dato que es, el lado, necesario conocer para su construcción:

$$1.- l_1=l_2=l_3=l_4 \quad \left| \quad I''_3.- \quad \boxed{\text{El lado.}}$$

6.- METODO DE REDUCCION A LA CONSTRUCCION DE TRIANGULOS.

Como indica su nombre, la construcción de cuadriláteros, por este método, se puede realizar a partir de la construcción de uno o más triángulos auxiliares, determinados directamente por medio de los datos y que teóricamente, al menos, se saben resolver. Al aplicar este método se deben realizar las siguientes operaciones:

- 1.- Se supone conocida la respuesta, es decir, se dibuja un cuadrilátero de la misma clase que el de la solución.
- 2.- Sobre el cuadrilátero anterior se trazan los elementos homólogos de los datos facilitados.
- 3.- Se localizan los triángulos auxiliares que se pueden construir con los datos, de forma que, una vez contruidos éstos, se pueda obtener el cuadrilátero.
- 4.- Con las magnitudes reales de los datos facilitados se trazan los triángulos auxiliares y, después, se realizan las construcciones gráficas necesarias para obtener el cuadrilátero solución.

Uno de los ejercicios más sencillos de resolver por este método, es la construcción de un trapezoide conocidos sus cuatro lados y una diagonal. A saber:

a).- Trapezoide. Datos: l_1, l_2, l_3, l_4 y d_1 . Fig. 32.

Dibujado el trapezoide $A'B'C'D'$ que, en principio, se supone la solución, se sitúan sobre él los elementos homólogos de los datos. A continuación, directamente se localizan los triángulos auxiliares $A'B'C'$ y $A'C'D'$ que pueden construirse, pues se conocen sus tres lados.

Por lo anterior, con las magnitudes reales de los datos se construyen los triángulos ABC y ACD -en magnitud y posición-, los cuales sin más trazados, en este caso, conforman el cuadrilátero solución.

A título de ejemplo, se resuelve la construcción de otros cuadriláteros, en los que los datos fácilmente determinan directamente el triángulo o triángulos auxiliares necesarios para realizar aquellas construcciones.

b).- Trapezoide bi-isósceles. Datos: l_1, d_1 y d_2 . Fig. 33.

El triángulo auxiliar $A'B'D'$ se puede construir, pues, se conocen sus lados $A'B'$ y $B'D'$, así como su altura $A'O' = d_1/2$

Por ello, con las magnitudes de los datos se construye el triángulo ABD y su simétrico BCD , los cuales conforman el trapezoide bi-isósceles solución. Tampoco en este caso es necesario trazado gráfico alguno, una vez construidos los triángulos auxiliares.

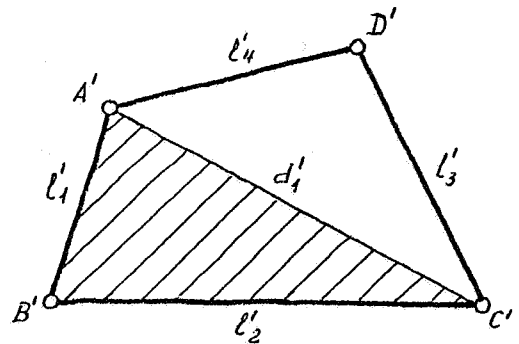


Fig. 32

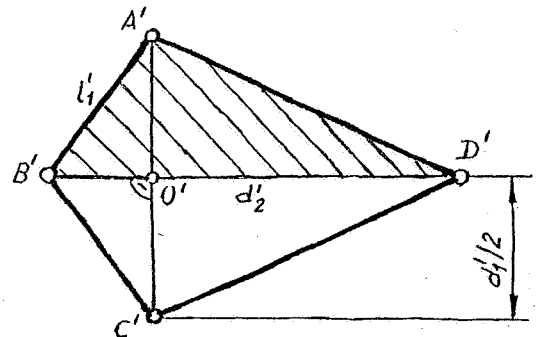


Fig. 33

c).- Trapecio. Datos: l_1, l_2, l_3 y h . Fig. 34.

El triángulo rectángulo $D'H'C'$ es auxiliar, a estos efectos, del cual se conoce el cateto $D'H' = h$ y la hipotenusa $C'D' = l_3$.

Posteriormente, se traza $C'B' = l_2$ y con centro en B' y radio l_1 se obtiene el cuarto vértice A' . Hay dos soluciones, si no se trata de un trapecio rectángulo.

Con las magnitudes de los datos se realizan las construcciones indicadas, con lo cual se obtiene el trapecio solución $ABCD$.

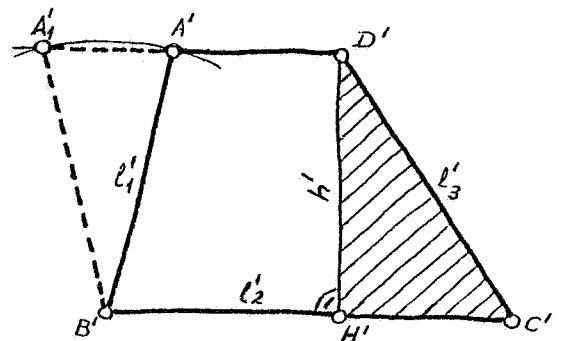


Fig. 34

d).- Trapecio isósceles. Datos: $l_1=l_3$, h y R . Fig. 35.

Como en el caso anterior, el triángulo rectángulo $D'H'C'$ es auxiliar. Asimismo, es auxiliar el triángulo isósceles $---D'O'C'$ y ambos pueden construirse fácilmente.

Trazada la circunferencia circunscrita, se prolonga $C'H'$ y por D' se traza la recta paralela, para obtener los otros dos vértices B' y A' .

Con las magnitudes de los datos se realizan las construcciones indicadas anteriormente, para obtener el trapecio solución $ABCD$.

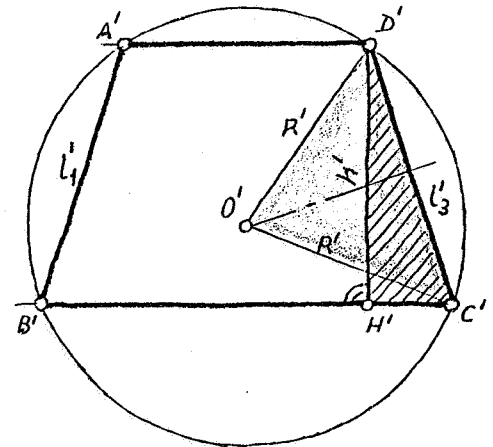


Fig. 35

e).- Trapecio rectángulo. Datos: $l_1=h$, d_1 y l_3 . fig. 36.

Realizadas las dos primeras operaciones indicadas al describir el método, se observa que el triángulo rectángulo $A'B'C'$ se puede construir, pues, se conoce el cateto $A'B'=l_1=h$ y su hipotenusa $A'C'=d_1$. Construido este triángulo, se traza por A' la paralela a la base $B'C'$ y con centro en C' y radio l_3 se obtienen los vértices D' y D'_1 , que dan lugar a las dos posibles soluciones.

Como en todos estos casos, con las magnitudes de los datos se realizan las construcciones indicadas y se obtiene el trapecio rectángulo solución $ABCD$.

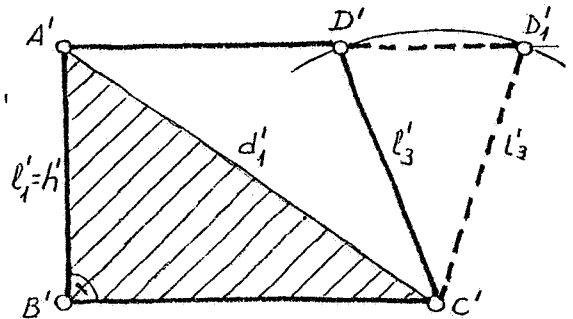


Fig. 36

f).- Paralelogramo. Datos: l_1 , l_2 y α . Fig. 37.

En este caso, el triángulo $O'B'C'$ es el auxiliar, pues, se puede construir mediante el arco capaz de α , trazado sobre $B'C'$, y con centro en M' y radio su mediana $O'M'=l_1/2$ se obtiene O' .

Construido este triángulo $O'B'C'$, se prolongan $O'B'$ y $O'C'$ para obtener D' y A' , respectivamente; pues, como es sabido, sus diagonales se cortan en el punto medio. A continuación, se procede como en todos los casos para obtener el paralelogramo solución $ABCD$.

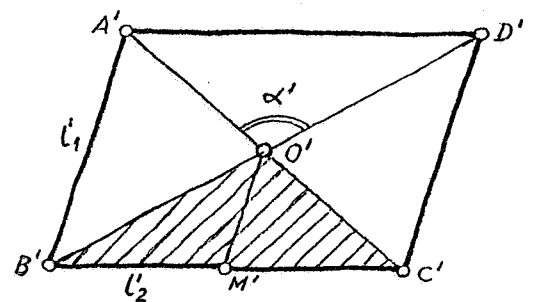


Fig. 37

g).- Rectángulo. Datos: $2p$ y d . Fig. 38.

En este caso, el triángulo rectángulo $B'C'D'$ es el auxiliar, del cual se conoce la suma de los catetos y la hipotenusa (triángulo $B'E'D'$), que se resuelve en el ejercicio d), -- del punto 6 de "Construcción de Triángulos". el punto D'_1 da lugar al mismo rectángulo, sólo que apoyado en el lado menor.

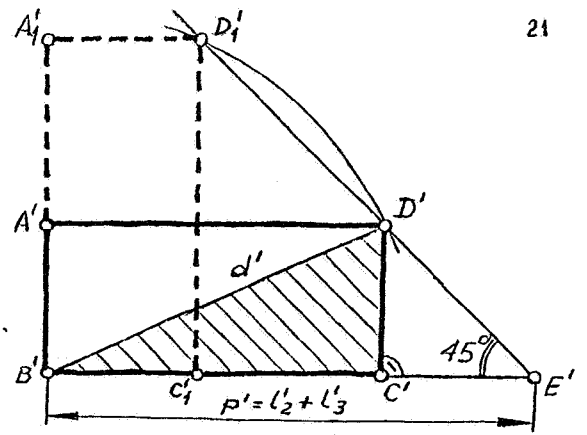


Fig. 38

Si los datos son $2p$ y α ; $2p$ y R o l_1+l_2 y $l_1^2+l_2^2$, se resuelven de igual forma. En efecto, pues, en el primero de -- ellos, el ángulo $D'B'E'$ tiene por valor $90^\circ - \alpha/2$; en el segundo $2R=d$ y en el tercero, $l_1+l_2=l_2+l_3=p$ y $l_1^2+l_2^2=l_2^2+l_3^2=d^2$.

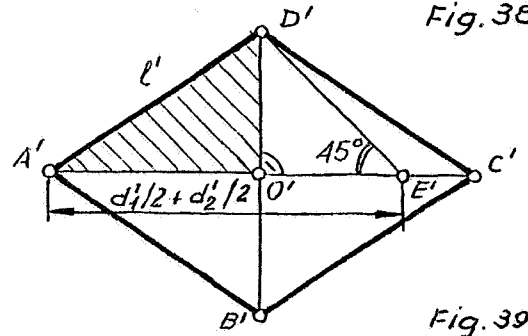


Fig. 39

También se resuelve, de igual forma, la construcción de un rombo conocidos l y d_1+d_2 , Fig. 39, pues, del triángulo -- rectángulo $A'O'D'$ se conoce la suma de los catetos, $d'_1/2+d'_2/2$, y la hipotenusa $A'D'=l'$.

h).- Rombo. Datos: l y p . Fig. 40.

Esta construcción se resuelve mediante el triángulo rectángulo $A'O'D'$, del que se conoce la hipotenusa $A'D'=l'$ y la altura sobre ella $O'H'=p'$.

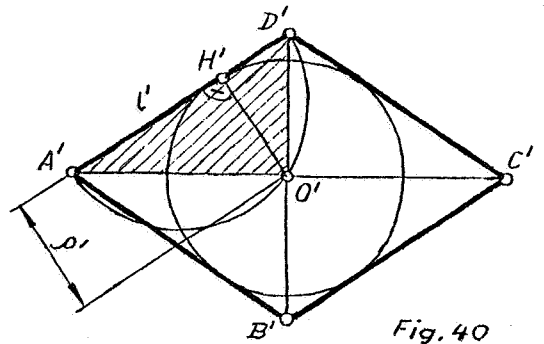


Fig. 40

Trazado este triángulo, se prolongan sus catetos hasta conseguir otros tres triángulos de lados iguales al primero, para así conformar el rombo solución.

A continuación, se van a resolver las construcciones de otros cuadriláteros, también a título de ejemplo, en los cuales el triángulo o triángulos auxiliares no están determinados directamente por los datos, al menos, en su situación en el cuadrilátero, sino que se deben localizar por medio de convenientes -- operaciones con ellos.

i).- Trapezoide. Datos: l_1, l_2, l_3, l_4 y β (ángulo que -- forman l_1 y l_3). Fig. 41.

Supuesta conocida la respuesta, se traza $A'F'=l'_3$ y -- paralela a este lado $C'D'$. El triángulo auxiliar $A'B'F'$ se -- puede construir, pues, se conocen dos de sus lados y el ángulo que forman.

Al trasladar $A'F'$ en la dirección de l'_4 y en su magnitud, se obtiene el cuadrilátero. Para conocer la dirección de traslación (lado l'_4), se construye el triángulo auxiliar -- $B'F'C'$ del que se conocen sus tres lados. El resto de la construcción no ofrece dificultad alguna.

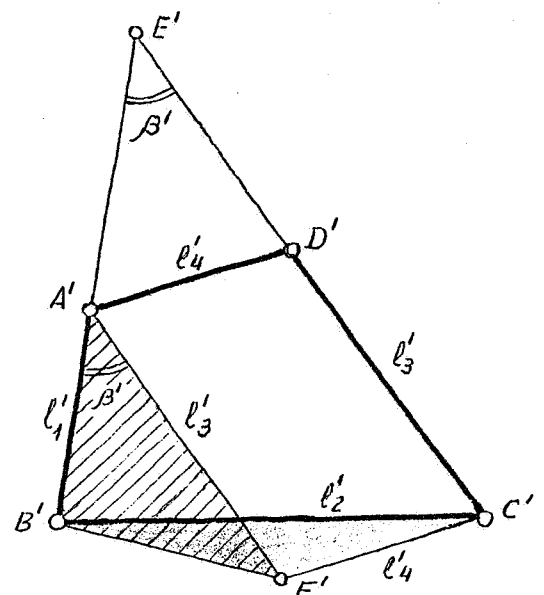


Fig. 41

Finalmente, con la magnitud de los datos se realizan las citadas construcciones, para obtener, así, el cuadrilátero solución ABCD.

j).- Trapezoide. Datos: l_1, l_2, l_3 y l_4 y NQ (segmento que une los puntos medios de l_2 y l_4). Fig. 42.

Este caso requiere la construcción de tres triángulos auxiliares. En efecto, si se supone que $A'B'C'D'$ es la solución, por uno de los extremos del segmento $N'Q'$ —por Q' en la figura—, se trazan $Q'E'=l_1$ y $Q'F'=l_3$ paralelos a los respectivos lados $A'B'$ y $C'D'$, se forma el triángulo $Q'E'F'$, del que se conocen dos lados y la mediana $Q'N'$, que concurre en el mismo vértice que éstos.

Por ello, se traza el triángulo QEF mediante la construcción del paralelogramo $QEGF$ (datos: los lados y la diagonal $QG=2NQ$). A continuación, se construyen los triángulos NBE y NFC (de los que se conocen sus tres ldos), con los cuales se obtienen los vértices B y C , por los que se trazan $BA=l_1$ y $CD=l_3$ paralelos a QE y QF , respectivamente.

k).- Trapecio. Datos: d_1, d_2, α y l_2+l_3 . Fig. 43.

Si se supone que un trapecio cualquiera $A'B'C'D'$ es la solución, se traza $D'E'$ paralelo e igual a la diagonal $A'C'$, para así determinar el triángulo auxiliar $B'E'D'$, que puede construirse, pues, se conocen sus lados $B'D'=d_2$ y $D'E'=d_1$ así como el ángulo α' que forman.

También puede construirse el triángulo isósceles $C'E'D'$ porque $B'E'=l_2+l_3$ y el punto C' es intersección de la mediatriz de la base $D'E'$ con el segmento $B'E'$. El cuarto vértice A' , es intersección de la paralela a $D'E'$ por C' y de la paralela a $B'C'$ trazada por el vértice D' .

Al realizar, por este orden, con las magnitudes reales de los datos, las construcciones gráficas anteriormente descritas, se obtiene el trapecio solución $ABCD$.

l).- Paralelogramo. Datos: $2p, h_1$ y \hat{A} . Fig. 44

Al igual que los demás ejercicios, se supone que el paralelogramo $A'B'C'D'$ es la solución. Como el perímetro es dato, se traza el segmento $B'E'=p=l_2+l_3$ y el triángulo auxiliar $B'E'D'$ está determinado, por conocerse el lado $B'E'=l_2+l_3$, la altura h_1 y su ángulo interior E' , cuyo valor es $A'/2 = C'/2$, como se deduce fácilmente.

Por otro lado, el triángulo $C'E'D'$ es isósceles, por lo que el vértice C' pertenece a la mediatriz de la base $D'E'$. El resto de la construcción no ofrece dificultad.

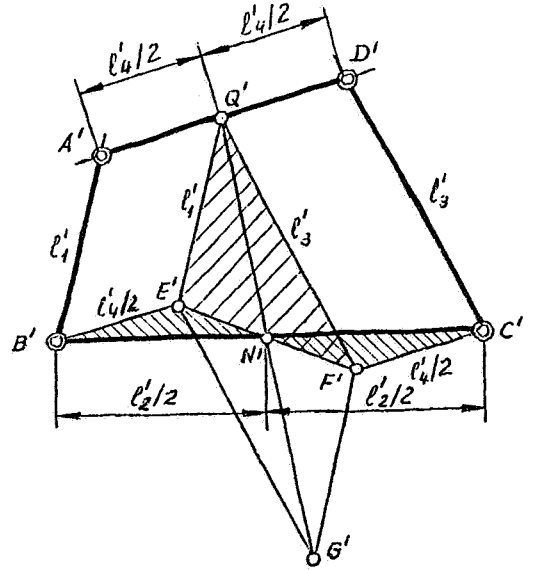


Fig. 42

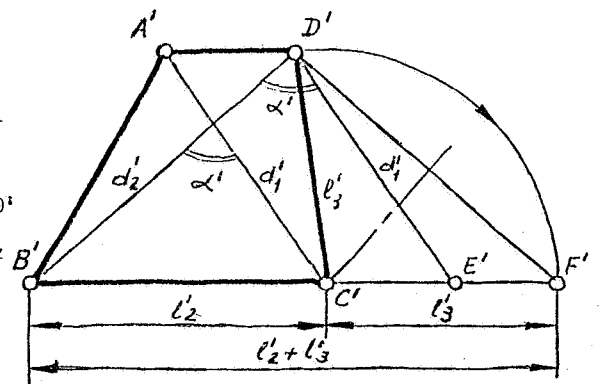


Fig. 43

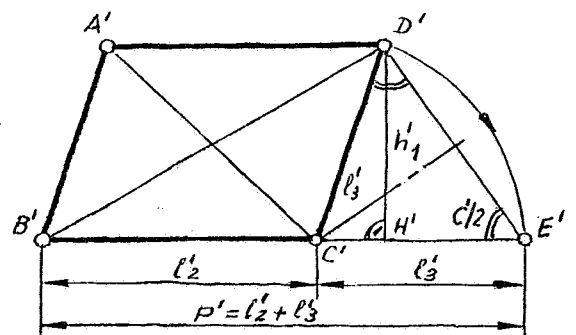


Fig. 44

m).- Rectángulo. Datos: $l_1+l_2+l_3$ y d . Fig. 45.

Si se supone el rectángulo $A'B'C'D'$ la solución, el triángulo $B'E'D'$ se puede construir, por ser conocidos sus lados $B'D'=d'$ y $B'E'=l_1+l_2+l_3=l_2+2l_3$ ($l_1=l_3$), así como el ángulo E' , que puede trazarse mediante un segmento cualquiera $E'F'$ y el ortogonal a él $F'G'=E'F'/2$.

Construido el triángulo BED , por este último vértice se traza la altura y se obtiene el vértice C . El resto no ofrece dificultad.

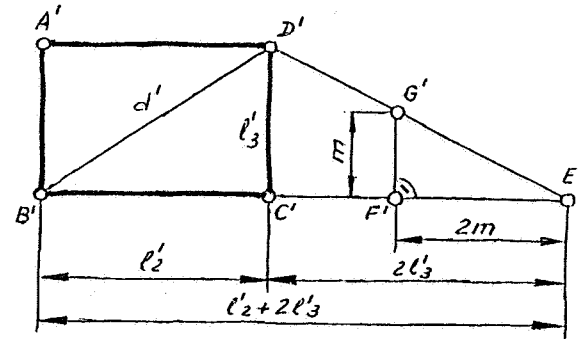


Fig.45

7.- METODO DE LAS RELACIONES GEOMETRICAS.

Este método es análogo al del mismo nombre utilizado para la construcción de triángulos, es decir, cuando en la construcción de un cuadrilátero no se pueden localizar los triángulos auxiliares a que se refiere el método descrito en el anterior punto 6, se deben aplicar lugares geométricos o propiedades geométricas que relacionan los datos, para así facilitar la construcción pedida.

Seguidamente se subdividen estos casos en correlación con la clasificación de los lugares geométricos y propiedades geométricas expuestas hasta aquí.

7.1.- Lugares y propiedades no pertenecientes a la geometría del cuadrilátero.

Como indica el título de este apartado, en estos casos se han de aplicar aquellos lugares geométricos y/o propiedades geométricas que afectan a los datos y no pertenecen a la geometría de los cuadriláteros. A continuación, se exponen los tres siguientes ejemplos:

a).- Trapezoide. Datos: d_1 , d_2 , α y R . Fig 46.

Se traza la circunferencia circunscrita O y se sitúa en ella, en cualquier posición, una de las diagonales -en la figura $AC=d_1$ -. A continuación, también en cualquier posición, se sitúa $CE=d_2$ y, como la circunferencia tangente a esta cuerda -lo es también respecto a la diagonal $BD=d_2$ -, se traza la segunda diagonal en la dirección conocida.

Hay dos soluciones -ambas representadas en la figura-, pues, también son dos las tangentes a una circunferencia, paralelas a una dirección dada.

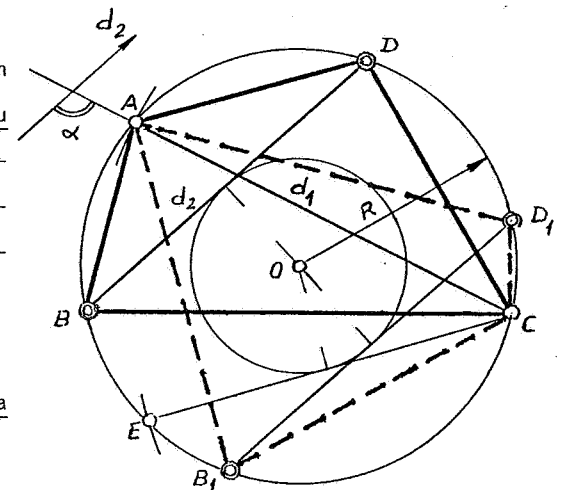


Fig.46

b).- Trapezoide, conocidos sus ángulos y diagonales. Fig. 47.

Se supone que ABCD es la solución y se traza por uno de sus vértices, el A en la figura, la tangente al arco capaz de ese ángulo interior, visto bajo la diagonal BD. La circunferencia a que pertenece el arco capaz corta a los lados BC y CD o, como en la figura, a sus prolongaciones, en los puntos G y H, respectivamente. Como puede observarse, se cumplen las igualdades de los ángulos IAG=B y JAH=D, pues, los dos primeros -- abarcan el arco ADG y los segundos el arco ABH.

El vértice C pertenece al arco capaz de este ángulo interior, visto bajo el segmento GH, y se encuentra a una distancia de A igual a la diagonal AC=d₁.

Por lo anterior, la construcción gráfica es como sigue: sobre un segmento EF=d₂, en cualquier posición, se traza el arco capaz del ángulo A, que se prolonga hasta completar la circunferencia y se traza la tangente en un punto A cualquiera de ella; en la figura se ha trazado ortogonal a EF. A continuación, se trazan los ángulos IAG=B y JAH=D, sobre la tangente y con vértice en A, para así obtener los puntos G y H. Sobre el segmento GH se traza el arco capaz del ángulo C y con centro en A y radio AC=d₁ se traza un arco que cortará al capaz anterior en C y C₁, vértices de las dos posiciones ABCD y AB₁C₁D₁ del cuadrilátero solución.

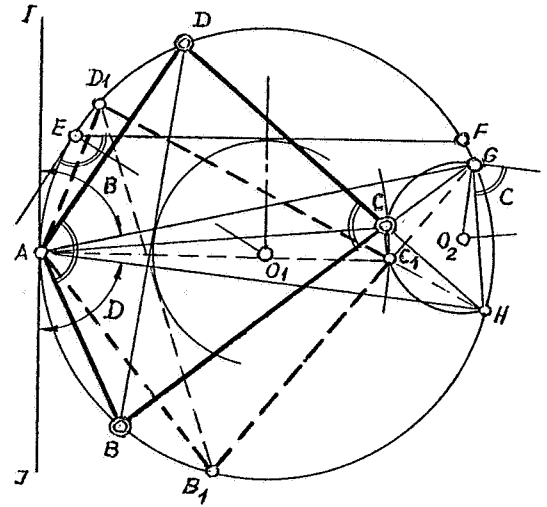


Fig. 47

c).- Rectángulo. Datos: 2p y l₁/l₂=m/n. Fig. 48.

Se construye un triángulo rectángulo isósceles AEF, de catetos el semiperímetro del rectángulo solución, en el que se cumple que los puntos de la hipotenusa tienen por suma de sus coordenadas, el valor de él.

A continuación, se traza la recta r lugar geométrico de los puntos cuya razón de distancias a los catetos es m/n; - para ello, se sitúa un punto cualquiera P de coordenadas x=k.m e y=k.n. El punto C, de intersección de la recta r y la hipotenusa EF, determina el rectángulo solución ABCD.

En la representación b), se ha solucionado de otra forma la construcción del mismo rectángulo.

Efectivamente, como p=l₁+l₂ y l₁/l₂=m/n, la solución se reduce a determinar el punto B de la terna (BAE)=m/n, es decir, BA/BE=m/n; trazado gráfico que es conocido.

Hallado el vértice B, el problema queda reducido a construir el rectángulo, conocidos sus lados.

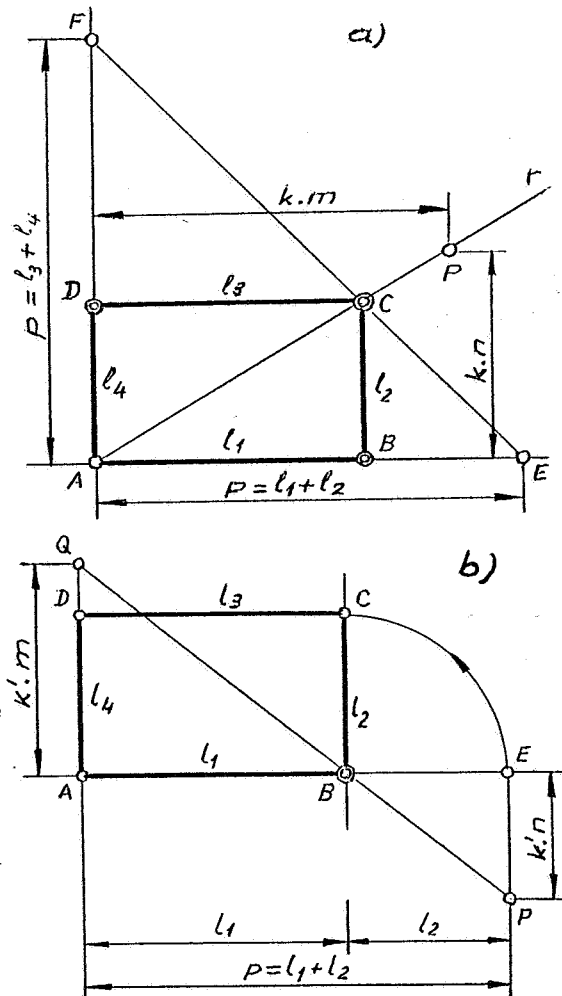


Fig. 48

7.2.- Propiedades generales más importantes.

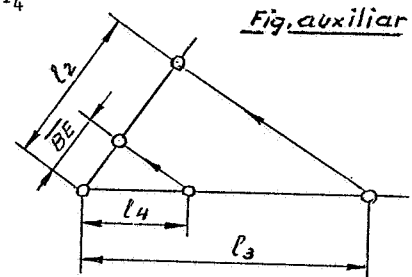
Como aplicación de las propiedades generales de los cuadriláteros, reseñadas en este estudio, se expone la construcción de un cuadrilátero, al menos, a título de ejemplo.

a).- Trapezoide inscriptible, conocidos sus lados. Fig. 49.

Si se supone que ABCD es la solución, se traza el ángulo BCE, igual al ACD y, en consecuencia son semejantes los triángulos ACD y BCE, pues, por ser suplementarios los ángulos B y D, el ángulo CBE es igual al D. De esta semejanza se deduce que $\frac{BC}{CD} = \frac{BE}{AD}$, es decir, $\frac{l_2}{l_3} = \frac{BE}{l_4}$; de donde se desprende que BE es cuarto proporcional de l_2, l_3 y l_4 .

Asimismo, de la citada semejanza se tiene que :

$\frac{CE}{CA} = \frac{CB}{CD}$; esto es $\frac{CE}{CA} = \frac{l_2}{l_3} = K$, es decir, el punto C pertenece a la circunferencia lugar geométrico de los puntos cuya razón de distancias a los A y E es una constante -- $K = l_2/l_3 = n/m$ (punto 3.2 de "Construcción de Triángulos.")



Por todo ello, la construcción gráfica es la siguiente: Sobre una recta se sitúa $AB=l_1$ y se halla BE (figura auxiliar); en segundo lugar se hallan los puntos X y X', que separan armónicamente a A y E, es decir, $(XX'AE) = -1$, de razones simples $XA/XE = -m/n$ y $X'A/X'E = m/n$, y $n/m = l_2/l_3$; después, el vértice C está sobre la circunferencia de diámetro XX', a una distancia l_2 de B. Finalmente, el cuarto vértice D se obtiene al construir el triángulo ACD, del que se conocen sus tres lados, o si se prefiere, al trazar la circunferencia circunscrita por los vértices A, B y C.

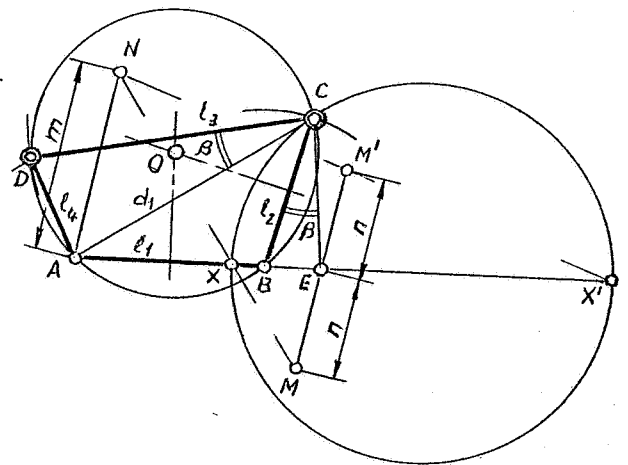


Fig. 49

b).- Trapezoide circunscriptible. Datos: l_1, l_2, A y C. Fig. 50.

Si se supone conocida la respuesta ABCD, se trazan los simétricos BA' y $A'D'$ de BA y AD, respectivamente, con eje de simetría BI_c , bisectriz del ángulo interior B, pues, como es sabido, $BT_1 = BT_2$.

El triángulo $A'CE$ puede construirse, al ser conocido el lado $A'C = l_2 - l_1$ y los dos ángulos que con él se forman: C y $A' = 180^\circ - A$, por ser $A = \beta + \gamma$.

Por tanto, la construcción del trapezoide solución ABCD se realiza, en este caso, de la siguiente forma: se construye el triángulo $A'CE$ y se traza su circunferencia exinscrita I_c , tangente al lado $A'E$, opuesto al vértice C. El resto del trazado gráfico no ofrece dificultad.

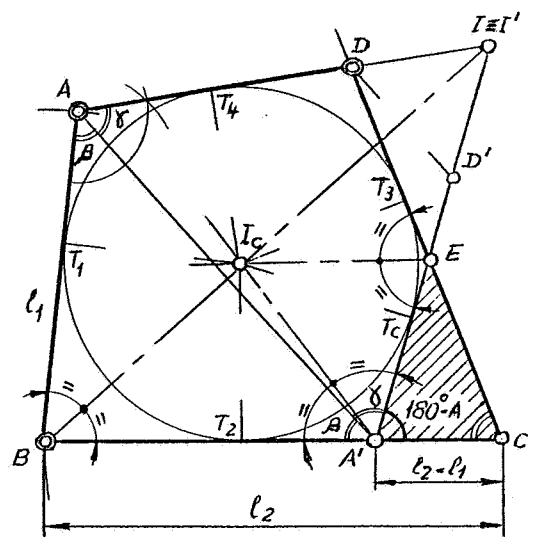


Fig. 50

c).- Trapecio isósceles. Datos: $2p$ y ρ . Fig. 51.

En todo cuadrilátero circunscriptible a una circunferencia, se cumple que son iguales las suma de cada par de lados opuestos, es decir, $l_1+l_3=l_2+l_4$. Por esto, $l_1+l_3=p$ y como en este caso $l_1=l_3$, se deduce que $2l_1=p$, o lo que es lo mismo $l_1=p/2$.

Por ello, se traza la circunferencia inscrita con el valor del radio ρ y dos tangentes paralelas, soporte de las bases l_2 y l_4 , desconocidas. Con centro en un punto cualquiera P , de una de ellas, con radio $l_1=p/2$, se traza un arco que corta a la otra tangente en dos puntos Q y R . La tangente paralela a PQ es el lado $AB=l_1$; el lado CD es simétrico del anterior, respecto del eje T_2T_4 . La tangente paralela a PR da lugar al mismo trapecio girado 180° alrededor de la base media.

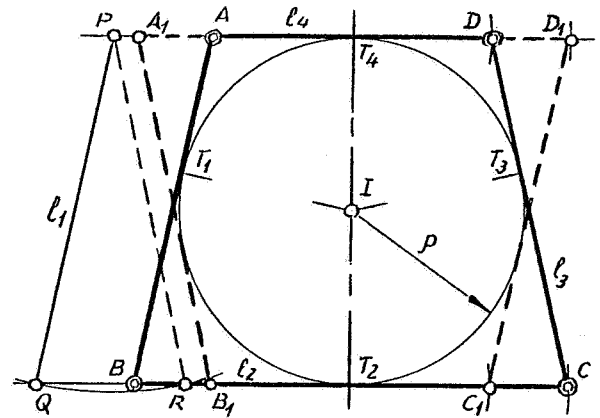


Fig. 51

d).- Trapezoide. Datos: l_1 , l_3 , d_1 , d_2 y NQ (segmento que une los puntos medios de l_2 y l_4). Fig. 52.

Sabido es que los puntos medios de los lados de un cuadrilátero, son vértices de un paralelogramo de lados la magnitud de las semidiagonales, a las que son paralelos. Por tanto, conocidos NQ , d_1 y d_2 , se construye el paralelogramo $MNPQ$.

Por otra parte, con centro en M y P , respectivamente, se trazan las circunferencias de diámetros l_1 y l_3 , de las que son diámetros los lados AB y CD . Para hallar estos vértices, se traslada una de las circunferencias, en la figura la de centro M , de forma que $MN=NM'$, para así obtener el vértice C y, en consecuencia, al unir este último punto con N , hallar el lado BC , cumpliéndose que $BN=NC$, pues, son simétricos los triángulos NBM y NCM' .

Existe una segunda posición $A_1B_1C_1D_1$ del cuadrilátero solución, al considerar el otro punto de intersección de las circunferencias de centros P y M' , el vértice C_1 .

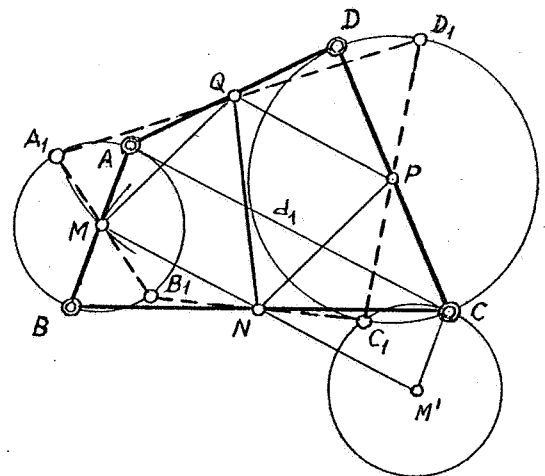


Fig. 52

e).- Trapezoide. Datos: α, d_1, d_2, B y D . Fig. 53.

Como indica el último párrafo de 2.2., Fig 10, se construye el paralelogramo $AA'C'C$, cuyos lados tienen por magnitud las diagonales y forman el ángulo α de éstas, es decir, se traslada una de las diagonales -la AC , bajo la cual se ven los ángulos B y D - en la dirección y magnitud de la otra .

A continuación, sobre la diagonal AC , se construye el arco capaz del ángulo B y sobre $A'C'$, la homóloga en la traslación, el arco capaz del D . La intersección de estos arcos es el vértice B y también el punto D' , que es el trasladado del D .

finalmente, se realiza la traslación inversa para obtener el vértice D . Los arcos capaces se cortan en dos puntos normalmente, por lo cual hay una segunda solución AB_1CD_1 , de línea de trazos en la figura.

Cuando son datos dos ángulos consecutivos, en vez de opuestos, por ejemplo A y B , se procede análogamente; en este caso, el segundo arco capaz será el correspondiente al ángulo A y se traza bajo el segmento AA' .

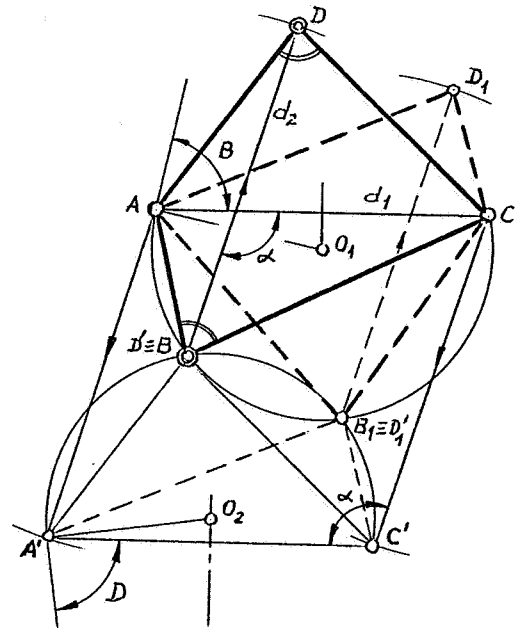


Fig. 53

f).- Trapezoide. Datos: A, C y $M-N-P$ (puntos medios de los lados l_1, l_2 y l_3). Fig. 54.

Como se expone en el punto 2.3, Fig. 11, los puntos medios E y F de las diagonales y los M, N, P y Q de los lados, forman los paralelogramos $MEPF$ y $NEQF$, cuyos lados son paralelos a los respectivos del trapezoide y de valor, mitad que éstos. En consecuencia, $AMFQ$ y $NCPF$ son paralelogramos, como puede observarse en la citada Fig. 11, por lo cual el ángulo $MFQ=A$ y el $NFP=C$.

Por ello, se completa el trazado del paralelogramo $MNPQ$ y sobre sus lados MQ y NP se construyen los arcos capaces de los ángulos A y C , respectivamente. El punto F es intersección de ambos arcos, por lo cual FQ y FM son paralelos respectivos a l_1 y l_4 , así como FN y FP lo son a l_3 y l_2 . Finalmente, por los puntos M, N, P y Q se trazan las correspondientes rectas soportes de los lados, cuyas intersecciones proporcionan el trapezoide solución $ABCD$.

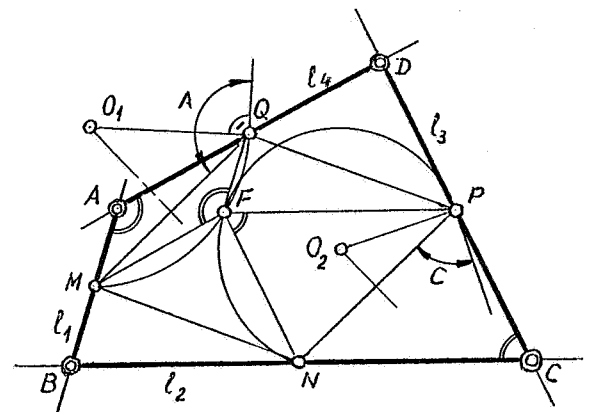


Fig. 54

g).- Trapezoide. Datos: l_1, l_2, l_3, D y $\alpha = 90^\circ$. Fig. 55

En todo cuadrilátero con las diagonales perpendiculares se cumple: $l_1^2 + l_3^2 = l_2^2 + l_4^2 = m^2$; por tanto, mediante los triángulos rectángulos de la figura auxiliar, se determina l_4 .

Para trazar el cuadrilátero solución se construye el triángulo ACD, del que se conocen dos lados y el ángulo que forman. Después, se construye el ABC, del cual se conocen sus lados.

7.3.- Propiedades Particulares.

Como aplicación de las propiedades particulares de los cuadriláteros, expuestas en el punto 3, se solucionan los ejemplos siguientes de construcción de trapezoides, trapecios y paralelogramos.

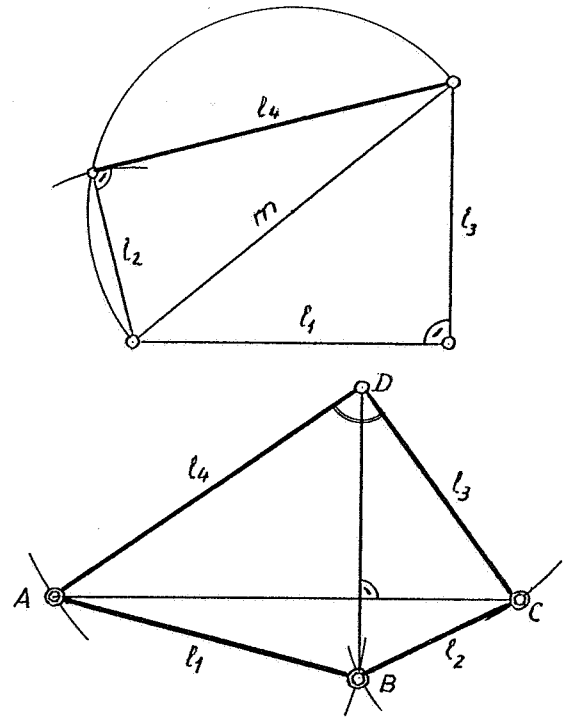


Fig. 55

a).- Trapezoide bi-isósceles. Datos: C, \overline{MN} y \overline{NP} (puntos medios de los lados l_1, l_2 y l_3). Fig. 56.

Los puntos medios de este cuadrilátero son vértices de un rectángulo. Por tanto, se construye el rectángulo de lados $MN=PQ$ y $NP=QM$, y sobre el lado NP se traza el arco capaz del ángulo C, vértice que se halla fácilmente, por ser isósceles el triángulo NCP.

Se unen P y N con C, y los vértices B y D se determinan mediante los segmentos $NB=CN$ y $PD=CP$. El vértice A es intersección de las rectas BM y DQ

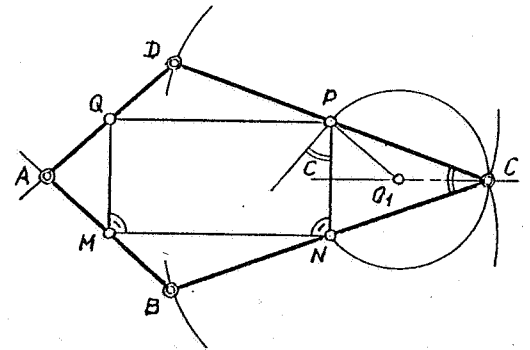


Fig. 56

b).- Trapecio rectángulo. Datos: d_1, d_2 y \overline{GH} (segmento de la base media interceptado por las diagonales). Fig. 57.

En todo trapecio, \overline{GH} tiene por valor la semidiferencia de las bases, propiedad c) de 3.2.1. Si se observa la representación a) de la Fig. 14, se deduce que el triángulo AEC se puede construir, por conocerse sus lados: $AE=d_2$, $AC=d_1$ y $EC=2\overline{GH}=l_2-l_4$. El vértice B está en la recta EC y en la perpendicular por A. Determinando l_4 , se lleva $AD=BE=l_4$.

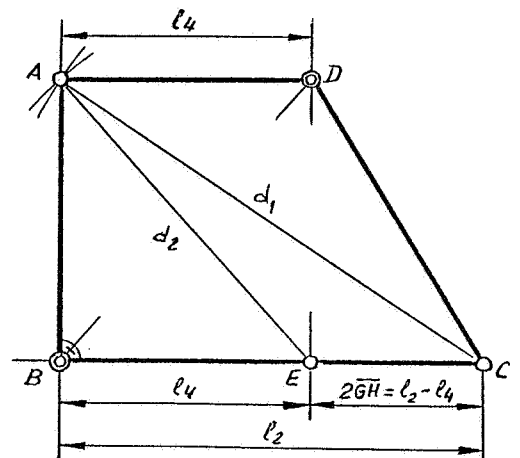


Fig. 57

c).- Trapecio, conocidos los ángulos y las diagonales. Fig. 58.

Por la propiedad particular de los trapecios expuesta en la letra d) de 3.2.1, se traza sobre un segmento cualquiera B_1C los ángulos B y C, para así obtener el triángulo EB_1C . Después se traza su mediana EN_1 y se obtienen los puntos X y X' de las razones simples siguientes: $XB_1/XC = d_2/d_1$ y $X'B_1/X'C = -d_2/d_1$, es decir, que $(XX'B_1C) = -1$. El punto O_1 pertenece a la circunferencia de diámetro XX' y a la recta EN_1 , único de ésta recta que cumple la relación $O_1B_1/O_1C = d_2/d_1$.

Trazado el trapecio $A_1B_1CD_1$, semejante al trapecio solución $ABCD$, se prolonga CA_1 hasta que $CA = d_1$. El resto de la construcción no tiene dificultad alguna.

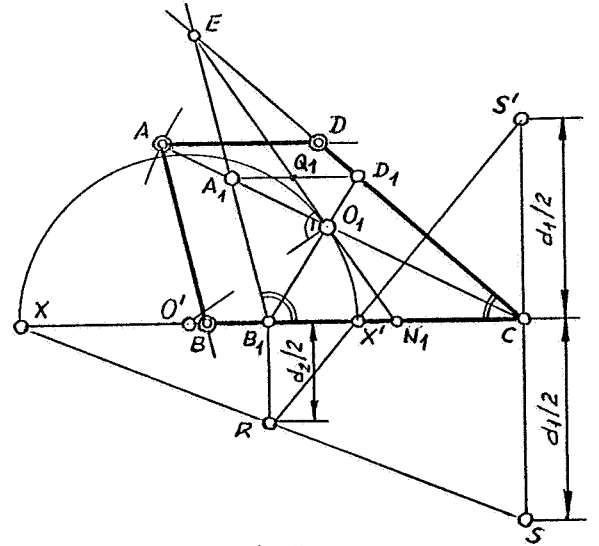


Fig. 58

d).- Romboide. Datos: d_1, d_2 y \hat{B} . Fig. 59.

En estos cuadriláteros, las paralelas medias son diagonales del romboide $MNPQ$, de vértices los puntos medios de los lados del $ABCD$. Por ello, se puede construir el triángulo MNO de la figura, pues, se conoce $MN = d_1/2$, la mediana $EO = NP/2 = d_2/4$ y el ángulo $\alpha' = \hat{B}$. Como las diagonales de los paralelogramos se cortan en el punto medio, se traza el romboide $MNPQ$ al considerar $OP = OM$ y $OQ = ON$.

Además, en este caso, las diagonales de $MNPQ$, son las paralelas medias del romboide solución. Por lo cual, por los puntos M, N, P y Q se trazan las correspondientes paralelas a MP y NQ, para así obtener $ABCD$.

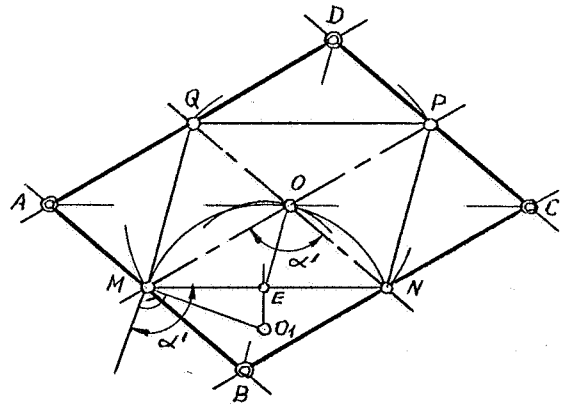


Fig. 59

e).- Cuadrado. Datos: $l+d$. Fig. 60.

Como los cuadrados son semejantes entre sí, se construye un cuadrado cualquiera $A'B'C'D'$ y a su diagonal se le suma el lado, es decir, $BE' = BD' + D'C' = d' + l'$. De esta forma se obtiene el triángulo $BC'E'$, al cual será semejante el homólogo de otro cuadrado cualquiera.

Por ello, se traza $BE = d + l$ y EC paralelo al lado $E'C'$, para obtener el triángulo semejante BCE ; su lado BC es el del cuadrado solución.

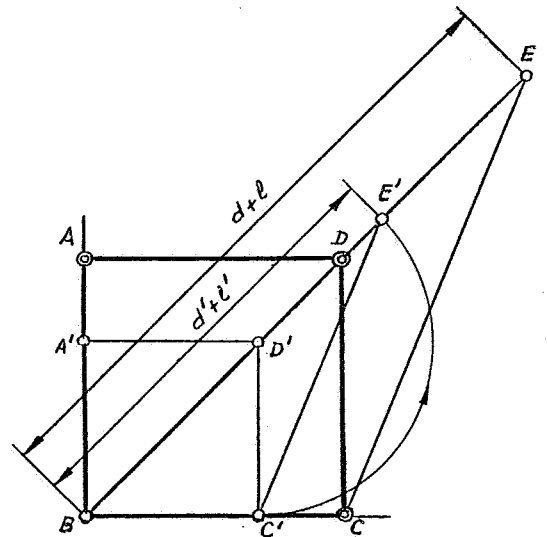


Fig. 60

f).- Rombo, conocidas las rectas paralelas a y b , soportes de dos lados opuestos, y los puntos R y S , por los que pasan los otros dos. Fig. 61.

Como expone la propiedad c), del apartado 4, del punto 3.3, son iguales las distancias entre cada par de lados paralelos. Por ello, con RS como hipotenusa y $ST=h$ como cateto, se construye el triángulo rectángulo RTS , con lo cual se hallan las rectas r y s , soporte de los otros dos lados.

La intersección de los pares de rectas $a-b$ y $r-s$, son los vértices del rombo solución.

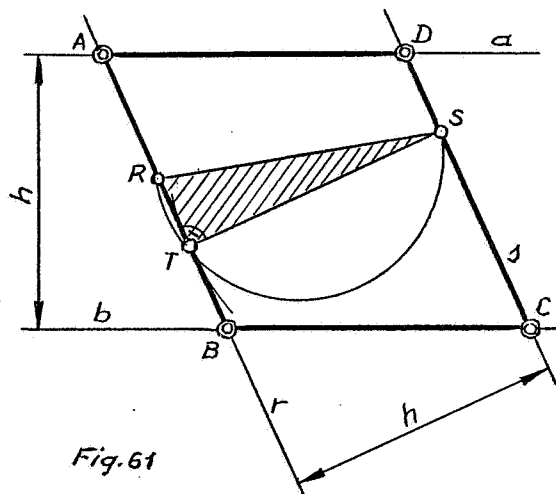


Fig. 61

REGULARES E IRREGULARES

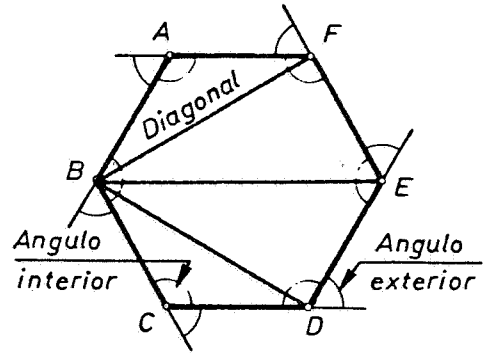
1.1.- GENERALIDADES.

-Lados: \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{FA}

-Ángulos interiores: O simplemente ángulos del polígono A, B, C, D, F

-Ángulos exteriores: Los formados por cada lado y la prolongación de uno contiguo. Estos ángulos son suplementarios de sus correspondientes interiores.

-Diagonales: El segmento que une dos vértices no consecutivos.



HEXAGONO CONVEXO

El número de diagonales que se pueden trazar desde un vértice es igual al número de lados menos tres.

1.2.- DENOMINACION.

El número de lados de un polígono es igual al de sus vértices y ángulos, y atendiendo a él han recibido los nombres especiales que se dan en el cuadro adjunto.

Los demás polígonos carecen de nombre especial y se denominan de trece, catorce, etc., lados.

Nº de Lados.	Nombre.	Nº de Lados.	Nombre.
3	Triángulo	9	Eneágono
4	Cuadrilátero	10	Decágono
5	Pentágono	11	Endecágono
6	Hexágono	12	Dodecágono
7	Heptágono	15	Pentadecágono
8	Octógono	20	Icoságono

1.3.- CLASIFICACION.

-Equiláteros: Todos sus lados son iguales.

-Equiángulos: Todos sus ángulos interiores y, en consecuencia, sus ángulos exteriores son iguales.

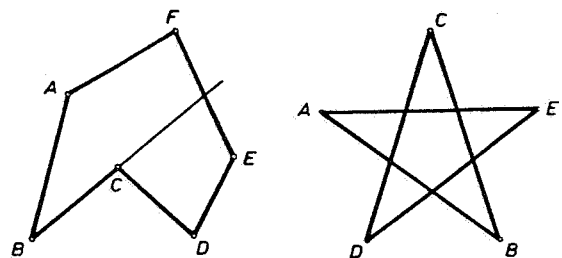
-Regulares: Los que son equiláteros y equiángulos. Estos polígonos son incriptibles y circunscriptibles a una circunferencia.

-Irregulares: No son equiláteros o equiángulos, o ni lo uno ni lo otro.

-Convexos: El polígono se halla contenido por entero en un semiplano de los dos en que divide al plano la recta de cada uno de sus lados.

-Cóncavos: Al menos una recta de un lado divide al polígono en dos partes.

Si lo anterior sucede para todas las rectas de los lados, el polígono se denomina ESTRELLADO.



CONCAVO

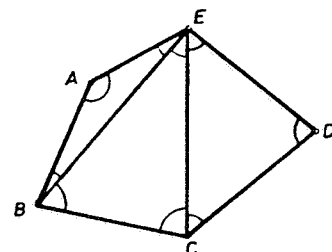
ESTRELLADO

1.4.- SUMA DE DOS ANGULOS INTERIORES.

Es igual a tantas veces dos rectos como lados tiene menos dos.

Siendo n el número de lados: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \dots = 180^\circ(n-2)$

Pues, el polígono se descompone en $(n-2)$ triángulos, cuyos lados son diagonales y lados del polígono.



1.- CONSTRUCCION DE POLIGONOS IRREGULARES.

La construcción de los polígonos irregulares está basada en su descomposición en triángulos, cuadriláteros, o triángulos y cuadriláteros, y la ordenada construcción de éstos.

Así, en la figura 1 se ha descompuesto el hexágono irregular en cuatro triángulos de lados las diagonales y lados del polígono.

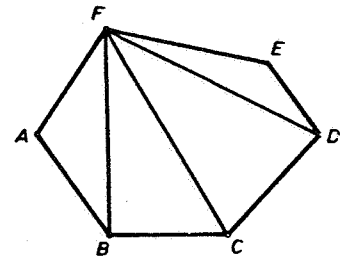


Fig. 1

En la fig. 2 se ha descompuesto en el rectángulo CDEF y el trapecio EBFE.

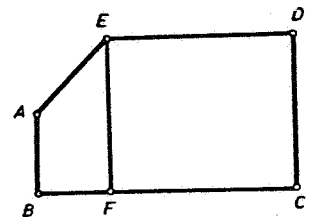


Fig. 2

Por último, en la fig. 3 se ha descompuesto en los cuadriláteros -- DEFM y ABCN, y en los triángulos rectángulos AMF y CND.

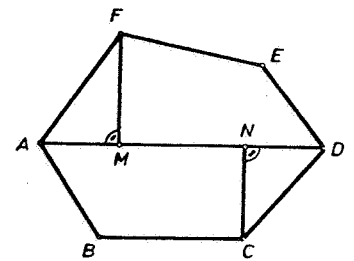


Fig. 3

En los tres casos, construyendo los triángulos y cuadriláteros en su posición relativa se obtiene el polígono irregular.

Por consiguiente, se puede establecer que:

Para construir un polígono irregular se descompone en triángulos, cuadriláteros o triángulos y cuadriláteros, que se construyen ordenadamente, en la misma posición relativa que ocupan en el polígono irregular.

2.- CONSTRUCCION DE POLIGONOS REGULARES CONVEXOS.

Para construir estos polígonos es necesario conocer solamente un dato. que en la generalidad de los casos es el radio de la circunferencia circunscrita, o inscrita, o el lado del polígono.

En éstos casos existe un método GENERAL que resuelve la construcción del polígono regular, cualquiera que sea el número n de lados del mismo, y un método PARTICULAR para algunos polígonos.

DATOS.	METODOS.	APLICACIONES Y OBSERVACIONES.
El radio de la circunferencia circunscrita o inscrita.	GENERAL.	A todo polígono regular convexo. (Es un método laborioso.)
	FARTICULARES	Es más simple que el método general, y van a exponerse para las siguientes series de polígonos: - 3, 6, 12, 24, lados - 4, 8, 16, 32, " - 5, 10, 20, 40, " - 15, 30, 60, 120, "
El lado del polígono	GENERAL.	A todo polígono regular convexo. Está basado en la semejanza de los polígonos regulares del mismo número de lados. (Es un método laborioso.)
	FARTICULARES.	Es más simple que el general. Teniendo en cuenta el nivel del curso, van a exponerse los correspondientes a: - PENTAGONO - HEXAGONO - HEPTAGONO - OCTOGONO - DECAONO - DODECAGONO

2.1.- ES DATO EL RADIO LA CIRCUNFERENCIA CIRCUNSCRITA O INSCRITA.

METODO GENERAL

Se divide un diámetro cualquiera, en la fig 4 el \overline{AM} , en $n/2$ partes iguales ($n = n^o$ de lados del polígono). Con centros en A y M y radio el diámetro de la circunferencia se trazan dos arcos que se cortarán en P y Q, uniendo estos puntos con las divisiones 1,2,3,... se dividirá a la circunferencia en n partes iguales, o lo que es igual, se habrán obtenido los vértices del polígono, un heptágono en la figura.

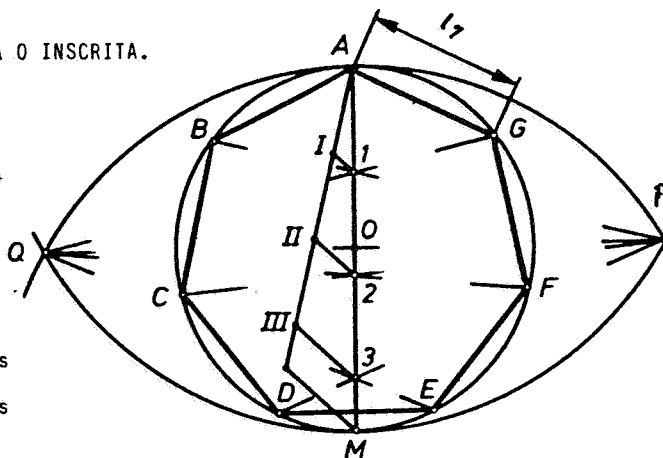


Fig. 4

Aunque todos los lados son iguales, es conveniente unir P y Q con todas las divisiones 1,2,3,..., con objeto de no acumular errores gráficos que, sin duda, se producirían al llevar el lado del polígono -- (n-1) veces sobre la circunferencia.

Si la circunferencia conocida fuera la inscrita, fig.5 el problema se resuelve exactamente igual, sólo que las divisiones A', B', C' D'.... en vez de ser vértices del polígono son los puntos de tangencia de los correspondientes lados del polígono.

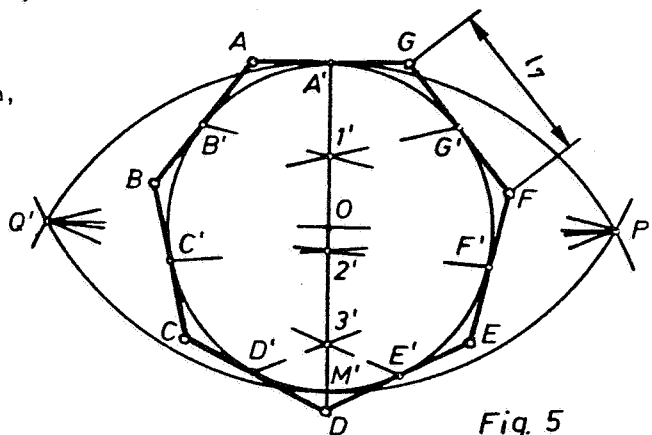


Fig. 5

METODOS PARTICULARES

Polígonos regulares convexos de 3, 6, 12, lados

El lado l_6 del hexágono regular convexo es igual al radio de la circunferencia circunscrita a él, pues, el hexágono se descompone en seis triángulos equiláteros iguales: AOF, EOD,BOA, fig.6

En vez de llevar el radio seis veces consecutivas sobre la circunferencia, lo cual produciría -- siempre una acumulación de errores, se traza un diámetro cualquiera, en la figura el \overline{AD} , y haciendo centro en sus extremos con radio el de la circunscrita se trazan dos arcos que determinan, en su intersección con la circunferencia, los otros cuatro vértices del polígono.

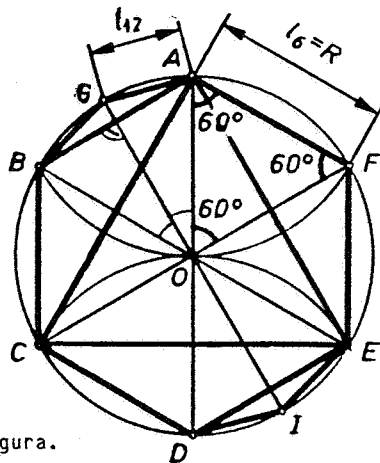


Fig. 6

El triángulo equilátero se obtiene uniendo -- tres vértices no consecutivos, por ejemplo el ACE en la figura.

El dodecágono regular inscrito en la misma circunferencia, se obtiene hallando las bisectrices de tres ángulos centrales consecutivos del hexágono, o lo que es igual, trazando las mediatrices de tres lados consecutivos. En la figura, con el fin de que esta resulte más clara, solamente se han trazado los cuatro lados que determina la recta GI. El polígono regular convexo de veinticuatro lados se obtendrá trazando las bisectrices de seis ángulos centrales consecutivos del dodecágono y, así sucesivamente, los restantes de la serie.

Polígonos regulares convexos de 4, 8, 16, lados.

El cuadrado inscrito se obtiene trazando dos diámetros perpendiculares entre sí, fig. 7.

Trazando las bisectrices de sus ángulos centrales, que serán paralelas a los lados del cuadrado, se obtiene el octógono.

Los polígonos regulares de 16, 32, ... etc. lados se obtendrán por bisección de los respectivos ángulos centrales.

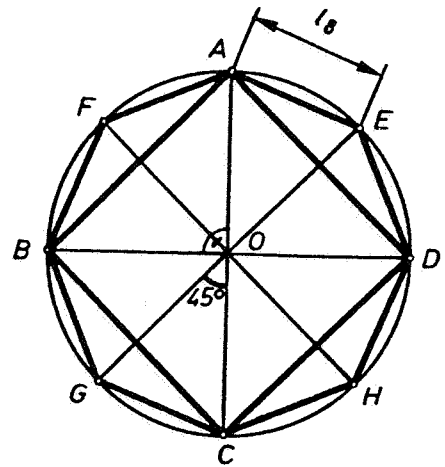


Fig. 7

Polígonos regulares convexos de 5, 10, 20, lados

En la fig.8 se ha construido el triángulo isósceles OAB, que es uno de los diez triángulos isósceles, iguales entre sí, que componen un decágono regular convexo de lado $l_{10} = AB$ e inscrito en una circunferencia de radio $R=AO$. El ángulo O es $360/10 = 36^\circ$ y $\hat{A} = \hat{B} = 72^\circ$.

Trazando $BN = AB = l_{10}$, el triángulo OAB se -- descompone en dos triángulos isósceles también: el BNA y el NBO, en este $BN = ON = l_{10}$, ya que son iguales -- los ángulos NOB y NBO, de valor 36° .

Los triángulos BNA y OAB son semejantes, pues, tienen sus ángulos iguales. Por ello, se puede establecer que $\frac{AB}{NA} = \frac{OA}{AB}$; pero, $AB = l_{10}$, $OA = R$ y $NA = OA - ON = R - l_{10}$

Sustituyendo estos valores se obtiene que $\frac{l_{10}}{R - l_{10}} = \frac{R}{l_{10}}$, de donde se deduce que $l_{10}^2 = R(R - l_{10})$, expresión del segmento aúereo de R.

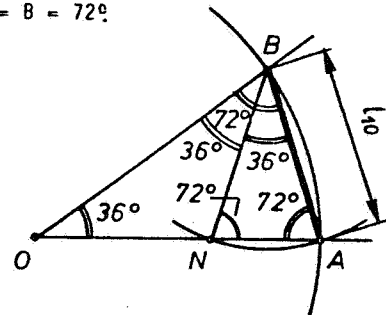


Fig. 8

El lado del decágono regular convexo es segmento aúereo del radio de la circunferencia circunscrita al polígono.

Como consecuencia de lo anterior, en la fig.9 se ha obtenido AM: segmento aúereo del radio OA, y lado del decágono regular convexo inscrito en la circunferencia O.

El lado del pentágono regular inscrito en la misma circunferencia es $BC = l_5$, pues los vértices -- de este polígono son cinco no consecutivos del decágono.

Más fácilmente se puede obtener l_{10} , haciendo centro en O_1 , fig.10, y radio \overline{QA} , pues, realmente $\overline{OA}_1 = l_{10}$ es resultado de girar AM. También se puede demostrar en esta misma construcción que $AA_1 = l_5$. pudiendo definir que:

El lado de un pentágono regular es hipotenusa de un triángulo rectángulo que tiene por catetos el radio de la circunferencia circunscrita a él y el lado del decágono regular, inscrito también en ella

Fig. 9

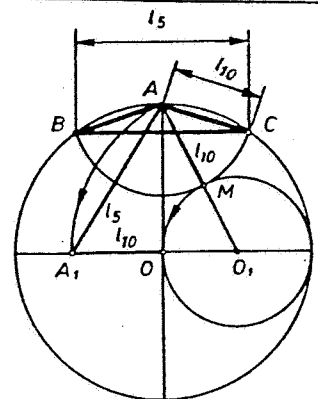
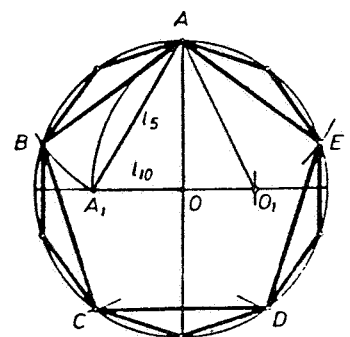


Fig. 10



Polígonos regulares convexos de 15, 30, ... lados.

El ángulo central de un pentadecágono regular convexo es de $360^\circ/15 = 24^\circ$. Este ángulo puede construirse, pues, $24^\circ = 60^\circ - 36^\circ$; valores de los ángulos centrales del hexágono y decágono regulares convexos, respectivamente.

En la fig. 11 se ha obtenido el lado l_{15} del pentadecágono regular convexo, inscrito en la circunferencia dada, llevando el lado $\overline{AB} = R$ del hexágono -- y $\overline{BC} = l_{10}$ del decágono, regulares e inscritos en la misma circunferencia, La diferencia de sus ángulos -- centrales permite obtener $\overline{AC} = l_{15}$.

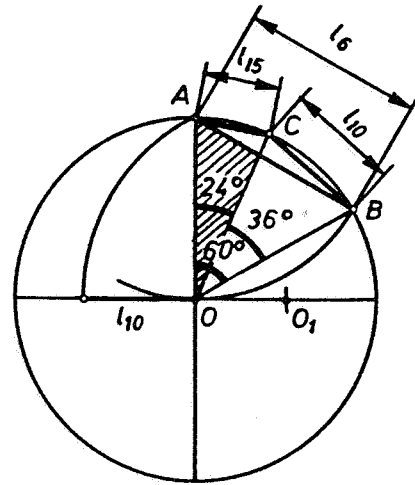


Fig. 11

Dividiendo en dos, cuatro, etc., partes iguales el ángulo central del pentadecágono, se obtendrán los polígonos regulares convexos de treinta, sesenta, etc., lados respectivamente.

2.2.- ES DATO EL LADO DEL POLIGONO REGULAR CONVEXO.

METÓDO GENERAL

Se basa en que :

Los polígonos regulares convexos del mismo número de lados son semejantes.

Por lo anterior, son semejantes los triángulos isósceles que tienen por base un lado del polígono y el tercer vértice es el centro del mismo; en la fig.12 los triángulos $OA'B'$ y OAB .

Según esto último, para construir un polígono regular convexo conocido su lado, se traza una circunferencia de un radio cualquiera y se divide en tantas partes iguales como lados tiene el polígono solución. En la figura, $A'B'$ es la séptima parte de la circunferencia, pues, se pretende construir un heptágono regular.

Como se ha indicado anteriormente, el triángulo $OA'B'$ es semejante al OAB del polígono solución. De este triángulo se conoce $AB = l_7$ y, además, que $A'B'$ y AB serán paralelos; por esto, en ^{un} punto cualquiera de OA' o de OB' , se traza $\overline{MN} = l_7$ y paralelo a $A'B'$, que después se traslada hasta ocupar su posición AB , determinando así $\overline{OA} = \overline{OB}$ que es el radio de la circunferencia circunscrita al polígono solución, cuyos vértices se obtienen, también por semejanza, a partir de los $C', D' \dots G'$, del heptágono cualquiera que en principio se dibujó.

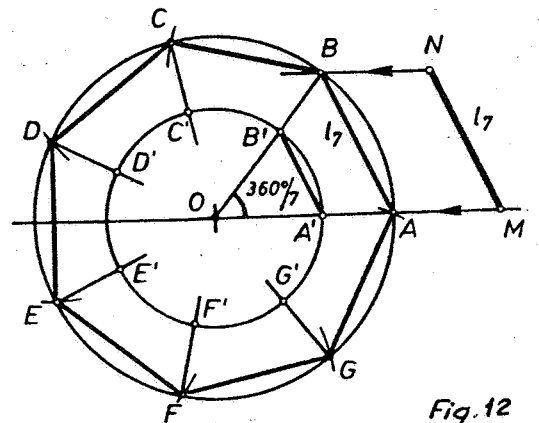


Fig. 12

MÉTODOS PARTICULARES

La construcción de algunos polígonos regulares convexos, conocido su lado, se puede realizar por un método particular, lo que es preferido por ser siempre menos laborioso que el método general anteriormente expuesto.

Estos métodos particulares pueden ser sólo aplicables a un polígono de un número concreto de lados o, por el contrario, ser aplicables a una serie de polígonos con distinto número de lados.

A continuación, se expone el fundamento del método que es válidos para los:

Polígonos con número par de lados. En general, se pretende hallar la circunferencia circunscrita al polígono solución, que en este caso se obtiene aplicando la siguiente propiedad geométrica.

El centro de la circunferencia circunscrita a un polígono regular convexo de lado l y número par de lados n , está en la circunferencia circunscrita al polígono regular convexo de lado l y número de lados $n/2$.

Se van a exponer seguidamente las construcciones de los polígonos regulares convexos de cinco, -- seis, ocho, diez y doce lados, omitiendo las del triángulo equilátero y el cuadrado por haber sido expuestas en los temas anteriores.

Pentágono regular.

En la fig. 13 se observa que la construcción del pentágono queda reducida a la construcción de los triángulos isósceles ACD, ABC y ADE. De estos triángulos se conocen los tres lados, pues, se sabe que:

El lado de un pentágono regular convexo es segmento aúreo del lado del pentágono regular estrellado que tiene los mismos vértices que el primero, o lo que es igual, de la diagonal del convexo.

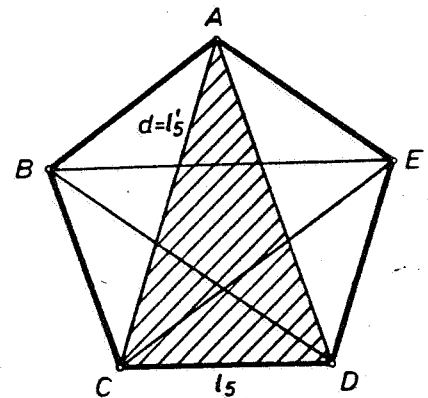


Fig. 13

Según lo anterior, en la fig. 14 se ha determinado el segmento $\overline{CM} = d = l'_5$ del que es aúreo el lado $\overline{CD} = l_5$ dado.

Después se ha construido el triángulo isósceles ACD que tiene por lados l_5 y l'_5 ; sobre AC y AD se han construido los triángulos isósceles ABC y ADE, -- respectivamente.

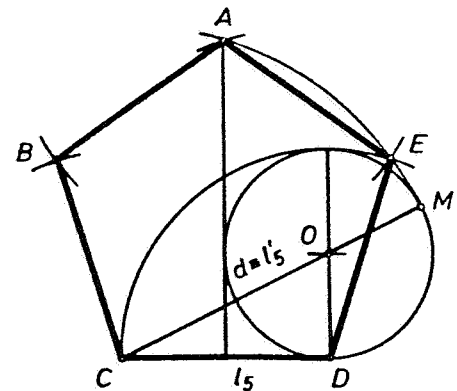


Fig. 14

HEXAGONO REGULAR.

Como ya es sabido, el lado de un hexágono regular es igual al radio de la circunferencia circunscrita a él, por lo que al ser dato el primero se puede trazar ésta y en ella inscribir el hexágono solución.

En la fig. 15 se ha construido un triángulo equilátero de lado al del hexágono, obteniendo así el centro O de la circunferencia circunscrita al polígono.

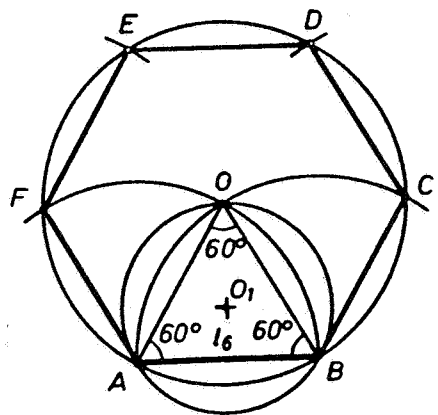


Fig. 15

Se comprueba así lo dicho anteriormente para los polígonos regulares convexos de número par de lados; esto es, que construido el triángulo equilátero de lado el del hexágono solución, el centro O de la circunferencia circunscrita a éste está en la circunferencia circunscrita al triángulo.

OCTOGONO REGULAR.

Como el número de lados es par, se construye el cuadrado ABMN con el lado $\overline{AB} = l_8$, fig.16. En la mediatriz de AB se halla el centro O de la circunferencia circunscrita al octógono solución.

Esta circunferencia, también puede obtenerse trazando un lado contiguo al \overline{AB} , el ángulo exterior de este polígono es de 45° , ya que pasará por los tres vértices H, A y B.

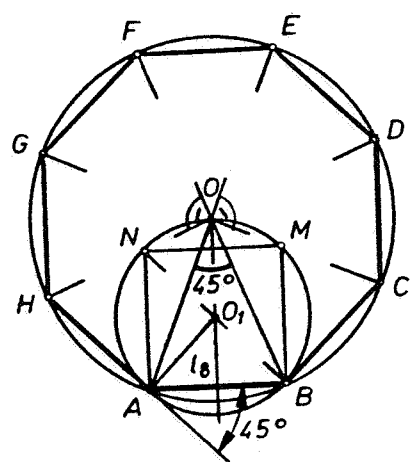


Fig. 16

El centro O aún puede obtenerse por otro método más, que se puede aplicar en bastantes polígonos, pues, se encuentran en el arco capaz de 45° , valor del ángulo central AOB, visto bajo el lado del octógono AB. Este arco capaz coincide con la circunferencia circunscrita al cuadrado ABMN.

Los restantes vértices del octógono se obtienen prolongando OA y OB y, trazando por O las rectas perpendiculares a las anteriores.

DECAGONO REGULAR.

El centro O de la circunferencia circunscrita al decágono solución, se obtiene construyendo el pentágono regular convexo ABMON de lado el dato $\overline{AB} = l_{10}$, por ser par su número de lados. Fig. 17.

Prolongando los lados BM, MO, NO, y NA, así como también las diagonales, se obtienen los vértices del decágono.

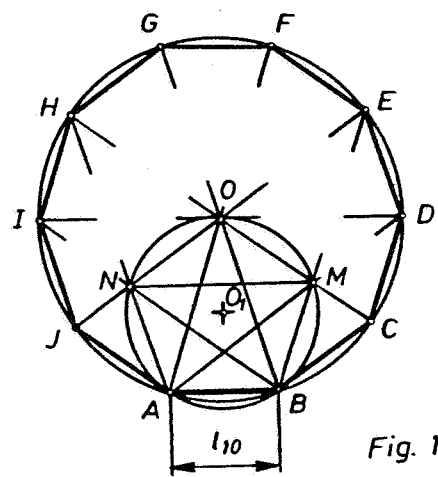


Fig. 17

El radio de la circunferencia circunscrita al decágono solución, se puede obtener también hallando el segmento del cual l_{10} es áureo, pues, ésta relación se ha expuesto anteriormente. Ahora bien, obsérvese que esa misma construcción hay que realizarla para trazar el pentágono ABMON, aunque realmente puede omitirse el trazado de este polígono dividiendo la circunferencia de centro O en diez partes iguales.

Dodecágono regular.

Por ser también el número de sus lados, en la circunferencia circunscrita a un hexágono regular convexo de lado el del dodecágono, se encuentra el centro O de la circunferencia circunscrita a este polígono.

En la fig. 18 se ha omitido el trazado del hexágono, habiéndose dibujado el triángulo equilátero ABO , de lado $\overline{AB} = l_{12}$; el punto O_1 es centro del hexágono y de la circunferencia circunscrita a este. Es

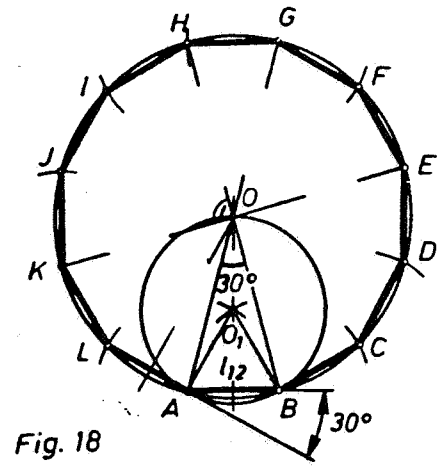


Fig. 18

Esta circunferencia es, también, arco capaz del ángulo central AOB , de valor 30° , visto bajo el segmento AB .

La circunferencia circunscrita al dodecágono solución, también puede obtenerse trazando un lado contiguo al AB , el ángulo exterior de este polígono regular es de 30° , ya que pasará por los tres vértices L, A y B .

3.- CONSTRUCCION DE POLIGONOS REGULARES. ESTRELLADOS.

Al igual que en los convexos, para su construcción es necesario conocer un sólo dato. También, como en aquellos, este dato puede ser el radio de la circunferencia circunscrita o el lado del polígono

DATOS.	METODOS.	APLICACIONES Y OBSERVACIONES.
El radio de la circunferencia circunscrita o inscrita	GENERAL	A todos los polígonos. No existen, ni son necesarios, métodos particulares.
El lado del polígono.	GENERAL	A todos los polígonos. Está basado en la semejanza de los polígonos regulares estrellados de igual número de lados
	PARTICULARES	Son menos laboriosos que el general y se van a exponer los correspondientes a los polígonos: PENTAGONO OCTOGONO DECAGONO DODECAGONO

3.1.- ES DATO EL RADIO DE LA CIRCUNFERENCIA CIRCUNSCRITA.

Como la división de una circunferencia en n partes iguales es un problema que se sabe resolver, para la construcción de un polígono regular sólo falta conocer cuántas de esas divisiones subtiende el lado del polígono, es decir, lo que se llama paso p del mismo.

Si los puntos de división se unen de uno en uno, -- paso $p=1$, se obtiene el polígono regular convexo, como se observa en el eneágono de la fig. 19.

Cuando $p=2$ y n es par, fácilmente se comprende que se obtiene el polígono regular convexo de $n/2$ lados. Pero si n es impar, fig. 19, no se cierra el polígono en la primera vuelta, sino en la segunda; se obtiene un estrellado por cortarse sus lados entre sí y, regular por tener sus lados y ángulos iguales.

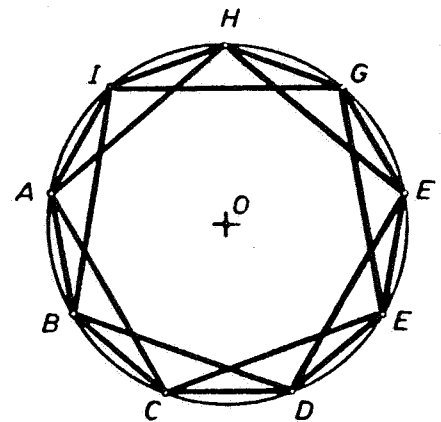


Fig. 19

En general, llamando α a cada arco de la circunferencia dividida en n partes iguales, la circunferencia -- completa será $n \cdot \alpha$ y, el arco que subtiende cada lado p .

Si p y n son primos entre sí, como sucede en la -- fig. 20 en la cual $n=9$ y $p=4$, $p \cdot \alpha$ y $n \cdot \alpha$ tienen por m.c.m. el producto $p \cdot n \cdot \alpha$, lo que indica que el polígono se cerrará después de recorrer p veces la circunferencia. En la figura se ha obtenido un eneágono regular estrellado, el de mayor paso posible.

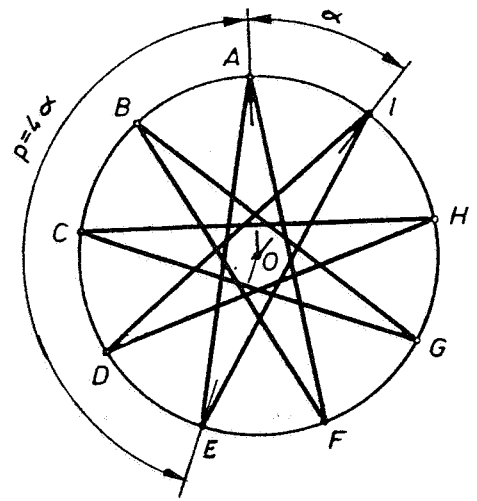


Fig. 20

En efecto, uniendo los vértices con paso p se obtiene el mismo polígono que utilizando el paso complementario $n-p$, de lo que se deduce que hay tantos polígonos regulares estrellados de n lados, como números primos con él haya hasta $n/2$, si n es par, y hasta $n/2$ por defecto si es impar

Cuando p y n no son primos entre sí, tendrán un -- m.c.d., por ejemplo d , y entonces el m.c.m. de $p \cdot \alpha$ y $n \cdot \alpha$ será $\frac{pn \cdot \alpha}{d}$, es decir, que se regresará al punto de partida después de recorrer p/d veces la circunferencia, o bien, después de considerar n/d veces el arco $p \cdot \alpha$. En este caso, se ha construido un polígono regular convexo de n/d lados; en la fig. 21, $n=9$ y se ha considerado -- $p=3$, por lo que de acuerdo con lo anteriormente expuesto se ha obtenido un triángulo equilátero.

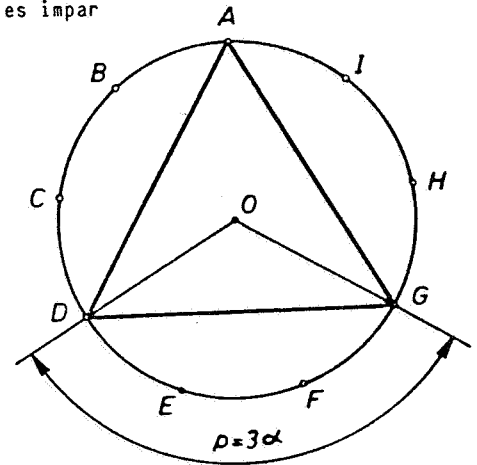


Fig. 21

CUADRO RESUMEN

RESUMEN :

Como género de un polígono se llama al número de lados de que consta y especie al número de vueltas, -- igual al paso p , que daría un punto que recorra su contorno hasta volver al punto de partida, se puede escribir que:

Si p es número primo con n y menor que la mitad de éste, el polígono estrellado que resulta de unir -- de p en p las divisiones, a partir de una de ellas, será de género n y especie p .

GENERO. (Nº de lados) n	Números primos con n hasta -- $< n/2$.	ESPECIES (Pasos p)
3	--	1ª
4	--	1ª
5	2	1ª y 2ª
6	--	1ª
7	2 y 3	1ª, 2ª y 3ª
8	3	1ª y 3ª
9	2 y 4	1ª, 2ª y 4ª
10	3	1ª y 3ª
11	2, 3, 4, y 5	1ª, 2ª, 3ª, 4ª y 5ª
12	5	1ª y 5ª
13	2, 3, 4, 5, y 6	1ª, 2ª, 3ª, 4ª, 5ª y 6ª
14	3 y 5	1ª, 3ª y 5ª
15	2, 4 y 7	1ª, 2ª, 4ª y 7ª
20	3, 7 y 9	1ª, 3ª, 7ª y 9ª

Advertencia.

En el cuadro resumen se observa que los polígonos de tercero, cuarto y sexto género, sólo pueden ser de primera especie. Así mismo, partiendo de un vértice de un polígono estrellado y recorriendo todos sus lados se regresa nuevamente a este punto.

Sin embargo, es bastante frecuente caer en el error de considerar como polígono estrellado al conjunto formado por dos polígonos del mismo género y primera especie, es decir convexos, girados uno con respecto al otro la mitad de su ángulo central. Como ejemplo, en la fig. 22 se han dibujado dos triángulos equiláteros que sólo aparentemente parece un hexágono estrellado, y en la fig. 23. dos cuadrados dan la errónea sensación de formar un octágono estrellado.

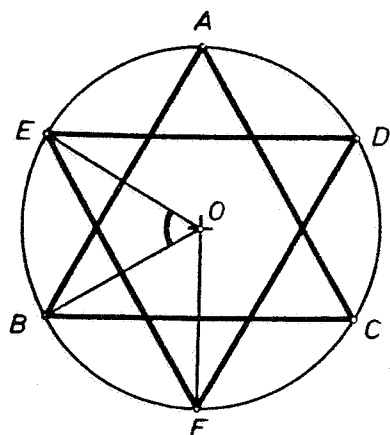


Fig. 22

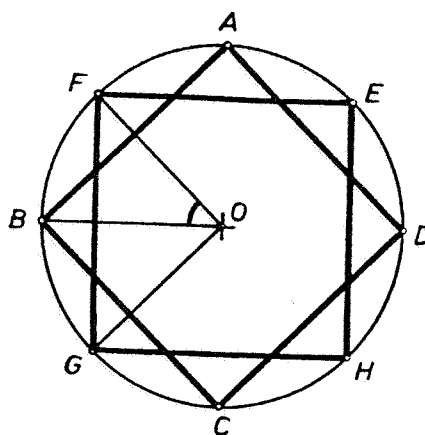


Fig. 23

3.2. ES DATO EL LADO DEL POLIGONO REGULAR ESTRELLADO.

METODO GENERAL.

Al igual que en los polígonos convexos, este método se basa en la semejanza :

Los polígonos regulares estrellados del mismo género y especie son semejantes.

En la fig. 24 se ha construido un heptágono regular estrellado de segunda especie, del que se conoce su lado l'_7 .

Para realizar dicha construcción se ha trazado una circunferencia de radio cualquiera OA' , que se ha dividido en siete partes iguales y uniendo las divisiones A' y C' , dado que es de segunda especie, fig.2, se obtiene el triángulo isósceles $OA'C'$, que es semejante al OAC del polígono solución, este triángulo puede ser construido de igual forma que el OAB de la fig. 12.

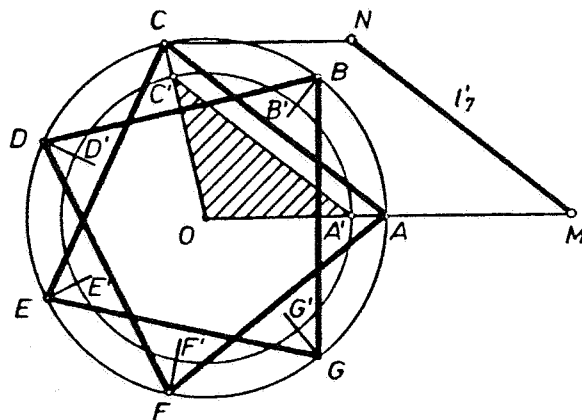


Fig. 24

De este modo se ha obtenido el radio de la circunferencia circunscrita al heptágono, obteniendo sus vértices al prolongar los radios, OA' , OB' , ..., OG' , de la circunferencia auxiliar.

MÉTODOS PARTICULARES.

Pentágono regular de segunda especie.

Como ya se ha indicado anteriormente, el lado l_5 de un pentágono regular convexo es segmento áureo del lado l'_5 de su estrellado.

Por lo anterior, se halla el segmento áureo de $\overline{AM}=l'_5$, dato del polígono, y con $\overline{AB}=l_5$ como lado se construye el pentágono regular convexo ABCDE; uniendo sus vértices con $p=2$ se obtiene el pentágono regular estrellado solución. Fig. 25

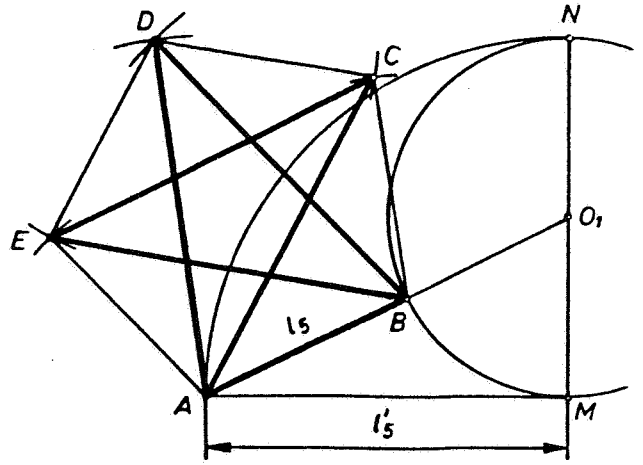


Fig. 25

Octógono regular de tercera especie.

El lado del octógono regular estrellado $-p=3-$, subtiende tres de las ocho partes iguales en que se halla dividida la circunferencia circunscrita al polígono; por tanto, su ángulo central será de 135° .

Cada lado del polígono y el centro O del mismo forman un triángulo isósceles de base el lado l'_8 y ángulo opuesto 135° . Este triángulo puede construirse y, por tanto, trazar la circunferencia circunscrita al octógono, que dividida en ocho partes iguales y uniendo estas divisiones de tres en tres se obtiene el polígono solución.

El triángulo OAD, fig.26, se ha obtenido trazando el arco capaz de 135° visto bajo el segmento $\overline{AD}=l'_8$. Prolongando OA y OD y trazando las respectivas perpendiculares a esas rectas, se divide la circunferencia en ocho partes iguales.

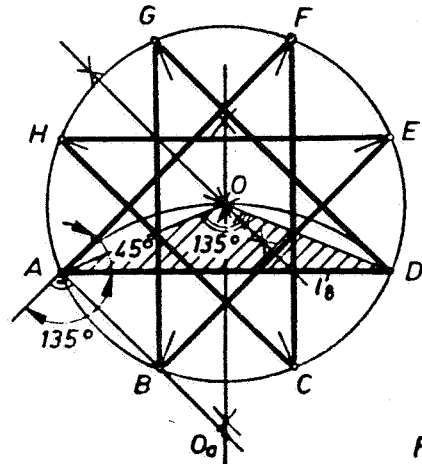


Fig. 26

También y, tal vez, aún más fácilmente, se puede hallar la circunferencia circunscrita al polígono por este otro método: Se puede observar que dos lados concurrentes en un mismo vértice, por ejemplo el AD y AF, forman un ángulo inscrito que abarca dos divisiones, es decir, 90° , por lo cual ambos lados forman 45° ; pues bien, se trazan éstos y se tendrán tres puntos de la circunferencia, los A, D y F en este caso, que permiten fácilmente su trazado.

Decágono regular de tercera especie.

La geometría demuestra que:

El radio de la circunferencia circunscrita a un decágono regular estrellado, es segmento áureo del lado de éste.

En la fig. 27 se han hallado $\overline{AM}=R$, que es áureo del lado $\overline{AD}=l'_{10}$ y $\overline{ND}=l_{10}$, áureo a su vez de R. Traza da la circunferencia circunscrita y dividida en diez partes iguales se traza el polígono solución uniendo de tres en tres las divisiones.

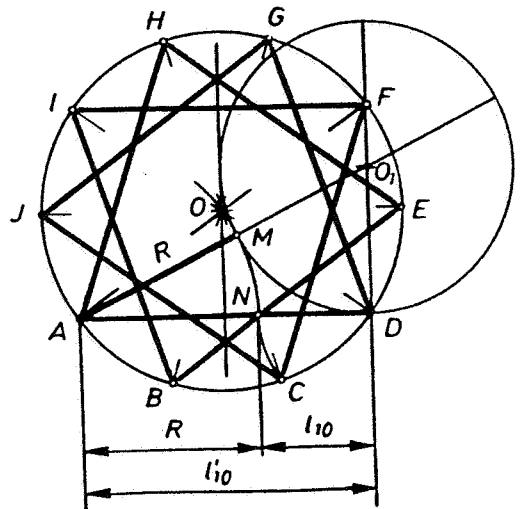


Fig. 27

Dodecágono regular de quinta especie.

El lado de este polígono estrellado, que es el dato, subtiende cinco divisiones iguales de las doce en que se encuentra dividida la circunferencia circunscrita a él, por lo que sus ángulos centrales serán de 150° .

Por esto, el lado dado $\overline{AF} = l'_{12}$ es base de un triángulo isósceles $\triangle OAF$, fig. 28, de ángulo opuesto a la base 150° . Este triángulo se ha obtenido trazando el arco capaz de 150° visto bajo el segmento AF . Trazada la circunferencia circunscrita, se divide en doce partes iguales y uniéndolas de cinco en cinco se obtiene el polígono solución.

Teniendo en cuenta que el par de lados concurrentes en cada vértice forman entre sí 30° , ya que abarcan dos divisiones, es decir, un ángulo central de 60° , también se puede obtener la circunferencia circunscrita, trazando un ángulo de 30° y llevando sobre sus lados una magnitud igual al lado del dodecágono estrellado. Efectivamente, en la figura se obtienen los puntos A , H y F , por los que pasa la circunferencia.

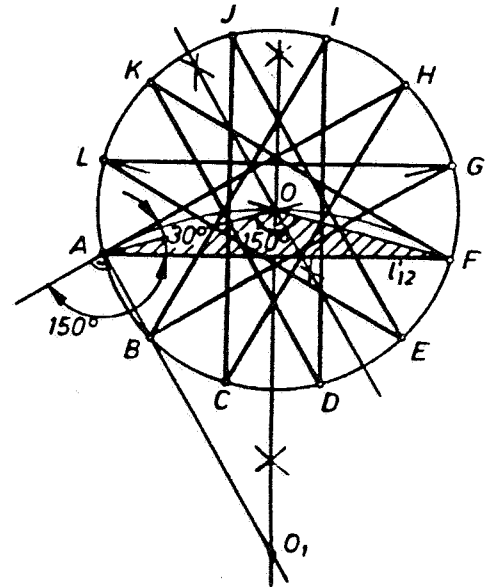


Fig 28

En general, la construcción de los polígonos regulares convexos y estrellados, cuando es dato el lado del polígono, puede realizarse por un método particular común a todos aquellos en los que puede trazarse de forma sencilla sus ángulos centrales. En estos casos, el centro de la circunferencia circunscrita al polígono regular se obtiene sobre el arco capaz del ángulo central visto bajo el lado del polígono.

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL.

- 1ª.- ¿Qué relación existe entre el lado de un decágono regular de primera especie y el radio de la circunferencia circunscrita a él?
- 2ª.- Decir en que relación están los lados de los pentágonos regulares de primera y segunda especie, de vértices comunes.
- 3ª.- ¿De qué polígono es lado el segmento diferencia entre el lado de un decágono regular estrellado y el radio de la circunferencia circunscrita a él?
- 4ª.- ¿Cuál es el valor de los ángulos interiores y centrales de los eneágonos regulares de todas las especies posibles?
- 5ª.- Idem de los polígonos regulares de dieciocho lados.

ACTIVIDADES RECOMENDADAS.

- 1ª.- Construir un pentágono regular convexo de lado $l_5=25$ mm.
- 2ª.- Utilizando un método particular y el transportador de ángulos, construir los eneágonos regulares de todas las especies posibles inscritos en una circunferencia de radio 30 mm.
- 3ª.- Idem sabiendo que los lados $l_9=20$, $l'_9=35$ y $l''_9=60$ mm., lo son de eneágonos de primera, segunda y cuarta especie, respectivamente.
- 4ª.- Dibujar a E1:1 una chapa ranurada que tiene cuatro dientes y cuatro canales, según los datos que figuran en el croquis que se adjunta (a)
- 5ª.- Dibujar a E1:1 la placa representada en el croquis b) adjunto. No debe de utilizarse el transportador de ángulos.

