



POLITÉCNICA



# TEMA 13: Hidrología de grandes cuencas. Tránsito de avenidas



**MARTA GONZÁLEZ DEL TÁNAGO**  
**UNIDAD DOCENTE DE HIDRÁULICA E HIDROLOGÍA**  
**DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA FORESTAL**  
**E.T.S. DE INGENIEROS DE MONTES**  
**UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID**

# CONTENIDO

- Características de las cuencas grandes
- Laminación de la avenida en su tránsito por el cauce principal
- Método de Muskingum para el tránsito de la avenida



# **CUENCAS GRANDES: CONSIDERACIONES PREVIAS**

## **1º. La intensidad de la lluvia no es uniforme en el tiempo.**

La duración del aguacero de cálculo, relacionada con el tiempo de concentración de la cuenca, es suficientemente larga como para no poder asumir que la intensidad de la lluvia se mantiene constante a lo largo de su duración.

## **2º. La intensidad de la lluvia no es uniforme en el espacio.**

Las condiciones en que se produce la avenida de cálculo no son homogéneas en toda la cuenca vertiente, debido al tamaño de su superficie y a la distancia entre unas zonas y otras.

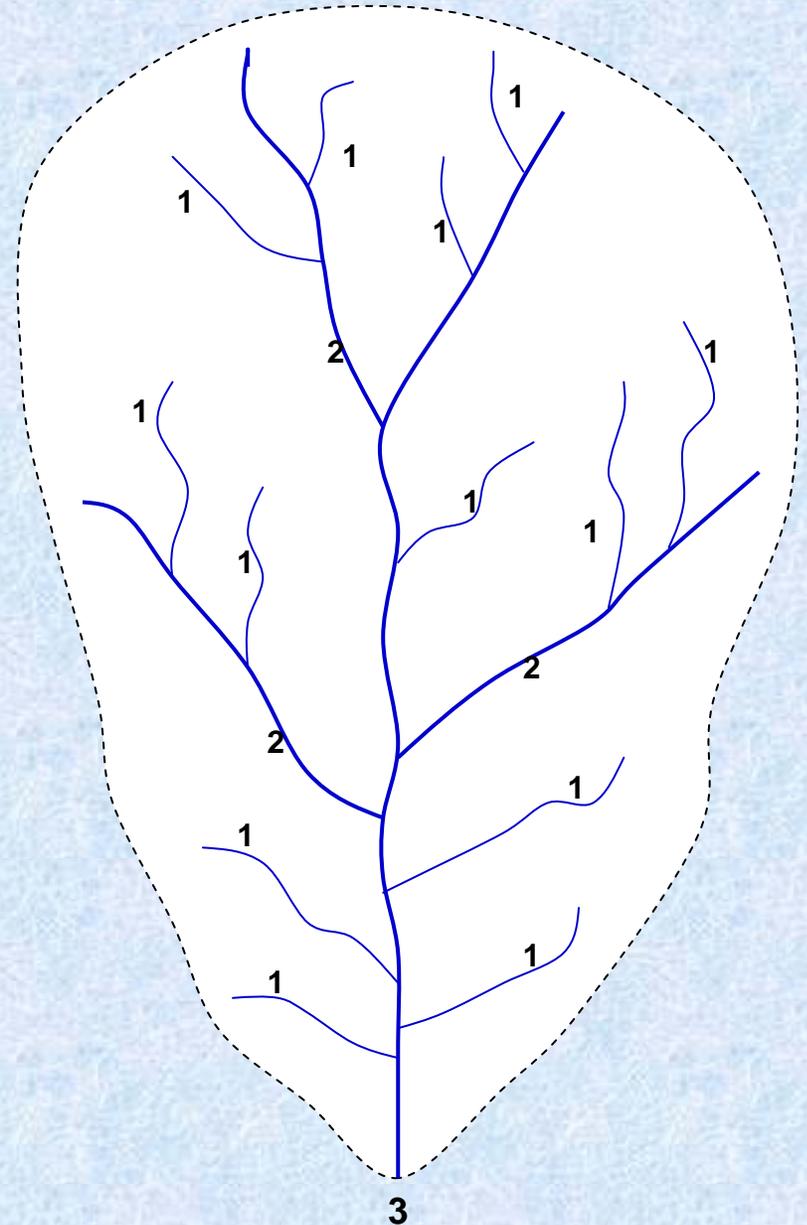
## **3º. En las escorrentías que generan la avenida, domina la escorrentía superficial por falta de infiltración.**

**4º. El cauce principal ocupa una superficie apreciable, y tiene capacidad para almacenar agua y cambiar la forma del hidrograma de la avenida, según ésta se desplaza hacia aguas abajo.**



## CUENCA GRANDE:

- Superficie vertiente superior a 100 km<sup>2</sup>
- Diferenciación de subcuencas, con características físicas y meteorológicas diferentes
- Cauce principal de tamaño apreciable, con capacidad para almacenar agua en su llanura de inundación, donde la pendiente es pequeña



## CUENCA GRANDE:



*Río Cinca*



## LAMINACIÓN DE UNA AVENIDA (*Flood routing, stream channel routing*):

Se refiere al proceso por el cual el hidrograma de la avenida, al irse desplazando por el cauce, se modifica y atenúa, disminuyendo su caudal punta.

Esta laminación se produce por el almacenamiento de agua en un determinado embalse o tramo del río, haciendo que la cantidad de agua (caudal) que sale por la sección de aguas debajo del tramo, en cada momento, sea inferior a la cantidad de agua que está entrando por la sección de aguas arriba de ese tramo, en ese momento.

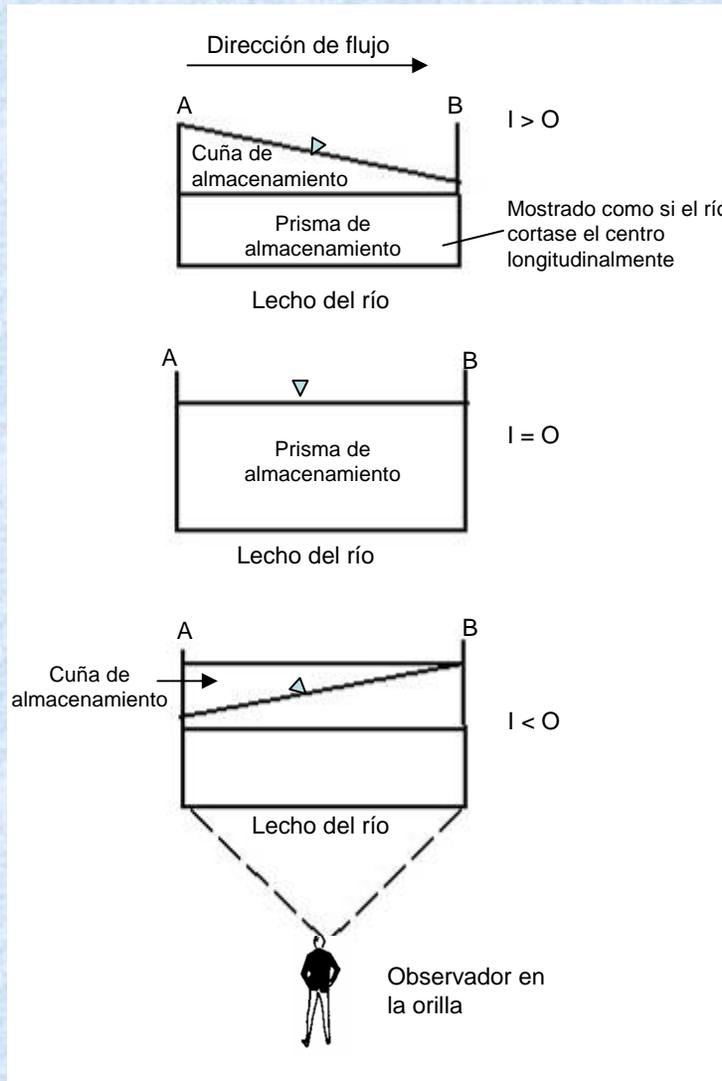
Responde a la ecuación general de la conservación de la masa (agua):

$$\frac{dS}{dt} = I - O$$

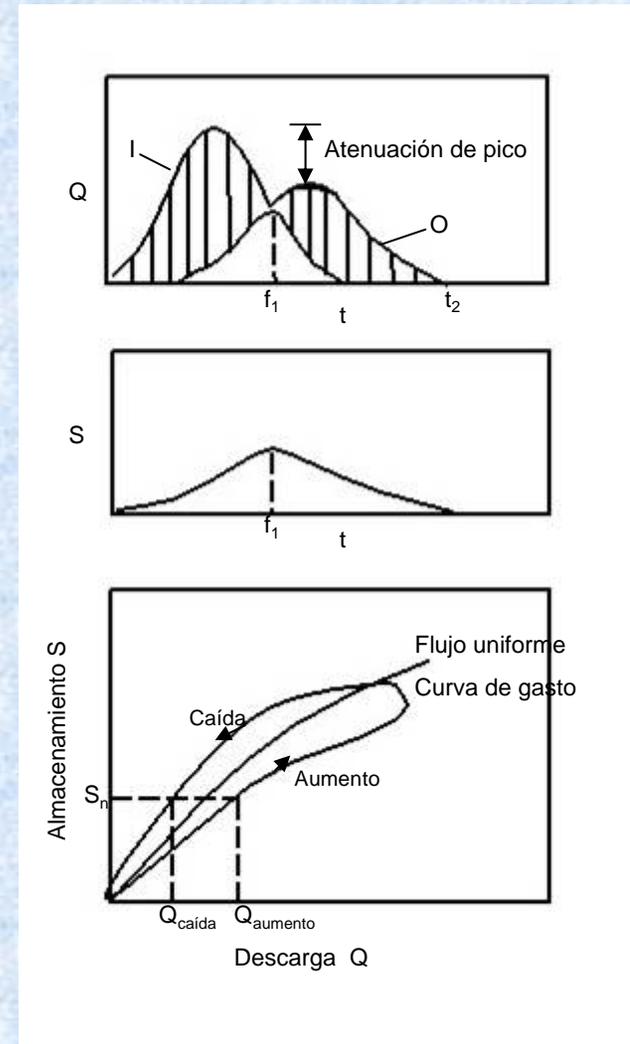
La variación de agua almacenada en un determinado tramo de río (**S**) es igual a la diferencia entre el agua que entra en ese tramo (**I**) y el agua que sale de ese mismo tramo (**O**).



# ALMACENAMIENTO DE AGUA EN UN TRAMO DE CAUCE



# LAMINACIÓN DE LA AVENIDA A SU PASO POR EL TRAMO



## MÉTODO DE MUSKINGUM

- Es un método para calcular el hidrograma de una avenida en su tránsito por el cauce, teniendo en cuenta el efecto de laminación.
- Su nombre alude al río donde se utilizó por primera vez, en 1930. En la actualidad es un procedimiento muy utilizado para calcular el tránsito de una avenida por el cauce de una cuenca grande.
- Tiene en cuenta dos parámetros, uno relacionado con la capacidad de almacenamiento (laminación) del cauce en cada tramo, de carácter adimensional, ( $X$ ), y otro relacionado con el tiempo que tarda la onda de avenida en desplazarse por el tramo considerado, con unidades de “tiempo”, ( $K$ ).
- Parte de la consideración inicial de que el agua almacenada en un tramo,  $S$ , es proporcional al agua que entra  $I$  y al agua que sale  $O$ , de la forma:

$$S = K[XI + (1 - X)O]$$



# TRÁNSITO DE LA AVENIDA: Desplazamiento + Atenuación

$$f(K) + f(X)$$

La magnitud de la atenuación depende del valor de **X**

$$S = K[XI + (1 - X)O]$$

X = 0 máxima laminación o capacidad de almacenamiento (el agua almacenada depende de lo que sale del tramo)

X = 0,5 no hay laminación, solo desplazamiento

En la práctica, X toma valores entre 0,1 y 0,3

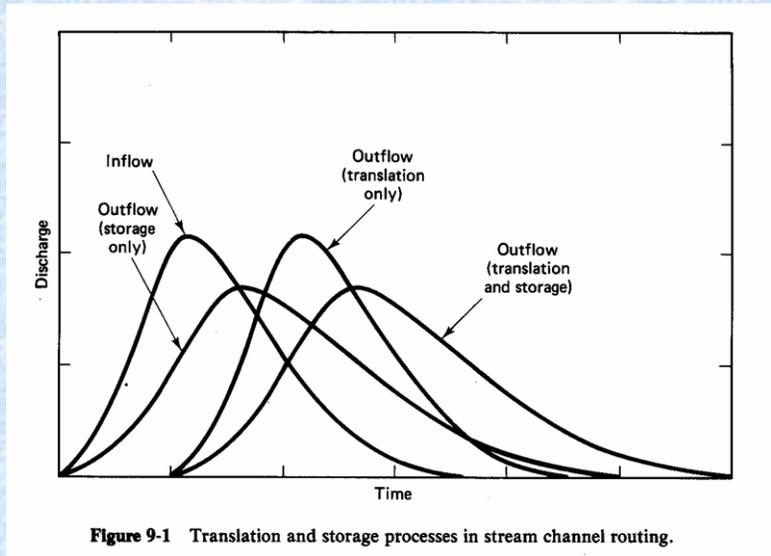


Figure 9-1 Translation and storage processes in stream channel routing.

V. M. Ponce (1989)

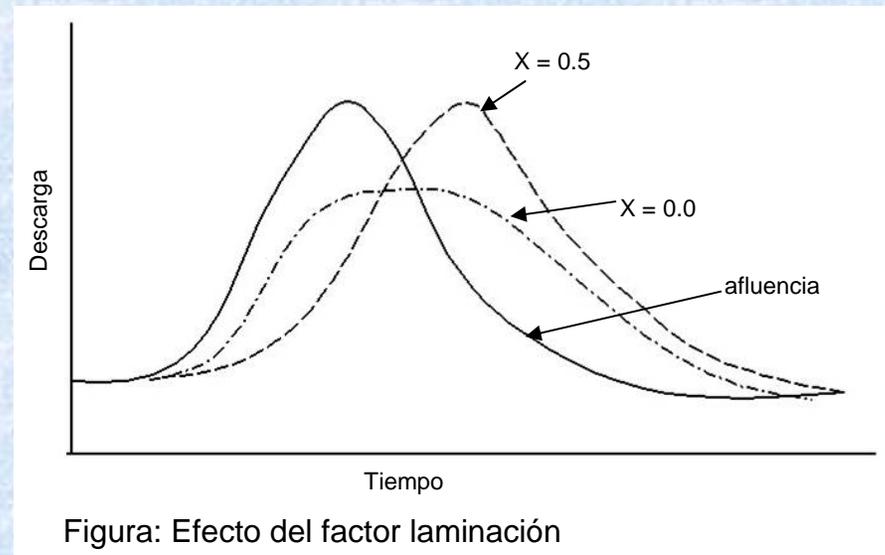


Figura: Efecto del factor laminación

## MÉTODO DE MUSKINGUM: Desarrollo analítico

$$\frac{dS}{dt} = I - O$$

$$\frac{I_1 + I_2}{2} - \frac{O_1 + O_2}{2} = \frac{S_2 - S_1}{2}$$

$$S = K[XI + (1 - X)O]$$

$$S_1 = K[XI_1 + (1 - X)O_1]$$

$$S_2 = K[XI_2 + (1 - X)O_2]$$

$$S_2 - S_1 = K[X(I_2 - I_1) + (1 - X)(O_2 - O_1)]$$

$$O_2 = C_0 I_2 + C_1 I_1 + C_2 O_1$$

$$C_0 = \frac{-KX + 0.5 \Delta t}{K - KX + 0.5 \Delta t}$$

$$C_1 = \frac{KX + 0.5 \Delta t}{K - KX + 0.5 \Delta t}$$

$$C_2 = \frac{K - KX - 0.5 \Delta t}{K - KX + 0.5 \Delta t}$$

$$C_0 + C_1 + C_2 = 1$$



## MÉTODO DE MUSKINGUM: Desarrollo de cálculo

1º. Estimar los valores de X y de K para el tramo de cálculo.

2º. Calcular los valores de los coeficientes  $C_0$ ,  $C_1$  y  $C_2$  para los valores de X, K e intervalo de t correspondientes, este último según los datos del hidrograma de entrada.

Se recomienda  $\frac{t_p}{\Delta t} \geq 5$

3º. Considerar la primera ordenada del hidrograma de salida, igual a la ordenada del hidrograma de entrada ( $O_1=I_1$ )

4º. Ir calculando las demás ordenadas del hidrograma de salida, en función de la ordenada del hidrograma de entrada del mismo  $t$ , y las ordenadas del hidrograma de entrada y de salida del  $t$  anterior.



## EJEMPLO DE CÁLCULO

Dado el hidrograma de entrada (I) y las características del tramo ( $K=2d$ ;  $X=0,1$ ), obtener el hidrograma de salida (O) de dicho tramo:

$$\Delta t = 1 \text{ día}$$

**TABLE 9-1** CHANNEL ROUTING BY THE MUSKINGUM METHOD: EXAMPLE 9-1

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
Time (d)	Inflow (m <sup>3</sup> /s)	Partial Flows (m <sup>3</sup> /s)			Outflow (m <sup>3</sup> /s)
		$C_0 I_2$	$C_1 I_1$	$C_2 O_1$	
0	352.0	—	—	—	352.0
1	587.0	76.6	107.1	199.0	382.7
2	1353.0	176.5	178.6	216.3	571.4
3	2725.0	355.4	411.8	323.0	1090.2
4	4408.5	575.0	829.4	616.2	2020.6
5	5987.0	780.9	1341.7	1142.1	3264.7
6	6704.0	874.4	1822.1	1845.3	4541.8
7	6951.0	906.7	2040.3	2567.1	5514.1
8	6839.0	892.0	2115.5	3116.7	6124.2
9	6207.0	809.6	2081.5	3461.5	6352.6
10	5346.0	697.3	1889.1	3590.6	6177.0
11	4560.0	594.8	1627.0	3491.4	5713.2
12	3861.5	503.7	1387.8	3229.2	5120.7
13	3007.0	392.2	1175.2	2894.3	4461.7
14	2357.5	307.5	915.2	2521.8	3744.5
15	1779.0	232.0	717.5	2116.5	3066.0
16	1405.0	183.3	541.4	1733.0	2457.7
17	1123.0	146.5	427.6	1389.1	1963.2
18	952.5	124.2	341.8	1109.6	1575.6
19	730.0	95.2	289.9	890.6	1275.7
20	605.0	78.9	222.2	721.0	1022.1
21	514.0	67.1	184.1	577.7	828.9
22	422.0	55.1	156.4	468.5	680.0
23	352.0	45.9	128.4	384.4	558.7
24	352.0	45.9	107.1	315.8	468.8
25	352.0	45.9	107.1	265.0	418.0



## MÉTODO DE MUSKINGUM: Desarrollo de cálculo

1º.- A partir de los valores de  $X$ ,  $K$  y  $\Delta t$ , calcular los valores de los coeficientes:

$$C_0 = \frac{-KX + 0.5 \Delta t}{K - KX + 0.5 \Delta t}$$

$$C_1 = \frac{KX + 0.5 \Delta t}{K - KX + 0.5 \Delta t}$$

$$C_2 = \frac{K - KX - 0.5 \Delta t}{K - KX + 0.5 \Delta t}$$

En el ejemplo, dichos valores son:

$$C_0 = 0,1304$$

$$C_1 = 0,3044$$

$$C_2 = 0,5652$$

$$C_0 + C_1 + C_2 = 1$$

2º.- Asumir  $O_2=O_1$ , y calcular sucesivamente las demás ordenadas del hidrograma de salida, mediante la expresión general:

$$O_i = C_0 I_i + C_1 I_{i-1} + C_2 O_{i-1}$$

Ejemplo:  $O_{13} = C_0 I_{13} + C_1 I_{12} + C_2 O_{12}$

$$O_{13} = 0,1304 * 3007,0 + 0,3044 * 3861,5 + 0,5652 * 5713,2 = 4461,7$$



# EJEMPLO DE CÁLCULO: RESULTADOS

**TABLE 9-1 CHANNEL ROUTING BY THE MUSKINGUM METHOD: EXAMPLE 9-1**

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
Time (d)	Inflow (m <sup>3</sup> /s)	Partial Flows (m <sup>3</sup> /s)			Outflow (m <sup>3</sup> /s)
		$C_0 I_2$	$C_1 I_1$	$C_2 O_1$	
0	352.0	—	—	—	352.0
1	587.0	76.6	107.1	199.0	382.7
2	1353.0	176.5	178.6	216.3	571.4
3	2725.0	355.4	411.8	323.0	1090.2
4	4408.5	575.0	829.4	616.2	2020.6
5	5987.0	780.9	1341.7	1142.1	3264.7
6	6704.0	874.4	1822.1	1845.3	4541.8
7	6951.0	906.7	2040.3	2567.1	5514.1
8	6839.0	892.0	2115.5	3116.7	6124.2
9	6207.0	809.6	2081.5	3461.5	6352.6
10	5346.0	697.3	1889.1	3590.6	6177.0
11	4560.0	594.8	1627.0	3491.4	5713.2
12	3861.5	503.7	1387.8	3229.2	5120.7
13	3007.0	392.2	1175.2	2894.3	4461.7
14	2357.5	307.5	915.2	2521.8	3744.5
15	1779.0	232.0	717.5	2116.5	3066.0
16	1405.0	183.3	541.4	1733.0	2457.7
17	1123.0	146.5	427.6	1389.1	1963.2
18	952.5	124.2	341.8	1109.6	1575.6
19	730.0	95.2	289.9	890.6	1275.7
20	605.0	78.9	222.2	721.0	1022.1
21	514.0	67.1	184.1	577.7	828.9
22	422.0	55.1	156.4	468.5	680.0
23	352.0	45.9	128.4	384.4	558.7
24	352.0	45.9	107.1	315.8	468.8
25	352.0	45.9	107.1	265.0	418.0

V. M. Ponce (1989)



## OBTENCIÓN DE LOS PARÁMETROS $X$ y $K$

Cuando se tiene información del hidrograma de entrada y de salida de un determinado tramo, se puede calibrar el parámetro  $X$  como se indica en el ejemplo adjunto:

1º. Calcular el almacenamiento (columna 4) a partir de la fórmula:

$$S_2 = S_1 + (\Delta T/2)(I_1 + I_2 - O_1 - O_2)$$

2º. Probar con varios valores de  $X$  (columnas 5, 6 y 7) y los valores obtenidos, contrastarlos gráficamente con los correspondientes de la columna 4, según se muestra en la figura y tabla adjuntas

3º. El valor correcto de  $X$  es el que mejor ajusta la gráfica obtenida a una recta (en el ejemplo,  $X=0,1$ )

4º. Calcular el valor de  $K$ , según se indica en la gráfica (a)



# EJEMPLO: CALIBRACIÓN PARÁMETROS DE MUSKINGUM

Conocidos los hidrogramas de entrada (I) y de salida (O) de un tramo, obtener los parámetros X y K de dicho tramo, según el método de Muskingum:

**TABLE 9-2 CALIBRATION OF MUSKINGUM ROUTING PARAMETERS: EXAMPLE 9-2**

(1) Time (d)	(2) Inflow (m <sup>3</sup> /s)	(3) Outflow (m <sup>3</sup> /s)	(4) Storage (m <sup>3</sup> /s-d)	(5) (6) (7) Weighted Flow (m <sup>3</sup> /s)		
				X = 0.1	X = 0.2	X = 0.3
0	352.0	352.0	0	—	—	—
1	587.0	382.7	102.2	403.0	423.5	443.9
2	1,353.0	571.4	595.2	649.6	727.7	805.9
3	2,725.0	1,090.2	1,803.4	1,253.7	1,417.2	1,580.6
4	4,408.5	2,020.6	3,814.7	2,259.4	2,498.2	2,737.0
5	5,987.0	3,264.7	6,369.8	3,536.9	3,809.2	4,081.4
6	6,704.0	4,541.8	8,812.1	4,758.0	4,974.2	5,190.5
7	6,951.0	5,514.1	10,611.6	5,657.8	5,801.5	5,945.2
8	6,839.0	6,124.2	11,687.5	6,195.7	6,267.2	6,338.6
9	6,207.0	6,352.6	11,972.1	6,338.0	6,323.5	6,308.9
10	5,346.0	6,177.0	11,483.8	6,093.9	6,010.8	5,927.7
11	4,560.0	5,713.2	10,491.7	5,597.9	5,482.6	5,367.2
12	3,861.5	5,120.7	9,285.5	4,994.8	4,868.9	4,742.9
13	3,007.0	4,461.7	7,928.5	4,316.2	4,170.8	4,025.3
14	2,357.5	3,744.5	6,507.7	3,605.8	3,467.1	3,328.4
15	1,779.0	3,066.0	5,170.7	2,937.3	2,808.6	2,679.9
16	1,405.0	2,457.7	4,000.8	2,352.4	2,247.2	2,141.9
17	1,123.0	1,963.2	3,054.4	1,879.2	1,795.2	1,711.1
18	952.5	1,575.6	2,322.7	1,513.4	1,451.1	1,388.7
19	730.0	1,275.7	1,738.2	1,221.1	1,166.6	1,112.0
20	605.0	1,022.1	1,256.8	980.4	938.7	897.0
21	514.0	828.9	890.8	797.4	765.9	734.4
22	422.0	680.0	604.4	654.2	628.4	602.6
23	352.0	558.7	372.0	537.9	517.3	496.6
24	352.0	468.8	210.3	457.1	445.4	433.8
25	352.0	418.0	118.9	411.4	404.8	398.2

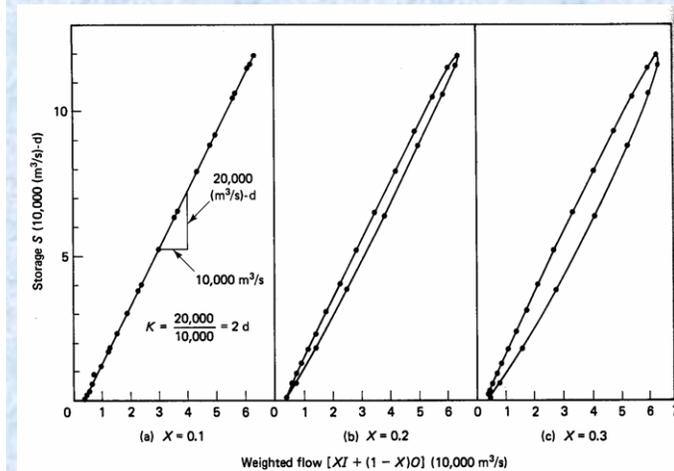


Figure 9-4 Calibration of Muskingum routing parameters: Example 9-2.

V. M. Ponce (1989)

V. M. Ponce (1989)

