



POLITÉCNICA



TEMA 20 : Transporte de materiales (II)

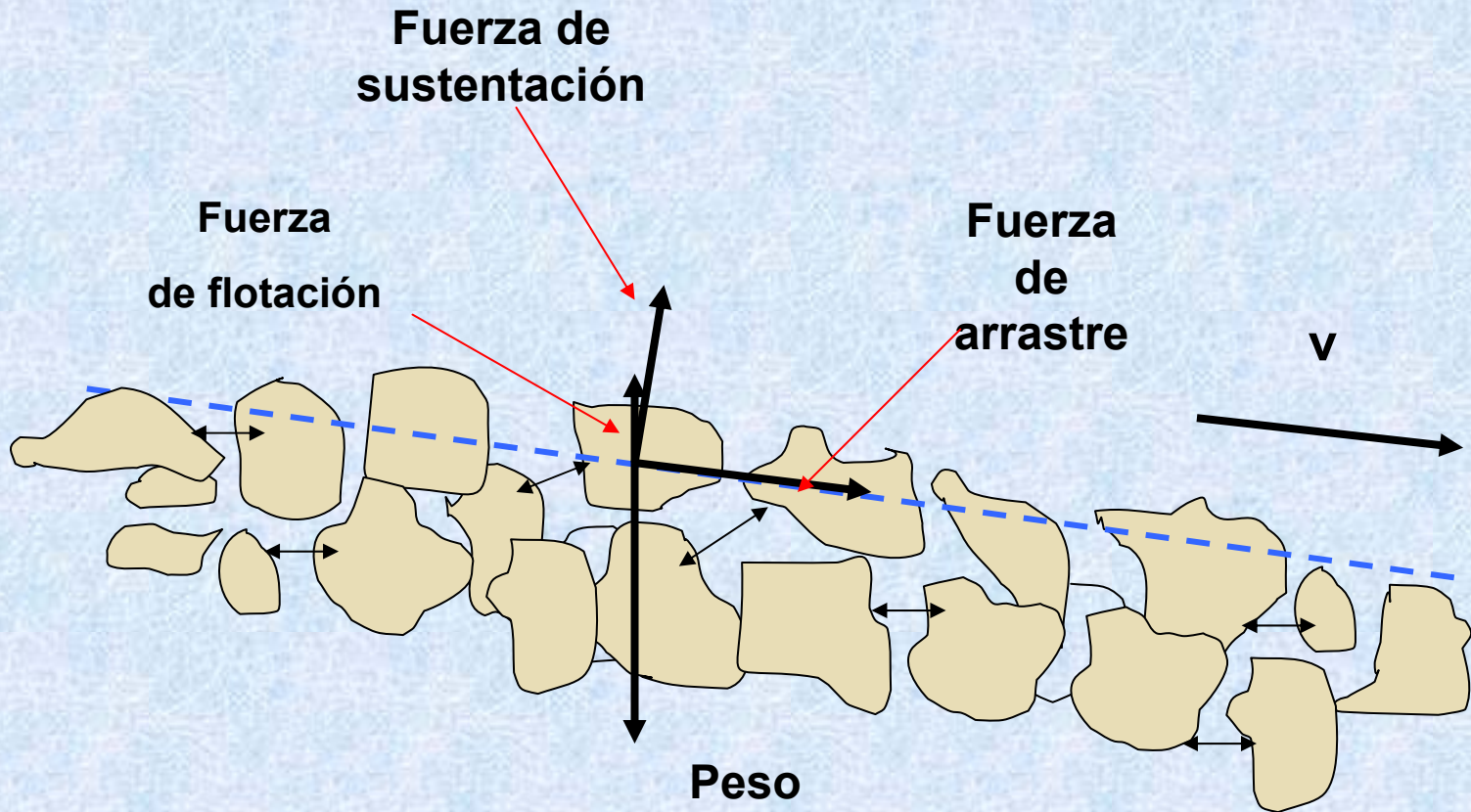


JOSÉ LUIS GARCÍA RODRÍGUEZ
UNIDAD DOCENTE DE HIDRÁULICA E HIDROLOGÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA FORESTAL
E.T.S. DE INGENIEROS DE MONTES
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

- **Inicio del transporte**
- **Teorías**
- **Velocidad crítica**
- **Tensión crítica**
- **Teoría de Einstein**



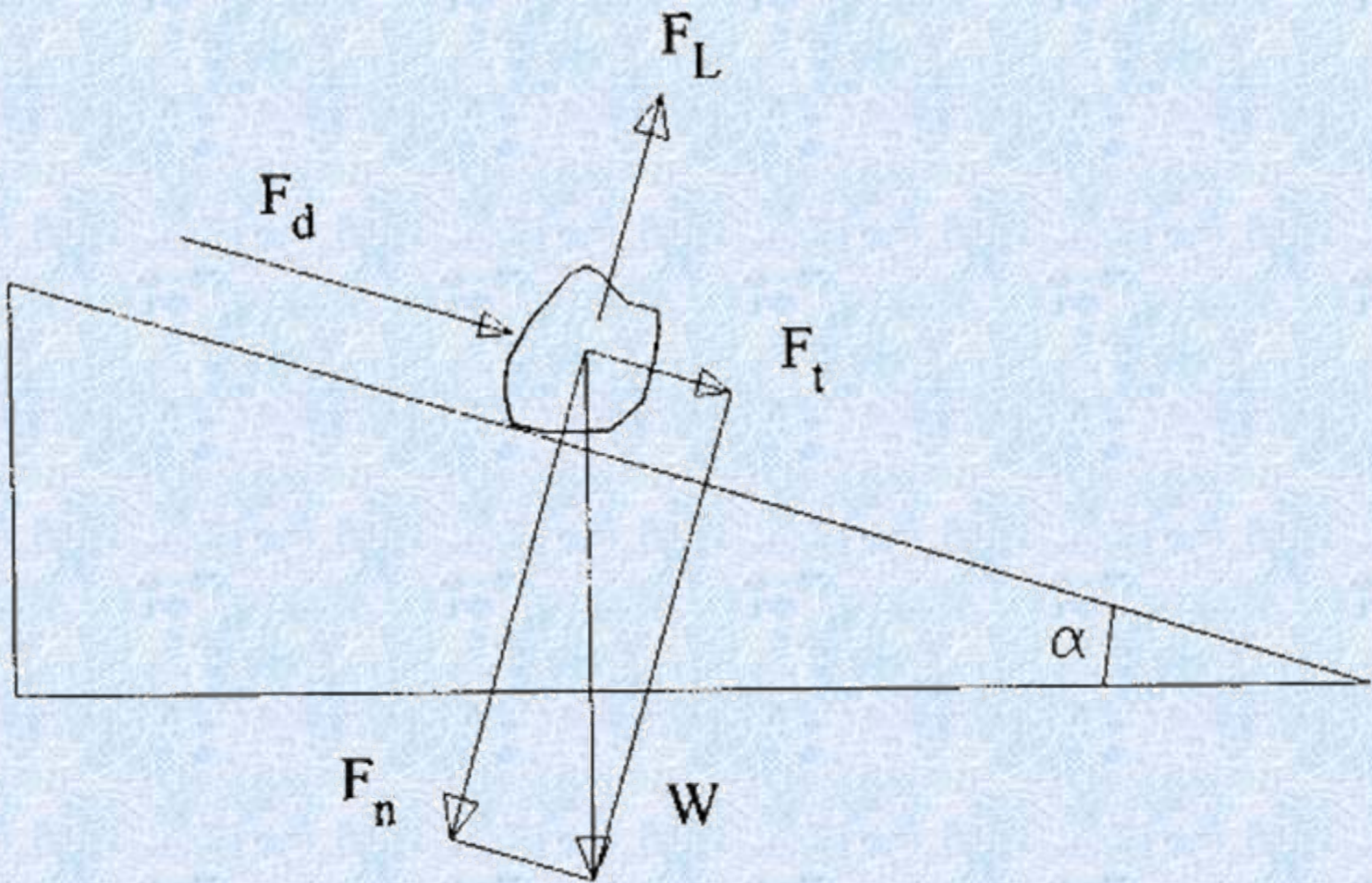
Fuerzas actuantes en una partícula de sedimento



En cauces abiertos, las fuerzas actuantes en cada partícula de sedimento son:

- la gravedad y las fuerzas de flotación, actúan en dirección vertical.
- la de arrastre y la de sustentación. La primera actúa en la dirección del flujo mientras que la de sustentación en dirección perpendicular de la dirección del flujo.
- la reacción de las fuerzas alrededor de los granos de sedimento. Las fuerzas intergranulares están relacionadas con la disposición del grano y su conjunto.





INICIO DEL TRANSPORTE

Para determinar cuando se produce el movimiento de las partículas se siguen distintos criterios:

1) CRITERIOS DE VELOCIDAD

2) CRITERIOS DE TENSIÓN

3) CRITERIOS DE EINSTEIN



1. CRITERIOS DE VELOCIDAD

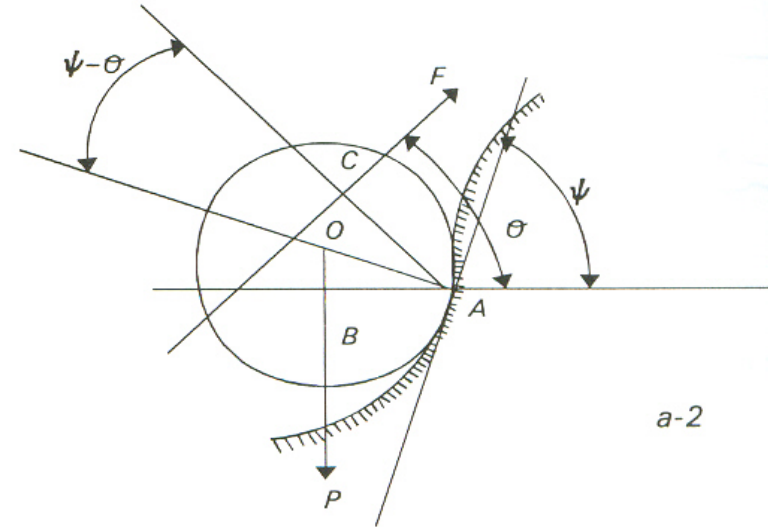
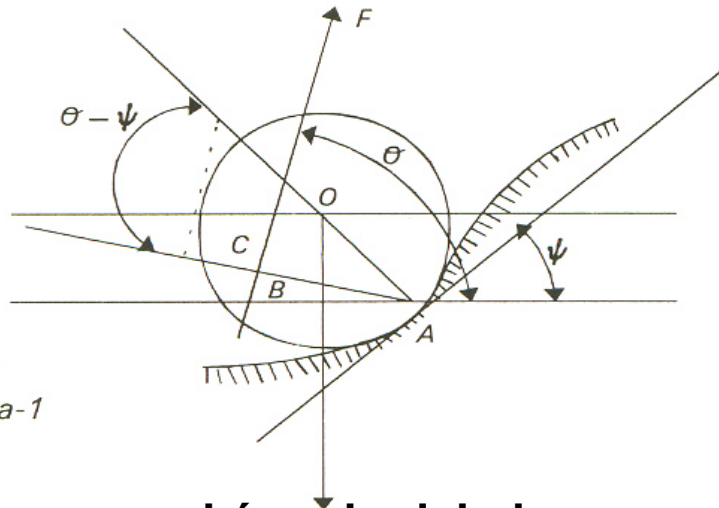
a) Quesnel (1966).

Método teórico basado en el equilibrio de fuerzas:

- La fuerza de empuje de Newton, F_D , teniendo en cuenta la turbulencia de la corriente,
- El rozamiento, f
- El peso, P , peso de la partícula y
- El empuje de Arquímedes, la forma del acarreo.

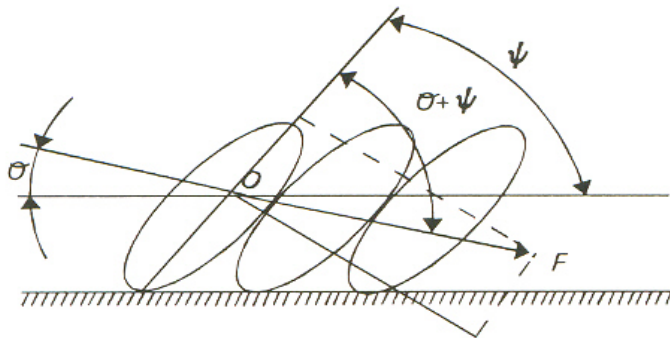


Las cuatro posibles situaciones :



ψ , es el ángulo del plano en el que se apoya la partícula con la horizontal

θ , es el ángulo de la fuerza de empuje del agua con la horizontal



b-1

b-2

Fuente: TRAGSA (1998)



Caso a-1. Rodadura con $\theta \geq \psi$

$$V_{cr} = \sqrt{\frac{1}{k} \left(\frac{\gamma_s}{\gamma} - 1 \right) \frac{2}{3} d} \frac{\sqrt{\sin \psi}}{\sqrt{[\cos(\theta - \psi) + \alpha] \cos(\theta - \psi)}}$$

Caso a-2. Rodadura con $\theta < \psi$

$$V_{cr} = \sqrt{\frac{1}{k} \left(\frac{\gamma_s}{\gamma} - 1 \right) \frac{2}{3} d} \frac{\sqrt{\sin \psi}}{\sqrt{[\cos(\theta - \psi) + \alpha]}}$$

K , es un coeficiente que depende de la geometría del material y del régimen de la corriente (nº de Reynolds)

d , es el diámetro de la partícula

θ y ψ , son los ángulos vistos en la figura anterior

Caso b-1. Deslizamiento y velocidad dirigida hacia abajo

$$V_{cr}^2 = \frac{(\gamma_s - \gamma) \cdot V (\text{sen } \psi + f \cdot \cos \psi)}{K \cdot \gamma \cdot S [\text{sen}(\theta + \psi) \cos(\theta + \psi) - f \text{sen}^2(\theta + \psi)]}$$

Caso b-1. Deslizamiento y velocidad dirigida hacia arriba

$$V_{cr}^2 = \frac{(\gamma_s - \gamma) \cdot V (\text{sen } \psi + f \cdot \cos \psi)}{K \cdot \gamma \cdot S [\text{sen}(\theta - \psi) \cos(\theta - \psi) - f \text{sen}^2(\theta - \psi)]}$$

V, es volumen de la piedra o del guijarro

S, es la sección máxima de la piedra o guijarro por un plano inclinado un ángulo con la horizontal

F, es el coeficiente de rozamiento de las partículas entre sí



b) **Schafernak**, distingue tres velocidades características en el acarreo de elementos sólidos aislados.

-**velocidad límite superior** (V_a). Capaz de desprender la partícula del lecho, **velocidad de transporte** (V_c) y **velocidad límite superior** (V_b), capaz de poner en movimiento la partícula.

-La relación entre los distintos valores de estas velocidades:

$$V_b = 1,50 V_c$$

$$V_a = 0,75 V_c$$

El autor da para los distintos tipos de materiales y de tamaños valores de las velocidades.



Velocidad límite en metros por segundo.

Diámetro de los elementos en mm.	Velocidad límite superior V_b	Velocidad de transporte V_c	Velocidad crítica inferior V_a
2	0,15	0,11	0,08
5	0,37	0,27	0,21
10	0,70	0,51	0,39
15	1,05	0,70	0,59
20	1,29	0,86	0,62
25	1,47	0,96	0,70
30	1,57	1,05	0,78
40	1,68	1,16	0,88
50	1,76	1,21	0,93
60	1,86	1,27	0,98
70	1,96	1,30	1,00

Fuente: TRAGSA (1998)

$$V_b = 1,50 V_c$$

$$V_a = 0,75 V_c$$



Límites inferiores y superiores en mm de las dimensiones de los materiales

Velocidades en el fondo en m/seg.

	<hr/>				
	a	b	c	d	
0 - 10 mm	1,23	1,25	1,14	1,00	a) granulometría uniforme
0 - 16 mm	1,53	1,75	1,28	1,15	b) predominio de materiales de grandes dimensiones
0 - 20 mm	1,66	1,82	1,40	1,18	c) igual proporción de materiales de diversos diámetros
0 - 30 mm	1,90	2,26	1,65	1,30	d) predominio de elementos finos
0 - 50 mm	2,40	2,72	2,30	1,50	

Fuente: TRAGSA (1998)



Velocidad crítica de arrastre (m/seg).

Naturaleza de los materiales	Aguas claras	Aguas con limos coloidales	Aguas con arena y detritus
Arena fina sin coloides	0,45	0,76	0,45
Tierra arenosa	0,53	0,76	0,61
Tierra limosa	0,61	0,91	0,61
Limos de aluvión	0,61	1,06	0,61
Pequeñas gravas	0,76	1,52	1,14
Arcilla compacta muy coloidal	1,14	1,51	0,91
Tierra con pequeños guijarros sin coloides	1,14	1,52	1,52
Limos de aluvión con coloides	1,15	1,52	0,91
Limos y pequeños guijarros con coloides	1,22	1,68	1,52
Guijarros gruesos sin coloides	1,22	1,82	1,98
Esquistos y trozos de roca	1,82	1,82	1,42

Fuente: TRAGSA (1998)



Ecuaciones del tipo: $v_{cr} = a \cdot d^b$

Bogardi propone:

$$v_{cr} = 21,5 d^{0,38}$$

Con, v_{cr} en $\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$ y, d , en mm

Nagy-Karadi-Kalmar (1949) proponen:

$$v_{cr} = 20 d^{0,10} \text{ si } d < 1 \text{ mm}$$

$$v_{cr} = 20 d^{0,43} \text{ si } d > 1 \text{ mm}$$

Estando v_{cr} en $\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$ y, d , en mm



Ecuaciones del tipo: $\pi_1 = a \pi_2^b$

$$\pi_2 = \frac{y}{d}$$

$$\pi_2 = \frac{y}{d}$$

Levy (1948): para $\pi_2 > 60$ y un material uniforme, $a = 1,40$ y $b = 0,2$

Durand y Colondis: para un material uniforme, $a = 1,77$ y $b = 1/7$

Neill (1968): para $2 < y/d < 100$; $\gamma_s = 2,65 \text{ t}\cdot\text{m}^{-3}$ y $d > 3 \text{ mm}$, con $a = 1,41$ y $b = 1/3$

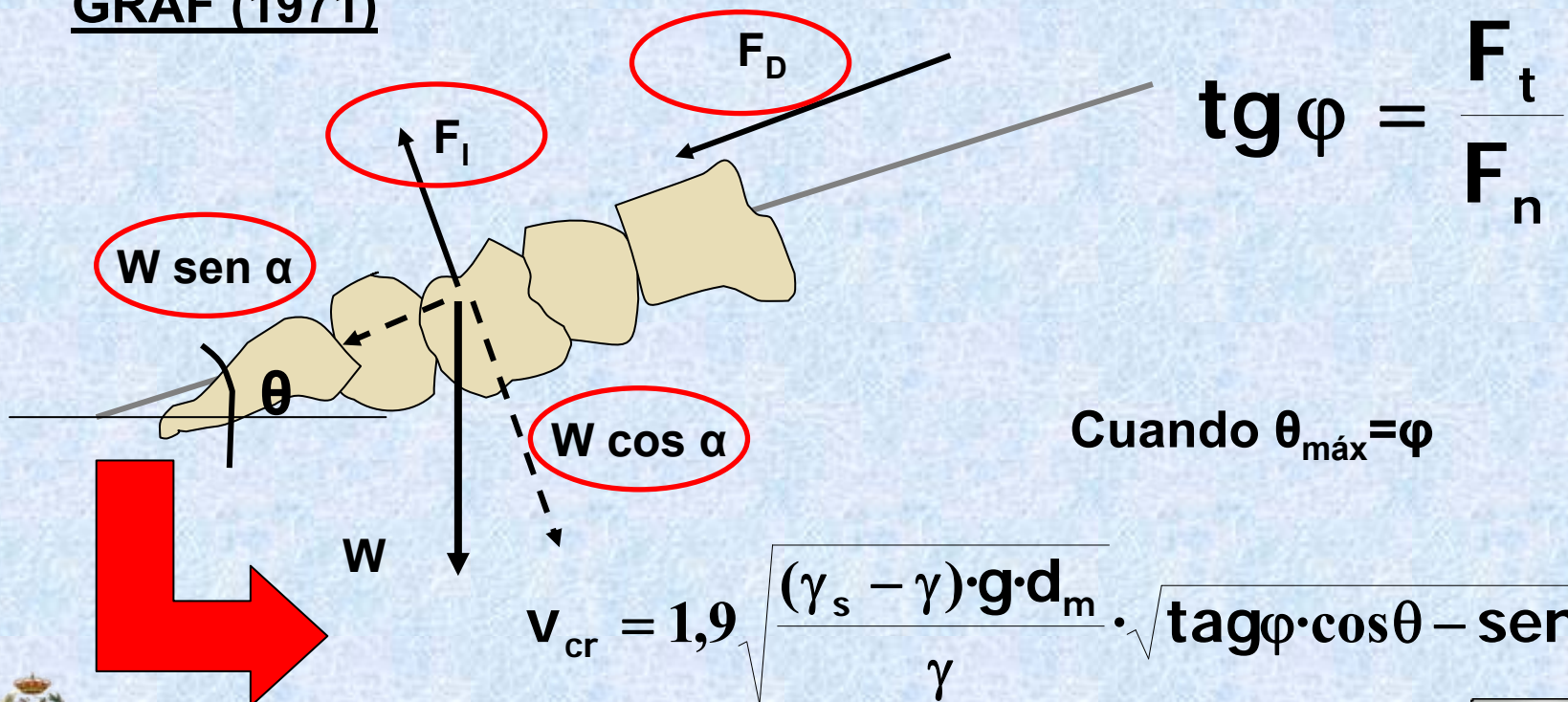


En casos de lechos no horizontales y taludes inclinados, se proponen también en las formulaciones el ángulo de rozamiento interno, φ , y la pendiente de la solera o lecho del cauce, θ .

CARSTENS (1966):

$$v_{cr} = 1,9 \sqrt{\frac{(\gamma_s - \gamma) \cdot g \cdot d_m}{\gamma}} \cdot \sqrt{\text{tag } \varphi \cdot \cos \theta - \text{sen } \theta}$$

GRAF (1971)



NEILL

$$\frac{V_{cr}^2}{\frac{(\gamma_s - \gamma)}{\gamma} g \cdot d} = 2,5 \left(\frac{y}{d} \right)^{0,2}$$

MAZA Y GARCIA (1978)

$$\frac{V_{cr}^2}{\frac{(\gamma_s - \gamma)}{\gamma} g \cdot d} = 2,25 \left(\frac{y}{d} \right)^{0,3}$$

FUENTES Y AGUIRRE-PE (1991)

$$\frac{V_{cr}}{\left(\frac{(\gamma_s - \gamma)}{\gamma} g \cdot d \cdot \text{tg } \phi \right)^{0,5}} = 0,9 + 0,5 \ln \left(\frac{h}{d} \right) + 1,3 \frac{d}{h}$$

Ángulo de rozamiento interno



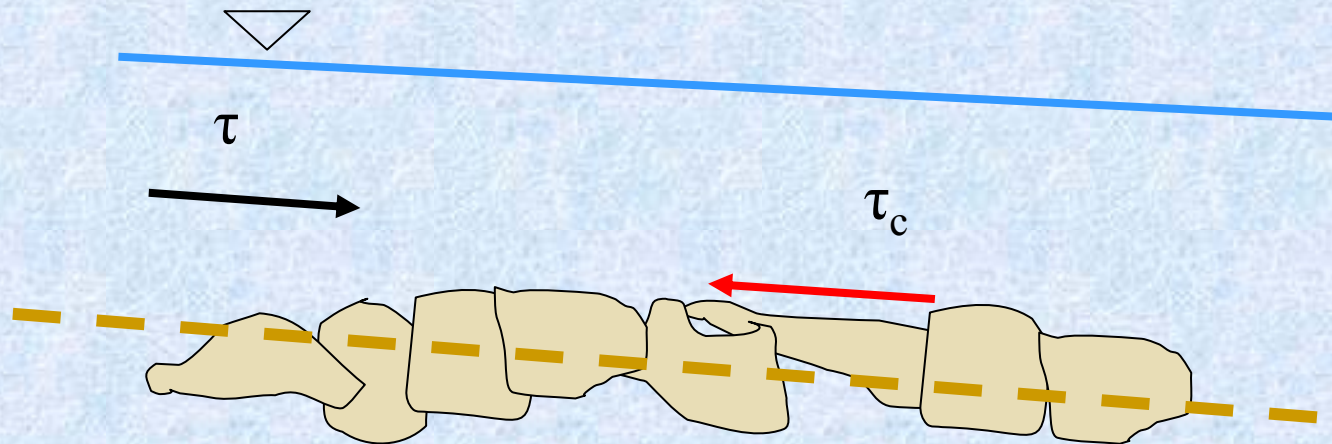
2. CRITERIOS DE TENSION DE ARRASTRE

Esta es la más aceptada en el caso de torrentes.

Se trata de enfrenta dos tensiones que se dan en una corriente:

Tensión hidráulica de la corriente, τ

Tensión crítica de arrastre, τ_c



La tensión hidráulica de arrastre, τ , ejercida por las aguas sobre las partículas del fondo del lecho tiene la expresión:

$$\tau = \gamma R I$$

donde,

τ , es la tensión de arrastre

γ , es el peso específico

R , es el radio hidráulico.

I , es la pendiente.

Se denomina tensión crítica de arrastre (τ_c) a la tensión a la que se inicia el movimiento de las partículas.



Fuerza cortante critica, τ_c , para distintos materiales

Materiales	Di (mm)	τ_c (kg/m²)
Arena común	0,20 a 0,40	0,18 a 0,20
Arena común	0,40 a 1,00	0,25 a 0,30
Arena común	> 2,00	0,40
Grava rugosa	5 a 15	1,25
Suelo arcilloso	-	1 a 1,2
Grava muy gruesa	40 a 50	4,8
Roca calcárea llana	10 a 20 de espesor y 40 a 60 de longitud	5,6



DEDUCCIÓN TEÓRICA DE LA TENSIÓN CRÍTICA DE ARRASTRE

El ángulo de rozamiento interior, φ , de un material no cohesivo es el ángulo máximo que puede soportar un talud formado por ese material, a partir de ese ángulo se inicia el movimiento de las partículas.

$$P \cdot \text{sen } \varphi = k \cdot \text{cos } \varphi$$

Siendo, P , el peso de la partícula y k , el coeficiente de rozamiento característico del material ($k = \text{tag } \varphi$)

Sobre una partícula en el cauce actúa fuerza de arrastre, F_d , debida a la componente fija y estable de la velocidad, con la dirección del flujo, y la fuerza de sustentación, F_s , debido a la componente aleatoria de la velocidad.

W es el peso de la partícula sumergida W .



Cuando comienza el movimiento, la condición de equilibrio de fuerzas en la dirección del flujo es, para un lecho de pendiente α .

$$F_D + W \sin \alpha = \operatorname{tg} \varphi \cdot W \cos \alpha$$

La fuerza de arrastre en función de la tensión tractiva crítica y del diámetro nominal de la partícula.

$$F_D = K_1 \operatorname{tg} \varphi \tau_c \cdot d^2$$

$$K_1 \operatorname{tg} \varphi \tau_c \cdot d^2 + W \sin \alpha = \operatorname{tg} \varphi \cdot W \cos \alpha$$

$$\tau_c = K (\gamma_s - \gamma) d \cos \alpha (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \alpha)$$



Schoklitsch estableció las siguientes expresiones para la tensión crítica de arrastre, τ_c , en $\text{kg}\cdot\text{m}^{-2}$:

a) Granulometría uniforme

$$\tau_c = \sqrt{0,385 \cdot \gamma_s \cdot (\gamma_s - \gamma) \lambda \cdot V}$$

v , es el volumen de la piedra

v_m , es volumen medio de las piedras

λ , es el coeficiente de forma que vale 1 para piedras esféricas, 1,15 a 1,35 para arena, 3,1, para gravas y 3,75 para pizarras

b) Granulometría no uniforme

$$\tau_c = \frac{\sqrt{0,385 \cdot \gamma_s \cdot (\gamma_s - \gamma) \lambda \cdot V}}{1 + \sqrt[6]{10,5 \left[\frac{V}{V_m} - 1 \right]}}$$



Schoklitsch (1914):

$$\tau_c = \sqrt{0,201 \cdot \gamma_s (\gamma_s - \gamma) \cdot \beta \cdot d^3}$$

donde,

d, es del diámetro medio y β , es un coeficiente de forma que vale 1 para esferas y 4,4 para piedras planas

Schoklitsch (1950):

$$\tau_c = 0,076 (\gamma_s - \gamma) \cdot d \dots \dots \quad \text{con} \quad d > 0,006 \text{ m}$$

$$\tau_c = 0,000285 (\gamma_s - \gamma) \cdot d^{1/3} \dots \dots \quad \text{con} \quad 0,0001\text{m} < d < 0,003 \text{ m}$$



Leliavsky (1995).

$$\tau = 166 d \dots (\text{g} \cdot \text{m}^{-2})$$

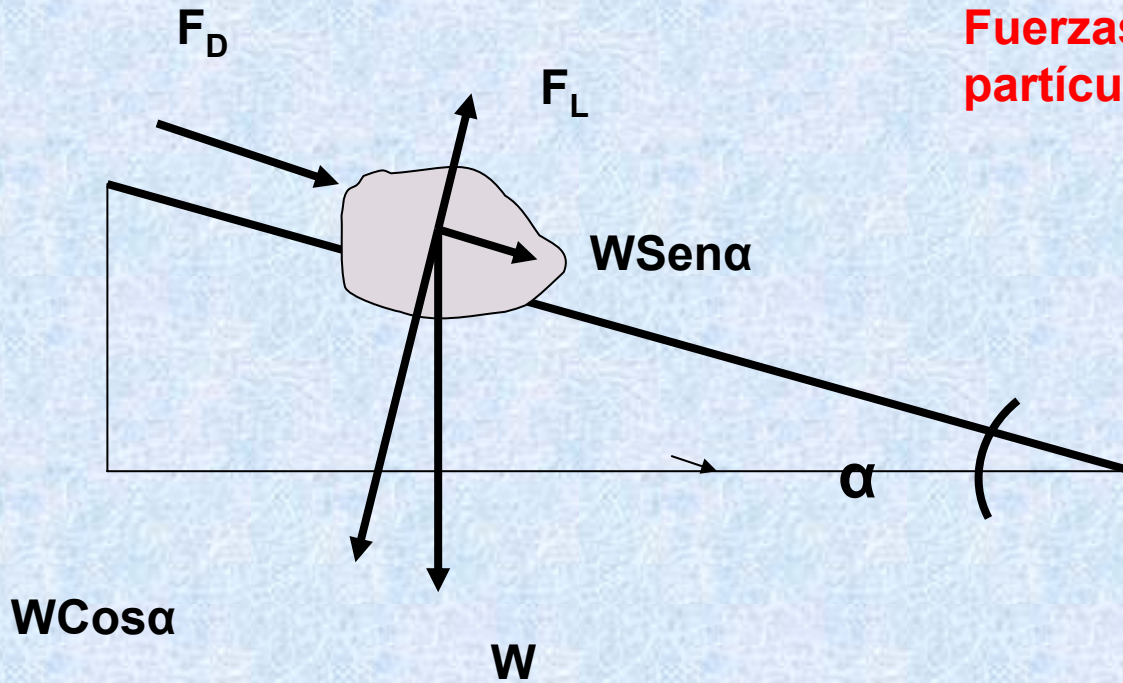
Shields (1936).

Relaciona el esfuerzo cortante crítico adimensional en función del número de Reynolds del lecho.

El diagrama de Shields (1936) proporciona un intervalo de inicio del movimiento para lechos de material uniforme, artificialmente aplanados y bidimensionales.



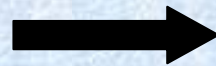
Fuerzas actuantes sobre una partícula en un lecho



$$F_t = F_D + W \cdot \sin \alpha$$

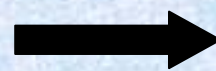
$$F_n = W \cdot \cos \alpha - F_L$$

Si $F_L > W \cos \alpha$



Existirá despegue de fondo

No existirá movimiento a los largo del plano inclinado si



$$\frac{F_t}{F_n} = \frac{F_D + W \sin \alpha}{W \cos \alpha - F_L} \leq \operatorname{tg} \varphi$$

$$F_D = C_D (K_1 D^2) \rho \frac{U^2}{2}$$

$$F_L = C_L (K_2 D^2) \rho \frac{U^2}{2}$$

$$W = K_3 D^3 \gamma'_s$$

donde,

D, es el diámetro de la partícula

C_D , es el coeficiente de forma

$K_1 D^2$, es el área expuesta a la velocidad

U, es la velocidad a la altura de la partícula

ρ , es la densidad del agua

C_L , es el coeficiente de forma de la sección

$K_2 D^2$, es el área sobre la que actúa la fluctuación por turbulencia

$K_3 D^3$, es el volumen de la partícula

γ'_s , es el peso específico sumergido del sólido



Si en la expresión:

$$\frac{F_t}{F_n} = \frac{F_D + W \operatorname{sen} \alpha}{W \cos \alpha - F_L} \leq \operatorname{tg} \varphi$$

Se sustituye, F_D , F_L y W , se puede escribir:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\left[C_D (K_1 D^2) \left(\rho \frac{U^2}{2} \right) \right] + K_3 D^3 \gamma_s \operatorname{sen} \alpha}{K_3 D^3 \gamma_s \cos \alpha - C_L K_2 D^2 \left(\rho \frac{U^2}{2} \right)}$$

$$\frac{\rho \cdot U^2}{\gamma_s' D} = \frac{2K_3 (\operatorname{tg} \phi \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha)}{C_D K_1 + C_L K_2 \operatorname{tg} \phi}$$

$$K_1 \approx K_2$$

Suponiendo válida la distribución logarítmica de velocidad

$$\frac{U}{U_*} = A \log \left(\frac{y}{y_0} \right)$$

siendo:

$$U_* = \sqrt{g R_H S}$$

en general el parámetro y_0 vendrá dado por una expresión de tipo:

$$\frac{y_0}{K} = \psi \left(\frac{U_* K}{\gamma} \right)$$

y la forma de la expresión de U es

$$\frac{U}{U_*} = A \log \frac{y}{K} - A \log \phi \left(\frac{U_* K}{\gamma} \right)$$

Para la altura y , del orden del tamaño del grano

$$y = D/2$$

$$U = \alpha D$$

$$K = \beta D$$

$$\frac{U}{U_*} = A \log C - A \log \psi \left(\frac{U_* \beta D}{\nu} \right)$$

y como β y C dependen de la forma del grano:

$$\frac{U}{U_*} = \psi \left[\text{forma}; \frac{U_* D}{\nu} \right]$$

Como ya se analizó C_D es función de $(U_* D/\nu)$

$$C_D = G_D \left(\frac{U_* D}{\nu} \right)$$

y análogamente:

$$C_L = G_L \left(\frac{U_* D}{\nu} \right)$$

Si sustituimos en la fórmula (6.1) el valor de U se tiene:

$$U = U_* \psi \left(\text{forma}; \frac{U_* D}{\nu} \right)$$

$$\rho \frac{U_*^2}{\gamma_S D} = \left[\psi \left(\text{forma}; \frac{U_* D}{\nu} \right) \right]^2 = \frac{2K_3 [\text{tg } \phi \cos \alpha - \text{sen } \alpha]}{G_D \left(\frac{U_* D}{\nu} \right) K_1 + G_L \left(\frac{U_* D}{\nu} \right) K_2 \text{tg } \phi}$$

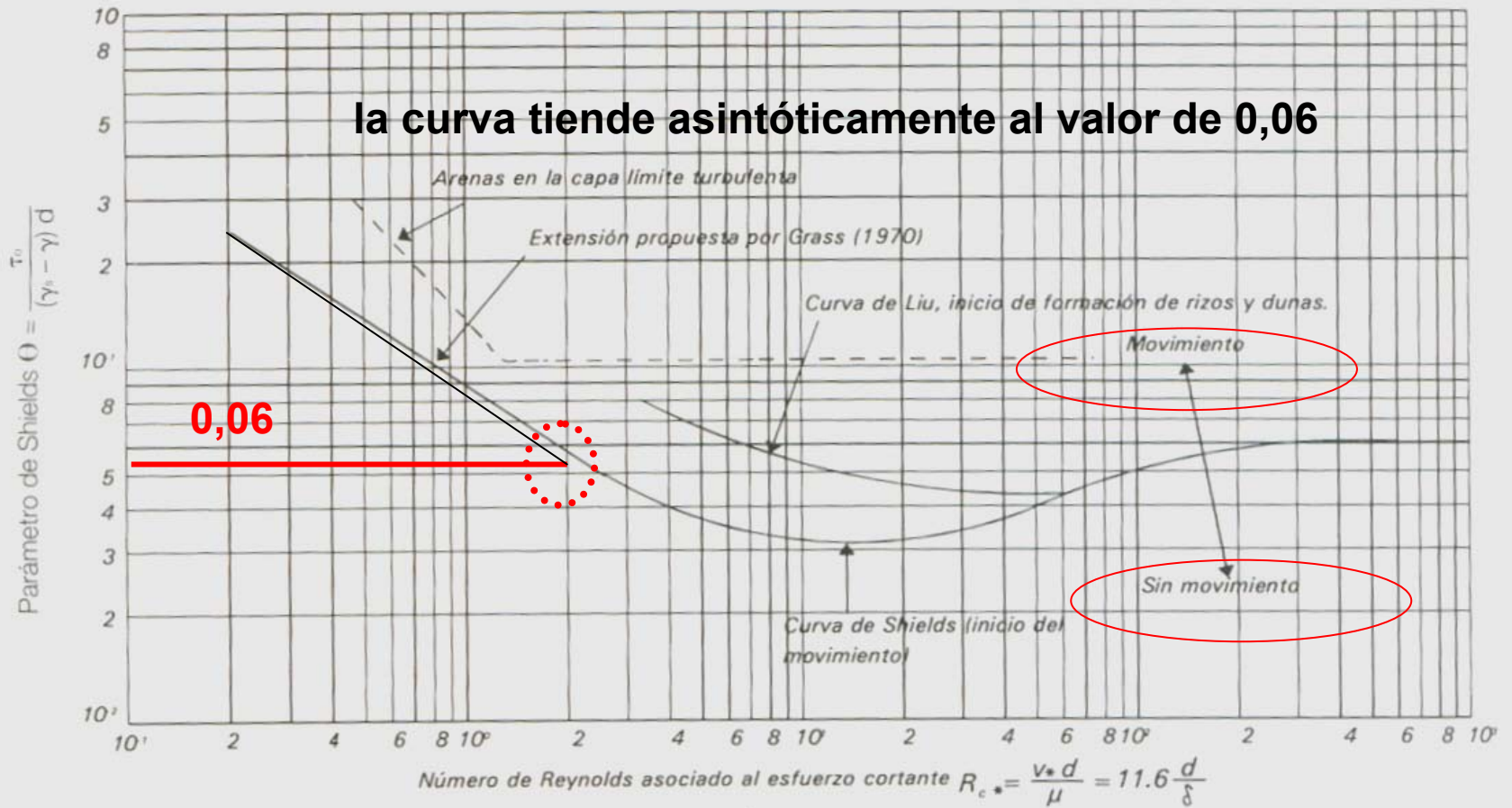
$$\rho \frac{U_*^2}{\gamma_S' D} = \Psi \left(\frac{U_* D}{\nu}; \phi; \text{forma} \right)$$

pero por otra parte ($U_*^2 = gSR = \tau_0/\rho$) por lo que la ecuación anterior toma la forma:

$$\frac{\tau_0}{\gamma_S' D} = \Psi \left(\frac{U_* D}{\nu}; \phi; \text{forma} \right) \quad (6.3)$$

La ecuación (6.3) fue confirmada en la práctica por Shields (1936), en la figura 6.2 se ha representado su diagrama.

la curva tiende asintóticamente al valor de 0,06



$$V_* = \text{velocidad de fricción} = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau_0 = \text{tensión tractiva (tm}^{-2}\text{)} \\ \rho = \text{densidad del agua (tm}^{-3}\text{ s}^{-2}\text{)} \end{array} \right.$$

d = diámetro de la partícula (mm)
 μ = viscosidad cinemática (m²/s)
 δ = espesor de la capa límite (m)

$R_* < 2$ Laminar liso
 $R_* \geq 400$ } Turbulento rugoso
 $2 < R_* < 400$ Transición

Diagrama de Shields que indica el inicio del movimiento de partículas en el fondo.

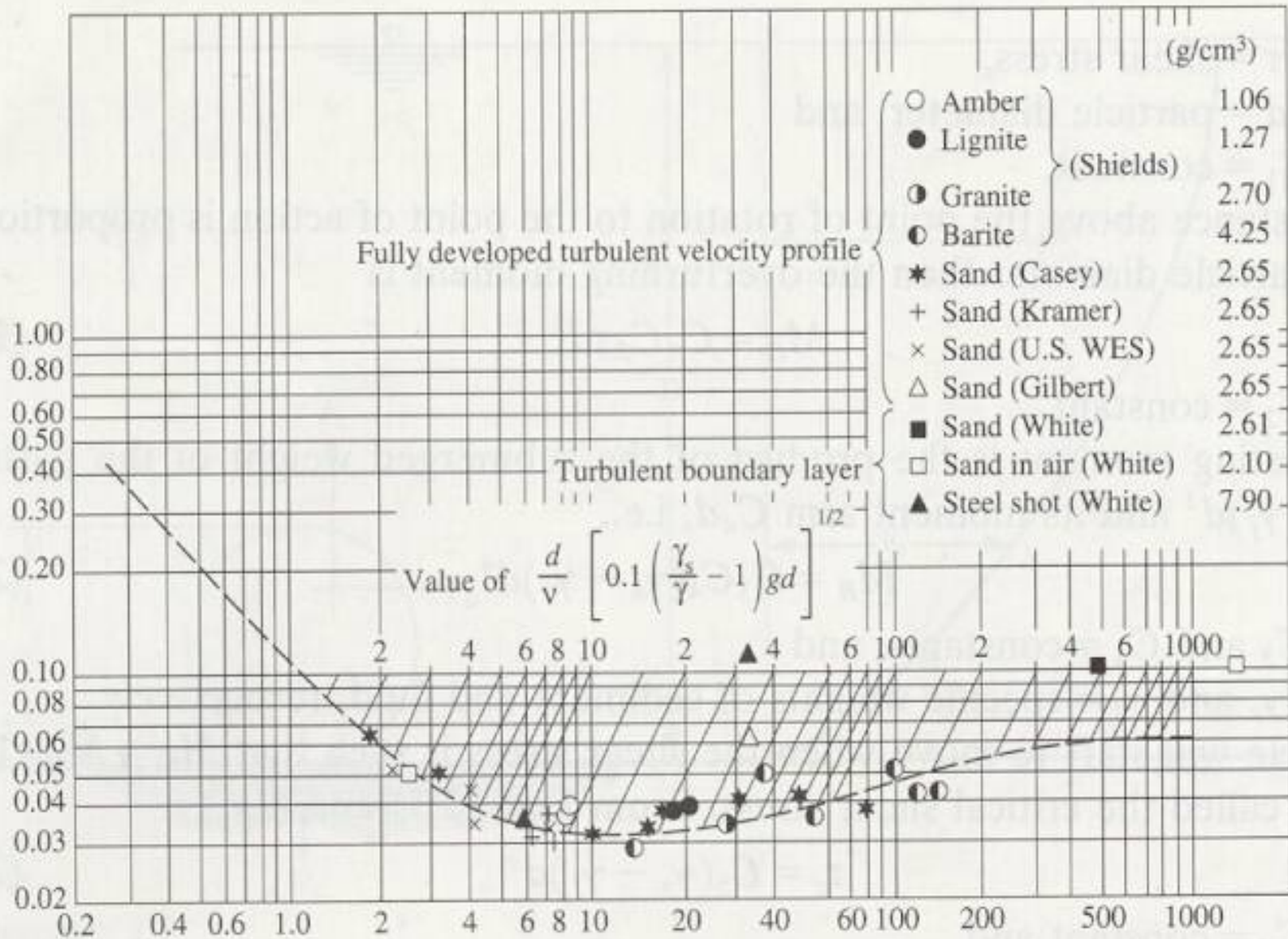


$$D \frac{(\tau_c / \rho)^{1/2}}{\nu} = \frac{D \cdot U_*}{\nu}$$

$$\frac{\tau_c}{D(\rho_s - \rho) \cdot g} = \frac{\tau_c}{D\gamma [(\rho_s / \rho) - 1]}$$



\bar{U}



$\frac{J_*}{v}$



El diagrama indica tres zonas que puedan diferenciarse según los valores de R^* (número de Reynolds asociado al esfuerzo cortante)

a) Zona del movimiento con contorno liso: $\frac{U \cdot D_s}{v} < 3,65 \text{ ó } 5,00$

b) Zona media (zona de transición).
Esta zona presenta un mínimo para los valores de : $\frac{U \cdot D_s}{v} < 12$

c) Zona final (zona de contorno rugoso) para: $\frac{U \cdot D_s}{v} > 70$



Los valores de las tensiones de arrastre:

Shields para la zona turbulenta

$$\tau = 0,06(\gamma_s - \gamma)d$$

Lane y Carlson (1953)

$$\tau = 0,075(\gamma_s - \gamma)d_{75}$$

Miller et al (1977)

$$\tau = 0,045(\gamma_s - \gamma)d$$

Meyer-Peter y Müller (E.T.H. Suizo)

$$\tau = 0,047(\gamma_s - \gamma)d$$

$$\tau = 0,02(\gamma_s - \gamma)d_{95}$$



Einstein (1942)

Su planteamiento supone la ruptura con las formulaciones anteriores en base a dos supuestos :

- No tener en cuenta el valor crítico del comienzo del arrastre, cuya definición es difícil, cuando no imposible.**
- El transporte está más relacionado con las fluctuaciones de velocidad que con su valor medio.**

Einstein considera que:

- El comienzo y final del movimiento de una partícula ha de ser expresado en términos de probabilidad que refiere las posiciones intermedias al peso de la partícula.**
- Existe un intercambio constante e intensivo de partículas entre flujo y lecho.**
- El acarreo se mueve lentamente hacia aguas abajo. El movimiento de un partícula consta de desplazamientos muy rápidos y de períodos de reposos relativamente largos.**



H. Einstein (1950).

“Toda modificación en la velocidad de la corriente en contacto con los materiales del cauce, origina en el contorno de estos una alteración inversamente proporcional de las condiciones de presión”.

Criterio fundamentado en teoría de la capa límite

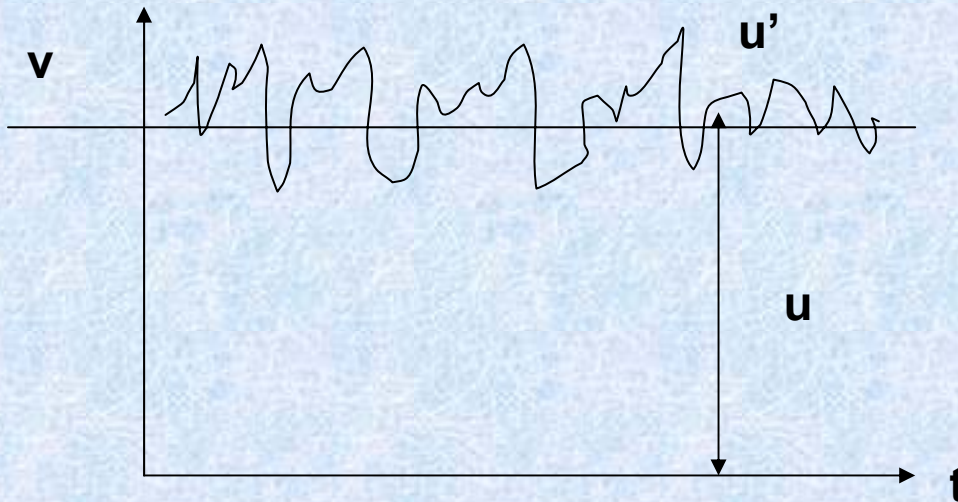
Complemento estadístico complejo

Área de acción universal tanto para acarreos como para suspensiones

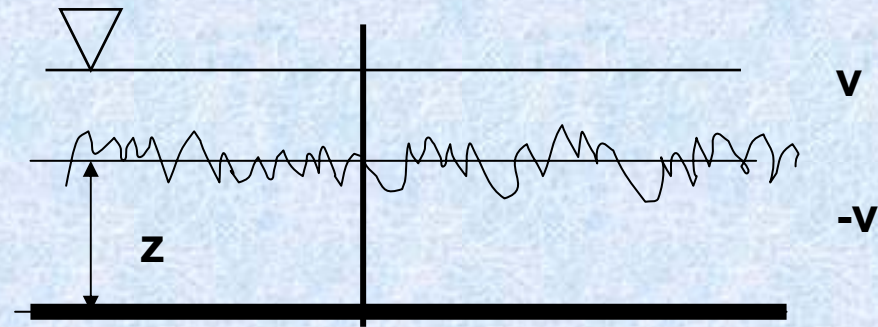


Estudio de las suspensiones

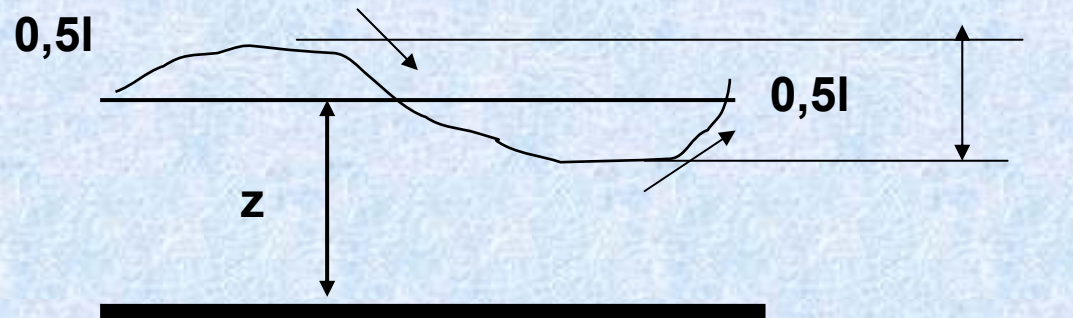
- 1) Esgurrimiento bidimensional
- 2) Régimen permanente y uniforme
- 3) Admite el equilibrio entre la acción de la gravedad y la de la turbulencia
- 4) Distribución de la velocidad en el movimiento turbulento



- 5) $C_m = f(z)$ y $v = f(z)$, donde z es la altura de la capa de sedimentos



- 6) Según la figura la componente horizontal es V_z y la vertical es 0, debido al balance de la velocidad (+v y -v)
- 7) Caudal intercambiado: $q = 0,5 v$
- 8) Si se efectúa un recorrido "I", como se puede ver en el esquema



9) Hipótesis fundamental:

“El fluido durante su movimiento conserva las propiedades del punto del que procede, y únicamente cuando ha recorrido la distancia , l , y se ha incorporado a l nuevo punto, se mezclan con las de éste” (L. Prandtl).

10) La cantidad de material sólido intercambiado admitiendo un estado permanente de C es:

$$C_z v_0 + \frac{1}{2} v \cdot l \cdot \frac{dC}{dz} = 0 \quad (1)$$

11) Para obtener, v y l , se trata de manejar **Cantidad de movimiento** en lugar de intercambio de partículas sólidas.

12) La tensión de fricción τ_z (prescindiendo de la viscosidad) tiene la expresión siguiente para una profundidad, h , de la corriente y una tensión tangencial media , τ_0 , próxima al lecho (subcapa laminar)

$$\tau_z = \tau_0 \left(\frac{h - z}{h} \right) = - \frac{1}{2} v \rho l \cdot \frac{dv}{dz} = 0 \quad (2)$$



13) Como la velocidad de fricción tiene la expresión:

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$$

$$\frac{1}{2} v^2 = -v_*^2 \left(\frac{h-z}{h} \right) \cdot \frac{1}{dz} = 0$$

14) Admitiendo la Ley de distribución de velocidades (L. Prandtl)

$$\frac{dv}{dz} = \frac{1}{k} v_* \frac{1}{z} \quad (3)$$

15) Sustituyendo 3 en 2, se obtiene:

$$\frac{1}{2} v^2 = -v_* \cdot z \cdot k \cdot \left(\frac{h-z}{h} \right) = 0 \quad (4)$$



16) Sustituyendo 4) en 1), se obtiene:

$$\frac{dC_z}{C_z} = \left(\frac{v_0}{K \cdot v_*} \right) \cdot \left[\frac{h}{(h-z)z} \right] dz \quad (5)$$

17) Integrando esta ecuación 5) entre a y z, se obtiene:

$$\frac{C_z}{C_a} = \left[\frac{h-z}{z} \cdot \frac{a}{h-a} \right]^{\frac{v_0}{K \cdot v_*}} \quad (6)$$

