



POLITÉCNICA



# TEMA 21 : Transporte de materiales (III)



**JOSÉ LUIS GARCÍA RODRÍGUEZ**  
*UNIDAD DOCENTE DE HIDRÁULICA E HIDROLOGÍA*  
*DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA FORESTAL*  
E.T.S. DE INGENIEROS DE MONTES  
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

**- Cálculo del caudal sólido**



La fórmula general del caudal sólido responde a una expresión del tipo siguiente:

$$q_s = a \cdot (x)^b$$

donde, X puede variar y adoptar las siguientes diferencias,

$$(q - q_c)$$

$$(v - v_c)$$

$$(s - s_c)$$

$$(\tau - \tau_c)$$

$$(\tau v - \tau_c v_c)$$

$$(vs - v_c s_c)$$

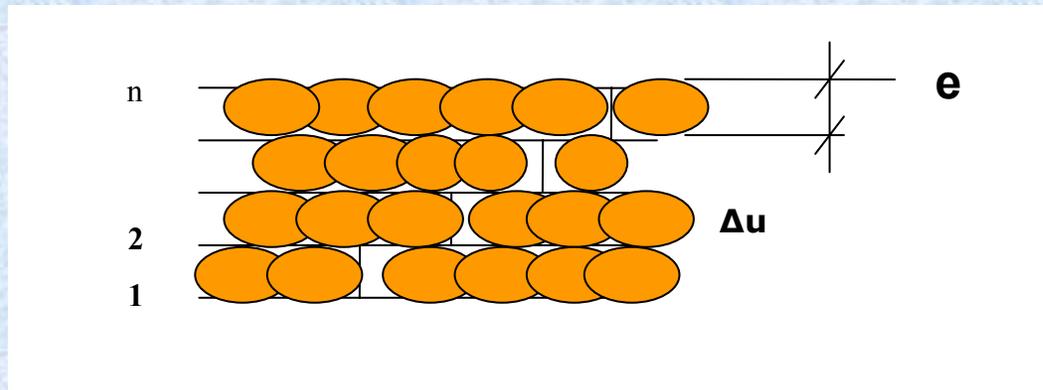


# MÉTODOS PARA ACARREOS

## 1. Du Boys (1897)

Fue la primera fórmula de interés desarrollada a partir del concepto, erróneo de que el lecho está formado por una serie de capas puestas una sobre la otra y que todas las capas se mueven excepto la última, en el fondo, que ésta en reposo.

Es decir el lecho,  $e$ , se mueve de forma semejante a un fluido viscoso entre dos placas.



Además la velocidad con que se mueve una capa es proporcional a la tensión tangencial que se le aplica y que la velocidad relativa de dos capas contiguas es siempre la misma ( $\Delta u$ ).

Si hay  $(n-1)$  capas en movimiento, la superficie tendrá una velocidad,  $(n-1)\Delta u$

Donde,  $\Delta u = u_{n-1} - u_n$ , es el incremento de la velocidad entre dos capas adyacentes

$$q_b = \frac{(n-1)\Delta u}{2} (n \cdot e) \quad (1)$$

Velocidad media

Espesor total

El cortante crítico,  $\tau_0$ , se equilibra con las fuerzas de fricción entre capas sucesivas

$$\tau_0 = f_s (\gamma_s - \gamma) n \cdot e \quad (2)$$

El umbral, por movimiento incipiente,  $n=1$ , es:

$$\tau_c = f_s (\gamma_s - \gamma) \cdot e \quad (3)$$



De (2) y (3) se deduce,  $n = \frac{\tau_0}{\tau_c}$

Sustituyendo en (1), se obtiene:

$$q_b = \frac{e \cdot \Delta u}{2 \tau_c^2} \tau_0 (\tau_0 - \tau)$$

**$C_d$ , coeficiente  
característico  
del sedimento**

**Exceso de  
tensión crítica**

Suponer la hipótesis de que unas capas deslizan sobre otras implica el eliminar el fenómeno de saltación.

Aún así este método ha sido la base de otros métodos de cálculo de Shields y Kalinske.

**Shields.** Incluye en su formulación además de las variables utilizadas por DuBoys, la pendiente y el caudal líquido por unidad de anchura.

$$q_s = 10 \cdot \frac{\gamma}{\gamma_s} \cdot q \cdot j \frac{(\tau - \tau_0)}{(\gamma_s - \gamma) \cdot d}$$



## Kalinske (1947)

Utiliza el exceso de velocidad sobre la velocidad crítica de arrastre, aunque la formulación final expresa el caudal sólido como función de la relación entre tensión tangencial y tensión tangencial crítica:

$$q_s = V_* \cdot d \cdot f \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)$$

donde:

$d$  = diámetro característico de los materiales.

$v_*$  = velocidad de fricción (introduce el concepto de capa límite).

*Gilbert (1914).*

Establece la ecuación:

$$q_s = \frac{c}{d^{0,58}} j^{1,59} q^{1,02} - C_1$$

donde  $c$  y  $C_1$  son coeficientes experimentales.



## Schoklitsch

Desarrollo en los años treinta una serie de formulas deducidas a partir de ensayos sobre modelos reducidos realizados por Gilbert (1914).

Son aplicables a un régimen permanente y uniforme tanto del caudal líquido como del caudal sólido .

Define un caudal critico,  $q_c$ , que es el caudal que provoca el movimiento incipiente, y por debajo del cual cesa el transporte de los materiales de un cierto diámetro característico (d):

$$q_c = \frac{0,00001944 \ d}{j^{3/4}}$$

$$(1934) \quad q_s = \frac{7000}{\sqrt{d}} j^{3/2} (q - q_c) \quad (\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1})$$

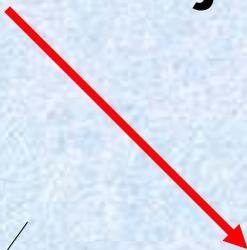
**El caudal sólido es por tanto, función del exceso de caudal líquido sobre el caudal líquido crítico.**



Esta fórmula obtiene caudales sólidos inferiores a los reales obtenidos en ensayos sobre modelos reducidos.

**Schoklitsch (1962)** estableció tras múltiples experiencias en ríos de Europa Central:

$$q_c = 0,26 \left( \frac{\gamma_s - \gamma}{\gamma} \right)^{5/3} \frac{d_{40}^{3/2}}{j^{7/6}}$$


$$q_s = 2500 j^{3/2} (q - q_c)$$

## Meyer-Peter y Müller, o fórmula suiza (1948)

1ª fase: En 1934 Meyer-Peter y Müller, obtienen una primera fórmula, similar a las de Schoklitsch.

$$q_s = c j^{3/2} (q^{2/3} - q_0^{2/3})^{2/3}$$

2ª fase: Posteriormente esta fue desarrollando otras fórmulas, entre otras.

$$q'_s = \left( \frac{4}{\sqrt[3]{\rho}} \right)^{3/2} \left( \gamma R_h \left[ \frac{K}{K'} \right]^{3/2} j - 0,047 (\gamma_s - \gamma) d^{3/2} \right)^{3/2}$$



$$q'_s = \left( \frac{4}{\sqrt[3]{\rho}} \right)^{3/2} \left( \gamma R_h \left[ \frac{K}{K'} \right]^{3/2} j - 0,047 (\gamma_s - \gamma) d^{3/2} \right)^{3/2}$$

$$q'_s = q_s \frac{(\gamma_s - \gamma)}{\gamma_s}$$

$R_h$ , es el radio hidráulico en la zona de transporte

$K$ , es el coeficiente de Strickler total,

$K'$ , es el coeficiente de Strickler debido al grano

$$K = \frac{1}{n}$$

$$K' = \frac{26}{(d_{90})^{1/6}}$$

$$0,5 < \frac{K}{K'} < 1$$

$$\frac{K}{K'} = 1 \quad \text{en lecho plano}$$

$$\frac{K}{K'} = 0,5 \quad \text{en lecho con formas fuertes}$$



## Smart y Jaeggi (1984)

$$\frac{q_s}{g \left( \frac{\gamma_s}{\gamma} - 1 \right) d^3} = 4 \left[ \left( \frac{d_{90}}{d_{30}} \right)^{0,2} j^{0,6} C \tau^{0,5} (\tau - \tau_c) \right]$$

- 1) Se recomienda para pendientes  $\leq 20\%$  y muy estrechos
- 2) Proviene de numerosos ensayos en el canal
- 3) Se utiliza para cauces muy estrechos y de fuerte pendiente
- 4) Para casos prácticos, se utiliza la expresión siguiente:

$$q_s = \frac{4}{(S - 1)} \left( \frac{d_{90}}{d_{30}} \right)^{0,2} j^{1,6} q \left[ 1 - \frac{\theta_{cr} (S - 1) d_{50}}{h_m j} \right]$$



# CASOS PRÁCTICOS

$$q_s = \frac{4}{(S-1)} \left( \frac{d_{90}}{d_{30}} \right)^{0,2} j^{1,6} q \left[ 1 - \frac{\theta_{cr} (S-1) d_{50}}{h_m j} \right]$$

$\theta_{cr}$  es el  
nº de  
Shields  
crítico

$$\frac{\tau}{(\gamma_s - \gamma)\tau}$$

Recomendaciones:

Con plena turbulencia y pendientes moderadas y para  $S=2,65$  y  $\theta_{cr}=0,05$

$$q_s = 2,5 q \cdot j^{0,6} \left( j - \frac{d_{50}}{12,1 h_m} \right)$$

**Procedimiento de cálculo:**

- 1) Conocido el caudal punta,  $q_p$ , del hidrograma en la sección de control en los sucesivos  $\Delta t$ , se calcula el calado,  $h$ , que alcanza la corriente en dicha sección (fórmula de Manning).
- 2) Conocido,  $h$ , se aplica la fórmula de Smart-Jaeggi para obtener los acarrees en el instante  $t$ .
- 3) Se integran todos los valores a lo largo del hidrograma obteniéndose el **VALOR TOTAL DE ACARREOS**.



## ... ES NECESARIO SABER

- 1) El nº de Manning en 1ª aproximación de la sección de control con “aguas limpias”. Normalmente habrá que aumentarlo en función del tamaño de los materiales transportados.
- 2) El tamaño se valora con el diámetro crítico,  $d_{cr}$ , obtenido de la expresión de la tensión crítica de Meyer-Peter y Müller

$$\gamma Rj = 0,047 (\gamma_s - \gamma) d_{cr}$$

- 3) Corrección del nº de Manning,  $n'$

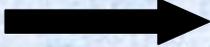
$$n' = n + \frac{d_{cr}^{1/6}}{26}$$

- 4) Con  $n'$ , se vuelve a calcular la sección y otro nuevo  $d_{cr}'$

**Si  $|d_{cr} - d_{cr}'| \approx 0$  se admite el calado**

**Si  $|d_{cr} - d_{cr}'| \neq 0$  se vuelve a corregir  $n''$  con el nuevo  $d_{cr}'$  y se calcula otra vez**



5) Además si se introduce **Q** en lugar de **q**  **Q<sub>s</sub>** en lugar de **q<sub>s</sub>**

6) Se obtienen, **d<sub>90</sub>**, **d<sub>30</sub>** y **d<sub>50</sub>** de la curva granulométrica

7) Se adopta **0,047** en **τ<sub>c</sub>**

8) **R ≈ h**, en secciones donde predomina el ancho

El valor del caudal sólido en la sección  $T_{ni} = Q_s \gamma D 10^3$

**T<sub>ni</sub>**, son las toneladas que circulan en el instante **i**

**Q<sub>s</sub>**, es el caudal sólido (m<sup>3</sup>/s)

**γ**, es el peso específico del flujo (kg/m<sup>3</sup>)

**D**, es la duración del intervalo de tiempo (s)



Integrando el valor de  $T_{ni}$  a lo largo del hidrograma se obtiene el total de acarreo

$$A = \sum_{i=1}^{i=N} T_{ni}$$

**Existen muchas más fórmulas que deberéis estudiar**



# FORMAS DE TRANSPORTES DE SEDIMENTOS MÉTODOS PARA CUANTIFICAR EL CAUDAL SÓLIDO

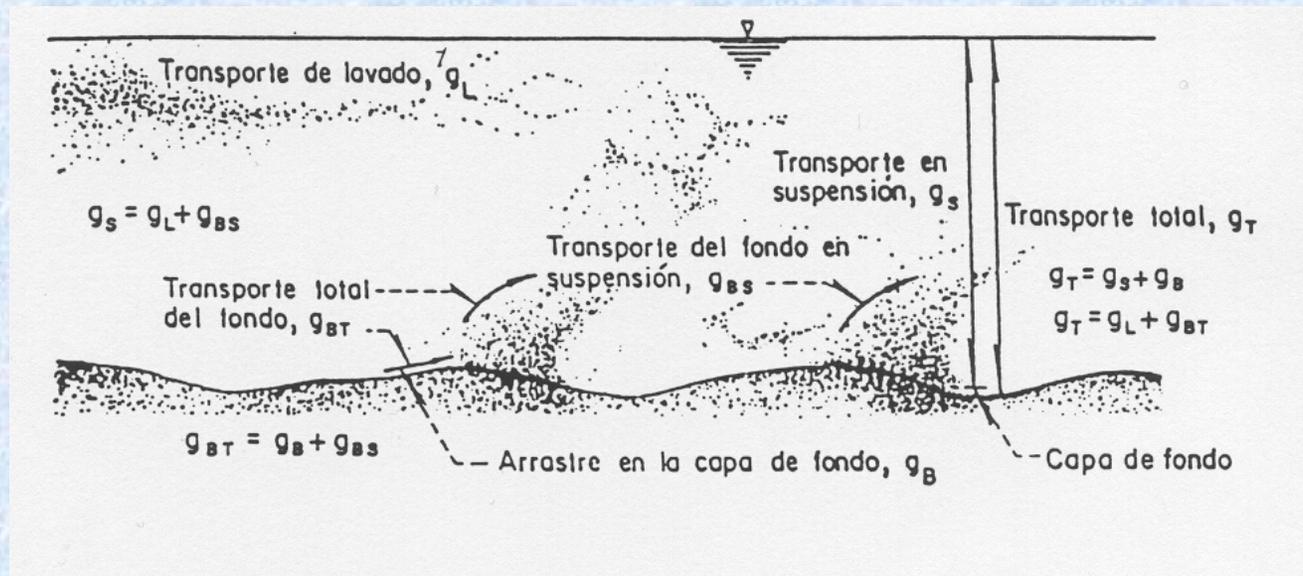


Figura – Diferentes formas de transporte de sedimentos en ríos.  
[por A. J. M. Álvarez y M. O. Flores, 1996]

Forma de Transporte	Notación			
	kg/m.s o N/m.s	kg/s o N/s	m <sup>3</sup> /m.s	m <sup>3</sup> /s
Arrastre en la capa de fondo (acarreo)	$g_B$	$G_B$	$q_B$	$Q_B$
Transporte de fondo en suspensión	$g_{BS}$	$G_{BS}$	$q_{BS}$	$Q_{BS}$
Transporte total de fondo	$g_{BT}$	$G_{BT}$	$q_{BT}$	$Q_{BT}$
Transporte de lavado	$g_L$	$G_L$	$q_L$	$Q_L$
Transporte total en suspensión	$g_S$	$G_S$	$q_S$	$Q_S$
Transporte total	$g_T$	$G_T$	$q_T$	$Q_T$
$g_x = \gamma_s \cdot q_x$	Transporte total de fondo: $G_{BT} = G_B + G_{BS}$			
$G_x = b \cdot g_x$	Transporte total en suspensión: $G_S = G_{BS} + G_L$			
$Q_x = b \cdot q_x$	Transporte total: $G_T = G_{BT} + G_L$ $G_T = G_B + G_{BS} + G_L$ $G_T = G_B + G_S$			
$g'_x = \frac{\gamma_s - \gamma}{\gamma} \cdot g_x$				
x indica la forma de transporte b = ancho del fondo del río Transporte unitario de partículas expresado en peso sumergido se designa como $g_x'$				

Tabla – Diferentes formas de transporte de sedimentos y su notación.



## Transporte de lavado – Resumen

<p>1 - El caudal de lavado no puede ser definido por la capacidad de transporte del río, una vez que el es fornecida por las aguas arriba. Así, las ecuaciones que consideran las características hidráulicas del río para definir su capacidad de transporte, no estiman el caudal de lavado. Esto ocurre con todas las ecuaciones de base teórica</p>	<p>4 - Las partículas sólidas que constituyen el caudal de lavado son menores o iguales al <math>D_{10}</math> de la curva granulométrica de sólidos transportados por acarreo.</p>
<p>2 - El origen del caudal de lavado se encuentra en la erosión del suelo de la cuenca o en la erosión del fondo y margines de los cauces.</p>	<p>5 - El caudal de lavado es definido como los sedimentos transportados por el flujo con diámetros más pequeños al valor 0,0625 mm.</p>
<p>3 - En la mayoría de los ríos los sedimentos transportados son formados predominantemente por el caudal de lavado, estima que este valor está entre 80% y 90% del caudal total de sedimentos.</p>	<p>6 - El caudal de lavado es predominantemente compuesto por limo y arcilla pudiendo encontrar también arena fina.</p>
	<p>7 - Las partículas de sedimento con diámetro entre 0,06 mm e 0,1 mm representan la transición entre el caudal de lavado y el de acarreo</p> <p>8 - El caudal de lavado y el de acarreo són analizados teniendo en cuenta el concepto de la influencia eficaz del sedimento, (<math>E_e</math>).</p>



## Métodos para cuantificar o caudal sólido transportado por ríos

### 1. Métodos para cuantificar el arrastre en la capa de fondo, $g_B$ o $G_B$

1 - Duboys (1879) y Straub (1935)	8 - Sato, Kikkawa y Ashida (1958)
2 - Schoklitsch (1914, 1950)	9 - Rottner (1959)
3 - Shields (1936)	10 - Garde y Albertson (1961)
4 - Meyer-Peter y Müller (1948)	11 - Yalin (1963)
5 - Kalinske (1947)	12 - Pernecker y Vollmer (1965)
6 - Levi (1948)	13 - Inglis y Lacey (1968)
7 - Einstein (1942) y Einstein-Brown (1950)	14 - Bogardi (1974)



## 2. Métodos que permiten valorar el transporte total del fondo $g_{BT}$ o $G_{BT}$ sin separar sus partes

<b>1 - Laursen (1958)</b>	<b>8 - Carstens y Altinbilek (1972)</b>
<b>2 - Colby (1964)</b>	<b>9 - Ackers y White (1972 – 1973)</b>
<b>3 - Bishop, Simons y Richardson (1965)</b>	<b>10 - Ranga-Raju, Garde y Bhardwaj (1981)</b>
<b>4 - Engelund y Hansen (1967)</b>	<b>11 - Karim y Kennedy (1981 – 1990)</b>
<b>5 - Graf y Acaroglu (1968)</b>	<b>12 - Brownlie (1982)</b>
<b>6 - Shen y Hung (1971)</b>	<b>13 - Smart (1984)</b>
<b>7 - Yang (1973)</b>	



$\tau_0 (\tau_0 - \tau_c)$ $\tau_0 = \frac{1}{2} \rho g D_{50} \left( \frac{D_{50}}{d_s} \right)^{0,391} \left( \frac{\gamma_s}{\gamma} \right)$ [Para $\psi < 5,263$ ] Einstein-Brown (1950) $g_B = U_* (\tau_0 - \tau_{0c})$ [Para $\psi < 5,263$ ] <b>§ = Método de Sato, Kikkawa y Ashida, 1958.</b> Para $n \geq 0,025$ :	-El Material se mueve en una serie de <b>n</b> capas superpuestas; -El desplazamiento de las capas sigue una función lineal
<b>§ = Método de Schoklitsch (1914, 1950)</b> Para $0,010 \leq n \leq 0,025$ : $g_B = 2500 \cdot j^{3/2} \cdot (q - q_c)$	- Cuando el material no es uniforme se acostumbra utilizar al diámetro $D_{50}$ como tamaño representativo ( $D = D_{50}$ ). - Straub fija como limite de aplicación que $0,1\text{mm} \leq D_{84} \leq 4\text{mm}$ . - Las pruebas en que se basó fueron hechas en pequeños canales de laboratorio.
	Utilizó el gasto del flujo y el gasto que inicia el arrastre de sedimento, denominado también gasto crítico. - Utilizó los datos obtenidos por Gilbert y resultados de observaciones realizadas en los ríos Danubio y Aare. - Partículas no uniforme, recomienda que se utilice como diámetro representativo de la mezcla a $D_{40}$ , o sea: $D = D_{40}$
	Basado en el analisis dimensional. - Cuando $\tau' > 0,3$ , la ecuación expresa el transporte total de fondo, en lugar del arrastre en la capa de fondo únicamente. - $(\gamma_s/\gamma) = dr_s$ entre 1,06 a 4,20; 3) $D = D_{50}$ entre 1,56 a 2,47mm; 4) Puede ser utilizada en cualquier sistema de unidad
$n^2 =$ coeficiente de Manning respecto al grano $D_a =$ diámetro medio aritmético.	- La cuarta fórmula: partículas de diferentes diámetros y de pesos específicos también diferentes ( $\gamma_s = 4220 \text{ kgf/m}^3$ , $\gamma_s = 2680 \text{ kgf/m}^3$ , $\gamma_s = 1250 \text{ kgf/m}^3$ ). es la parte de la fuerza cortante causada por el transporte; 9) Considera las formas del lecho.
.....(Figura 4.2).	Tuvo en cuenta el efecto de las fluctuaciones turbulentas - El método de Kalinske fue desarrollado para partículas esféricas y considerando el fondo plano. - Cuando el material no es uniforme recomienda utilizar el $D_{50}$ .
	Consideró las velocidades medias (V) y criticas (V <sub>c</sub> ) del flujo y no los esfuerzos cortantes. - La Ecuación de Levi fue obtenida para arena de cuarzo. El cuarzo es el material más abundante en los cauces naturales, por lo que puede aplicarse en la mayoría de ellos.
	- Para partículas con diámetros entre 0,0003 a 0,03m y con pesos específicos entre 1 250 a 4 200 kg/m <sup>3</sup> , una vez que fueron utilizados los datos de Gilbert y Meyer-Peter y Müller para probarlas. Para $\tau_* > 0,3$ cuantifica el transporte total del fondo.
	Análisis teóricas similar al de Einstein (1950). - Para probar las ecuaciones utilizaron los datos de Gilbert y datos de los propios autores, o sea: partículas de diámetros que variaron entre 0,305 y 7,01mm (datos de Gilbert), y entre 2,21 y 4,58mm (datos de los autores)

