Licenciatura en Ciencias Ambientales

Matemáticas y Estadística aplicada

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA MADRID

POLITÉCNICA

TÉCNICAS DE ANÁLISIS TEMPORAL Y ESPACIAL

I. Teoría base: Procesos estocásticos y tipos de Análisis

Profesoras:
Concepción González García
Esperanza Ayuga Téllez

Técnicas de Análisis Temporal y Espacial:

Conocimientos previos requeridos:

- Conceptos básicos Cálculo de Probabilidades
- Conceptos básicos de Inferencia Estadística:
  - ✓ Estimación puntual
  - ✓ Intervalos de confianza
  - ✓ Contrastes de hipótesis
- Modelo lineal general:correlación, regresión y ADEVA

OBJETIVOS:

- *Conocer el concepto y la finalidad de los "procesos estocásticos"*
- *Conocer los distintos campos de aplicación de esta teoría*

- *Conocer el caso particular de las "series temporales"*
- *Aprender a identificar casos prácticos,*
- *Saber realizar análisis descriptivos de series de observaciones reales cuyo análisis estadístico y modelización requiere el empleo de esta teoría.*

- *Conocer métodos de análisis de tendencias, "suavización" y la metodología Box-Jenkins·para el modelado de series de tiempo (modelos ARIMA)*

- *Manejar las herramientas informáticas (programa ´Statg.') con datos observados para la obtención de un modelo ARIMA.*

Clasificación de modelos estadísticos:

Información disponible

- Una variable: Ajuste de una distribución de probabilidad
  - *Modelo extrapolativo*

- Dos o más variables: El comportamiento de una de ellas se trata d explicar mediante una función de las restantes
  - *Modelo explicativo (regresión o Análisis de la Varianza)*

Objetivo y tipo de información

- Modelos estáticos o de corte transversal: Representan sólo el momento de recogida de la información.

- Modelos dinámicos o longitudinales: Tratan de representar la variación a lo largo del tiempo, del espacio o de ambos. La base teórica es la de los procesos estocásticos.

Análisis de dependencias

Los procesos con variables dependientes que evolucionan en el tiempo y/o espacio requieren técnicas propias de análisis para modelizarlas y obtener predicciones de valores futuros.

Ejemplos (I)

- Caudal de un río medido en un instante *t* dependerá del caudal en instantes anteriores: *t-1, t-2, …*

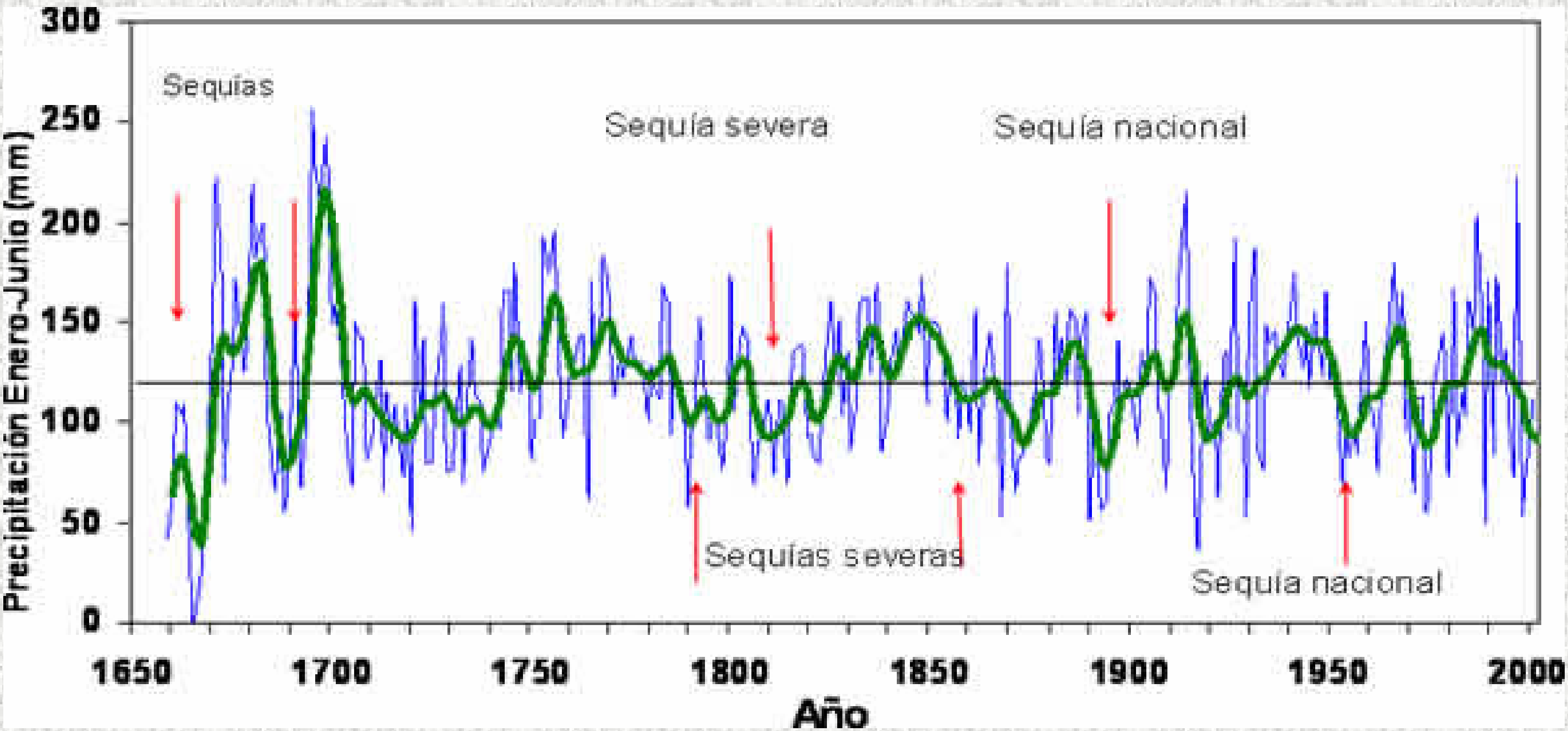
- Una variable ecológica "*nº de insectos defoliadores en una masa forestal*" dependerá de sus valores en árboles contiguos o a una distancia dada.

Ejemplos (II)

- Identificación de tipos de vegetación en imágenes digitales (fotografía aérea o imagen de satélite):

El tipo identificado en un punto servirá para tratar de identificar lo de puntos próximos.

Matemáticas y Estadística aplicada



Estudio de la evolución de variables meteorológicas

Ejemplos (III)

- En un plano, para cada par de coordenadas (*x*, *y*), existirá una v.a. (profundidad, precipitación, altitud, ...) que se puede analizar desde la óptica de un proceso estocástico.

•Los posibles rectángulos (pixels) que se pueden definir en una imagen para el estudio de variables aleatorias, como "densidad" o "abundancia" de elementos del medio, índices de vegetación,...

Teoría estadística para el estudio de modelos dinámicos *(Generalidades) I*

- Procesos estocásticos, aleatorios o probabilísticos.

- ***"Estocástico"*** (del griego *stokhastes* = adivino) ~ lo que está ligado al azar.

"Proceso en el que, en cada instante, existe una prob. bien determinada de ocurrencia de cada uno de los estados en los que se puede encontrar el sistema; esta probabilidad depende, en general, de cuáles hayan sido los estados efectivamente alcanzados en instantes anteriores.

Teoría estadística para el estudio de modelos dinámicos *(Generalidades)* II

Dependencia entre observaciones (i)

- La teoría de los procesos estocásticos es la base para el análisis de variables que varían en función del *t*, del *espacio*, o de ambos.

Un *proceso estocástico* es un conjunto (o familia) de variables aleatorias indexadas por un conjunto *T*,

$$\{ X_t \text{ ó } X(t) \,/\, t \in T \},\ T \text{ de } R^n \}$$

Si ***T*** es de *R, será variación en una dimensión.*

(caso de las series de tiempo)

Teoría estadística para el estudio de modelos dinámicos *(Generalidades)* III

Dependencia entre observaciones (ii)

Si $T = \{ (x,y) \text{ de } R^2 \}$

En este caso, *T* es un conjunto de índices y las *X(t)* se conocen como "campos aleatorios" (random fields).

- El conocimiento de estos procesos permitirá el estudio y predicción de procesos espaciales.

Modelo probabilístico de procesos estocásticos

Teorema de Kolmogorov

- Determina las condiciones necesarias para el conocimiento "completo" del proceso en el caso de poder determinar la distribución conjunta de cualquier subconjunto finito de vv.aa.
- Condición: la distribución de la V.A. (*n-1) dim.* obtenida a través del proceso, coincide con la distr. marginal de la v.a. (*n-1),* obtenida de la distribución de la v.a. *n dim.*

Procesos estocásticos (muestra)

Conjunto formado por los valores que toma la $X(t_i)$ al repetir M veces el experimento en un punto fijo t_i, del conjunto de índices.

Resultado de ejecutar el experimento, una sola vez, en distintos puntos del conjunto de índices (trayectoria)

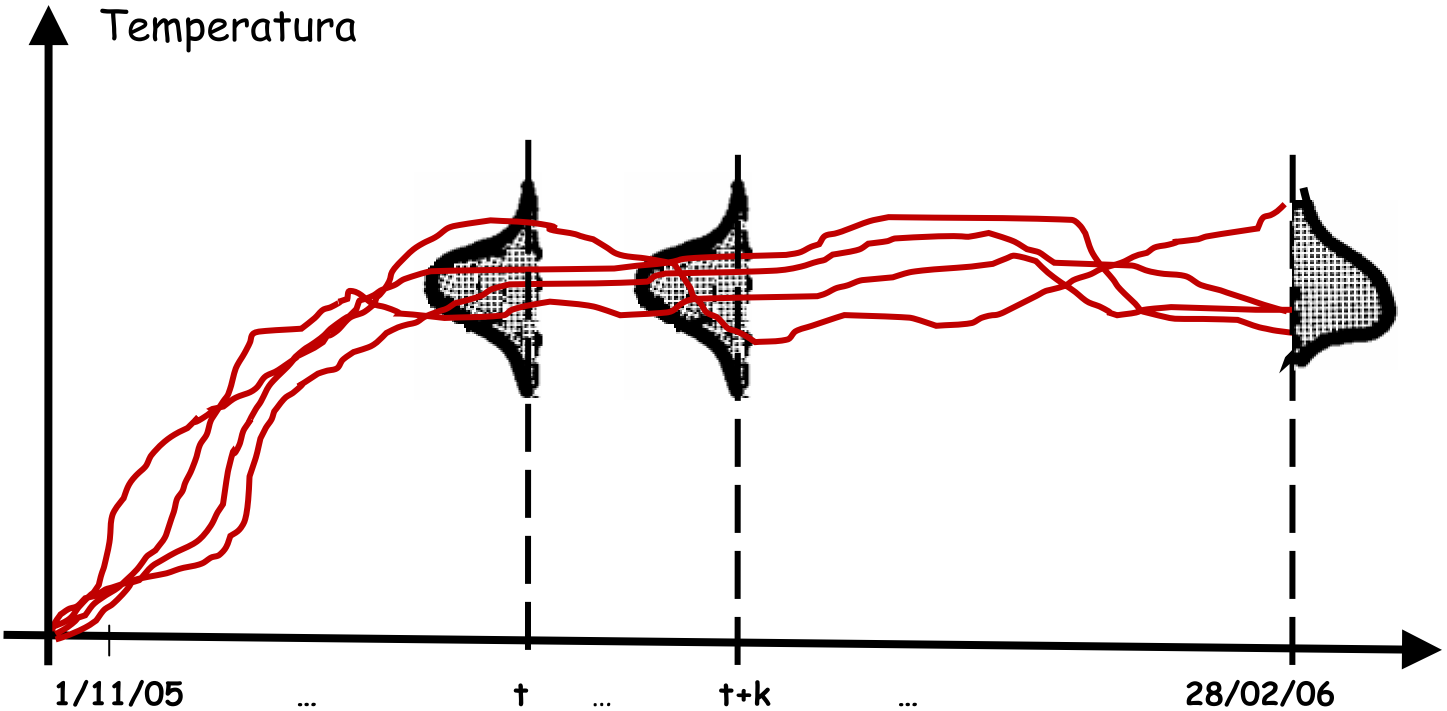
- El resultado de una trayectoria es la medición del experimento aleatorio en los instantes $t_1, t_2, \ldots, t_n$

O en las coordenadas $X_1, X_2, \ldots, X_n$

Procesos estocásticos (muestra)

- En el gráfico aparecen cuatro realizaciones muestrales de un proceso.
- En la práctica sólo se tendrá una de ellas observada y constituirá la muestra del proceso.

En cada instante "t" la variable x(t) tendrá su distribución de probabilidad



➢ *Cada línea del gráfico es una trayectoria*

Procesos estocásticos: *Obtención modelo probabilidad*

Para inferir la ley de prob. según t. Kolmogorov:

→ *Muestra de distintas realizaciones muestrales en distintos puntos del conjunto de índices.*

Problema: *Lo anterior, no siempre es posible*

→ *Se suele disponer de una trayectoria, de todas las posibles*

Estudio de dependencias

Estudio de la variación del proceso entre dos puntos de T

Procesos estocásticos: *Obtención modelo probabilidad*

Simplificaciones:

- *Procesos gaussianos = distribución conjunta de cualquier conjunto finito de vv.aa.* $\{X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)\}$ *sea normal multivariable.*

- *Naturaleza de las variables aleatorias (continuas, discretas, univariantes o multivariables,...)*

- *Por la variación de las variables al movernos sobre el conjunto de índices (estacionaridad)*

Procesos estocásticos: *Obtención modelo probabilidad*

Procesos estacionarios:

Atendiendo a su comportamiento al movernos sobre el conjunto de índices:

- *Bajo traslaciones* : La covarianza sólo depende de h (vector que une s y t)

- *Bajo rotaciones o isótropo*: la variación entre dos variables Xs y Xt sólo depende de la distancia entre s y t.

Teoría estadística para el estudio de modelos dinámicos *(particularidades)*

Caso particular:

Cadenas de Markov

- Cuando la dependencia lo es sólo con respecto al estado inmediatamente anterior, el proceso se denomina de Markov o "markoviano".

Si se tiene una población, $X_{\{t\}}$, observada en un conjunto discreto de instantes: $x_0, x_1, \dots, x_t, \dots$

$$P[X_{t+j} = x_{t+j} / X_0 = x_0, \dots, X_t = x_t, \dots, X_{t+j-1} = x_{t+j-1}] =$$

$$= P[X_{t+j} = x_{t+j} / X_{t+j-1} = x_{t+j-1}]$$

Siempre que esté definida la primera probabilidad

Teoría estadística para el estudio de modelos dinámicos *(particularidades)*

Procesos puntuales:

Surgen de considerar como conjunto de índices los rectángulos (superficies elementales) que pueden definirse en una zona S, y como variables aleatorias el número de puntos presentes en cada superficie elemental.

El estudio de estos procesos también se basa en la obtención de pautas de asociación entre las variables observadas en cada rectángulo elemental de S.

Teoría estadística para el estudio de modelos dinámicos *(Resumen conceptos)*

- **Colección de variables aleatorias indexadas por un conjunto T de números de R^n.**
- **El valor observado de la variable en un punto $t \in T$ (para R) es una extracción al azar de ella en dicho punto.**
- **Una serie de N datos será una muestra de un vector de N variables ordenadas en el conjunto de subíndices t=1,2,...,N y la serie observada es una realización o <u>trayectoria</u> del proceso.**

Procesos estocásticos (Métodos de análisis)

Determinación de pautas repetitivas de comportamiento en la variación de las observaciones

Procedimientos de análisis:

- *Análisis en el dominio de la frecuencia:*
  Función de densidad espectral

- *Análisis en el dominio del tiempo:*
  Función de autocovarianza (autocorrelación)

Procesos estocásticos (herramientas)

Herramientas o elementos fundamentales en el análisis de observaciones que proceden de procesos estocásticos en el dominio del tiempo.

Son aquellas que permiten el estudio de la variación entre dos puntos de T

- *La covarianza*

$$C(s,t) = E[(X_s - E(X_s))(X_t - E(X_t))]$$

- *El coeficiente de correlación*

$$R(s,t) = \frac{C(s,t)}{\sqrt{C(s,s)C(t,t)}} = \frac{C(s,t)}{\sqrt{V(X_s)V(X_t)}}$$

ENFOQUE FRECUENCISTA

- Mientras el análisis en el dominio del tiempo se basa en las correlaciones, el análisis en el dominio de la frecuencia se basa en el estudio de la función de densidad espectral.

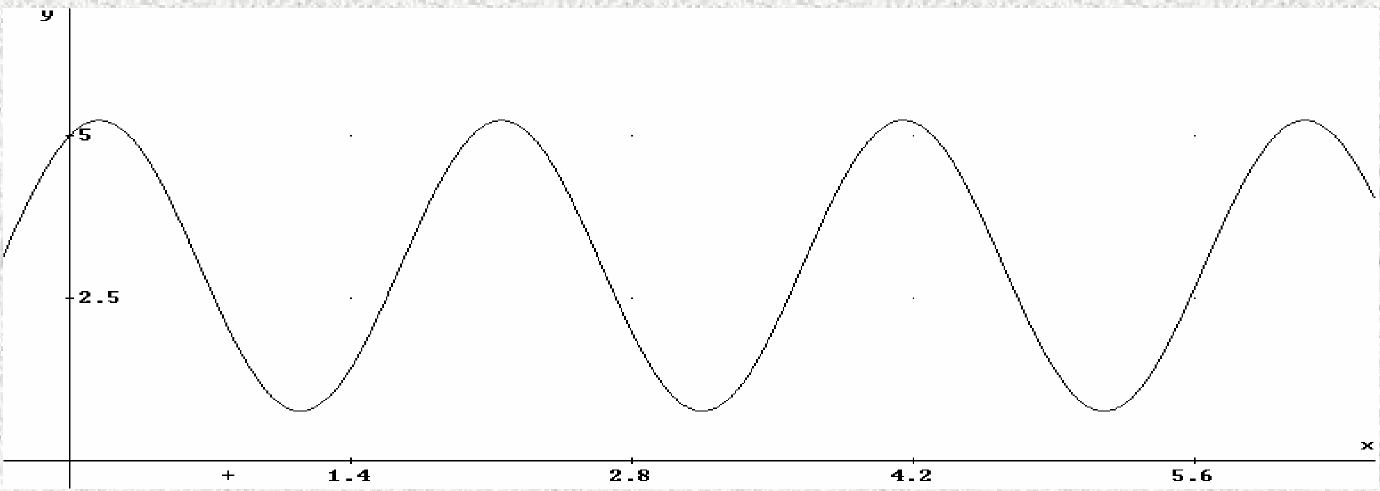
- El enfoque **frecuencista** considera que las variaciones no estacionarias en los procesos estocásticos se pueden simular mediante superposición de ondas sinusoidales que *vibran* con diferente frecuencia, fase y amplitud.

ENFOQUE FRECUENCISTA

- Si es efecto de una única onda

$$X(t)= u+ R\cos(wt+\theta)+ Z(t)$$

donde: R= amplitud, *w*= frecuencia θ= fase y *Z(t)* es un proceso estacionario.



ENFOQUE FRECUENCISTA

- El modelo anterior puede expresarse de la siguiente forma:

$$X(t)= u+ a\cos wt+ b\,\mathrm{sen}\,wt+Z(t)$$

Con la muestra $\{x(t_1),\ldots, x(t_N)\}$, los parámetros *a*, *b* y *u* se pueden estimar por el método de los mínimos cuadrados. La expresión de los estimadores más simple se obtiene con las frecuencias de Fourier:

$$w_p= 2\pi p/N, \quad p=1,\ldots, N/2.$$

ENFOQUE FRECUENCISTA

- Una forma de expresar la contribución de cada una de las ondas al proceso total es considerar alguna medida relacionada con la amplitud de cada onda elemental.

- Si llamamos R_p a la amplitud de la onda elemental w_p, la medida más utilizada se define como:

$$I(w_p) = \frac{NR_p^2}{4\pi} \text{ , con } R_p = \sqrt{a_p^2 + b_p^2}$$

PERIODOGRAMA

- Se llama periodograma a la representación de la variación de $I(w_p)$ respecto de w_p.

$$I(w_p) = \frac{(\sum x_t \cos 2\pi pt/N)^2 + (\sum x_t \mathrm{sen}\, 2\pi pt/N)^2}{N\pi}$$

➢ I(w) no explica la contribución de la onda w a la variación del sistema. Sin embargo tiene comportamientos <u>medios</u> buenos.

PERIODOGRAMA

DISTRIBUCIÓN ESPECTRAL:

Una mejor aproximación se obtiene al considerar la relación entre la función de autocovarianza:

$$\gamma(k)= E[X(t)X(t-k)]$$

con una nueva función F(w), monótona no decreciente, que expresa la contribución aportada a la varianza del proceso por las ondas de frecuencia menor o igual a w y se denomina <u>función de distribución espectral</u>.

DISTRIBUCIÓN ESPECTRAL

- La función de distribución espectral se puede descomponer en la suma de dos funciones no decrecientes,
  - una continua y
  - otra por incrementos,

que representan, respectivamente, las componentes estocásticas y deterministas del modelo.

En los estudios del medio físico los saltos en la distribución espectral son una herramienta útil para determinar intervenciones humanas o catástrofes.

DENSIDAD ESPECTRAL

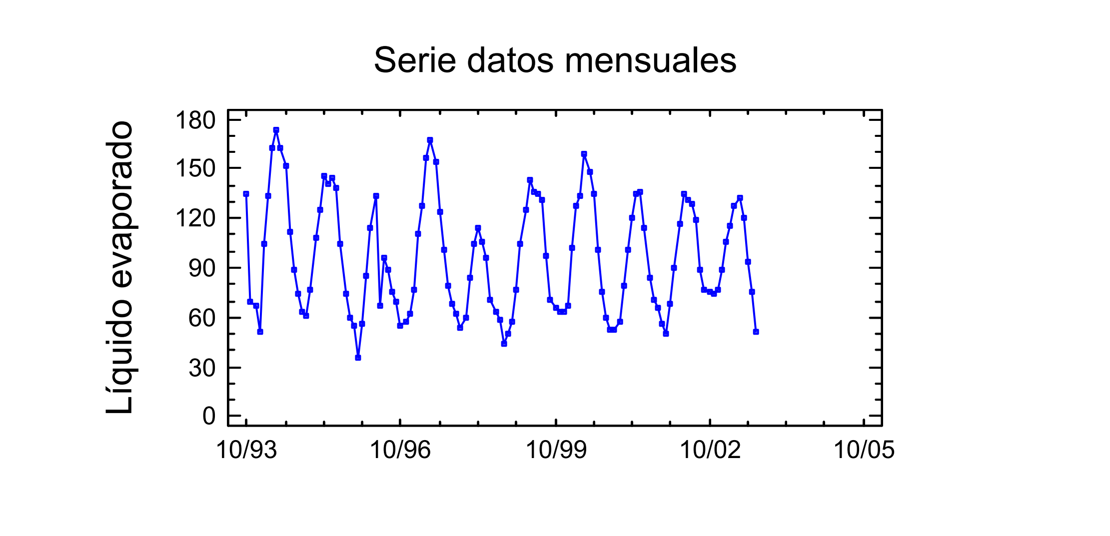
- La derivada de la función de distribución espectral respecto de w se conoce como función de densidad espectral (f(w)) y está relacionada con la función de autocovarianza al ser su transformada de Fourier:

$$\mathbf{f(w)} = \frac{\mathbf{1}}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty} \gamma(\mathbf{k})\mathbf{e}^{-\mathbf{iwt}}$$

ANÁLISIS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

Análisis de series temporales

Secuencia de observaciones ordenadas por una variable, en R, (tiempo, longitud,...).



Statgraphics Data

ANÁLISIS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

Series temporales

- Pueden ser:
  - –Continuas: señal de un sensor, de radio,...
  - –Discretas: temperaturas, caudales, nivel de contaminante (diario, semanal, anual,...).

ANÁLISIS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

Series discretas

- Notación: $X(t)$ ó X_t
- Las observaciones se toman a intervalos regulares de t:

$$X(t), X(t+k), X(t+2k), \ldots$$

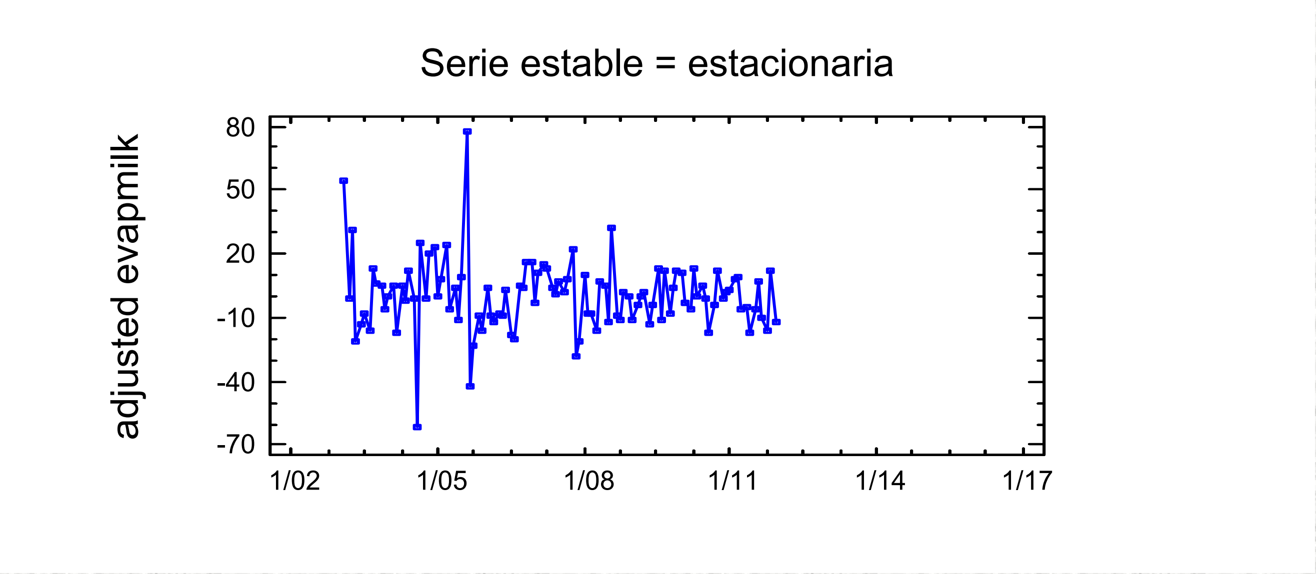
•***Objetivo:*** Determinar la estructura de dependencia entre las observaciones para obtener un modelo que sirva para explicar, predecir la evolución futura de la variable observada y, en su caso, controlar el proceso.

Análisis de series temporales: Introducción

Conceptos previos

Series estacionarias:

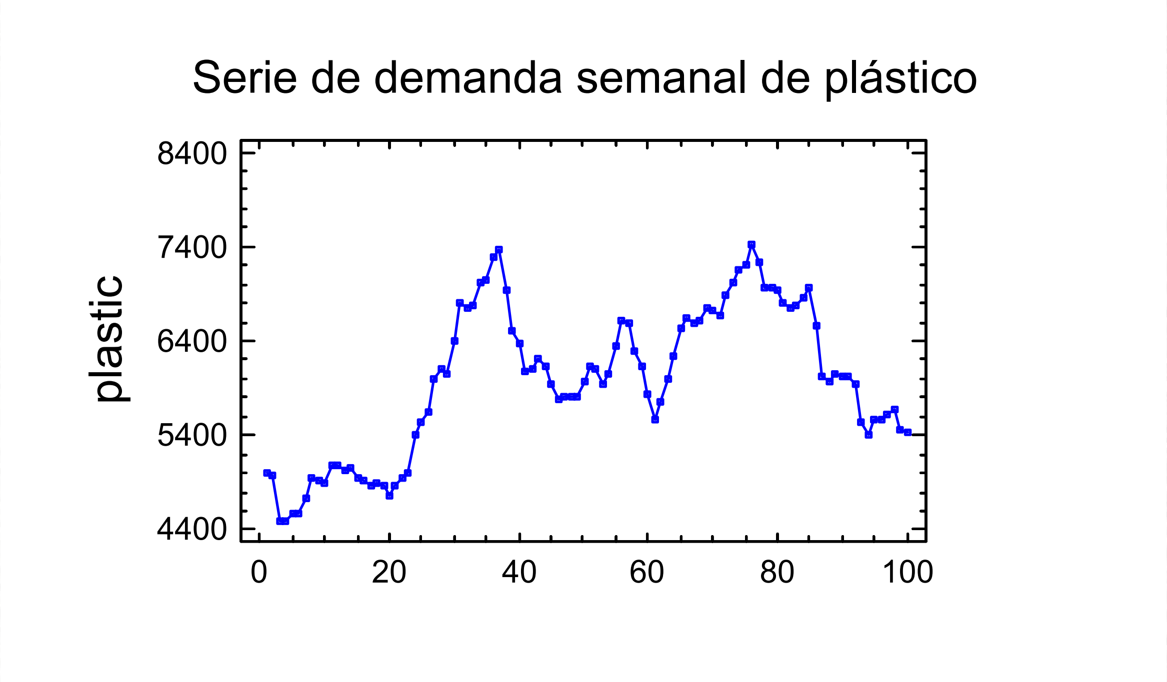
Los valores de la serie oscilan alrededor de un valor constante → *Series estables o estacionarias*



Statgraphics Data

Análisis de series temporales: *Conceptos previos*

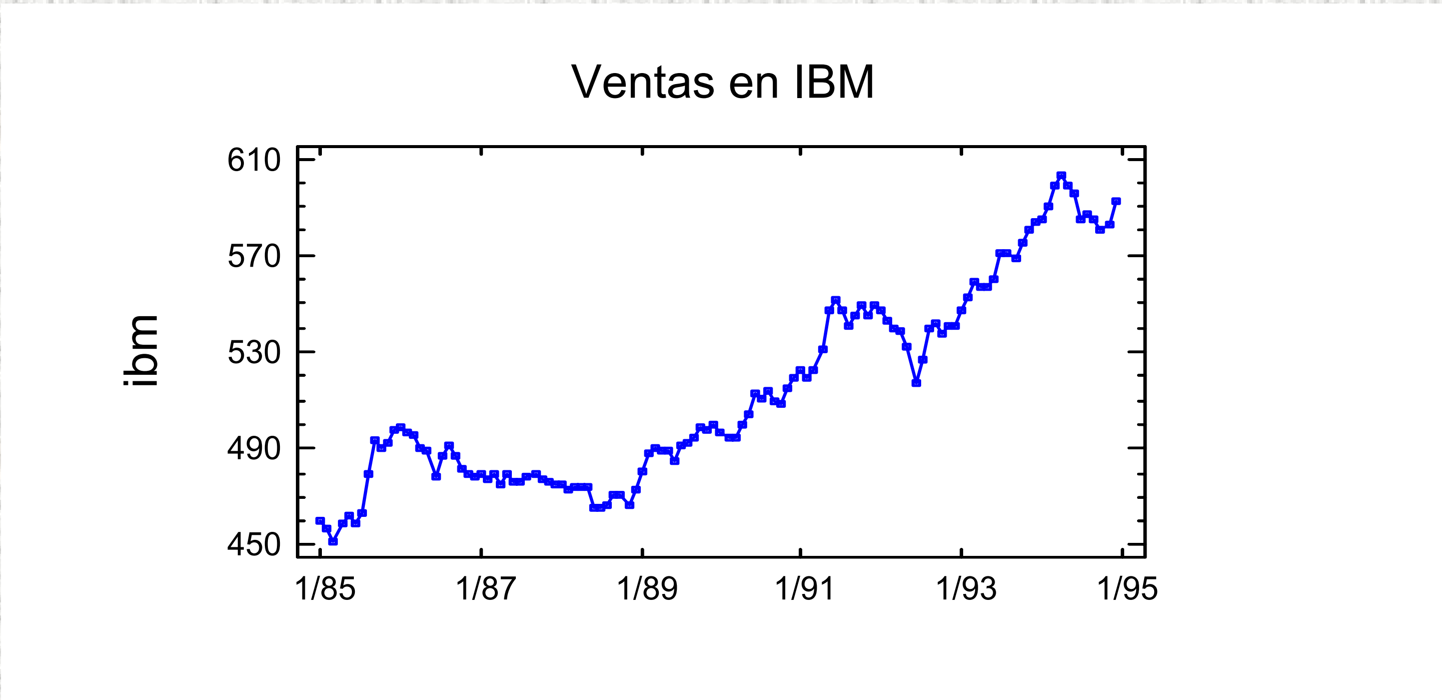
Series no estacionarias:



Statgraphics Data

Análisis de series temporales: *Conceptos previos*

Series no estacionarias:



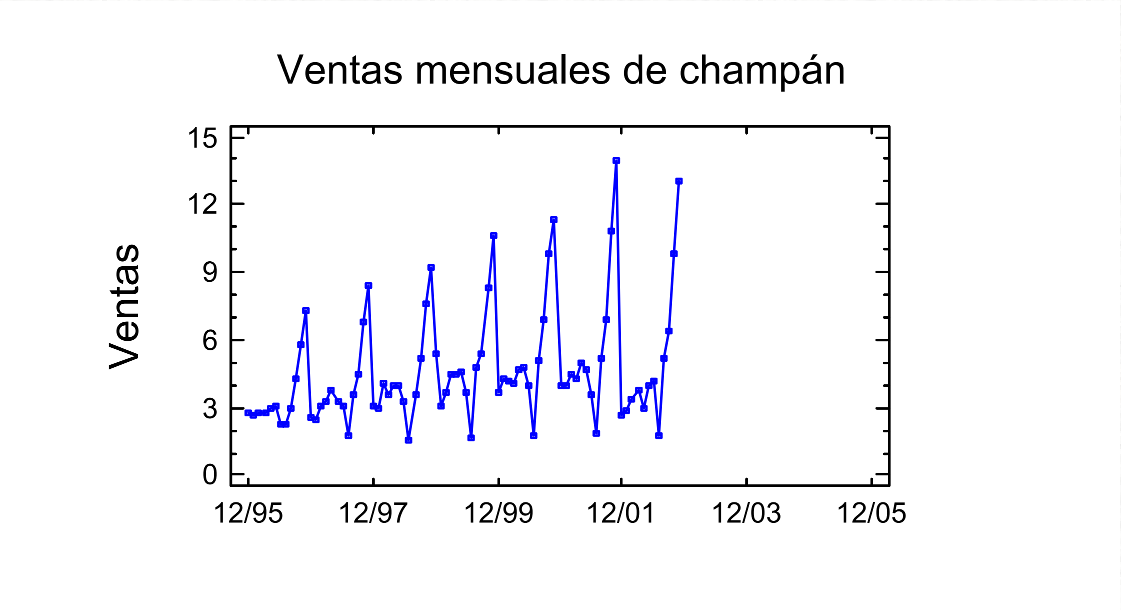
Statgraphics Data

Serie no estable: Con tendencia (positiva)

Análisis de series temporales: *Conceptos previos*

Estacionalidad:

Comportamiento que se repite a lo largo del tiempo



Statgraphics Da

Ciclos:

Se repite el mismo comportamiento cada cierto intervalo
formado por períodos largos de observaciones.

Análisis de series temporales: *Conceptos previos*

Tipos de modelos:

- *Univariantes:*

Representan la evolución de una serie temporal y permiten generar predicciones de su comportamiento futuro

- *De regresión dinámica* o *de función de transferencia:*

Representan la relación de dependencia dinámica entre una serie de interés y un grupo de posibles variables explicativas (también en forma de series)

- *Multivariantes:*

Representan la interdependencia dinámica entre varias series

Análisis univariante de series temporales: *Marco teórico*

Modelos

- El modelo probabilista que va a permitir describir la serie es el proceso estocástico.
- Estructura probabilística de un pr.est.: "*distribución conjunta de las n variables aleatorias*, X_t , $t = 1, ..., n$".
- Determinación práctica: nº grande de observaciones (realizaciones muestrales)

Análisis de series temporales: *Métodos clásicos*

- Son procedimientos descriptivos
- Resultan casos particulares de los casos más generales basados en la teoría de procesos estocásticos

Sin embargo,

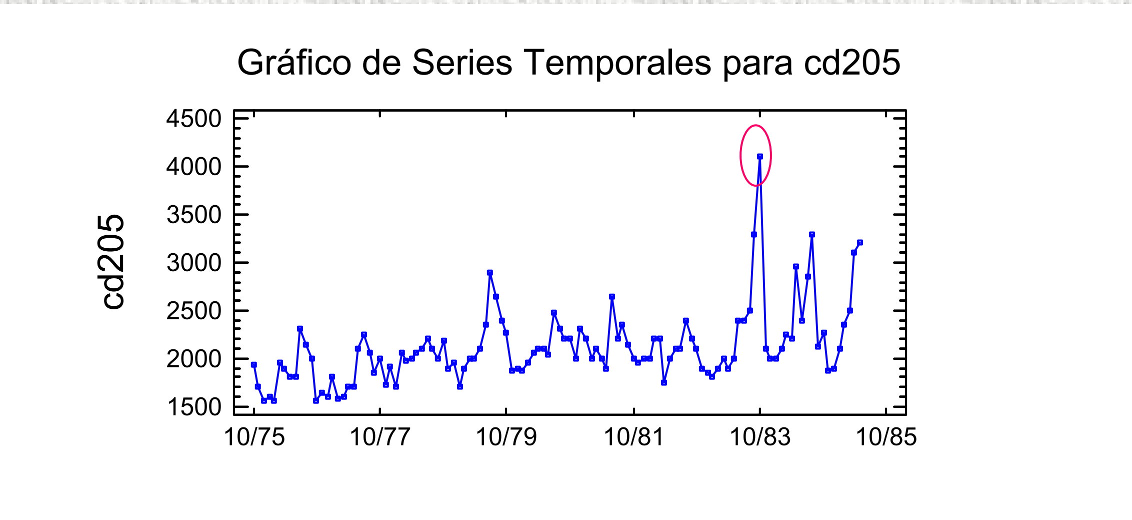
- Los métodos más avanzados se basan en ellos
- Se suelen encontrar disponibles en muchos programas de ordenador de uso frecuente (Statgraphics, SPSS, …)

Surgieron de la idea, extraida del ámbito de la astronomía y de la meteorología, de que toda serie temporal es el resultado de la agregación de cuatro componentes “no observadas” y que pueden estudiarse separadamente.

Análisis de series temporales:
Métodos clásicos

Métodos descriptivos:

Gráfico de la serie → Observación de datos anómalos "*outliers*"



Análisis de series temporales: *Métodos clásicos*

Métodos descriptivos:

Gráfico de la serie $\longrightarrow$ Observación de datos anómalos "*outliers*"

Observación de tendencias

Comportamiento estacional

La serie es estacional si existe un número **s** tal que $x(t) = x(t + k \cdot s)$.

Comportamiento cíclico

La serie mostrará comportamiento cíclico si se observan periodicidades que comprendan periodos fijos de tiempo superiores al periodo estacional "s" considerado. Por ejemplo, si los intervalos de medición son meses, el periodo estacional s = 12 y los ciclos serían conjuntos de observaciones con variaciones similares cada 5 años (en general,periodos superiores a 1 año).

Análisis de series temporales:
Métodos clásicos

Métodos descriptivos:

Gráfico de la serie → Observación de datos anómalos "*outliers*"

Observación de tendencias

Comportamiento estacional

Comportamiento cíclico

Comportamiento aleatorio

Este conjunto de componentes se pueden combinar (de manera multiplicativa, aditiva o mixta) para dar como resultado las oscilaciones de la serie observada. El objetivo es separar cada una y extraerlas de la serie inicial para obtener el modelo que represente los datos.

Análisis de series temporales: *Métodos clásicos*

MODELOS DE DESCOMPOSICIÓN

1. Aditivo: $X(t) = T(t) + E(t) + C(t) + A(t)$
2. Multiplicativo: $X(t) = T(t) \cdot E(t) \cdot C(t) \cdot A(t)$
3. Mixto: $X(t) = T(t) \cdot E(t) \cdot C(t) + A(t)$

$X(t)$ serie observada en instante t
$T(t)$ componente de tendencia
$E(t)$ componente estacional
$C(t)$ componente cíclica
$A(t)$ componente aleatoria (residuo)

$A(t)$ componente aleatoria o ruido blanco con media cero y varianza constante

Análisis de series temporales: *Métodos clásicos*

Ajuste de tendencias:

Mediante modelos de regresión

El más simple es el $T(t) = a + b\, t$

El resto de componentes se obtienen mediante cálculos sencillos de diferencias y cocientes entre valores de la serie separados intervalos de observación o estacionales, si existiera estacionalidad.

Por ejemplo: Se obtienen los coeficientes de variación (CV) para las diferencias (*d*) y cocientes (*c*), con el fin de poder saber si el modelo de descomposición a aplicar es de tipo aditivo o multiplicativo.

Análisis de series temporales: *Métodos clásicos*

Coeficientes de variación:

$$\mathrm{CV(d)} = \frac{\mathrm{Desv.típica(d)}}{\mathrm{Media(d)}} \qquad \mathrm{CV(c)} = \frac{\mathrm{Desv.típica(c)}}{\mathrm{Media(c)}}$$

Una vez calculados se aplica la siguiente regla de decisión:

Si CV (c) > CV (d) se elegirá el modelo aditivo.

Si CV (c) ≤ CV (d) se elegirá el modelo multiplicativo.

Análisis de series temporales: *Métodos clásicos*

Inconvenientes:

Los modelos deterministas, tipo regresión, no permiten que la predicción de un dato futuro se base principalmente en los últimos valores observados de la serie.

Métodos de alisado (suavizado)

Permiten que los últimos datos de la serie tengan más peso en las predicciones que los valores más antiguos

¿Cómo se consigue esto?

Haciendo que los parámetros del modelo de tendencias no sean constantes sino que varíen en el tiempo.

El modelo de alisado simple (Holt, 1956)

Combinación lineal de la última predicción y el último valor Observado, de manera que la predicción del siguiente período, (t + 1), viene dada por,

$$\hat{z}_{t+1} = \theta \hat{z}_t + (1-\theta) z_t$$

Donde $0 < \theta < 1$, es el peso para cada componente en la generación de predicciones

Análisis de series de t.: Métodos clásicos

El modelo de alisado simple (Holt, 1956)

La ecuación anterior también puede escribirse,

$$\hat{z}_{t+1} = \hat{z}_t + (1-\theta)(z_t - \hat{z}_t)$$

La predicción de la siguiente observación a z_t se realiza modificando la última predicción por una fracción (1-θ) de último error de predicción cometido

Valor de θ: Entre 0.1 y 0.9, calculando errores

$$\hat{a}_t = z_t - \hat{z}_t$$

Y tomando el θ que haga menor $\sum \hat{a}_t^2$

Análisis de series de t.: Métodos clásicos

El modelo de alisado simple supone que la serie se ha generado mediante el modelo

$$z_t = \mu_t + a_t$$

Pero si se supone que la media en t y la media en t-1 varía linealmente en el tiempo, con pendiente β_{t-1},

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1}$$

Se tiene el método de alisado doble de Holt

Análisis de series de t.: Métodos clásicos

El modelo de alisado simple (Holt, 1956)

La ecuación anterior también puede escribirse,

$$\hat{z}_{t+1} = \hat{z}_t + (1-\theta)(z_t - \hat{z}_t)$$

La predicción de la siguiente observación a z_t se realiza modificando la última predicción por una fracción (1-θ) de último error de predicción cometido

Valor de θ: Entre 0.1 y 0.9, calculando errores

$$\hat{a}_t = z_t - \hat{z}_t$$

Y tomando el θ que haga menor $\sum \hat{a}_t^2$

Análisis de series temporales:
Métodos clásicos

En general, el suavizado de una serie consiste en

emplear una expresión lineal que transforma la serie $X(t)$ en una serie *suavizada* $Z(t)$: $Z(t) = F(X(t))$, $t = 1,\dots,n$

$$X(t) \longrightarrow \boxed{F} \longrightarrow Z(t)$$

de tal modo que $F(X(t)) = Z(t)$. La función F se denomina Filtro Lineal. El filtro lineal más usado es el *promedio móvil o media móvil.*

Se van calculando medias de un nº fijo de observaciones consecutivas, de manera que cada media varía en el t.

Análisis de series temporales: *Métodos clásicos*

El objetivo es eliminar de la serie las componentes con pauta observable (tendencia, estacionalidad, ciclos).

➢Para una serie mensual con estacionalidad anual (s = 12), la serie suavizada se obtiene,

$$Z(k) = \frac{\tfrac{1}{2} X(k-6) + X(k-5) + \ldots + X(k+5) + \tfrac{1}{2} X(k+6)}{12}, \quad 7 \le k \le n-6$$

➢Para una serie trimestral con estacionalidad anual (s = 4), la serie suavizada está dada por

$$Z(k) = \frac{\tfrac{1}{2} X(k-2) + X(k-1) + X(k) + X(k+1) + \tfrac{1}{2} X(k+2)}{4}, \quad 3 \le k \le n-2$$

Casos especiales de filtrado: (i)

Eliminar <u>Tendencias</u>: por diferencias

Si x_t ($t = 1, 2, ...$) es la serie observada

$y_t = x_t - x_{t-1} = \nabla x_t$ → Diferencia de primer orden

En caso de que la nueva serie siguiera con tendencia:

$z_t = y_t - y_{t-1} = \nabla^2 x_t$ → Diferencia de 2º orden

Casos especiales de filtrado: (ii)

Eliminar estacionalidad: por diferencias estacionales

$Y_t = x_t - x_{t-s} = \nabla_s x_t$ → 1 Diferencia estacional

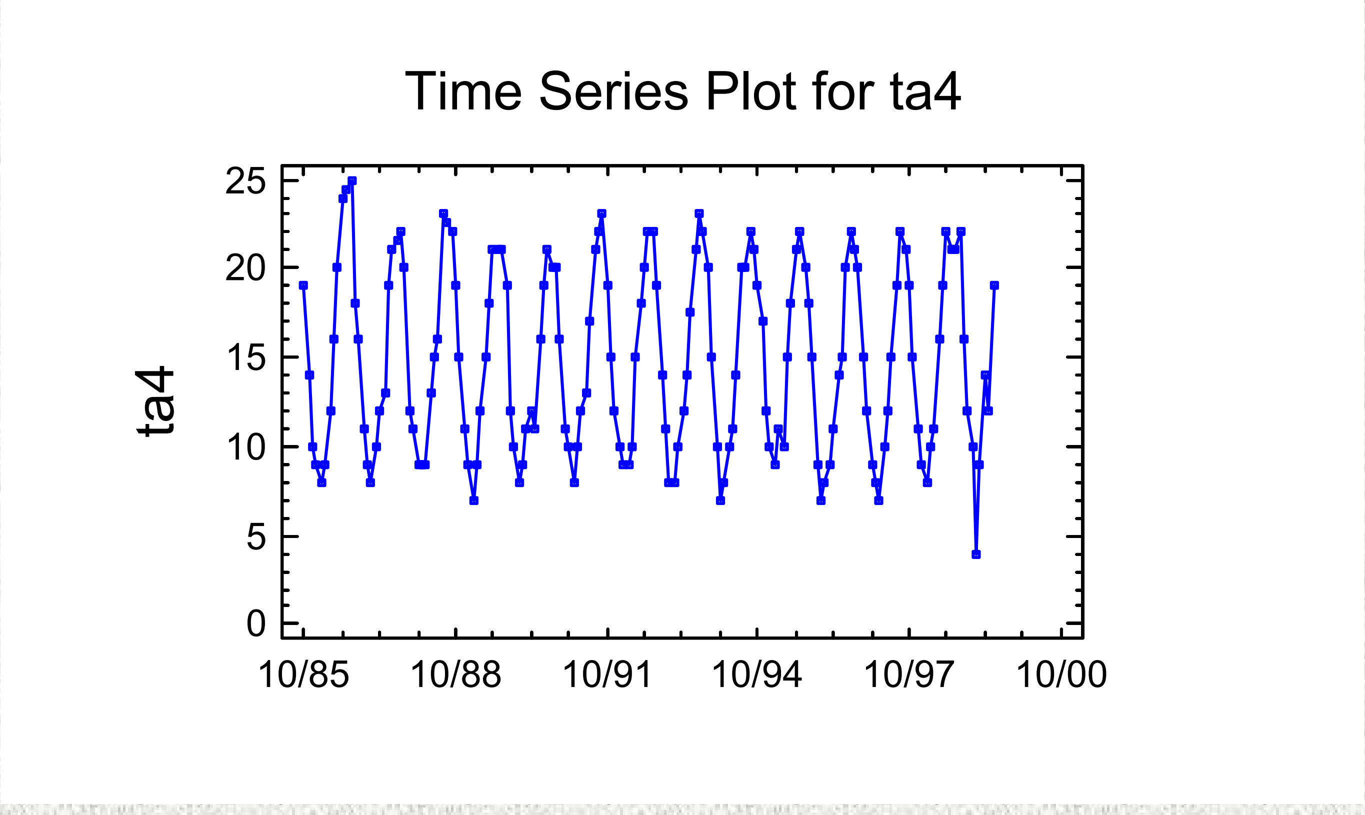
Ejemplo: $s = 12$, si las x_t son mensuales

$s = 7$, si las x_t son diarias

Verificación de tendencias y estacionalidad (variaciones de la media a lo largo del tiempo):

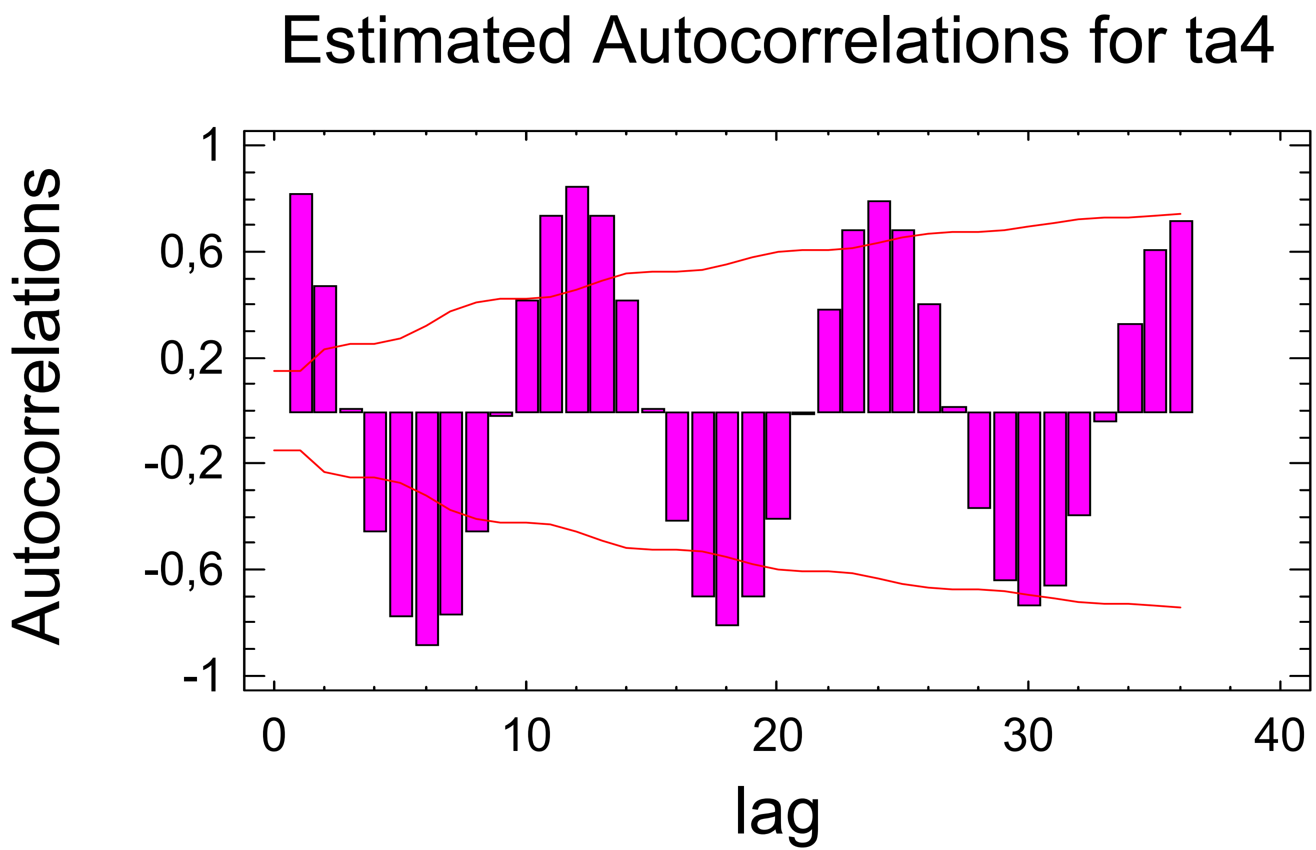
→ Función de autocorrelación o correlograma

Análisis de series temporales:
Métodos clásicos



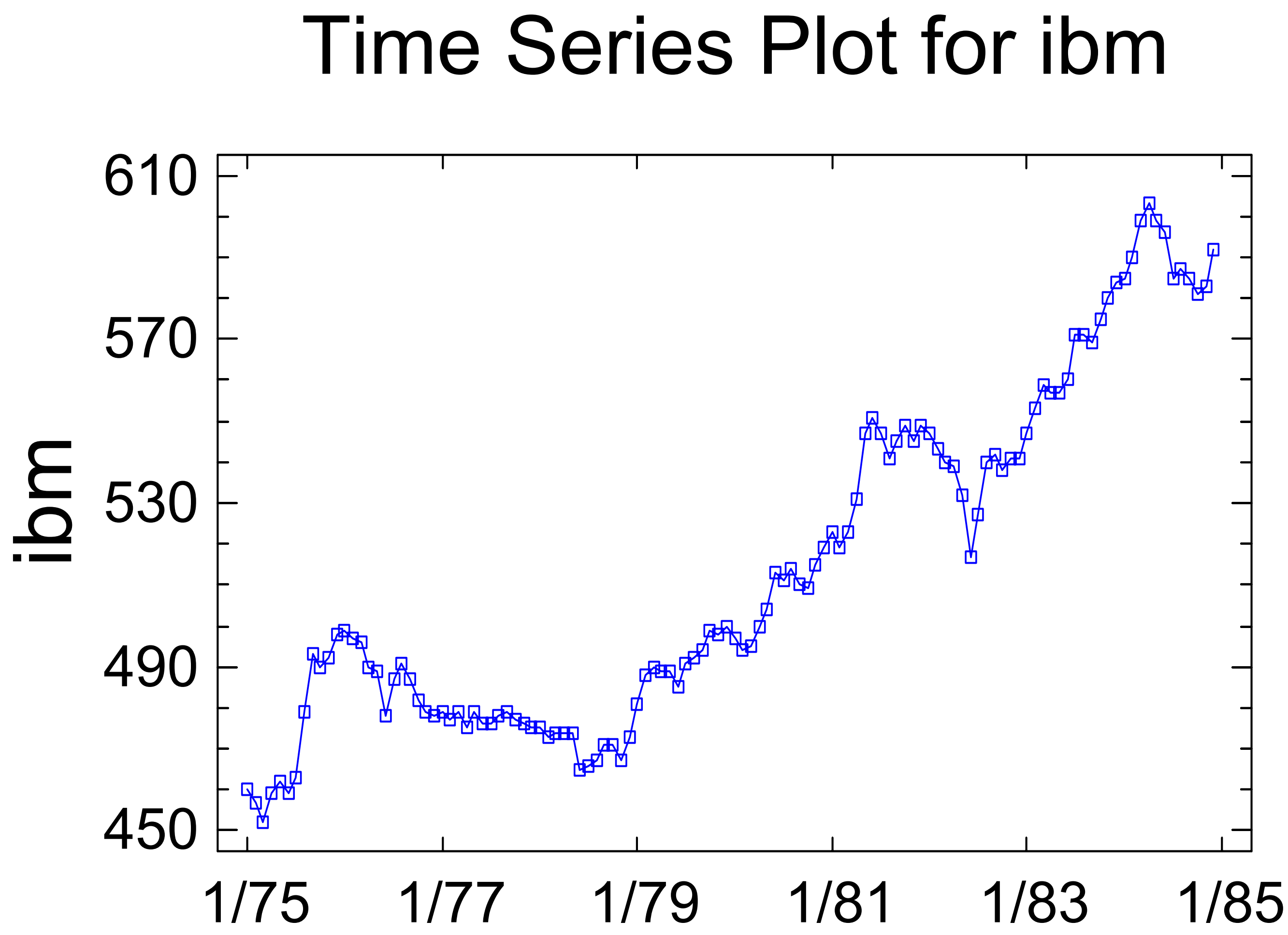
Serie mensual de temperatura del agua

Análisis de series temporales: *Correlograma*



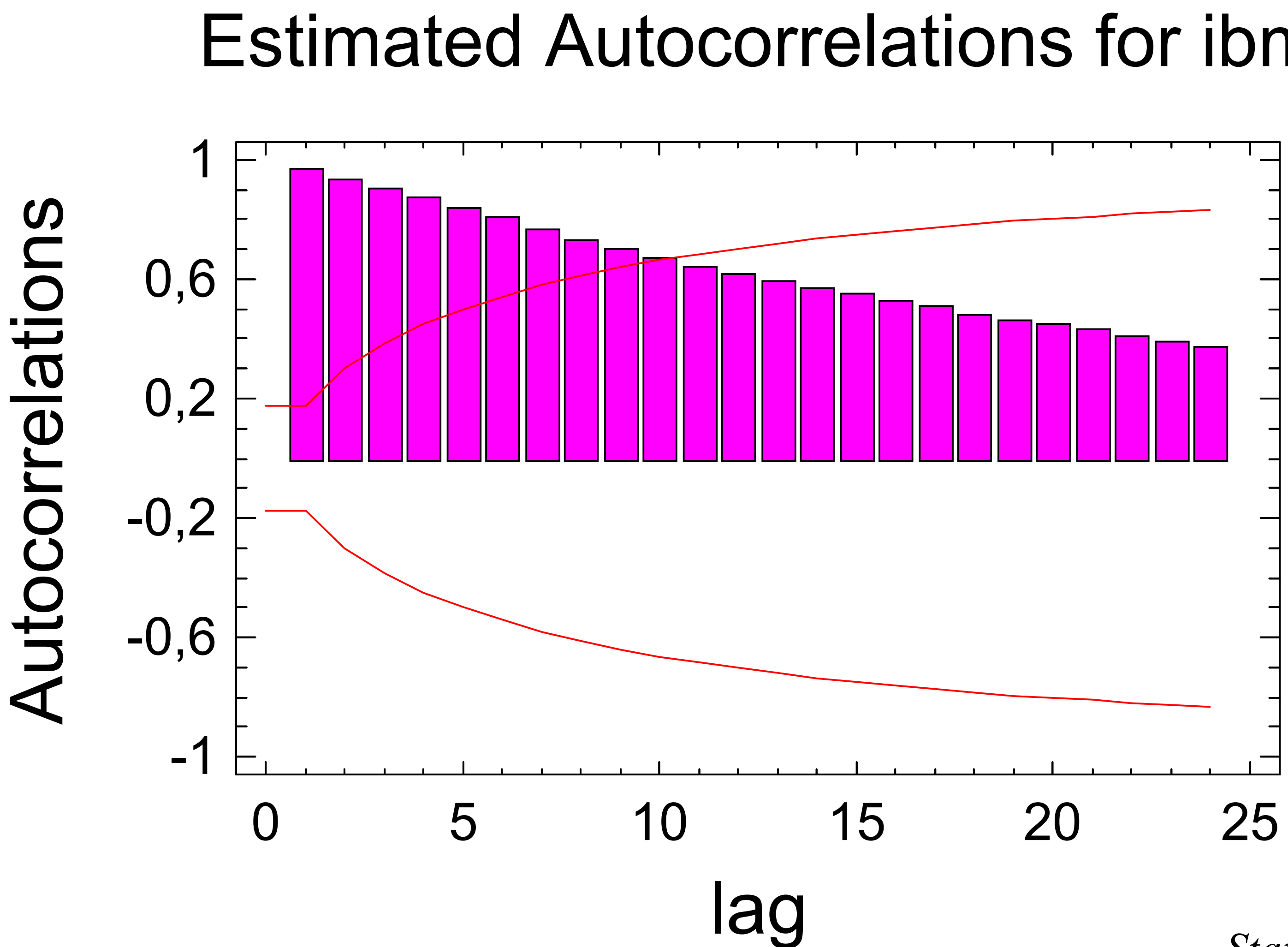
Statgraphics plus 5.1

Función autocorrelación de serie con estacionalidad
S = 12



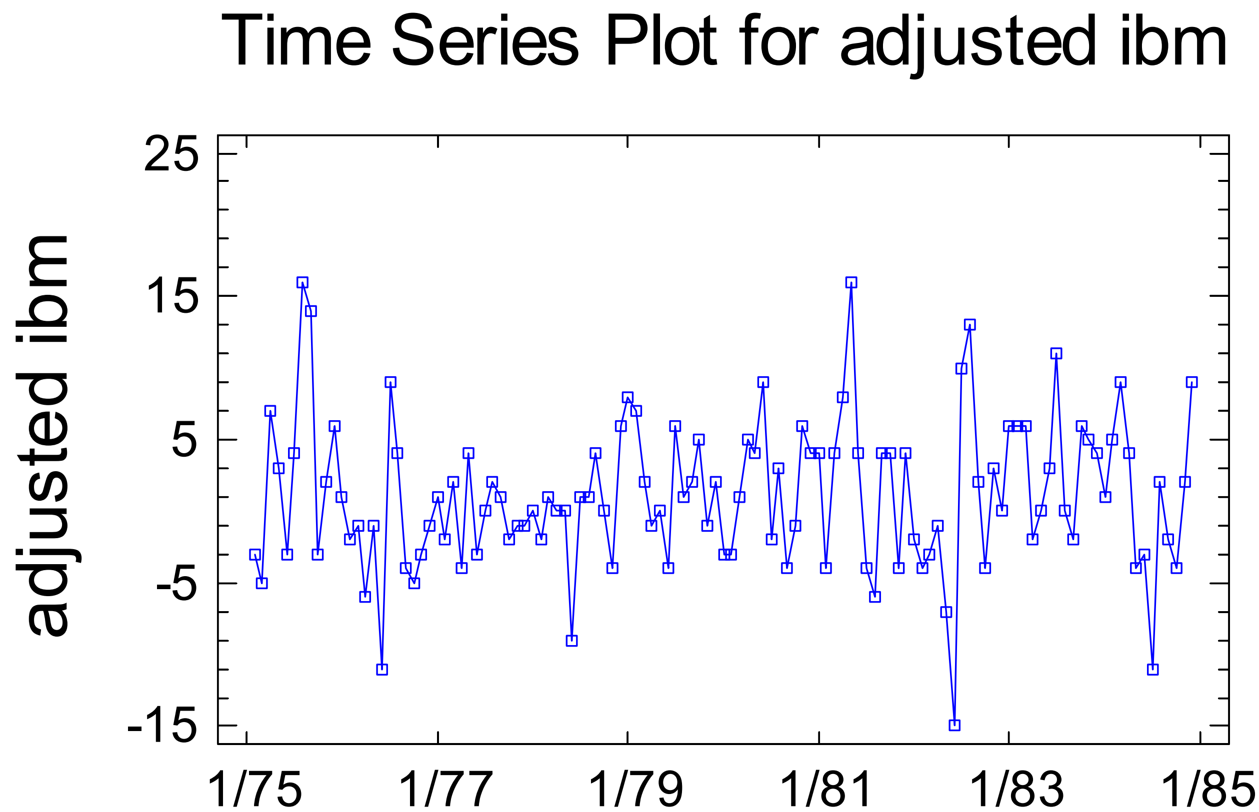
StatgraphicsData

Análisis de series temporales: C*orrelograma*



Statgraphics plus 5.1

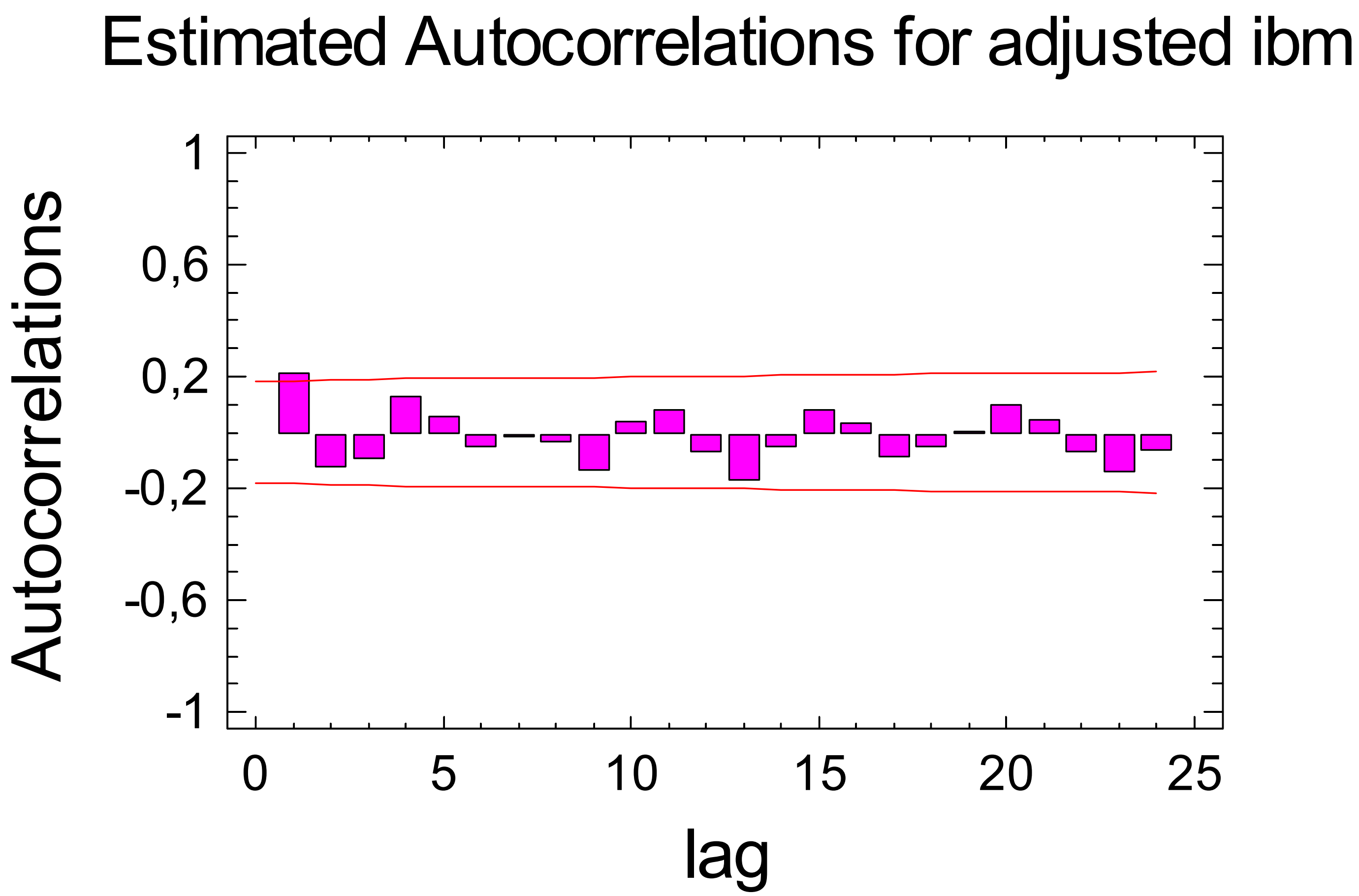
Correlograma típico de una serie con tendencia positiva



Statgraphics plus 5.1

Correlograma de serie una vez eliminada la tendencia

Análisis de series temporales: C*orrelograma*



Statgraphics plus 5.1

Correlograma de la serie sin tendencia

```
Models
------
(A) ARIMA(0,1,1) with constant
(B) Linear trend = 116,712 + 1,07464 t
(C) Simple moving average of 3 terms
(D) Simple exponential smoothing with alpha = 0,9999
(E) Brown's linear exp. smoothing with alpha = 0,5853
```

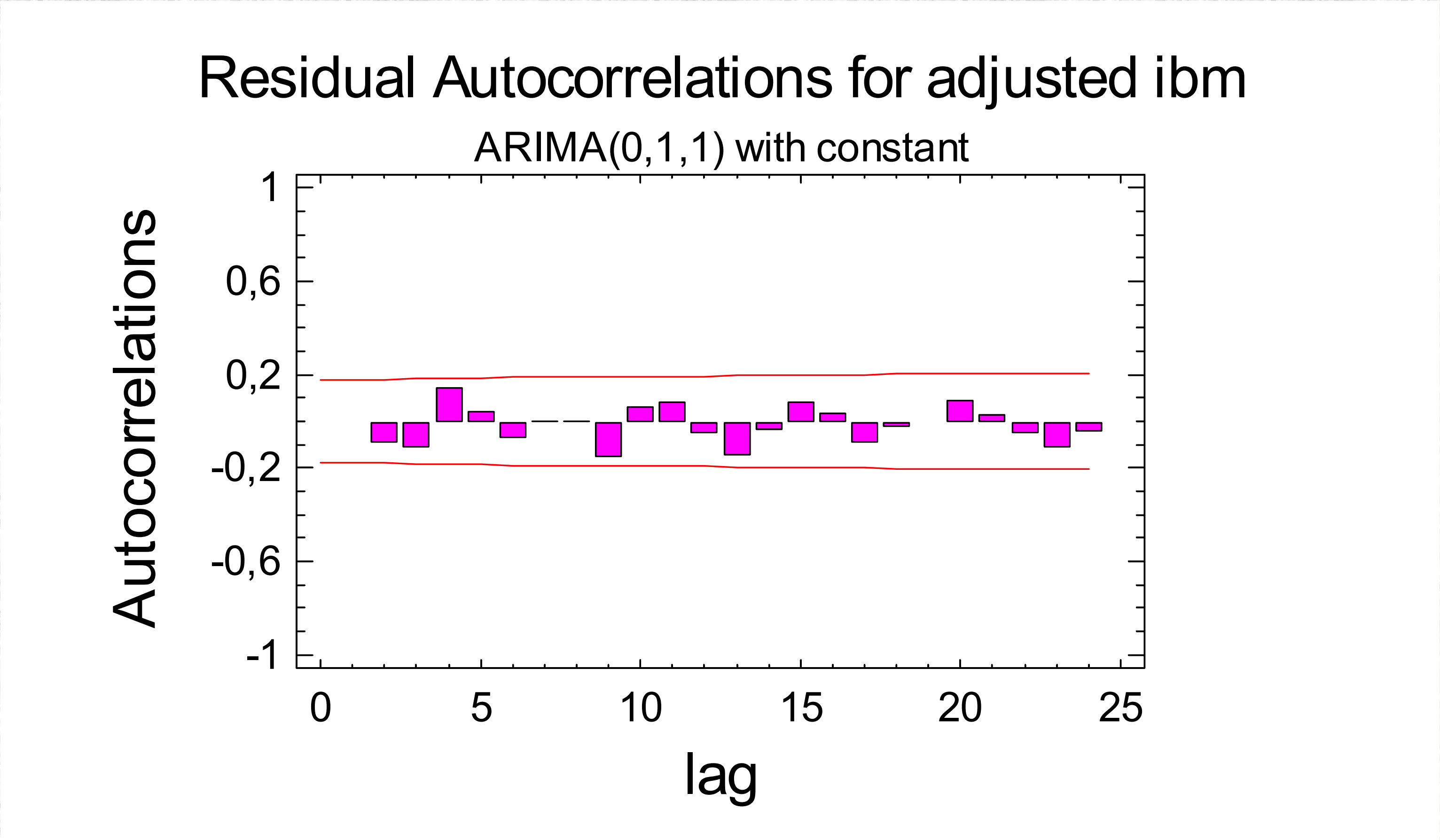
Estimation Period

Model	RMSE	MAE	MAPE	ME	MPE
(A)	5,08904	3,99526	0,776976	0,00552725	-0,00691115
(B)	16,8831	13,9372	2,73899	4,07378E-14	-0,0993993
(C)	7,41671	5,50712	1,05789	2,25926	0,423024
(D)	5,32803	4,05009	0,784242	1,10011	0,204948
(E)	5,86032	4,54833	0,88362	0,0448507	0,00883051

Model	RMSE	RUNS	RUNM	AUTO	MEAN	VAR
(A)	5,08904	OK	OK	OK	OK	OK
(B)	16,8831	***	***	***	OK	*
(C)	7,41671	***	***	***	OK	OK
(D)	5,32803	*	OK	OK	OK	OK
(E)	5,86032	*	OK	***	OK	OK

```
Key:
RMSE = Root Mean Squared Error
RUNS = Test for excessive runs up and down
RUNM = Test for excessive runs above and below median
AUTO = Box-Pierce test for excessive autocorrelation
MEAN = Test for difference in mean 1st half to 2nd half
VAR = Test for difference in variance 1st half to 2nd half
OK = not significant (p >= 0.05)
* = marginally significant (0.01 < p <= 0.05)
** = significant (0.001 < p <= 0.01)
*** = highly significant (p <= 0.001)
```

Análisis de series: Modelización clásica y métodos avanzados (modelos ARIMA): Ejemplo de ajuste con Statgraphics, correlograma de residuos



Correlograma de residuos resultantes de ajustar a la serie ibm el modelo: $x_t = x_{t-1} - 0{,}027\, a_{t-1} + a_t$

REFERENCIAS

Software:
Statgraphics plus 5.1

•Chatfield, C., 1989. The Analysis of Time Series. Chapman and Hall, Londres.

•González García, C. (1989). *Análisis Estadístico Comparativo de Series Cronológicas de Parámetros de Calidad del Agua: Valoración de diferentes modelos de Predicción.* Tesis doctoral (sin publicar). ETSI Montes. Universidad Politécnica de Madrid.

•Martínez Falero, E. 1995. Quantitative Techniques in Landscape Planning. Lewis Publishers, New York.

•Millard, S.P.; Neerchal, N.K. (2001). *Environmental Statistics with S-PLUS.* CRC Press. Florida

•Martín Fernández, S., Ayuga Téllez, E., González García, C., Martín Fernández, A. (2001) *Guía completa de Statgraphics. Desde MS-DOS a Statgraphics Plus.* Díaz de Santos, Madrid.

•Peña Sánchez de Rivera, D. (1994, 2001). Fundamentos de Estadística. Alianza Editorial. Madrid

•Peña Sánchez de Rivera, D. 2005. Análisis de Series Temporales. Alianza Editorial. Madrid.

•Puerto, J; Rivera, M.P. (2001). *Análisis descriptivo de series temporales aplicadas al precio medio de la vivienda en España.* Management Mathematics for European Schools. Proyecto Sócrates de la UE, 94342 - CP - 1 - 2001 - DE - COMENIUS - C21.